(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	笹 谷 晃 平
論文題目	Some inequalities between Ahlfors regular conformal dimension and spectral dimensions for resistance forms (抵抗形式における Ahlfors 正則共形次元とスペクトル次元との間の不等式)		

(論文内容の要旨)

学位審査申請者の笹谷晃平氏は大学院在学中を通して、Ahlfors正則共形次元 (以下ARC次元) と呼ばれる距離空間のある種の幾何的次元が、スペクトル次元と呼ばれる空間のポテンシャル論・確率論的特性量やその類似物とどのように関わっているかを明らかにすることを目指す研究を行ってきた。以下、氏の研究の背景を説明する。

距離空間(X,d)に対し、その ARC 次元 ARCdim(X,d)は

「(X,d)と擬対称かつ Ahlfors 正則な距離空間の Hausdorff 次元全体が成す集合の下限」

として定義される。ここで距離空間(Y,e)が(X,d)と擬対称であるとは X から Y への全単射 f と非負実数全体のなす区間 I の同相写像 T が存在して X の任意の 3 点 x,y,z で d(x,y)>0 かつ d(x,z)>0 なるものに対し

e(f(x),f(y))/e(f(x),f(z))<T(d(x,y)/d(x,z))

となることを言い、Ahlfors 正則であるとは正の実数 a が存在して(Y,e)の直径以下の任意の正実数 r に対し半径 r の任意の距離球の a 次元 Hausdorff 測度が r^a と一様に比較可能であることを言う。ARC次元は双曲群の性質をその無限遠境界の幾何的性質を通して理解することを目指す過程で見出された概念であり、幾何群論において重要である他、近年では木上(2020,2022)の研究によりフラクタル上の Sobolev 型関数空間や非線型エネルギー形式の理論における重要性も明らかになってきている。

笹谷氏は、木上(2020)による距離空間の分割の理論と ARC 次元への応用を背景として一連の研究を行ってきた。木上(2020)は自己相似集合の自然な細胞分割構造を一般化する形で、コンパクト距離空間(X,d)の「基本設定を満たす分割」(partition satisfying the basic framework)の概念を導入し、応用として分割に対応するグラフ上の離散 p-形式を用いた ARCdim(X,d)の特徴付けを与えた。また関連する結果として、分割に対応する上下の p-スペクトル次元 d^S_p,D^S_p を同じ離散 p-形式を通して定義し、各正実数 p に対し

(Kig)「d^S_p,D^S_p は ARCdim(X,d)と p の間の値である」

という不等式が成り立つことを示した。p=2 に対する d^S_p,D^S_p は, 連続な熱核 p(t,x,y)を有する熱半群に対して 2log p(t,x,x)/(-log t)の t が 0 に近づくときの極限値 (が存在し点 x に依らない場合に、この極限値) として定義されるスペクトル次元 d_s の「基本設定を満たす分割」の枠組みでのポテンシャル論的類似物であり、典型的な自己相似集合において標準的な分割および熱半群を考えた場合には d^S_p=D^S_p=d_s であることが確認できる。しかし一般の空間においては、d^S_p,D^S_p と d_s が一致するか、一致しない場合に d^S_p,D^S_p を d_s で置き換えても上記の不等式(Kig)と同様の関係が成り立つかは明らかではない。また木上(2020)ではコンパクト距離空間(X,d)が「基本設定を満たす分割」を持つとの仮定の下に理論を展開しているが、どのような距離空間がこの仮定を満たすかについては論じられていない。

笹谷氏は以上の点を明らかにすべく研究を行い、本博士学位論文において、集合 X 上の正則な抵抗形式、すなわち 1 点集合の容量が各コンパクト集合上で一様に正であ

るような内部消滅のない正則対称 Dirichlet 形式(E,F)の枠組みで次の結果を得た。

Theorem 1.9. (E,F)の下での有効抵抗距離 R （(E,F)に関する各 2 点間の有効抵抗の値を X 上の 2 変数関数とみなしたもので、抵抗形式に対してはこれは X 上の距離関数になる）は完備かつ一様完全性「$0<c<1$ が存在して、X と一致しない半径 r の任意の距離球はその中心から距離 cr 以上の点を含む」を満たし、さらに Dirichlet 形式(E,F)の参照測度 M は R に関する 2 倍条件「半径 s,2s の同心球の測度比が一様に有界」を満たすとする。このとき
2log(p(s/t,x,x)/p(s,x,x))/(log t) の X の点 x と(X,R)の直径以下の正実数 s に渡る上限
の t を無限大にするときの極限値 D_s は存在し区間[ARCdim(X,R),2)に属する。

Theorem 1.11. Theorem 1.9 の仮定を満たす連続的なフラクタルとその上の局所的な（すなわち、対応する確率過程の標本路が連続であるような）正則抵抗形式の具体例で、スペクトル次元 d_s が定義され不等式 $d_s<\mathrm{ARCdim}(X,R)<2$ を満たすものが存在する。

Theorem 1.9 の証明の中核をなすのは次の Theorem 1.10 の証明である。

Theorem 1.10. (X,R)の「基本設定を満たす分割」を任意に取り、D^S_2 をこの分割に関する上 2-スペクトル次元とする。このとき D_s は D^S_2 以上である。さらに正則抵抗形式(E,F)が局所的ならば、(E,F)の参照測度 M が R に関する 2 倍条件を満たす(X,R)上の Borel 測度全体に渡って動くときの D_s の値の下限は上 2-スペクトル次元 D^S_2 に一致する。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

木上(2020)において得られていた不等式(Kig)は「基本設定を満たす分割」の枠組みで空間の分割構造だけに基づいて定義される幾何的特性量である上下の p-スペクトル次元 d^S_p,D^S_p に関するものであり、p=2 という最も典型的な場合に限ってもその確率論的意味は不明であった。本論文の Theorem 1.9 は、p=2 に対する不等式(Kig)の正則抵抗形式の枠組みにおける確率論的対応物を見出したものと言える。この結果の核心はスペクトル次元の変種である極限値 D_s の定義を与えたことにあるが、このような量がフラクタル上の熱核評価の研究の文脈でこれまでに考察されたことはなく、この定義に独力で辿り着いた笹谷氏の研究は一定の独自性を有するものと評価できる。

Theorem 1.9 の証明の中核をなす Theorem 1.10 も、(E,F)が局所的な場合にはスペクトル次元の変種 D_s を通して上 2-スペクトル次元 D^S_2 の確率論的特徴付けを与えており、その意味で Theorem 1.9 の証明の途中段階というだけに止まらない意義ある結果と言える。また Theorem 1.10 を経由して Theorem 1.9 の証明に至るためには、(X,R)の「基本設定を満たす分割」が少なくとも 1 つ存在する、という事実が必要であるが、この事実も Colloq. Math.にオンライン出版済みの笹谷氏による論文の結果から従う事実であり、大学院博士後期課程を通しての氏の研究結果が有機的に結びついて Theorem 1.9 に帰結していることが窺える。

さらに Theorem 1.11 は、(Kig)の確率論的対応物を一般の正則抵抗形式の枠組みで定式化するためには通常のスペクトル次元 d_s では不十分であることを示す具体例を提示
しており、この結果により本論文におけるスペクトル次元の変種 D_s の導入は必要なものとして正当化される。この具体例の構成には Sierpinski carpet という無限分岐的なフラクタルに対する解析の手法を用いる必要があり，連続的なフラクタルに対してこれを達成できたことは相応の技術的困難を克服した高度に非自明な結果と言える。

本論文の内容に対する以上の評価に基づき、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和 5 年 1 月 25 日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降