原田予想とIsoclinism

Masao Kiyota (Tokyo Medical and Dental University)
清田正夫 (東京医科歯科大学名誉教授)

1 原田予想

G を有限群, $\mathrm{Irr}(G)$ を G の複素既約指標全体の集合, $\mathrm{Cl}(G)$ を G の共役類全体の集合とする。本稿では次の予想（原田予想, 原田-千吉良予想）を考察する。

Conjecture 1.1 (Conjecture (H)[2]).

$$h(G) = \frac{\prod_{C\in \mathrm{Cl}(G)} |C|}{\prod_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)}$$

は整数である。

Conjecture 1.2 (Conjecture (HC)).

$$h'(G) = \frac{h(G)}{|G'|}$$

は整数である。

ただし, G' は G の commutator subgroup,

$$G' = \langle [x,y] \,|\, x,y \in G\rangle$$

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy$$

である。

Example 1.3. (1) $G = S_3$ のとき。$\mathrm{Irr}(G) = \{1_1, 1_2, 2\}, \mathrm{Cl}(G) = \{1, 2, 3\}$ より,

$$h(G) = 3, h'(G) = 1$$

(2) $G = \hat{S}_3 =< x, y \,|\, x^3 = y^4 = 1, y^{-1}xy = x^{-1} >\cong Z_3 \rtimes Z_4$ のとき。$\mathrm{Irr}(G) = \{1_1, 1_2, 1_3, 1_4, 2_1, 2_2\}$, $\mathrm{Cl}(G) = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ より

$$h(G) = 9, h'(G) = 3$$

2 Isoclinism

ここでは G は必ずしも有限とは限らない群とする。$Z(G)$ は G の center, G' は G の commutator subgroup である。

$$f_G : G/Z(G) \times G/Z(G) \to G'$$

$$(xZ(G), yZ(G)) \mapsto [x, y]$$

を commutator map とする。$z \in Z(G) \Longrightarrow [xz, y] = [x, y] = [x, yz]$ が成り立つことに注意する。

Definition 2.1 ([1]). *G が群 H に isoclinic $(G \sim H)$ $\Longleftrightarrow$*

(1) $\exists \alpha : G/Z(G) \to H/Z(H)$ *: isomorphism*
(2) $\exists \beta : G' \to H'$ *: isomorphism*
(3) *α and β are compatible with the commutator map,*

$$\beta \circ f_G = f_H \circ (\alpha \times \alpha)$$

群の isoclinism について, いくつかの例と知られている事実を述べる。

Example 2.2. *A : abelian group* $\Longrightarrow 1 \sim A$, $G \sim G \times A$

Example 2.3. $S_3 \sim Z_3 \rtimes Z_4$

Example 2.4. $D_8 \sim Q_8$ *and* $D_{2^n} \sim Q_{2^n} \sim SD_{2^n}$ $(n \geq 4)$

Fact 2.5. *For $H \leq G$,* $\;G \sim H \Longleftrightarrow G = HZ(G)$

Fact 2.6. *For $N \lhd G$,* $\;G \sim G/N \Longleftrightarrow N \cap G' = 1$

Fact 2.7. *For any G,* $\;\exists H$ *s.t.* $G \sim H$ *and* $Z(H) \leq H'$

このような H は *stem* と呼ばれる。G が有限群ならば $|H| \leq |G|$ である。

以下, G は有限群とする。

$$d_i(G) = |\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \chi(1) = i\}|$$

を degree が i の既約指標の個数とする。

Fact 2.8.

$$G \sim H \Longrightarrow \frac{d_i(G)}{|G|} = \frac{d_i(H)}{|H|}$$

共役類についても同様のことが成り立つ。

3 主定理

Conjecture (H) における数 $h(G)$ と isoclinism について次が成り立つ。

Lemma 3.1.

$$G \sim H \Longrightarrow h(G)^{|H|} = h(H)^{|G|}$$

これより次の定理を得る。

Theorem 3.2. *If $G \sim H$ and (H) holds for H, then (H) holds for G.*

Proof. Suppose that $G \sim H$ and (H) holds for H. Since $h(H) \in \mathbf{Z}$, it follows from Lemma that $h(G)^{|H|} \in \mathbf{Z}$. Then, $h(G)$ is an algebraic integer. On the other side, $h(G)$ is a rational number by definition. So, $h(G) \in \mathbf{Z}$.

□

Corollary 3.3. *If (H) holds for any stem groups, then (H) holds for any finite groups.*

Corollary 3.4. *Let G be a minimal counter example for (H), then the followings hold.*

(1) $U < G$, then $UZ(G) < G$.
In particular, if M is a maximal subgroup of G, then $Z(G) \leq M$.

(2) $1 \neq N \lhd G$, then $N \cap G' \neq 1$.
In particular, $soc(G) \leq G'$.

次に, Conjecture (HC) について考察する。$b(G) = |Z(G) : Z(G) \cap G'|$ とおき, branch factor of G と呼ぶ。

Fact 3.5. *(1) $G \sim H$, H is stem $\Longrightarrow |G| = |H| b(G)$*
(2) H is stem $\Longleftrightarrow b(H) = 1$

次は branch factor $b(G)$ を考慮に入れた Conjecture である。

Conjecture 3.6 (Conjecture (HC)*)**.**

$$h^*(G) = \frac{h(G)}{|G'|^{b(G)}}$$

is an integer ??

明らかに (HC)* $\Longrightarrow$ (HC) が成り立つが, 二つの予想は同値であることがわかる。

Lemma 3.7.

$$G \sim H \Longrightarrow h^*(G)^{|H|} = h^*(H)^{|G|}$$

Theorem 3.8. *If $G \sim H$ and (HC)* holds for H, then (HC)* holds for G.*

Corollary 3.9. *If (HC) holds for any stem groups, then (HC)* holds for any finite groups.*

よって (HC)* $\Longleftrightarrow$ (HC) となる。

4　関連する話題と問題

共役類の大きさの積 $\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C|$ については, 次が成り立つ。

Proposition 4.1. *(1)* $|G/Z(G)|$ *divides* $\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C|$
(2) $|G'|$ *divides* $\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C|$

isoclinism を用いることにより次が得られる。

Proposition 4.2. *(1)* $|G/Z(G)|^{b(G)}$ *divides* $\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C|$
(2) $|G'|^{b(G)}$ *divides* $\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C|$

これらの Proposition での等号条件については次がわかる。

Proposition 4.3. *(1)* $|G/Z(G)|^{b(G)}=\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C| \Longleftrightarrow G$ *is abelian or* $G\sim S_3$
(2) $|G'|^{b(G)}=\prod_{C\in\mathrm{Cl}(G)}|C| \Longleftrightarrow G$ *is abelian*

Conjecture (H) について 2 種類の変形 : block version (HB), modular version (HM) がある ([3], [4])。最後にこれらの予想と, 関連する問題を述べる。p を素数とし, B を G の p-block とする。IBr(G) を G の既約 Brauer 指標の全体, $\mathrm{Cl}_{p'}(G)$ を p-regular 共役類の集合とする。p-block についても同様の記号を用いる。

Conjecture 4.4 (Conjecture (HB))**.**

$$h(B)=\frac{\prod_{C\in\mathrm{Cl}(B)}|C|}{\prod_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)}\chi(1)}$$

is a p-local integer ??

Problem 4.5. *Find the equivalence relation* $\approx$ *between blocks, for which* $A\approx B$ *and (HB) holds for* B *imply that (HB) holds for* A*.*

Conjecture 4.6 (Conjecture (HM))**.**

$$hm(G)=\frac{\prod_{C\in\mathrm{Cl}_{p'}(G)}|C|}{\prod_{\varphi\in\mathrm{IBr}(G)}\varphi(1)}$$

is a p-local integer ??

Problem 4.7. *Find the equivalence relation* $\sim_p$ *between groups, for which* $G\sim_p H$ *and (HM) holds for* H *imply that (HM) holds for* G*.*

参考文献

[1] P. Hall, The classification of prime-power groups, J. Reine Angew. Math. vol.182, 1940 ,130-141.

[2] K. Harada, Revisiting character theory of finite groups, Bulletin of the Inst. Math. Academia Sinica (New Series) 13 (2018), 383-395.

[3] A. Hida, M. Kiyota, Character degrees and class lengths in p-blocks of some finite groups, 数理解析研究所講究録 2134 (2019), 18-24.

[4] M. Kiyota, 原田予想 II とそのブロック分割，数理解析研究所講究録 2061 (2018), 56-60.