ブロック・イデアルのソース多元環とコホモロジー環の移送写像

佐々木 洋城
Sasaki, Hiroki
北海道大学 理学研究院
Hokkaido University, Faculty of Science

はじめに

筆者は block イデアルのコホモロジー環について勉強してきましたが，この講演では，改めて定義を振り返り，いくつかの課題を提出したいと思います.

1 対称多元環

k を体とする．初めに，記号を定める．A, B を k 上有限次元多元環とする.

- 左 A-加群 L, M に対して ${}_A(L, M) = \mathrm{Hom}_A(L, M)$.
- 右 A-加群 L, M に対して $(L, M)_A = \mathrm{Hom}_A(L, M)$.
- (A, B)-両側加群 L, M に対して ${}_A(L, M)_B = \mathrm{Hom}_{(A,B)}(L, M)$
- 左 A-加群（右 A-加群，(A, B)-両側加群）L に対して $L^* = \mathrm{Hom}_k(L, k)$.

A, B, C を k 上有限次元対称多元環とする．以下では，これらの多元環上の加群はすべて k 上有限次元である.

(A, B)-両側加群 X について次を仮定する．すなわち

(仮定)　　X は左 A-加群として射影的であり，右 B-加群として射影的である

このとき

(1) (B, A)-両側加群として ${}_A(X, A) \simeq X^* \simeq (X, B)_B$
(2) ${}_A L_C$, ${}_B M_C$ について加群の同型

$$\varphi_{L,M} : {}_A(X \otimes_B M, L)_C \simeq {}_B(M, X^* \otimes_A L)_C$$

が得られる．特に

$$\varphi_{A,X^*} : {}_A(X \otimes_B X^*, A)_A \simeq {}_B(X^*, X^*)_A$$

において ${}_X\varepsilon : X \otimes_B X^* \to A$ を Id_{X^*} に対応するものとする.

$${}_X\varepsilon \leftrightarrow \mathrm{Id}_{X^*}$$

また

$$\varphi_{B,X} : {}_A(X, X)_B \simeq {}_B(B, X^* \otimes_A X)_B$$

という同型も得られるが，Id_X に対応する $\eta_X : B \to X^* \otimes_A X$ を考える．

$$\mathrm{Id}_X \leftrightarrow \eta_X$$

上述の同型 $\varphi_{L,M}$, ${\varphi_{L,M}}^{-1}$ は ${}_X\varepsilon$, η_X を用いて記述される．すなわち

$$\begin{tikzcd} X\otimes_B M \arrow[d, "\alpha"'] \\ L \end{tikzcd} \quad \text{と} \quad \begin{tikzcd} M \arrow[d, "\eta_X\otimes\mathrm{Id}_M"'] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi_{L,M}(\alpha)"] \\ X^*\otimes_A X\otimes_B M \arrow[d, "\mathrm{Id}_{X^*}\otimes\alpha"'] \\ X^*\otimes_A L \end{tikzcd} \quad \text{が対応し，}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\beta"'] \\ X^*\otimes_A L \end{tikzcd} \quad \text{と} \quad \begin{tikzcd} X\otimes_B M \arrow[d, "\mathrm{Id}_X\otimes\beta"'] \arrow[dd, bend left=60, "{\varphi_{L,M}}^{-1}(\beta)"] \\ X\otimes_B X^*\otimes_A L \arrow[d, "{}_X\varepsilon\otimes\mathrm{Id}_L"'] \\ L \end{tikzcd} \quad \text{が対応する．}$$

(3) trace 写像が次のように定義される．

- (A, C)-両側加群 L, L' に対して trace 写像

$$^X\mathrm{Tr} : {}_B(X^* \otimes_A L, X^* \otimes_A L')_C \to {}_A(L, L')_C$$

は

$$\begin{tikzcd} X^*\otimes_A L \arrow[d, "\gamma"'] \\ X^*\otimes_A L' \end{tikzcd} \quad \text{を} \quad \begin{tikzcd} L \arrow[d, "{}_X\eta\otimes\mathrm{Id}_L"] \\ X\otimes_B X^*\otimes_A L \arrow[d, "\mathrm{Id}_X\otimes\gamma"] \\ X\otimes_B X^*\otimes_A L' \arrow[d, "{}_X\varepsilon\otimes\mathrm{Id}_{L'}"] \\ L' \end{tikzcd} \quad \text{に対応させる．}$$

- (C, B)-両側加群 M, M' に対して trace 写像

$$\mathrm{Tr}^X : {}_C(M \otimes_B X^*, M' \otimes_B X^*)_B \to {}_C(M, M')_B$$

は

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} M\otimes_B X^* \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ M'\otimes_B X^* \end{array} & \text{を} & \begin{array}{c} M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_M \otimes \eta_X} \\ M\otimes_B X^*\otimes_B X \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma\otimes \mathrm{Id}_X} \\ M'\otimes_B X^*\otimes_B X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_{M'} \otimes \varepsilon_X} \\ M' \end{array}
\end{array}
$$

に対応させる.

(4) transfer 写像（移送写像）$t_X : HH^*(B) \to HH^*(A)$ が次のように定義される．trace 写像 $\mathrm{Tr}^{X^*} : {}_A(X, X)_B \to {}_A(A, A)_A$ は Ext 群の準同型写像を引き起こすが，それも trace 写像とよび同じ記号で表す:

$$\mathrm{Tr}^{X^*} : \mathrm{Ext}^*_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(X, X) \to \mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(A, A)\ (= HH^*(A)).$$

また，写像 $1_X \otimes - : {}_B(B, B)_B \to {}_A(X, X)_B$ も自然に Ext 群の準同型写像を引き起こし，その写像を

$${}_X\mathrm{Res} : \mathrm{Ext}^*_{B\otimes B^{\mathrm{op}}}(B, B)\ (= HH^*(B)) \to \mathrm{Ext}^*_{A\otimes C^{\mathrm{op}}}(X, X)$$

と書く．さらに，$- \otimes 1_X : {}_A(A, A)_A \to {}_A(X, X)_B$ も自然に Ext 群の準同型写像を引き起こし，その写像を

$$\mathrm{Res}_X : \mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(A, A) \to \mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(X, X)$$

と書く.

合成

$$t_X : \mathrm{Ext}^*_{B\otimes B^{\mathrm{op}}}(B, B) \xrightarrow{{}_X\mathrm{Res}} \mathrm{Ext}^*_{A\otimes B^{\mathrm{op}}}(X, X) \xrightarrow{\mathrm{Tr}^{X^*}} \mathrm{Ext}^*_{A\otimes A^{\mathrm{op}}}(A, A)$$

を X が定める transfer 写像とよぶ.

$\pi_X = t_X(1_B) \in Z(A)\ (= HH^0(A))$ を相対射影元（relative projective element）とよぶ. X^* が定める transfer 写像 $t_{X^*} : HH^*(A) \to HH^*(B)$ については $\pi_{X^*} = t_{X^*}(1_A)$ である.

(5) $(\zeta, \theta) \in HH^*(A) \oplus HH^*(B)$ について条件

$$\mathrm{Res}_X(\zeta) = {}_X\mathrm{Res}(\theta)$$

が成り立つとき，(ζ, θ) を X-stable pair とよぶ．ζ は X-stable であるという.

$$HH^*_X(A) = \{\, \zeta \in HH^*(A) \mid \zeta \text{ は } X\text{-stable} \,\}$$

を X-stable 部分環とよぶ．(ζ, θ) が X-stable pair であることと $(\theta, \zeta) \in HH^*(B) \oplus HH^*(A)$ が X^*-stable pair であることは同値である.

定理 1.1 $\pi_X \in Z(A)$ が可逆ならば $t_X(HH^*_{X^*}(B)) = HH^*_X(A)$ であり

$$t_X|_{HH^*_{X^*}(B)} : HH^*_{X^*}(B) \to HH^*_X(A)$$

は全射である．特に，$\pi_{X^*} \in Z(B)$ も可逆ならば

$$HH^*_{X^*}(B)) \simeq HH^*_X(A).$$

ところで，もちろん，$HH^*_X(A) = t_X(HH^*_{X^*}(B)) \subseteq t_X(HH^*(B))$ なのであるが

課題 1 $HH^*_X(A) = t_X(HH^*(B))$ であって欲しい．または，これが成立するための条件を探したい．

命題 1.2 (A, C)-両側加群 L，L' に対して合成 ${}^X\mathrm{Tr} \circ {}_{X^*}\mathrm{Res} : {}_A(L, L')_C \to {}_A(L, L')_C$ は $\pi_X \in Z(A)$ による積である．

$$\begin{tikzcd}
{}_A(L, L')_C \arrow[rr, "\pi_X \cdot"] \arrow[dr, "{}_{X^*}\mathrm{Res}"'] & & {}_A(L, L')_C \\
& {}_B(X^* \otimes L, X^* \otimes L')_C \arrow[ur, "{}^X\mathrm{Tr}"'] &
\end{tikzcd}$$

2 block イデアルのコホモロジー環

k を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし，G をその位数が p で割りきれる有限群とする．

群環 kG を次のようにして左 $k[G \times G^{\mathrm{op}}]$-加群とする．

$$a \in kG，x, y \in G \text{ に対して } (x, y)a = xay.$$

$b = kGe$ を block イデアルとする．($e \in Z(kG)$ は原始的べき等元）P を b の defect 群とすると，b を直既約 $k[G \times G^{\mathrm{op}}]$-加群とみて $\Delta P = \{u \in P] \mid (u, u^{-1})\}$ は b の vertex であり，k は source である．すなわち，$b \bigm| k[G \times G^{\mathrm{op}}] \otimes_{k\Delta P} k$.

定義 2.1 (Alperin, Linckelmann and Rouquier[1]) $k[G \times P^{\mathrm{op}}]$-加群 X について次の条件が成り立つとき X を b の source 加群とよぶ．

- X は直既約 $k[G \times P^{\mathrm{op}}]$-加群である．
- $k[G \times P^{\mathrm{op}}]$-加群として $X \bigm| b$ である．
- ΔP は X の vertex である．

さらに，$B = \mathrm{End}_{k[G\times 1]}(X)^{\mathrm{op}} \simeq X^* \otimes_b X$ を b の source 多元環とよぶ．

B は (kP, kP)-両側加群であるから Hochshild コホモロジー環の transfer 写像 $t_B : HH^*(kP) \to HH^*(kP)$ を導くが

- diagonal embedding $\delta_P : H^*(P, k) \to HH^*(kP)$ について $t_B \circ \delta_P(H^*(P, k)) \subseteq \delta_P(H^*(P, k))$ であることが確かめられ，従って，写像 $t : H^*(P, k) \to H^*(P, k)$ で $t_B \circ \delta_P = \delta_P \circ t$ となるものが定義される．この写像もまた t_B と書くことにする．

- $B \simeq X^* \otimes_b X$ であるから，$t_B = t_{X^*} \circ t_X$ と分解される．

まとめて次の可換図式が得られる．

(D1)

$$
\begin{tikzcd}
H^*(P,k) \arrow[r, "\delta_P"] & HH^*(kP) & \\
 & & HH^*(b) \arrow[ul, "t_{X^*}"'] \\
H^*(P,k) \arrow[uu, "t_B"] \arrow[r, "\delta_P"'] & HH^*(kP) \arrow[uu, "t_B"] \arrow[ur, "t_X"'] &
\end{tikzcd}
$$

一般に，p-部分群 Q と $k[QC_G(Q)]$ の block イデアル c との組 (Q,c) を subpair とよぶ．$k[QC_G(Q)]$ の block イデアル c の G への Brauer 対応が b であるとき，(Q,c) を b-subpair とよぶ．(P,c) が b-subpair であり，さらに P が b の defect 群のとき，(P,c) を Sylow b-subpair とよぶ．

X を b の source 加群とする．X の Brauer construction $X(P) = X^P / \sum_{Q<P} \mathrm{tr}^P X^Q$ は直既約 $k[C_G(P)]$-加群であり，$kC_G(Q)$ のただ一つの block イデアル c に属する．$cX(P) = X(P)$ となる．c を cover する $k[PC_G(P)]$ の block イデアルを b_P とする．Sylow b-subpair (P, b_P) を（ここだけの言い方ですが）X に属する Sylow b-subpair とよぶ．

以後，b の source 加群 X を固定し，X に属する Sylow b-subpair (P, b_P) を固定して考える．

部分群 $Q \leqslant P$ に対して $(Q, b_Q) \leqslant (P, b_P)$ を満たす subpair (Q, b_Q) がただ一つ存在する．そこで，

- defect 群 P の部分群を object とし，
- Q, $R \leqslant P$ に対して $x \in G$ で ${}^x(Q, b_Q) \leqslant (R, b_R)$ をみたすものが引き起こす共役写像 $c_x : Q \to R; u \mapsto {}^x u$ を morphism $Q \to R$ として

圏 $\mathscr{F}_{(P,b_P)}(b)$ を定義し，これを Brauer 圏とよぶ．

定義 2.2 (Linckelmann [4]) いままでの記号の下で，block b のコホモロジー環を次のように定義する．$\zeta \in H^*(P,k)$ が条件

$$\mathrm{res}_Q\, {}^g\zeta = \mathrm{res}_Q\, \zeta \quad \forall\, Q \leqslant P\ \forall\, g \in N_G(Q, b_Q)$$

をみたすとき，ζ は $\mathscr{F}_{(P,b_P)}(b)$-stable であるという．$H^*(P,k)$ の部分集合

$$H^*(G, b; X) = \{\, \zeta \in H^*(P,k) \mid \zeta \text{ は } \mathscr{F}_{(P,b_P)}(b)\text{-stable} \,\}$$

を b の（X によって定められる）コホモロジー環とよぶ．

さて，次の定理はモデュラー表現論を通じてとても重要である．

定理 2.1 相対射影元 $\pi_X \in Z(b)$，$\pi_{X^*} \in Z(kP)$ はいずれも可逆である．

B を (kP, kP)-両側加群とみて次の基本定理が得られる．

定理 2.2 ([4]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(P, k)$ について

$$\zeta \in H^*(G, b; X) \Longrightarrow \delta_P \zeta \in HH^*(kP) \text{ は } B\text{-stable である.}$$

この逆が成り立つ．

定理 2.3 (Sasaki [6]) 今までの記号の下で $\zeta \in H^*(P, k)$ について

$$\delta_P \zeta \in HH^*(kP) \text{ は } B\text{-stable である} \Longrightarrow \zeta \in H^*(G, b; X).$$

定理 2.1 により，transfer 写像 t_{X^*}，t_X を stable 部分環に制限して同型が得られる．制限した写像も同じ記号で表すと

$$t_{X^*} : HH^*_{X^*}(b) \xrightarrow{\sim} HH^*_X(kP),\ t_X : HH^*_X(kP) \xrightarrow{\sim} HH^*_{X^*}(b).$$

さらに定理 2.1 により

定理 2.4 stable 部分多元環について等式 $HH^*_X(kP) = HH^*_B(kP)$ が成り立つ．

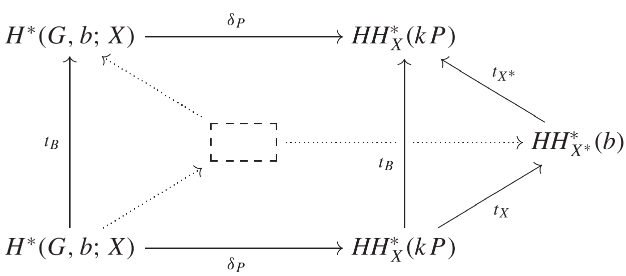
従って，可換図式 (D1) を stable 部分環に制限して，次の可換図式が得られる．

(D2)

$$\begin{tikzcd}
H^*(G, b; X) \arrow[r, "\delta_P"] & HH^*_X(kP) & \\
& & HH^*_{X^*}(b) \arrow[ul, "t_{X^*}"', "\simeq"] \\
H^*(G, b; X) \arrow[uu, "t_B", "\simeq"'] \arrow[r, "\delta_P"'] & HH^*_X(kP) \arrow[uu, "t_B", "\simeq"'] \arrow[ur, "t_X"', "\simeq"] &
\end{tikzcd}$$

次の課題を考えたい．

課題 2 (1) $H^*(G, b; X) \subseteq t_B(H^*(P, k)$ であるが，等号が成立するのではないか．
(2) 可換図式 (D2) において右側の三角形に相当する三角形を左側にも作りたい．



課題 2 (1) を考えるために，これまでは，source 多元環 B の (kP, kP)-両側加群としての構造を調べて，transfer 写像 $t_B : H^*(P,k) \to H^*(P,k)$ を求めるという考え方で考察してきた．事例研究ではあるが，block イデアルの defect 群を指定して具体例を調べる過程で，B の (kP, kP)-両側加群としての特定の直和因子をもつことを確認できた．（[7]，[5]）

課題 1 の block イデアル版が課題 2 (1) であるから，この方向で考察できないだろうか．

3 source 多元環

いままでと同じ記号を使う．

$H = N_G(P, b_P)$ とおく．

$c = kHb_P$ は kH の block イデアルである．直既約 (c, kP)-両側加群 Y を c の source 加群とし，$C = \mathrm{End}_{k[H\times 1]}(Y)^{\mathrm{op}} \simeq Y^* \otimes_c Y$ を c の soure 多元環とする．

c を直既約 $k[H \times H]$-加群とみて $G \times H$ への Green 対応を L とおく．L は (b, c)-両側加群である．

定理 3.1 (1) 相対射影元 $\pi_L \in Z(b)$, $\pi_{L^*} \in Z(c)$ はいずれも可逆である．
(2) $X \simeq L \otimes_c Y$ が成り立つ．（[1, Theorem 5]）

よって，命題 1.2 により，合成 ${}^{L^*}\mathrm{Tr} \circ {}_L\mathrm{Res} : {}_c(Y,Y) \to {}_b(X,X)$ は $\pi_{L^*} \in Z(c)$ による積である．ゆえに

$$\mathrm{End}_{kG\times 1}(X) \simeq \mathrm{Im}\ {}_L\mathrm{Res} \oplus \mathrm{Ker}\ {}^{L^*}\mathrm{Tr}$$

であり，$\mathrm{Im}\ {}_L\mathrm{Res} \simeq \mathrm{End}_{kH\times 1}(Y)$ である．このことから，(C, C)-両側加群としての同型

$$B \simeq C \oplus Z$$

が得られる．（Fau-Puig による結果であり，[1] で簡明な証明が与えられているが，このような説明もできると思う．）特に，(kP, kP)-両側加群としてとらえると

$$C \simeq \bigoplus_{v \in [H/PC_G(P)]} kPv \text{ であり，} Z \text{ は } k[PxP]\ (x \notin H) \text{ の直和}$$

であることがわかる．

例 P を指数 p，位数 p^3 の extraspecial p-群とする．次がわかる．

(1) (kP, kP)-両側加群として $B \simeq C \otimes_{kP} W \oplus Z_0$ の形をしている．
(2) $\mathrm{Im}\, t_B = H^*(G, b; X)$．（課題 2 の (1) がこの場合は成り立つ）

(3) 次の可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
H^*(P,k) \arrow[rr, "\delta_P"] & & HH^*(kP) & \\
& H^*(P,k) \arrow[ul, "\tau"'] \arrow[rr, "\delta_P"'] & & HH^*(kP) \\
H^*(P,k) \arrow[uu, "t_B"] \arrow[ur, "t_C"'] \arrow[rr, "\delta_P"'] & & HH^*(kP) \arrow[uu, "t_B"'] \arrow[ur, "t_C"'] &
\end{tikzcd}$$

(4) 上の左側の $t_B = t_1$, $t_C = t_2$ とおいて $t_1 = \tau \circ t_2$ であり，Z_0 が導く $H^{(}P, k)$ の transfer 写像は 0 写像である.

次の課題を考えたい.

課題 3 (1) 上の (1) に現れた加群 W の意味は何か.
(2) このような tensor 積分解は一般に成り立つか.
(3) $k[PvP]$, $k[Pv'P] \,\big|\, B$ のとき，$k[PvP] \oplus k[Pv'P] \,\big|\, B$ となる条件を知りたい.

参考文献

[1] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier, Source algebras and source modules, J. Algebra **239** (2001), no. 1, 262–271.

[2] M. Broué, On representations of symmetric algebras: an introduction, Notes by M. Stricker, Mathematik Department ETH Zürich, 1991.

[3] Yun Fan and Lluis Puig, On blocks with nilpotent coefficient extensions, Algebr. Represent. Theory **1** (1998), no. 1, 27–73.

[4] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[5] T. Okuyama and H. Sasaki, A note on module structures of source algebras of block ideals of finite groups, J. Algebra **497** (2018), 92–101.

[6] H. Sasaki, Cohomology of block ideals of finite group algebras and stable elements, Algebr. Represent. Theory **16** (2013), 1039–1049.

[7] ———, Source algebras and cohomology of block ideals of fintie group algebras, Proc. 46 Symp. Ring Theory and Representation Theory (I. Kikumasa, ed.), 2014, pp. 209–215.