（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	宮川　明裕
論文題目	THE FREE PROBABILISTIC ANALYSIS OF RATIONAL FUNCTIONS AND q-DEFORMATION　（有理関数とｑ変形の自由確率解析）		

（論文内容の要旨）

自由確率論は確率変数達に自由独立性と呼ばれる非可換な独立性を導入し、それらによって構成される新たな確率変数や生成する作用素環などの性質を調べる分野である。この分野は、Voiculescu 氏によるランダム行列の漸近的自由独立性や自由エントロピーの作用素環論への応用などをきっかけに大きく発展している。本論文では自由確率論の視点から（非可換）有理関数を研究し、また一般に自由独立ではない非可換確率変数である多変数の q ガウス分布達に関する解析をまとめたものである。まず自由確率論における有理関数の研究については、自由独立分布に分布収束するような（非可換）確率変数列を有理関数に代入して得られる確率変数列が分布収束することを Collins、Mai、Parraud、Yin 氏らとの共同研究により示した。この研究は元々Mai、Speicher、Yin 氏らによって得られたAtom のない自由独立分布が代入可能であることや、代入して得られた確率分布にAtom がないという結果を動機としている。次に有理関数に自由独立な半円分布を代入して得られた分布の作用素としての特徴づけを行った。半円分布は自由確率論における中心極限定理で極限として得られる他、GUE と呼ばれる典型的なランダム行列の固有値分布の極限分布として得られる分布である。自由独立な半円分布は全フォック空間上の左生成作用素と左消滅作用素の和で表現されるが、右生成（消滅）作用素との交換子を取ることでハンケル作用素と類似している構造を見ることができ、交換子が有限階作用素であることと、元の作用素が有理関数で書けていることが同値であることということを示した。これは非可換幾何の文脈で自由群の場合にConnes 氏によって予想されDuchamp、Reutenauer 氏らによって解決された問題と類似した結果となっている。また自由確率論において、右生成（消滅）作用素は自由独立な半円分布の双対系と呼ばれており、半円分布との交換子が全フォック空間の真空ベクトルへの射影で書けている。さらに本論文では、Speicher 氏と共同で双対系の存在を多変数の q ガウス分布に対して示し、その共役作用素として得られる共役系の存在と具体的な表示を全ての－１<q<１に対して示した。q ガウス分布はベルヌーイ分布、半円分布、ガウス分布をパラメータ q で補完した分布で q エルミート多項式を直行多項式に持つような確率分布である。作用素環論の視点では q が±１出ないとき、q ガウス分布達が生成する作用素環は自由独立な半円分布達が生成する作用素環と同じ性質を持つことが知られており、特に q が小さい時には同型が知られている。この結果に加え、ランダム行列や自由直交量子群で知られている分布の強収束を±１を除いた q に対して示した。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は宮川氏が執筆し、ジャーナルに出版された（共著を含めた）４つの論文の内容をまとめたものである。最初の非可換確率変数を代入した有理関数の分布収束については、有理関数の線型化と呼ばれる議論をランク評価と分布の収束と組み合わせて証明しており、非可換確率論と有理関数との関係の基礎となる定理となっていると考えられる。さらに GUE などのランダム行列を有理関数に代入するといった応用面で有用な定理となっている。次に右生成（消滅）作用素との交換子を用いた自由独立な半円分布の有理関数の特徴づけは Connes 氏が非可換幾何の本で予想され Duchamp、Reutenauer 氏らにより解決された問題を自由確率論の枠組みで研究したものである。宮川氏は自由確率論における自由独立な半円分布に関する直交多項式の議論と Duchamp-Reutenauer の非可換有理関数の級数展開の議論を組み合わせて主定理を導いており、この議論は一般の自由独立な分布からなる有理関数の特徴づけや更なる解析に結びつくことが期待される。また q ガウス分布については、Speicher 氏との共同研究である双対系と共役系の存在から、q ガウス分布が生成する作用素環の性質が分かることが知られているため、これらの具体的な構成は q ガウス分布が生成する作用素環の研究に大きな影響をもたらしていると考えられる。実際、Kumar、Skalski、Wasilewski 氏らにより q ガウス分布から生成される一般にトレースを持たないフォンノイマン環も因子環であることやタイプの分類などを宮川ーSpeicher の双対系と共役系の構成を応用して示している。さらにこの構成は q 変形をさらに一般化した変形についても、Kumar 氏や Yang 氏らにより示されている。さらに、q ガウス分布の共役系は Guionnet、Shlyakhtenko 氏らによる自由単調輸送というフォンノイマン環の同型を示す議論に登場しており、宮川-Speicher による具体的な構成は全ての$-1<q<1$で q ガウス分布で生成されるフォンノイマン環が同型であるかという未解決問題を解くために役立つことが期待される。さらに q ガウス分布は GUE と呼ばれるランダム行列に類似したモーメントを持っており、本論文にある分布の強収束も独立な GUE 達が満たす性質の一つであるため、ランダム行列との関係を調べて行くことも非常に興味深い方針だと考えられる。このように本論文では宮川氏の海外での研究や研究者達との交流を通して得られた研究結果が書かれており、十分非自明で将来性のある結果であると思われる。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和６年１月２５日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降