（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	大山　修平
論文題目	Theoretical Study of Invertible States Using Matrix Product States (テンソルネットワークを用いた可逆状態の理論的研究)		

（論文内容の要旨）

トポロジカル絶縁体の発見以来、トポロジカル相の遍在性、普遍性が明らかになり、その全貌の解明が、物質の機能および性質を理解する上で極めて重要となった。最近１０年間の集中的な研究によって、一体状態のトポロジカル相に対しては、時間反転対称性や電子・正孔対称性のような物質の構造によらない対称性だけでなく、結晶対称性や磁気対称性のような物質の構造に依存した対称性をも考慮した分類理論が整備され、それに伴い高次トポロジカル相に代表される多様な構造が明らかになった。しかしながら、相関効果が重要となる多体系のトポロジカル相に関しては、その全貌はいまだに明らかになっていない。特に近年、一体状態のベリー位相の概念では捉えられない多体系特有のトポロジカルな性質が存在することが報告され、注目を集めている。通常のベリー位相は、一体波動関数の位相自由度(U(1)自由度)から生じ、量子ホール状態のホール伝導度や系の断熱的かつ周期的な変化で生じる輸送現象(いわゆるサウレスポンプ)の量子化を保証する。数学的には、ベリー位相はパラメータ空間X上で定義された一体波動関数の位相が与えるU(1)主束の接続に対応し、第2コホモロジー群$H^2(X,Z)$に値をとるトポロジカル不変量である第一チャーンクラスの非自明性を明らかにする。例えば、サウレスポンプの場合、Xとして時間変数および周期変化するパラメーターからなる2次元空間を選ぶことができ、それによってサウレスポンプがチャーンクラスで分類されることおよび輸送現象の量子化が説明される。多体系においても同様な数学的設定を導入することができる。つまり、パラメータ空間X上で定義された多体状態の族を考えることで、サウレスポンプの多体状態への一般化が可能となる。興味深いことに、このような一般化の中には、$H^2(X,Z)$では捉えられない構造が存在することが知られている。例えば、3次元球をパラメータ空間として持つ空間１次元の量子スピン系の基底状態において非自明なトポロジーを持つものが知られているが、この場合の$H^2(X,Z)$は自明であるため、この事実を説明することができない。また、多体系では、ベリー位相の定義自体に問題が生じる。例えば、断熱的に時間発展する磁場と結合した1次元スピン鎖を考えると、各サイトのスピンの1体波動関数のベリー位相がそれぞれ有限のベリー位相を与えるため、系全体を記述する多体波動関数のベリー位相は熱力学極限を取ると発散してしまい、うまく定義することができなくなる。これらの問題は一体系にない新しい構造を多体系で導入しないといけないことを強く示唆している。

このような背景の下、本学位論文で大山氏は、1次元空間の多体系を記述する行列積状態を用いることで、多体系におけるサウレスポンプおよび、対応する一般化されたベリー位相の定式化に成功した。まず、第2章においてサウレスポンプの行列積状態における定式化をおこない、その帰結をいくつかの具体例とともに示した。次に、第3章および第4章では、ベリー位相を行列積状態に拡張した高次ベリー位相の定式化を行っている。以下では、各内容を要約する。

まず、第2章において、1次元空間における多体状態、とくにフェルミオン多体状態におけるサウレスポンプの行列積状態での定式化に成功した。具体的には行列積状態の表示に関する基本的な定理の証明を行い、それを用いて、サウレスポンプのトポロジーを記述するトポロジカル不変量の定義に成功した。さらに、得られた結果を様々な系に具体的に応用することで、その有用性を確認している。

（続紙　１　）

　続いて、第3章および第4章においては、ベリー位相の一般化である高次ベリー位相の行列積状態における定式化を議論している。ベリー位相の概念の多体状態への拡張は、KapustinとSpodyneikoによってなされているが、定式化が多体状態そのものでなく多体グリーン関数に基づいているため、ベリー位相でなく、その微分であたえられるベリー曲率を一般化したものとなっていた。また、数値計算によってトポロジカル不変量を評価する際のコストが高いという困難があった。本研究では、行列積状態を使うことで、これらの困難を解決した。特に、行列積状態の3重積を導入することで、gerbeとよばれる数学的な構造が自然に入ることを示し、それによって行列積の位相の自由度から高次ベリー位相による$H^3(X,Z)$のトポロジカル不変量が定義できることを明らかにした。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

一体状態のトポロジカル相に関しては分類理論が進み、その全貌の解明が進んでおり、トポロジカル物質の探索への応用も進んでいるが、相関が重要となる多体系のトポロジカルな性質に関しては、基礎的なところで解明すべき点が残されており、更なる研究が必要とされている。特にベリー位相のようなトポロジカル相を記述する上で基礎となる構造に関しての理解も不足しており、多体系における一般的な定式化の解明が重要な課題となっている。本学位論文は、1次元空間の多体状態を記述する行列積状態をもちいて、ベリー位相および関係するトポロジカル現象であるサウレスポンプの多体状態への一般化を議論したものである。まず、初めに行列積状態の表示に関する基本的な定理をフェルミオンの多体系に拡張することで、フェルミオン系におけるサウレスポンプの行列積状態における定式化およびそれを用いたトポロジカル不変量の導出をおこなった。また、この定式化をKitaev鎖などのいくつかの系に応用することで、実際の有効性も確認している。続いて、高次元パラメータ空間で定義される一般化されたサウレスポンプを示す模型、特に、3次のコホモロジー$H^3(X,Z)$が非自明になる模型を構築した。また、模型の行列積状態を用いて対応するトポロジカル不変量の構築をおこなった。最後に、行列積状態の3重積という新概念を導入し、それを数学で知られている構造であるgerbeと関係付けることによって、$H^3(X,Z)$のトポロジカル不変量を行列積模型で構築することに成功した。また、パラメータ空間Xを離散し、離散化した空間での行列積状態の3重積を用いることで、トポロジカル不変量の離散化された空間での表式も与えている。この離散化された空間でのトポロジカル不変量は数値計算に適しており、数値計算でしかアプローチできない多くの相関のある系のトポロジカルな性質の解明に適したものとなっている。以上の結果は、いずれも多体状態のトポロジーを研究する上の基礎的な結果であり、汎用性も高い。よって本論文は、博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和6年1月22日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降