数理解析研究所講究録 1233 巻 2001 年 67-81

Algorithms for computing Grothendieck local residues

—improvement with a rescue step—

S. Tajima(田島 慎一)

Niigata Univ.(新潟大学工学部情報工学科) [1]

本稿では, 多変数留数 (Grothendieck local residues) の計算法と semi-quasihomogeneous な孤立特異点との関係について, 最近得た結果について述べる.

前半では, 多変数留数計算アルゴリズムの基本的構成を説明する. まず, §1 でアルゴリズムに用いる一階の偏微分作用素の構成法について述べる. この構成法 ($\mathfrak{L}$-アルゴリズム) は, もともと, 孤立特異点での代数的局所コホモロジーの構造を調べることを目的として考案したものであり, 論文 [5] 等で与えた構成法とは導出の仕方も異なる. 従来の方法に比べ, 以下の様な特徴がある.

- 偏微分作用素の係数部分を求める方法が簡単で, syzygy の計算を必要としない.
- イデアルの準素イデアル分解と組み合わせることが可能であり, 各既約成分ごとに必要な偏微分作用素を構成することができる.

次に, §3 で, これらの一階の偏微分作用素を利用して実際に留数値を求めるアルゴリズムを与える. 多くの場合 (generic という意味でほとんどの場合), ここに述べるアルゴリズムで多変数留数の値を (少なくとも理論上は) 計算することができる. 偏微分作用素を構成する段階で中国剰余定理を用いているので, 論文 [14], [16] で与えたアルゴリズムに比べ計算効率が良くなっている.

このように, 本稿の前半で与える多変数留数計算アルゴリズムは, 実用性も重視して構成したものであるが数学的な意味で適用範囲に限界がある. 留数計算の対象となる代数的局所コホモロジー類 (σ_F で表す) が複雑な特異性を持ち, その代数的局所コホモロジー類を特徴づけるようなホロノミック系が高々一階の偏微分作用素を用いただけでは与えることができず 2 階以上の偏微分作用素も必要となる場合には, この計算アルゴリズムを直接には使うことが出来ない.

後半では, §3 で与える多変数留数計算アルゴリズムがそのままでは利用できないような場合の留数計算について議論する. §4 で, 具体例として E_{12} 型の孤立特異点を取り上げ, 以下のような 2 通りの方法により留数計算が可能であることを実際に示す.

- 方法 1: 2 階の偏微分作用素を利用する.
- 方法 2: 代数的局所コホモロジー σ_F の代わりに (σ_F に比べ極の位数が大きい) 別の代数的局所コホモロジー類を用いる.

方法 2 による計算においては, データの入力の仕方を変えるだけで, §3 で与える留数計算アルゴリズム自体は変更せずにそのまま利用することになる (remedy 法).

最後の節では, 多変数留数計算に適した形を持つような 1 階の偏微分作用素の構成法 ($\mathfrak{R}$-アルゴリズム) を与え, その計算例を紹介する.

[1] tajima@geb.ge.niigata-u.ac.jp

1 代数的局所コホモロジー類と 1 階の annihilator

変数 $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ を不定元として持つ有理数係数の多項式 $f_1(z),f_2(z),...,f_n(z)\in\mathbb{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$ の組 $F=\{f_1(z),f_2(z),...,f_n(z)\}$ であり正規列となるものが与えられたとする. これら n 個の多項式 $f_1,f_2,...f_n$ が生成するイデアルを I と置き, その零点集合 $V(I)=\{z\in X|f_1(z)=f_2(z)=\cdots=f_n(z)=0\}$ を Z で表す. 但し, $X=\mathbb{C}^n$ と置いた.

X 上の正則関数のなす層を $\mathcal{O}_X$ と置き, 零次元集合 $Z=V(I)$ に台をもつ代数的局所コホモロジー群のなす層を $\mathcal{H}^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ とおく. 正規列 F に対し, 代数的局所コホモロジー類 σ_F を

$$\sigma_F=[\frac{1}{f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)}]\in H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)=\Gamma(X,\mathcal{H}^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X))$$

で定める.

零次元イデアル $I=\langle f_1,f_2,...,f_n\rangle\subset\mathbb{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$ の準素イデアル分解を $I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_l$ とする. イデアル $I_i\subset\mathbb{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$ に対する零点集合を $Z_i=V(I_i)$ と置く. コホモロジー群 $H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ の直和分解

$$H^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)=H^n_{[Z_1]}(\mathcal{O}_X)\oplus\cdots\oplus H^n_{[Z_l]}(\mathcal{O}_X)$$

に対応したコホモロジー類 σ_F の直和分解を

$$\sigma_F=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_l$$

とする. ここで σ_i は, $\mathrm{supp}(\sigma_i)=Z_i$ をみたすコホモロジー類 $\sigma_i\in H^n_{[Z_i]}(\mathcal{O}_X)$ である.

ベクトル空間 Σ を $\Sigma=\{h(z)\sigma_F\mid h\in\mathbb{Q}[z_1,z_2,...,z_n]\}$ で定め $\Sigma_i=\Sigma\cap H^n_{[Z_i]}(\mathcal{O}_X)$ とおく. このとき,

$$\Sigma=\Sigma_1\oplus\Sigma_2\oplus\cdots\oplus\Sigma_l$$

が成り立つ.

さて, 記号の準備がほぼ整ったので, これからこの節の本題に入る. コホモロジー類 σ_F の i 番目の直和因子 $\sigma_i\in H^n_{[Z_i]}(\mathcal{O}_X)$ に注目し,

$$Ann_D(\sigma_i)=\{P\in D_X|P\sigma=0\}$$

と置く. 但し D_X は, $X=\mathbb{C}^n$ 上で有理数係数の多項式を係数に持つような線形偏微分作用素全体のなす Weyl 代数である.

以下, $Ann_D(\sigma_i)$ に属するような一階の線形偏微分作用素を求める方法を考える. 一階の偏微分作用素

$$P=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}+p_0(z),\quad p_k(z)\in\mathbb{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$$

に対し, P の一階の部分を v_P で表すことにする.

$$v_P=p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1}+\cdots+p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}.$$

いま, 一階の偏微分作用素 P が, $P\sigma_i=0$ を満たすとすると,

$$P(h\sigma_i)=(Ph-hP)\sigma_i+h(P\sigma_i)=(v_Ph)\sigma_i,\qquad\forall h\in\mathbb{Q}[z_1,z_2,...,z_n]$$

となる. このことから次を得る.

補題 ([17]) $P\in D_X$ はコホモロジー類 σ_i を annihilate する一階の偏微分作用素であるとする. 次が成り立つ.

(i) $P(\Sigma_i)\subseteq\Sigma_i$,

(ii) $v_P(h)\in I_i,\quad\forall h\in I_i$.

この補題の (i), (ii) の条件は実際には同値であることが分かる. そこで, (ii) の条件を満たす $v = p_1(z)\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\dfrac{\partial}{\partial z_n}$ が与えられたとする. $v\sigma_i = c(z)\sigma_i$ なる $c(z)$ を用いて

$$P = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} - c(z)$$

とおけば, コホモロジー類 σ_i を annihilate する一階の偏微分作用素 P で, $v_P = v$ を満たすものが存在することが分かる.

一般に, 一階の偏微分作用素 P, Q が与えられたとし,

$$P = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + p_0(z), \quad p_k(z) \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n],$$

$$Q = q_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + q_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + q_0(z), \quad q_k(z) \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]$$

とおく. ここで, $p_k(z) = q_k(z) \bmod I_i (k = 1, 2., , , , n)$ が成り立つとする.

$$\begin{aligned} P - Q &= \frac{\partial}{\partial z_1}(p_1(z) - q_1(z)) + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_n}(p_n(z) - q_n(z)) \\ &\quad + p_0(z) - q_0(z) - (\frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial z_n} - \frac{\partial q_1}{\partial z_1} - \cdots - \frac{\partial q_n}{\partial z_n}) \\ &= p_0(z) - q_0(z) - (\frac{\partial p_1}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial z_n} - \frac{\partial q_1}{\partial z_1} - \cdots - \frac{\partial q_n}{\partial z_n}) \mod D_X I_i \end{aligned}$$

となる. 従って, 零階の annihilator I_i の生成する左イデアル $D_X I_i$ を法として一階の annihilator P を構成する際には, 偏微分作用素 P の各係数 $p_k(z)$ は, 多項式そのものでなくイデアル I_i による剰余 $\mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]/I_i$ を取ったものとみなして, 作用素 P を求めればよいことになる.

2 $\mathfrak{L}$-アルゴリズム

以下のアルゴリズムによりベクトル空間

$$\mathfrak{L}_i = \{P \mid P = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + p_0(z),\ P\sigma_i = 0, p_k(z) \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]/I_i,\ k = 0, 1, \ldots, n\}$$

を求めることができる. この計算にはグレブナ基底を必要とするので, 多項式環 $\mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]$ 上に項順序 $\succ$ をあらかじめ入れておく.

$\mathfrak{L}$-アルゴリズム

- イデアル I_i のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_i)$ から標準的単項式基底 Mb_{I_i} を計算. 剰余空間 $\mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]/I_i$ をベクトル空間 $E_{I_i} = \mathrm{Span}\{e(z) \mid e(z) \in Mb_{I_i}\}$ と同一視する.
- $V_i = \{v = a_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots a_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} \mid vg \in I_i, \forall g \in \mathrm{Gr}(I_i)\}$ を求める.
- イデアル $I^{(2)} = \langle f_1^2, f_2^2, \ldots, f_n^2\rangle$ の準素イデアル分解 $I^{(2)} = I_1^{(2)} \cap I_2^{(2)} \cap \cdots \cap I_l^{(2)}$ とイデアル $I_i^{(2)}$ のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_i^{(2)})$ を求める. (但しここでイデアル $I_i^{(2)}$ は $\sqrt{I_i^{(2)}} = \sqrt{I_i}$ を満たすもの.)
- $v \in V_i$ に対し, 条件

$$\sum_k f_1(z)f_2(z)\cdots f_{k-1}(z)v(f_k)(z)f_{k+1}(z)\cdots f_n(z) + a_0(z)f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z) \in I_i^{(2)}$$

を満たす $a_0(z) \in E_{I_i}$ を求め, $P = v + a_0(z) \in \mathfrak{L}_i$ を構成する.

作用素の構成例

$y \succ x$ を辞書式順序とする．

$$f_1(x,y)=(x^2+y^2)^3+3x^2y-y^3,\ f_2(x,y)=x^4+(2y^2-2)x^2+y^4-2y^2+1$$

の生成するイデアル I のグレブナ基底は $-256x^{12}+768x^{10}-864x^8+432x^6-81x^4, -448x^{10}+1040x^8-836x^6+231x^4+12x^2+6y-6$ で与えられる．I の準素イデアル分解は $I=I_1\cap I_2$ で与えられる．但し $I_1=\langle 256x^8-768x^6+864x^4-432x^2+81, -3776x^6+8016x^4-5748x^2+96y+1443\rangle$, $\sqrt{I_1}=\langle 2y+1, 4x^2-3\rangle$, $I_2=\langle x^4, 2x^2+y-1\rangle$, $\sqrt{I_2}=\langle y-1, x\rangle$ である．$\mathbb{Q}[x,y]/I_1$ の単項式基底は $x^7,x^6,x^5,x^4,x^3,x^2,x,1$, $\mathbb{Q}[x,y]/I_2$ の単項式基底は $x^3,x^2,x,1$ である．

$\mathfrak{L}$-アルゴリズムを用いて σ_1 の 1 階の annihilator を計算すると, ベクトル空間 $\mathfrak{L}_1$ の基底として次の 6 個の作用素を得る．

- $(-256x^6+108)\frac{\partial}{\partial x}+(-113984x^7+246672x^5-178524x^3+43227x)\frac{\partial}{\partial y}$
  $-\frac{1019392}{3}x^7+712960x^5-506400x^3+118656x$
- $(-1024x^7+432x)\frac{\partial}{\partial x}+(-381120x^6+824688x^4-596484x^2+144261)\frac{\partial}{\partial y}$
- $(-128x^6+72x^2)\frac{\partial}{\partial x}+(-40000x^7+86544x^5-62604x^3+15147x)\frac{\partial}{\partial y}$
  $-123136x^7+258240x^5-183792x^3+43380x$
- $(-512x^7+288x^3)\frac{\partial}{\partial x}+(-133824x^6+289584x^4-209412x^2+50625)\frac{\partial}{\partial y}$
  $-444672x^6+927168x^4-657648x^2+155844$
- $(-256x^6+192x^4)\frac{\partial}{\partial x}+(-42176x^7+91248x^5-65988x^3+15957x)\frac{\partial}{\partial y}$
  $-134144x^7+280704x^5-199680x^3+47304x$
- $(-1024x^7+768x^5)\frac{\partial}{\partial x}+(-141120x^6+305424x^4-220860x^2+53379)\frac{\partial}{\partial y}$
  $-486912x^6+1012224x^4-716256x^2+169776$

同様に σ_2 の annihilator を計算すると, ベクトル空間 $\mathfrak{L}_2$ の基底として次の 3 つの作用素を得る．

- $x\frac{\partial}{\partial x}-4x^2\frac{\partial}{\partial y}-\frac{26}{3}x^2+4$
- $x^2\frac{\partial}{\partial x}-4x^3\frac{\partial}{\partial y}-\frac{26}{3}x^3+4x$
- $x^3\frac{\partial}{\partial x}+4x^2$

3 多変数留数 (Grothendieck local residue) の計算法

多変数留数 (Grothendieck local residue)

$$\mathrm{Res}_\beta\left(\frac{g(z)dz}{f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)}\right)=\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_F(z)dz)$$

の計算アルゴリズムについて, その概略を述べる．

点 β は, イデアル $I=\langle f_1,f_2,\dots,f_n\rangle\subset\mathbb{Q}[z_1,z_2,\dots,z_n]$ の準素イデアル分解 $I=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_i\cap\cdots\cap I_\ell$ に現れるイデアル I_i の零点集合 $Z_i=V(I_i)$ に含まれるとし, $\beta\in Z_i$ での留数値の計算法を示す．

多項式環 $\mathbb{Q}[z_1,z_2,\dots,z_n]$ に項順序 $\succ$ を入れ, 剰余 $\mathbb{Q}[z_1,z_2,\dots,z_n]/I_i$ に対する標準的な単項式基底を Mb_{I_i} と置く．ベクトル空間 E_{I_i} を $E_{I_i}=\mathrm{Span}\{e(z)\in\mathrm{Mb}_{I_i}\}$ で定め, $\mathbb{Q}[z_1,\dots,z_n]/I_i$ と同一視する．σ_F の直和分解を $\sigma_F=\sigma_1+\cdots+\sigma_i+\cdots+\sigma_\ell$ と置く．定義より, $\mathrm{supp}(\sigma_j)\cap Z_i=\emptyset$, $j\neq i$ が成り立つので, $\beta\in Z_i$ において, 次を得る．

$$\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_F(z)dz)=\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_i(z)dz).$$

ここで, $g_i(z) = g(z) \bmod I_i \in E_{I_i}$ と置くと, 更に

$$\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_i(z)dz) = \mathrm{Res}_\beta(g_i(z)\sigma_i(z)dz)$$

を得る.

3.1 simple な極における計算法 ([12], [13])

$I_i = \sqrt{I_i}$ の場合は, σ_i は全て一位の極のみからなるので, 偏微分作用素を用いないで留数値を計算できる. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ の Jacobian を $j_F(z) = \det\left(\dfrac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(z_1,\ldots,z_n)}\right)$ と置くと, $g_i(z) = b_i(z)j_F(z) \bmod I_i$ となる多項式 $b_i(z) \in E_{I_i}$ が存在する. 各点 $\beta \in Z_i$ は simple であるので Z_i に台を持つデルタ函数 $\sum_{\beta\in Z_i}\delta_\beta$ を δ_{Z_i} と置くと, $j_F(z)\sigma_i(z) = \delta_{Z_i}$ が成り立つ. 但し, $\delta_\beta \in H^n_{[\beta]}(\mathcal{O}_X)$ は, 点 β に台を持つデルタ函数を表す.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_F(z)dz) &= \mathrm{Res}_\beta(g_i(z)\sigma_i dz)\\ &= \mathrm{Res}_\beta(b_i(z)\delta_{Z_i}dz)\\ &= b_i(\beta), \quad \beta \in Z_i\end{aligned}$$

を得る.

$$j_{F,i}(z) = j_F(z) \bmod I_i \in E_{I_i}$$

に対しても

$$j_F(z)\sigma_i(z) = j_{F,i}(z)\sigma_i(z)$$

となるので, $b_i(z)$ を求めるには, あらかじめ $j_{F,i}(z)$ を求めてから,

$$g_i(z) = b_i(z)j_{F,i}(z) \bmod I_i$$

を解けばよい. これらの留数値の値が満たす方程式を求めるには, $\sqrt{I_i}$ と $t - b_i(z)$ から生成されるイデアル

$$\tilde{I}_i = \langle t - b_i(z), \sqrt{I_i}\rangle \subset \mathbb{Q}[z_1, z_2, \ldots, z_n, t]$$

を取り, 変数 z を消去して, $\tilde{I}_i \cap \mathbb{Q}[t]$ の生成元を求めればよい. $\tilde{I}_i \cap \mathbb{Q}[t] = \langle r_i(t)\rangle$ と置くと, Z_i 上の点 β での留数値 t は, $r_i(t) = 0$ を満たすことになる.

simple な場合の計算例

$\mathbb{Q}[x,y]$ 上の項順序として, 全次数辞書式順序 $(y \succ x)$ を入れる. 多項式

$$f_1(x,y) = (x^2+y^2)^3 + 3x^2y - y^3,\ f_2(x,y) = 4x^4 + (13y^2-36)x^2 + 9y^4 - 61y^2 + 80 \in \mathbb{Q}[x,y]$$

の生成するイデアルを $I = \langle f_1, f_2\rangle$ とする. イデアル I の準素イデアル分解は $I = I_1 \cap I_2$ で与えられる. 但し,

$$\begin{aligned}I_1 &= \langle x^2+y^2-5, -4yx^2+5y-125, -4x^4+25x^2+125y-25\rangle,\\ I_2 &= \langle 4x^2+9y^2-16, -125x^6-1200x^4+(-2511y-3840)x^2+1296y-4096\rangle\end{aligned}$$

である. $g(x,y) = 1 + 3x^2 - 54yx^5 - 34y^7$ に対し, $\beta \in V(I_1), V(I_2)$ における留数 $\mathrm{Res}_\beta(g(x,y)\sigma_F\, dx\wedge dy)$ をそれぞれ求めよう.

剰余空間 $\mathbb{Q}[x,y]/I_1$ の単項式基底は $\mathrm{Mb}_{I_1} = \{1, x, y, x^2, yx, x^3\}$, 剰余空間 $\mathbb{Q}[x,y]/I_2$ の単項式基底は $\mathrm{Mb}_{I_2} = \{1, x, y, x^2, yx, x^3, yx^2, x^4, yx^3, x^5, yx^4, yx^5\}$ で与えられる. f_1, f_2 の Jacobian $j_F(x,y)$ は

$$60yx^7 + (180y^3 - 300y - 48)x^5 + (180y^5 - 600y^3 + 126y^2 + 216)x^3 + (60y^7 - 300y^5 + 294y^4 - 948y^2)x$$

$$
\begin{aligned}
j_{F,1}(x,y) &= -396x^3+(3750y+1860)x \in E_1 \cong \mathbb{Q}[x,y]/I_1,\\
j_{F,2}(x,y) &= (-\frac{2500}{27}y+\frac{1240}{27})x^5+(-\frac{16000}{27}y-\frac{488}{27})x^3+(-\frac{25600}{27}y-\frac{15296}{27})x \in E_2 \cong \mathbb{Q}[x,y]/I_2
\end{aligned}
$$

である. 関数 $g(x,y)$ は $\mathbb{Q}[x,y]/I_1$, $\mathbb{Q}[x,y]/I_2$ においてそれぞれ

$$
\begin{aligned}
g_1(x,y) &= \frac{3375}{2}x^3+\frac{31887}{4}x^2+(-\frac{675}{8}y+\frac{16875}{8})x-\frac{1119875}{32}y-\frac{1753093}{32},\\
g_2(x,y) &= -54yx^5+(-\frac{8704}{135}y+\frac{269824}{10125})x^4+(\frac{34816}{675}y-\frac{237637}{2025})x^2-\frac{974848}{3375}y+\frac{567181}{10125}
\end{aligned}
$$

と表される.

今, $Z=V(I)$ の点は全て simple なので, $g_i(x,y)=j_{F,i}(x,y)b_i(x,y) \mod I_i$ を満たす多項式 $b_i(x,y)$, $i=1,2$ が存在する. 具体的には

$$
\begin{aligned}
b_1(x,y) = & -\frac{18415150417}{369442314000}x^3-\frac{43604925}{328393168}x^2+(\frac{1738072607}{5911077024}y+\frac{15874034231}{49258975200})x-\frac{271237665}{656786336}y-\frac{94827375}{656786336},\\
b_2(x,y) = & (-\frac{509856996015376813831287 5}{873566553815239282572607488}y-\frac{264827107028413244770 25}{682473870168155689509849 6})x^5\\
& +(-\frac{12187945374658625}{234600627470930989 2}y+\frac{471739663714325}{586501568677327473})x^4\\
& +(-\frac{770652392964087760147025}{136494774033631137901969 92}y+\frac{443600026968457191920471}{311988054934014029490216 96})x^3\\
& +(-\frac{20672949450600425}{2346006274709309892}y+\frac{47840177590179836}{586501568677327473})x^2\\
& +(-\frac{713288188140260851322249}{3412369350840778447549248}y-\frac{1965260299510003140423943 3}{545979096134524551607879 68})x\\
& +\frac{5564250689513284}{586501568677327473}y+\frac{9144297432785600}{586501568677327473}
\end{aligned}
$$

で与えられる. $b_1(x,y)$, $b_2(x,y)$ を用いれば, 極の座標の多項式として留数値を表現することができる. $V(I_1)$ における留数は, イデアル $\tilde{I}_1=\langle t-b_1(x,y),I_1\rangle$ と $\mathbb{Q}[t]$ の共通部分 $\tilde{I}_1\cap\mathbb{Q}[t]$ の生成元

$$
\begin{aligned}
r_1(t) = \ & 4492105119056486866039603200000000000t^6+128385503200273036345344000000000000000t^5\\
& +116682750326091007175205594931200000 0t^4+18751299700679479421205240960000000000t^3\\
& +4550338130202500232340036993446414000t^2+7059333913008154556534395254216000000t\\
& +8668813722280953784612887761218103196 1
\end{aligned}
$$

を用いると, 方程式 $r_1(t)=0$ の解となる. また, $\tilde{I}_2=\langle t-b_2(x,y),I_2\rangle$ から 変数 x,y を消去し, $\mathbb{Q}[t]$ との共通部分 $\tilde{I}_2\cap\mathbb{Q}[t]$ の生成元を求めると,

$$
\begin{aligned}
r_2(t) = \ & 85556161856535916035921820967768201965895445022720414187520000000000000000000t^{12}\\
& -244521679718449329040276016339732903835267867992748195840000000000000000000000t^{11}\\
& +38231784102190438834874389508072647105477600311375276675799449600000000000000000t^{10}\\
& -38779521901975200346994612203723290041061158391518531460556180684800000000000000t^9\\
& +29298580032539387994813749317487106679049822221506571784694150715146240000000000t^8\\
& -16915021071201834008425487486205240884174974476104928087920666624686817280000t^7\\
& +750382688524427410052149466818146527407317258126406497092743958989367987404 8t^6\\
& -229016528363932503868362519339620208464523068265518742734019378457099842355 2t^5\\
& +915081174444307250391706709639606481903267105472149313903118950805523333120t^4\\
& -179585451120002255955231435688069347996579574831805589645838678976444497920t^3\\
& +58903693571078581939114118859455130384854304823868080529469894501316203264t^2\\
& -11771612470491238319522106101954166869238886433305758538993127303094240768t\\
& +1500420475001224970620044688547162109560541665144580737509332560010331921
\end{aligned}
$$

を得る. よって, $Z_2=V(I_2)$ における留数値は, $r_2(t)=0$ を満たす. $r_1(t)$, $r_2(t)$ の計算には, FGLM 法 ([1]) を用いた (cf. [13]).

3.2 $I_i \neq \sqrt{I_i}$ なる場合

コホモロジー類 $\sigma_i \in H^n_{[Z_i]}(\mathcal{O}_X)$ は, 各点 $\beta \in Z_i$ において位数が1より大きいような極を持つことになる. このような点 β での多変数留数 $\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_i(z)dz)$ の計算法について基本的事柄を述べる.

ホロノミック系の理論を用いて計算アルゴリズムを導出していくことが基本である. この考え方自体は, 論文 [12], [14], [16] 等のなかで説明してあるので, ここでは説明を繰り返さない. 以下, いままでの方法と異なる点を中心に話を進めていく.

まず, ベクトル空間 $E_{I_i} = \{e(z) \mid e(z) \in Mb_{I_i}\}$ に対し, E_{I_i} の2つの部分ベクトル空間, $E_{i,J}, E_{i,K}$ を次で定める.

$$\begin{aligned} E_{i,J} &= \{b(z)j_{F,i}(z) \bmod I_i \mid b(z) \in E_{\sqrt{I_i}}\}, \\ E_{i,K} &= \{h(z) \in E_i \mid \mathrm{Res}_\beta(h(z)\sigma_F(z)dz) = 0, \forall\beta \in Z_i\}, \end{aligned}$$

ここで, $E_{\sqrt{I_i}} = \mathrm{Span}\{b(z) \mid b(z) \in Mb_{\sqrt{I_i}}\}$ であり, 剰余空間 $\mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]/\sqrt{I_i}$ を表現するのに用いている. また, 同値類 $b(z)j_{F,i}(z) \bmod I_i$ も, $\mathrm{Gr}(I_i)$ による剰余をとり E_i に属する代表元を取ることで, E_i の要素とみなしている.

次が成り立つ.

補題 E_{I_i} は次のように直和分解される.

$$E_{I_i} = E_{i,J} \oplus E_{i,K}.$$

偏微分作用素 P に対し, その形式随伴作用素を P^* で表すことにする. いま, $P \in \mathfrak{L}_i$ とすると, P は線形写像 $P : \Sigma_i \longrightarrow \Sigma_i$ を誘導するので, その双対を取ることで $P^* : E_{I_i} \longrightarrow E_{I_i}$ が定義できる. この事実を使って

$$E_{i,L} = \{P^*1 \mid P \in \mathfrak{L}_i\},$$

とおく. ここで P^* の作用を受けているのは $1 \in E_{I_i}$ のみであることを注意しておく.

一般に $E_{i,L} \subseteq E_{i,K}$ が成り立つ. この包含関係で等号が成り立つ条件を考えるため,

$$\Psi_i = \{\psi \in \Sigma_i \mid P\psi = 0\},$$

$$H_i = \{h \in E_{I_i} \mid v_P(h) \in I_i, \forall P \in \mathfrak{L}_i\}$$

とおく.

補題 次が成り立つ.

$$\Psi_i = \{h(z)\sigma_i \mid h(z) \in H_i\}.$$

一般に $\dim \Psi_i \geq \sharp Z_i$ が成り立つが, 等号が成立する場合が重要となる.

補題 $\dim \Psi_i = \sharp Z_i$ は $E_{i,K} = E_{i,L}$ が成り立つ必要十分条件である.

零点集合 Z_i の相異なる点の個数はベクトル空間 $E_{\sqrt{I_i}}$ の次元と等しいので, 次の結果を得る.

命題 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $\dim H_i = \dim E_{\sqrt{I_i}}$,

(ii) $E_{i,K} = E_{i,L}$

この命題の条件 (i) が満たされているとする. 点 $\beta \in Z_i$ での多変数留数 $\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_F(z)dz)$ はつぎのように計算出来る.

まず, $g_i(z) = g(z) \bmod I_i \in E_{I_i}$ の直和分解

$$g_i(z) = g_{i,J}(z) + g_{i,L}(z), \quad g_{i,J} \in E_{i,J}, g_{i,L} \in E_{i,L}$$

を取る.

$$\mathrm{Res}_\beta(g(z)\sigma_F(z)dz) = \mathrm{Res}_\beta(g_{i,J}(z)\sigma_i(z)dz)$$

であるが, $g_{i,J} \in E_{i,J}$ であるので,

$$g_{i,J}(z) = b_i(z)j_{F,i}(z) \bmod I_i$$

を満たす $b_i(z) \in E_{\sqrt{I_i}}$ が取れる. 点 $\beta \in Z_i$ の重複度を μ_i とおけば,

$$\mathrm{Res}_\beta(g_{i,J}(z)\sigma_i(z)dz) = \mu_i b_i(\beta)$$

を得る. あとの計算は $I_i = \sqrt{I_i}$ の場合と同様であるのでここでは説明を略す.

重複を持った点における計算例 (cf. [16])

辞書式順序 $x \succ y$ を入れる.

$f_1 = x^6+(y^2-3)x^4+(y^4+y^2+3)x^2+y^6-y^4+y^2-1$, $f_2 = x^6+(3y^2-3)x^4+(3y^4+3y^2+3)x^2+y^6-3y^4+3y^2-1$ の生成するイデアル I の準素イデアル分解は $I_1 = \langle y^2, x^3-3x^2+3x-1\rangle$, $I_2 = \langle y^2, x^3+3x^2+3x+1\rangle$, $I_3 = \langle y+1, x^2\rangle$, $I_4 = \langle y-1, x^2\rangle$, $I_5 = \langle (2y^2+3)x^2-y^4-2y^2, 2x^4-x^2+y^4+2, x^2-2y^6-3y^4-2y^2-4\rangle$ で与えられる.

$Z_1 = V(I_1) = \{(1,0)\}$ に台を持つ代数的局所コホモロジー類 σ_1 の annihilator を求めることにより, $\mathfrak{L}_1$ の基底として次の 7 個の作用素を得る.

- $y\frac{\partial}{\partial y} + 2$
- $yx\frac{\partial}{\partial y} + 2x$
- $yx^2\frac{\partial}{\partial y} + 2x^2$
- $(-x^2+1)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{10}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3}$
- $(-yx^2+y)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{10}{3}yx^2 - \frac{10}{3}yx + \frac{2}{3}y$
- $(-x^2+x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{41}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}$
- $(-yx^2+yx)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{41}{12}yx^2 + \frac{1}{3}yx + \frac{1}{12}y$

これら 7 つの作用素の形式随伴を取り 1 への作用を計算することで, $E_{1,L}$ の基底 $\{1, x, x^2, y(5x^2+2x-1), y(37x-16)\}$ を得る. 点 $(1,0)$ の重複度は 6 であり, $E_{1,L} = E_{1,K}$ が成り立つので, $E_1 = E_{1,J} \oplus E_{1,L}$ を得る. 従って, これらを用いて Z_1 での留数計算が可能となる.

論文 [16] で与えた留数計算の方法に比べ, 効率が良くなっている. ([16] の第 5 節を参照).

4 E_{12} 孤立特異点

この節では, 例として E_{12} 型特異点を取り上げ, Grothendieck local residue の計算法を議論する. 内容に入る前にまず, E_{12} 型特異点を例として選んだ理由を述べておく. 今, f は X 上の正則関数 (の芽) であり, $f(z) = 0$ が原点を孤立特異点として持つものとする. $f_j = \dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ として, $I = \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle$, $Z = V(I)$, $\sigma_F = \left[\dfrac{1}{f_1 f_2 \cdots f_n}\right] \in \mathcal{H}^n_{[Z]}(\mathcal{O}_X)$ と置く. σ_F の直和成分で原点に台を持つものを σ_0 で表す. X 上の偏微分作用素のなす層を $\mathcal{D}_X$ と置き, σ_0 の annihilator のなす左 $\mathcal{D}_X$ イデアルを $Ann_{\mathcal{D}}(\sigma_0)$ と置く.

今, f が $f \notin \langle f_1, f_2, \cdots, f_n\rangle_0$ を満たし, quasihomogeneous とならないとすると, $Ann_{\mathcal{D}}(\sigma_0)$ は高々 1 階の annihilator のみでは $\mathcal{D}_X$ 上生成することができない ([17]). したがって, 本稿の §3 で述べたアルゴリズムを直接用いただけでは, 留数値 $\mathrm{Res}_0(g(z)\sigma_0(z)dz)$ を求めることができないことになる.

E_{12} 型特異点は, 典型的な semiquasihomogeneous 特異点であり, quasihomogeneous とならない特異点としては最も簡単なものといえる. このことが, この節で E_{12} を対象に留数計算を行なう理由である.

以下, $X = \mathbb{C}^2$, $f(x,y) = x^3 + y^7 + xy^5$ と置く. イデアル $I = \langle f_x, f_y\rangle$ の準素イデアル分解は, $I = I_0 \cap I_1$ となる. ここで, $I_0 = \langle -y^8, -5y^4x - 7y^6, 3x^2 + y^5\rangle$, $I_1 = \langle 25y + 147, 3125x + 151263\rangle$ であり, I_0 の零点集合 Z_0 は原点 O からなる. 原点 O の重複度 (Milnor 数) は 12 であり, $E_0 = \mathrm{Span}\{y^3x, y^2x, yx, x, y^7, y^6, y^5, y^4, y^3, y^2, y, 1\}$ である. $\mathfrak{L}_0$ は, 次の 14 個の微分作用素で生成される.

- $(84yx + 5y^4)\frac{\partial}{\partial x} + 42y^2\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{1953125}{155649627}y^3 - \frac{78125}{1058841}y^2 + \frac{3125}{7203}y - \frac{125}{49})x$
  $- \frac{488281250}{480490398549}y^7 + \frac{19531250}{3268642167}y^6 - \frac{390625}{22235661}y^5 + \frac{15625}{151263}y^4 - \frac{625}{1029}y^3 + \frac{25}{7}y^2 + 420y$
- $5y^2x\frac{\partial}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial}{\partial y} + (-\frac{78125}{22235661}y^3 + \frac{3125}{151263}y^2 - \frac{125}{1029}y + \frac{5}{7})x$
  $+ \frac{19531250}{68641485507}y^7 - \frac{781250}{466948881}y^6 + \frac{15625}{3176523}y^5 - \frac{625}{21609}y^4 + \frac{25}{147}y^3 + 22y^2$
- $y^4\frac{\partial}{\partial y} + (-\frac{6250}{151263}y^3 + \frac{250}{1029}y^2 - \frac{10}{7}y)x - \frac{390625}{466948881}y^7 + \frac{15625}{3176523}y^6 - \frac{625}{7203}y^5 + \frac{25}{49}y^4 + 6y^3$
- $y^5\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{250}{1029}y^3 - \frac{10}{7}y^2)x + \frac{15625}{3176523}y^7 - \frac{625}{21609}y^6 + \frac{25}{49}y^5 + 6y^4$
- $y^6\frac{\partial}{\partial y} - \frac{10}{7}y^3x - \frac{625}{21609}y^7 + \frac{25}{147}y^6 + 6y^5$
- $y^7\frac{\partial}{\partial y} + \frac{25}{147}y^7 + 8y^6$
- $(-252yx + 35y^4)\frac{\partial}{\partial x} + 30x\frac{\partial}{\partial y} + (-\frac{1953125}{155649627}y^3 + \frac{78125}{1058841}y^2 - \frac{3125}{7203}y + \frac{125}{49})x$
  $+ \frac{488281250}{480490398549}y^7 - \frac{19531250}{3268642167}y^6 + \frac{390625}{22235661}y^5 - \frac{15625}{151263}y^4 + \frac{625}{1029}y^3 - \frac{25}{7}y^2 - 504y$
- $-7y^2x\frac{\partial}{\partial x} + 2yx\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{15625}{3176523}y^3 - \frac{625}{21609}y^2 + \frac{25}{147}y + 7)x$
  $- \frac{3906250}{9805926501}y^7 + \frac{156250}{66706983}y^6 - \frac{3125}{453789}y^5 + \frac{125}{3087}y^4 - \frac{5}{21}y^3 - 14y^2$
- $y^2x\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{1250}{21609}y^3 - \frac{50}{147}y^2 + 6y)x + \frac{78125}{66706983}y^7 - \frac{3125}{453789}y^6 + \frac{125}{1029}y^5 - \frac{5}{7}y^4$
- $y^3x\frac{\partial}{\partial y} + (-\frac{50}{147}y^3 + 6y^2)x - \frac{3125}{453789}y^7 + \frac{125}{3087}y^6 - \frac{5}{7}y^5$
- $(-21y^2x + 5y^5)\frac{\partial}{\partial x} - 15x - 42y^2$
- $y^6\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{625}{7203}y^3 - \frac{25}{49}y^2)x + \frac{125}{1029}y^5 - \frac{5}{7}y^4$
- $y^7\frac{\partial}{\partial x} - \frac{25}{49}y^3x - \frac{5}{7}y^5$
- $y^3x\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{3125}{151263}y^3 - \frac{125}{1029}y^2 + \frac{5}{7}y)x + \frac{625}{21609}y^5 - \frac{25}{147}y^4 + 2y^3$

直接計算することで, $H_0 = \mathrm{Span}\{1, y^7\}$ となることが分かり, $\Psi_0 = \mathrm{Span}\{\sigma_0, \delta_0\}$ を得る. ここに, δ_0 は原点に台を持つデルタ函数である ([7], [17]). 従って, $E_{0,L}$ は 10 次元ベクトル空間となり, $E_{0,L} \subset E_{0,K}$ となる.

$g(x,y) \in E_0$ が $E_{0,J} \oplus E_{0,L}$ に属する必要十分条件は, $g(0,0) = 0$ である. 従って, $g(0,0) = 0$ なる場合には §3 のアルゴリズムにより留数値 $\mathrm{Res}_{(0,0)}(g(x,y)\sigma_F dx \wedge dy)$ を求めることができる. 例えば $g(x,y) = x^2 - y^3$ のときに §3 のアルゴリズムを用いて計算すると, $\mathrm{Res}_{(0,0)}(g(x,y)\sigma_F dx \wedge dy) = \frac{24462500}{68641485507}$ を得る.

しかし $g(x,y) \in E_0$ が $g(0,0) \neq 0$ のときには, §3 の方法では留数値を計算できないことになる.

2 階の偏微分作用素を用いる方法

2 階の偏微分作用素 P を次で決める.

$$
\begin{aligned}
P = {} & -\tfrac{2}{5}yx\tfrac{\partial^2}{\partial x^2} + (\tfrac{43}{21}x\tfrac{\partial}{\partial y} + (-\tfrac{968750}{66706983}y^2 + \tfrac{495625}{6353046}y + \tfrac{725}{6174})x + \tfrac{2375}{43218}y^3 - \tfrac{95}{294}y^2 - \tfrac{6}{5}y)\tfrac{\partial}{\partial x} + y\tfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\
& + (\tfrac{15625}{7411887}x + \tfrac{50}{147}y + \tfrac{232}{21})\tfrac{\partial}{\partial y} + (-\tfrac{104980468750}{1153657446916149}y^3 + \tfrac{23779296875}{70632088586703}y^2 - \tfrac{390625000}{480490398549}y - \tfrac{2265625}{1089547389})x \\
& - \tfrac{12207031250000}{3561340538630151963}y^7 + \tfrac{866699218750}{72680419155717387}y^6 - \tfrac{73730468750}{494424620106921}y^5 + \tfrac{3173828125}{10090298369529}y^4 \\
& + \tfrac{100000000}{68641485507}y^3 - \tfrac{19859375}{466948881}y^2 + \tfrac{1669375}{6353046}y + \tfrac{10175}{6174}
\end{aligned}
$$

P は $P\sigma_0 = 0$ を満たすが, 更に, $\mathcal{A}nn_D(\sigma_0) = \langle P, I_0\rangle$ となることが示せる ([6]). 今,

$$P^*y^3x, P^*y^4, P^*x^3, P^*yx^2, P^*y^2x, P^*y^3, P^*x^2, P^*yx, P^*y^2, P^*x, P^*y, P^*1 \mod I_0$$

を計算すると, これらは 11 次元ベクトル空間を張るので,

$$E_{0,K} = \mathrm{Span}\{P^*y^4, P^*x^3, P^*yx^2, P^*y^2x, P^*y^3, P^*x^2, P^*yx, P^*y^2, P^*x, P^*y, P^*1\}$$

となる.

例えば, $g(x,y) = x^2 - y^3 + 3$ に対し, 直和分解 $g(x,y) = g_J(x,y) + P^*(\varphi(x,y))$ を求めると,

$$
\begin{aligned}
g_J(x,y) = {} & \tfrac{25932415540625}{872165029868608644}j_F(x,y), \\
\varphi(x,y) = {} & ((-\tfrac{3}{7}y^2 - \tfrac{10128105965686211}{488417392415641500}y + \tfrac{1426436669828957}{744565180438066820})x \\
& + \tfrac{150248422859291972609}{236414336092694976 6864}y^7 - \tfrac{50834018866893010967 15}{72981105551814939303 09168}y^6 + \tfrac{18515424115747310032 7724241}{64369335096700776465 32686176}y^5 \\
& - \tfrac{12181245152269788588 52063176125}{32455662449107498501 5824569680096}y^4 + \tfrac{2352391872836582}{8140289873594025}y^3 + \tfrac{147282720226207565}{2345380318379910483}y^2 \\
& + \tfrac{3395437780641652625}{3447709068018468410 01}y + \tfrac{847590950151676211875}{1064307789297301198170087}
\end{aligned}
$$

となる.

原点での重複度は 12 に等しいので, 求める留数値は, $\frac{25932415540625}{72680419155717387}$ に等しいことが分かる.

この 2 階の作用素 P はコホモロジー類 σ_0 を決定するのにも用いることができる. 実際, 微分方程式を解くことで,

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 = \Big[& \tfrac{30517578125}{218041257467152161}\tfrac{1}{xy} - \tfrac{1220703125}{1483273860320763}\tfrac{1}{xy^2} + \tfrac{48828125}{10090298369529}\tfrac{1}{xy^3} \\
& - \tfrac{1953125}{68641485507}\tfrac{1}{xy^4} + \tfrac{78125}{466948881}\tfrac{1}{xy^5} - \tfrac{3125}{3176523}\tfrac{1}{xy^6} + \tfrac{125}{21609}\tfrac{1}{xy^7} \\
& - \tfrac{5}{147}\tfrac{1}{x^3y^8} - \tfrac{9765625}{1441471195647}\tfrac{1}{x^2y} + \tfrac{390625}{9805926501}\tfrac{1}{x^2y^2} - \tfrac{15625}{66706983}\tfrac{1}{x^2y^3} \\
& + \tfrac{625}{453789}\tfrac{1}{x^2y^4} - \tfrac{25}{3087}\tfrac{1}{x^2y^5} + \tfrac{1}{21}\tfrac{1}{x^2y^6} + \tfrac{3125}{9529569}\tfrac{1}{x^3y} - \tfrac{125}{64827}\tfrac{1}{x^3y^2} + \tfrac{5}{441}\tfrac{1}{x^3y^3} - \tfrac{1}{63}\tfrac{1}{x^4y}\Big]
\end{aligned}
$$

となる.

ここで用いた 2 階の微分作用素 P は, §2 で与えた $\mathfrak{L}$-アルゴリズムを 2 階の作用素の場合に拡張したアルゴリズムを用いて構成した. この構成法についてはここでは略す.

1 階の微分作用素を用いる方法 (remedy 法)

正規列 $F = \{f_x, f_y\}$ に対するコホモロジー類 $\sigma_F = \left[\dfrac{1}{f_xf_y}\right]$ の代わりに $F' = \{f_x^2, f_y\}$ を取り, コホモロジー類 $\sigma_{F'} = \left[\dfrac{1}{f_x^2f_y}\right]$ を考える. $\sigma_F = f_x\sigma_{F'}$ より,

$$\mathrm{Res}_{(0,0)}(g(x,y)\sigma_F dx \wedge dy) = \mathrm{Res}_{(0,0)}(g(x,y)f_x(x,y)\sigma_{F'} dx \wedge dy)$$

を得る. この関係式に注目して留数を計算する. $\sigma_{F'} = \sigma_0' + \sigma_1'$ と直和分解する. ここで, $\sigma_0' \in H^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X)$ である. $I_{F'} = \langle f_x^2, f_y\rangle$ の準素イデアル分解は $I_{F'} = I_0' \cap I_1'$ となる. ここで, $I_0' = \langle y^{12}, 5y^4x + 7y^6, 225x^4 + 25y^{10} + 294y^9\rangle$ であり, 全次数辞書式順序 $(x \succ y)$ で計算すると $\mathbb{Q}[x,y]/I_{F'}$ の単項式基底は

$$y^9x, y^8x, y^7x, y^6x, y^5x, y^4x, y^3x, y^2x, yx, x, y^{13}, y^{12}, y^{11}, y^{10}, y^9, y^8, y^7, y^6, y^5, y^4, y^3, y^2, y, 1$$

で与えられる. σ_0' は $I_0'\sigma_0' = 0$ を満たす. σ_0' の満たす 1 階の微分作用素を求めると, $\mathfrak{L}_0'$ は 32 次元となり, $H_0' = \{1, y^{13}\}$ を得る. 従って, $E_0'(\cong \mathbb{Q}[x,y]/I_0')$ は 24 次元, $E_{0,L'} = \mathrm{Span}\{P^*1 \mid P \in \mathfrak{L}_0'\}$ は 22 次元となる. $h(0,0) = 0$ であれば $h(x,y)\sigma_{F'}dx \wedge dy$ の留数値は計算できる. 特に, $h(x,y) = g(x,y)f_x(x,y)$ を考えれば, $f_x(0,0) = 0$ なので, $\mathrm{Res}_{(0,0)}(g(x,y)f_x(x,y)\sigma_{F'}dx \wedge dy)$ は計算できることが分かる. 実際,

$g(x,y) = x^2 - y^3 + 3$ の時に §3 のアルゴリズムを用いて計算してみると, 確かに $\frac{25932415540625}{726804191557l7387}$ となり, 2 階の微分作用素を用いた方法と同じ結果を得る.

ここでは, F の代わりに $F' = \{f_x^2, f_y\}$ を用いたが, $F'' = \{f_x, f_y^2\}$ を考えて対応する代数的局所コホモロジー類 $\sigma_{F''}$ を用いても, 多変数留数を計算することができる.

この節の内容は, semiquasihomogeneous singularity に関する中村弥生氏との共同研究に基づいて得たものである. ホロノミック系との関連については [6], [7], [17] を参照されたい.

5 $\mathfrak{R}$-アルゴリズム

第 2 節で与えた $\mathfrak{L}$-アルゴリズムを用いると, $E_{i,L}$ は

$$E_{i,L} = \mathrm{Span}\{P^*1 \mid P \in \mathfrak{L}_i\}$$

と計算できる.

$$P = p_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + p_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n} + p_0(z)$$

の時,

$$P^*1 = p_0(z) - \frac{\partial p_1}{\partial z_n}(z) - \cdots - \frac{\partial p_n}{\partial z_n}(z)$$

となる. 留数計算をするためには, これらの計算を行なった後, $E_{i,L}$ の基底を求めることが必要となる.

以下に述べる $\mathfrak{R}$-アルゴリズムを用いれば, 1 階の annihilator の構成と $E_{i,L}$ の基底の構成を同じに行なうことができる. まず,

$$\mathfrak{R}_i = \{P = \frac{\partial}{\partial z_1}p_1(z) + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_n}p_n(z) + p_0(z) \mid P\sigma_i = 0, p_k(z) \in E_{I_i}, k = 0, 1, \ldots, n\}$$

と置く. 偏微分演算と多項式倍の順序が通常と逆になっていることに注意しよう.

$\mathfrak{R}$-アルゴリズム

- イデアル I_i のグレブナ基底 $\mathrm{Gr}(I_i)$ から標準的単項式基底 Mb_{I_i} を計算. 剰余空間 $\mathbb{Q}[z_1, z_2, ..., z_n]/I_i$ をベクトル空間 $E_{I_i} = \mathrm{Span}\{e(z) \mid e(z) \in Mb_{I_i}\}$ と同一視する.
- $W_i = \{w = \frac{\partial}{\partial z_1}a_1(z) + \cdots \frac{\partial}{\partial z_n}a_n(z) \mid wg \in I_i, \forall g \in Gr(I_i)\}$ を求める.
- イデアル $I^{(2)} = \langle f_1^2, f_2^2, \ldots, f_n^2\rangle$ の準素イデアル分解 $I^{(2)} = I_1^{(2)} \cap I_2^{(2)} \cap \cdots \cap I_l^{(2)}$ とイデアル $I_i^{(2)}$ のグレブナ基底 $Gr(I_i^{(2)})$ を求める. (但しここでイデアル $I_i^{(2)}$ は $\sqrt{I_i^{(2)}} = \sqrt{I_i}$ を満たすもの.)
- $w \in W_i$ に対し, $w = w_P$ であり, $P \in \mathfrak{R}_i$ となる P を求める. 但し, $P = \frac{\partial}{\partial z_1}p_1(z) + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_n}p_n(z) + p_0(z)$ に対し, $w_P = \frac{\partial}{\partial z_1}p_1(z) + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_n}p_n(z)$ と置いた.

$P \in \mathfrak{R}_i$ とすると, $P^*1 = p_0(z)$ であるので,

$$E_{i,L} = \mathrm{Span}\{p_0(z) \mid P = \frac{\partial}{\partial z_1}p_1(z) + \cdots + \frac{\partial}{\partial z_n}p_n(z) + p_0(z) \in \mathfrak{R}_i\}$$

となる. つまり, $\mathfrak{R}$-アルゴリズムを用いれば, $E_{i,L}$ の基底の構成が 1 階の annihilator の構成と同時にできることになる.

作用素の構成例

$\succ$ を全次数辞書式順序 $(x \succ y)$ とする. $f_1 = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + y^5$, $f_2 = 5y^4x + 7y^6$ の生成するイデアル I のグレブナ基底は

$\{3x^4-6x^3+3x^2+y^5, -21yx^4+42yx^3-21yx^2+5y^4x,$
$-3087x^8+12348x^7-18522x^6+12348x^5-3087x^4-125y^4x^3\}$
で与えられ, 準素イデアル分解は $I=I_1\cap I_2\cap I_3$ で与えられる. 但し,

$$\begin{aligned}
&I_1=\langle 5x+7y^2, 147x^2-294x+25y+147\rangle,\ \sqrt{I_1}=\langle 5x+7y^2, 147x^2-294x+25y+147\rangle,\\
&I_2=\langle x^2-2x+1, y^4\rangle,\ \sqrt{I_2}=\langle y, x-1\rangle,\\
&I_3=\langle 5x^3+7y^2x^2, yx^3, x^4, 6x^3-3x^2-y^5, 21yx^2-5y^4x\rangle,\ \sqrt{I_3}=\langle y, x\rangle
\end{aligned}$$

である.

$Z_1=V(I_1)$ は全て単純点, $Z_2=V(I_2)$ の重複度は 8 であり, $Z_3=V(I_3)$ の重複度は 12 である.

$\mathfrak{N}$-アルゴリズムを用いて, $V(I_2)$ に台を持つ局所コホモロジー類 σ_2 の annihilator を構成すると, $\mathfrak{N}_2$ の基底として次の 10 個の作用素を得る.

- $\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{15}{28}y^2x+\frac{5}{28}y^2)+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{5}{14}yx-\frac{5}{14}y)+y^3x+\frac{5}{14}y,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(-y^3x)+y^2x,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{8}y^2x+\frac{1}{8}y^2)+\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{4}yx+\frac{1}{4}y)+yx-\frac{3}{4}y,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{3}yx+\frac{14}{15}y^3)+x,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{15}{56}y^2x-\frac{5}{56}y^2)+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{5}{28}yx-\frac{5}{28}y)+y^3+\frac{15}{28}y,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(-y^3)+y^2,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{14}{15}y^3x+\frac{28}{15}y^3-\frac{1}{3}y)+1,$
- $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{15}{14}y^2x-\frac{5}{7}y^2)+\frac{\partial}{\partial x}((-y^3-\frac{5}{7}y)x+y^3+\frac{5}{7}y),$
- $\frac{\partial}{\partial y}(3y^3x-2y^3)+\frac{\partial}{\partial x}(-y^2x+y^2),$
- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{49}{15}y^3+y)x+\frac{7}{3}y^3-\frac{2}{3}y)+\frac{\partial}{\partial x}(-x+1).$

$E_{2,L}$ を求めるにはこれらの作用素の 0 階の部分を取り出すだけで良い.

$$E_{2,L}=\mathrm{Span}\{1, y^2, y^3+\frac{15}{28}y, x, yx-\frac{3}{4}y, y^2x, y^3x+\frac{5}{14}y\}$$

を得る. $\dim E_{2,L}=7$ であるので, $E_{2,L}=E_{2,K}$ が成り立つ.

$\mathfrak{N}$-アルゴリズムを用いて $\mathfrak{N}_3$ の基底を求めると, 次の 14 個の作用素を得る.

- $\frac{\partial}{\partial y}((\frac{12006035125}{951546390848}y^3-\frac{130408046055}{3806185563392}y^2-\frac{132355125}{951546390848}y+\frac{77583641625}{7612371126784})x$
  $-\frac{25310225535}{1903092781696}y^7+\frac{5006503670077}{7136597931360}y^6+\frac{77583641625}{3806185563392}y^5-\frac{94539375}{1903092781696}y^4+\frac{65035202715}{7612371126784}y^2)$
  $+\frac{\partial}{\partial x}((\frac{926485875}{1903092781696}y^2-\frac{130408046055}{1903092781696}y)x+\frac{12282066825}{951546390848}y^4)+y^3x+\frac{16343210835}{475773195424}y,$
- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{875435639243}{951546390848}y^3+\frac{6615974384061}{19030927816960}y^2-\frac{4335680181}{951546390848}y-\frac{7275075935043}{38061855633920})x$
  $+\frac{5179601398853}{9515463908480}y^7+\frac{4891708563}{475773195424}y^6-\frac{4119345081383}{3806185563392}y^5-\frac{3096914415}{1903092781696}y^4-\frac{86616850795293}{190309278169600}y^2)$
  $+\frac{\partial}{\partial x}((\frac{30349761267}{1903092781696}y^2+\frac{6615974384061}{9515463908480}y)x-\frac{263747364055}{951546390848}y^4)+y^2x+\frac{13384244718747}{11894329885600}y,$
- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{46560903725}{951546390848}y^3-\frac{811437004209}{3806185563392}y^2+\frac{1107954925}{951546390848}y+\frac{211521561065}{53286597887488})x$
  $+\frac{635621530357}{5709278345088}y^7-\frac{8591435825}{1427319586272}y^6-\frac{4123167271045}{79929896831232}y^5+\frac{791396375}{1903092781696}y^4+\frac{407131709917}{7612371126784}y^2)$
  $+\frac{\partial}{\partial x}((-\frac{7755684475}{1903092781696}y^2+\frac{140109386639}{1903092781696}y)x+\frac{219769342315}{19982474207808}y^4)+yx-\frac{136810274139}{475773195424}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((\frac{26075235319637}{14273195862720}y^3 - \frac{100479286556229}{475773195424000}y^2 - \frac{5008472007349}{14273195862720}y + \frac{58460679687487}{190309278169600})x$
  $- \frac{2830625437061863}{713659793136000}y^7 + \frac{193932729249}{2378865977120}y^6 + \frac{48992754458739}{19030927816960}y^5 - \frac{11940002529}{1903092781696}y^4 - \frac{7}{30}y^3 + \frac{1026715700324769}{951546390848000}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((\frac{18407242211603}{28546391725440}y^2 - \frac{100479286556229}{237886597712000}y)x + \frac{34743651830461}{71365979313600}y^4) + x - \frac{46311820688427}{11894329885600}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{296501043447}{951546390848}y^3 + \frac{80513927634357}{95154639084800}y^2 + \frac{3268642167}{951546390848}y - \frac{1916005613571}{7612371126784})x$
  $- \frac{124250786209347}{47577319542400}y^7 - \frac{17921258481}{475773195424}y^6 - \frac{1916005613571}{3806185563392}y^5 + \frac{2334744405}{1903092781696}y^4 - \frac{40152734156241}{190309278169600}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((-\frac{22880495169}{1903092781696}y^2 + \frac{80513927634357}{47577319542400y})x - \frac{1516589611551}{4757731954240}y^4) + y^7 - \frac{10090298369529}{11894329885600}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((\frac{50425347525}{951546390848}y^3 - \frac{547713793431}{3806185563392}y^2 - \frac{555891525}{951546390848}y + \frac{325851294825}{7612371126784})x$
  $- \frac{1057849338095}{1903092781696}y^7 + \frac{3047833075}{475773195424}y^6 + \frac{325851294825}{3806185563392}y^5 - \frac{397065375}{1903092781696}y^4 + \frac{273147851403}{7612371126784}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((\frac{3891240675}{1903092781696}y^2 - \frac{547713793431}{1903092781696}y)x + \frac{51584680665}{951546390848}y^4) + y^6 + \frac{68641485507}{475773195424}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{3174867659285}{951546390848}y^3 + \frac{1821872297207403}{475773195424000}y^2 - \frac{45288293463}{4757731954240}y - \frac{286896987585873}{190309278169600})x$
  $- \frac{1195652860051293}{237886597712000}y^7 - \frac{2823381193853}{7136597931360}y^6 - \frac{113330325299037}{19030927816960}y^5 - \frac{6469756209}{1903092781696}y^4 - \frac{2381092144888527}{951546390848000}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((\frac{317018054241}{9515463908480}y^2 + \frac{1821872297207403}{237886597712000}y)x - \frac{48925727787489}{23788659771200}y^4) + y^5 + \frac{139804961920281}{59471649428000}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{54364822575}{951546390848}y^3 - \frac{945139197723}{3806185563392}y^2 + \frac{3096914415}{951546390848}y + \frac{1039296562149}{7612371126784})x$
  $- \frac{739943056979}{1903092781696}y^7 - \frac{3494077545}{475773195424}y^6 - \frac{863796219547}{3806185563392}y^5 + \frac{2212081725}{1903092781696}y^4 + \frac{12373835827899}{38061855633920}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((-\frac{21678400905}{1903092781696}y^2 - \frac{945139197723}{1903092781696}y)x + \frac{188390974325}{951546390848}y^4) + y^4 - \frac{1912034959821}{2378865977120}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((\frac{33257788375}{951546390848}y^3 - \frac{5458278887435}{26643298943744}y^2 - \frac{791396375}{951546390848}y - \frac{1057607805325}{373006185212416})x$
  $- \frac{3178107651785}{39964948415616}y^7 + \frac{6136739875}{1427319586272}y^6 + \frac{20615836355225}{559509277818624}y^5 - \frac{952111673973}{1903092781696}y^4 - \frac{2035658549585}{53286597887488}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((\frac{5539774625}{1903092781696}y^2 - \frac{700546933195}{13321649471872}y)x - \frac{1098846711575}{139877319454656}y^4) + y^3 + \frac{97721624385}{475773195424}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{3725033617091}{2854639172544}y^3 + \frac{14354183793747}{95154639084800}y^2 + \frac{11940002529}{951546390848}y - \frac{8351525669641}{38061855633920})x$
  $+ \frac{404375062437409}{142731958627200}y^7 - \frac{27704675607}{475773195424}y^6 - \frac{6998964922677}{3806185563392}y^5 + \frac{8528573235}{1903092781696}y^4 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{146673671474967}{190309278169600}y^2)$
  $+ \frac{\partial}{\partial x}((-\frac{2629606030229}{5709278345088}y^2 + \frac{14354183793747}{47577319542400}y)x - \frac{4963378832923}{14273195862720}y^4) + y^2 + \frac{6615974384061}{2378865977120}y,$

- $\frac{\partial}{\partial y}((-\frac{5}{28}y^2 - \frac{25}{392})x - \frac{5}{42}y^7 - \frac{7}{5}y^6 - \frac{25}{588}y^5 - \frac{1}{2}y^4 - \frac{5}{56}y^2) + \frac{\partial}{\partial x}((y^3 + \frac{5}{14}y)x - \frac{25}{294}y^4),$

- $\frac{\partial}{\partial y}((3y^3 - \frac{441}{100}y^2 + \frac{63}{40})x + \frac{441}{50}y^7 + \frac{21}{4}y^5 + \frac{441}{200}y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{441}{50}yx + y^7 + \frac{21}{10}y^4),$

- $\frac{\partial}{\partial y}((\frac{3}{4}y^2 - \frac{15}{56})x + \frac{1}{2}y^7 - \frac{5}{28}y^5 - \frac{3}{8}y^2) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{3}{2}yx + y^6 - \frac{5}{14}y^4),$

- $\frac{\partial}{\partial y}((\frac{28}{5}y^3 - \frac{3087}{250}y^2 + y + \frac{441}{100})x + \frac{3087}{125}y^7 + \frac{2}{3}y^6 + \frac{147}{10}y^5 + \frac{7}{5}y^3 + \frac{3087}{500}y^2) + \frac{\partial}{\partial x}((-\frac{21}{5}y^2 - \frac{3087}{125}y)x + y^5 + \frac{147}{25}y^4).$

れらの作用素の 0 階部分を取り出し, $E_{3,L}$ の基底

- $y^2 + \frac{6615974384061}{2378865977120}y,$
- $y^3 + \frac{97721624385}{475773195424}y,$
- $y^4 - \frac{1912034959821}{2378865977120}y,$
- $y^5 + \frac{139804961920281}{59471649428000}y,$
- $y^6 + \frac{68641485507}{475773195424}y,$
- $y^7 - \frac{10090298369529}{11894329885600}y,$
- $x - \frac{46311820688427}{11894329885600}y,$
- $yx - \frac{136810274139}{475773195424}y,$
- $y^2x + \frac{13384244718747}{11894329885600}y,$

- $y^3x + \frac{16343210835}{475773195424}y$

を得る.

$\dim E_{3,L} = 10$ であるが $\dim E_{3,K} = 11$ であるので, $E_{3,L} \neq E_{3,K}$ となることが直ちに分かる.

E_{12} 特異点の時と同様に, 正規列 $F = \{f_1(x,y), f_2(x,y)\}$ の代わりに例えば $F' = \{f_1^2(x,y), f_2(x,y)\}$ を取り, 対応するコホモロジー類 $\sigma_{F'}$ の 1 階の annihilator を用いれば, Z_3 においても多変数留数の計算をすることが可能となる.

これらのことが示すように, 多変数留数計算を行なう際は $\mathfrak{L}$-アルゴリズムを用いるよりも $\mathfrak{R}$-アルゴリズムを用いる方が無駄な計算を行なう必要がなく, 効率が良い.

本稿での計算は, 数式処理システム Risa/Asir を用いて行なった.

参考文献

[1] J.C. Faugeré, P. Gianni, D. Lazard and T. Mora, ***Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering***, J. Symbolic Computation **16** (1993), 329–344.

[2] M. Kashiwara, ***On the maximally overdetermined system of linear differenial equations,I***, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 563–579.

[3] M. Kashiwara, ***On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II***, Inventiones Math. **49** (1978), 121–135.

[4] 中村弥生, ホロノミック系を用いた多変数留数計算アルゴリズム (2), 第 40 回多変数関数論サマーセミナー予稿集 (2001).

[5] 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジー類の満たすホロノミック系の構成法について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199** 「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 70–89.

[6] 中村弥生, 田島慎一, Unimodal 例外型特異点における代数的局所コホモロジー類, 京都大学数理解析研究所講究録 **1211** 「微分方程式の漸近解析と超局所解析」(2001), 155–165.

[7] Y. Nakamura, S. Tajima, ***A study of semiquasihomogeneous singularities by using holonomic system***, 京都大学数理解析研究所講究録「ニュートン図形と特異点」.

[8] M. Noro and T. Takeshima, ***Risa/Asir–a computer algebra system***, in Proc. Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (eds P.S. Wang), ACM New York (1992), 387–396 (ftp: endeavor.fujitsu.co.jp/pub/isis/asir).

[9] K. Saito, ***Einfach-elliptische Singularitäten***, Inventiones math. **23** (1974), 289–325.

[10] T. Shimoyama and K. Yokoyama, ***Localization and primary decomposition of polynomial ideals***, J. Symbolic Computation **22** (1996), 247–277.

[11] S. Tajima, ***Grothendieck residue calculus and holonomid D-modules***, Proc. of the Fifth International Conference on Complex Analysis, Beijing 1997, 301–304.

[12] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, ***Multidimensional local residues and holonomic D-modules***, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** 「特異点と複素解析幾何」(1998), 59–70.

[13] S. Tajima, ***An algorithm for computing Grothendieck residues***, Proc. Hayama Symposium on Several Complex Variables, (1998), 115–120.

[14] 田島慎一, 中村弥生, **多変数有理関数の留数計算について**, 京都大学数理解析研究所講究録 **1085** 「数式処理における理論と応用の研究」(1999), 71–81.

[15] S. Tajima and Y. Nakamura, ***Computing point residues for a shape basis case via differential operators***, 京都大学数理解析研究所講究録 **1158** 「超局所解析とその周辺」(2000), 87–97.

[16] 田島慎一, **偏微分作用素を用いた多変数留数計算アルゴリズムと中国剰余定理**, 京都大学数理解析研究所講究録 **1199** 「数式処理における理論と応用の研究」(2001), 51–69.

[17] 田島慎一, 中村弥生, Milnor algebra に付随した holonomic 系について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1212** 「微分方程式論における積分公式と Twisted cohomology」(2001), 133–143.