数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 60-66

FUZZY 数値写像の凸性と最小化問題

東京工業大・情報理工学　雨宮 将人 (Masato Amemiya)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1. 緒言

Fuzzy 集合の概念は, Zadeh [13] により提唱され, 人間の主観的判断や主観的評価が不可避に内蔵する曖昧さに着目し, 精緻な理論的枠内で扱えるようこれを数学的に定量化し, 定義したものである. 以来, 種々の分野で様々な fuzzy 概念が生まれ, 議論がなされてきた.

なかでも, Dubois と Prade [4] により導入された fuzzy 数の概念は, 曖昧さを許容したシステムの記述を可能にし, より柔軟な意志決定や政策立案を実現するのに適している. 実際, この応用の 1 つとして最適化問題への利用が考えられ, 形式的には次のような fuzzy 最適化問題を起こした:

> F をある集合 C で定義された fuzzy 数に値をとる写像とする. このとき, 全ての $x \in C$ に対し, $F(x_0) \preceq F(x)$ を満たす $x_0 \in C$ を求めよ.

ただし, $\preceq$ は fuzzy 数間の半順序関係 (次節を参照) を表す.

Dubois-Prade [5] を初め, Ramík-Řimánek [9], Campos-Verdegay [3], Ramík-Rommelfanger [10, 11] などでは, 主として線形計画問題からの類推で (第 5 節を参照) 上の問題が議論された. これとは別に, Nanda-Kar [7] などでは, fuzzy 数に値をとる写像に対して凸性が定義され, 凸解析の立場から上の問題を考察した.

本稿では, fuzzy 数に値をとる写像 F に関して, F の凸性と最小化問題とを, 高橋と著者が [1] において示した結果をもとに議論する. 初めに線形空間において, F が凸であるための必要十分条件を述べ, その特徴付けを与える. 次に線形位相空間において, compact な凸集合で定義された F に対して最小値定理を述べる. これは上の問題の解の存在に関連した定理である.

2. 準備

以下では, 全ての線形空間は real であるとし, $\mathbf{R}$ は実数空間を表すものとする. また C, D が線形位相空間の部分集合であるとき, $C+D=\{c+d : c \in C,\ d \in D\}$ と定め, 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ 対し, $\lambda C = \{\lambda c : c \in C\}$ と定める. さらに cl$C$ は C の閉包を表すものとする.

X を空でない集合とする. このとき, X における **fuzzy 集合**とは, X から $[0,1]$ への関数である.

A を $\mathbf{R}$ における fuzzy 集合する. このとき, 各 $r \in [0,1]$ に対し, A の r**-level 集合**を A_r で表し, 次のように定義する:

$$\begin{cases} A_r = \Big\{x \in \mathbf{R} : A(x) \geq r\Big\}, & \forall r \in (0,1], \\ A_0 = \mathrm{cl}\Big\{x \in \mathbf{R} : A(x) > 0\Big\}, & r = 0. \end{cases}$$

このとき, A が**凸**であるとは, 全ての $r \in (0,1]$ に対し, A_r が凸であるときと定める.

A, B を $\mathbf{R}$ における fuzzy 集合とし, $\lambda \in \mathbf{R}$ とする. このとき, **2 項演算** $A \oplus B$ と λA を次のように定める:

$$(A \oplus B)(z) = \sup_{z=x+y, x,y \in \mathbf{R}} \min\Big(A(x), B(y)\Big) \ (\forall z \in \mathbf{R}),$$

$$(\lambda A)(z) = \sup_{z=xy, x,y \in \mathbf{R}} \min\Big(\mathbf{1}_{\{\lambda\}}(x), A(y)\Big) \ (\forall z \in \mathbf{R}).$$

このとき, 任意の $r \in [0,1]$ に対し, $[A \oplus B]_r$ および $[\lambda A]_r$ で $A \oplus B$ と λA の r-level 集合をそれぞれ表すことにする. $A \oplus B$ については次のことが成り立つ ([8]):

事実 1. ***A* と *B* が凸ならば, *A* ⊕ *B* も凸である.**

A を $\mathbf{R}$ における fuzzy 集合とする. このとき, A が **fuzzy 数**であるとは, 以下の条件を満たすときをいう ([4, 6]):

(1) A が凸;
(2) $A(m) = 1$ を満たす $m \in \mathbf{R}$ が唯 1 つ存在する;
(3) A_0 が $\mathbf{R}$ の有界集合である.

以下では, $\mathcal{F}$ は **fuzzy 数全体からなる集合**を表すことにする. このとき, 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し, $\mathbf{1}_{\{\lambda\}} \in \mathcal{F}$ である. ただし, $\mathbf{1}_E$ は**集合** E **の特性関数**を表す. また, 次が成り立つことに注意する:

事実 2. **全ての** $A \in \mathcal{F}$ **に対し,** A_0 **は** $\mathbf{R}$ **の compact な凸集合であり, 各** $A, B \in \mathcal{F}$ **に対し,** $A \oplus B \in \mathcal{F}$**. さらに, 任意の** $A \in \mathcal{F}$ **と任意の** $\lambda \in \mathbf{R}$ **に対し,** $[\lambda A]_r = \lambda A_r$ $(\forall r \in [0,1])$ **であり, 従って** $\lambda A \in \mathcal{F}$ **である.**

$A, B \in \mathcal{F}$ とする. このとき, A と B の**半順序関係** $\preceq$ を次のように定義する ([9]):

$$A \preceq B \iff \text{全ての } r \in [0,1] \text{ に対し, } \sup A_r \le \sup B_r \text{ かつ } \inf A_r \le \inf B_r.$$

$A \in \mathcal{F}$ とし, $\lambda \in \mathbf{R}$ とする. 表現の便宜上, 以下では $A \preceq \mathbf{1}_{\{\lambda\}}$ および $A \oplus \mathbf{1}_{\{\lambda\}}$ をそれぞれ $A \preceq \lambda$ および $A \oplus \lambda$ と書くことにする.

C を線形空間の凸集合とし, f を C 上の実数値関数とする. このとき, f **が凸であるとは**, 任意の $x, y \in C$ と任意の $\lambda \in (0,1)$ に対し,

$$f\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

が常に成り立つときをいう. また, f **が凹であるとは** $-f$ が凸であるときをいう. さらに f **が quasi-concave であるとは**, 任意の $c \in \mathbf{R}$ に対し, 集合 $\Big\{x \in C : f(x) \ge c\Big\}$ が C の凸集合であるときと定める. C, I をある集合とし, φ を $C \times I$ 上の実数値関数とする. このとき, φ **が第 2 変数に関し concavelike であるとは**, 任意の $y_1, y_2 \in I$ と任意の $\lambda \in (0,1)$ に対し, $y_0 \in I$ が存在して, 全ての $x \in C$ に対し,

$$\varphi(x, y_0) \ge \lambda \varphi(x, y_1) + (1-\lambda) \varphi(x, y_2)$$

を満たすときをいう.

3. Fuzzy 数値写像の凸性

X を空でない集合とする. このとき, X から $\mathcal{F}$ への写像, すなわち X で**定義され, fuzzy 数に値をとる写像を X 上の fuzzy 数値写像という.** C を線形空間の凸集合とし, F を C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, F **が凸であるとは**, 任意の $x, y \in C$ と任意の $\lambda \in (0,1)$ に対し,

$$F\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) \preceq \lambda F(x) \oplus (1-\lambda)F(y)$$

が常に成り立つときをいう.

この節では, fuzzy 数値写像の凸性を, 高橋と著者が [1] で示した結果を取り上げながら議論する. 簡潔を期して, 定理等は述べるだけにとどめ, 証明は [1] を参照していただきたい.

まず, 次の補助定理を用意する.

補助定理 3.1 ([1]). 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し,

$$\lim_{r\to+0} \sup A_r = \sup A_0, \quad \lim_{r\to+0} \inf A_r = \inf A_0.$$

補助定理 3.2 ([1]). 任意の $A \in \mathcal{F}$ と任意の $r \in (0,1]$, に対し,

$$\lim_{\delta\to r-0} A_\delta = \inf_{\delta<r} \sup A_\delta = \sup A_r, \quad \lim_{\delta\to r-0} A_\delta = \sup_{\delta<r} \inf A_\delta = \inf A_r.$$

補助定理 3.1 と補助定理 3.2 とを用いると, 次の補助定理が得られる.

補助定理 3.3 ([1]). 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ と任意の $r \in [0,1]$ に対し,

$$\sup[A \oplus B]_r = \sup A_r + \sup B_r, \quad \inf[A \oplus B]_r = \inf A_r + \inf B_r.$$

F をある集合 X 上の fuzzy 数値写像とする. 以下では, 任意の $r \in [0,1]$ に対し, f_r^F および g_r^F は, それぞれ次式で定められる X 上の実数値関数を表すことにする: 各 $x \in X$ に対し,

$$f_r^F(x) = \sup\Big[F(x)\Big]_r, \quad g_r^F(x) = \inf\Big[F(x)\Big]_r.$$

ただし, $\Big[F(x)\Big]_r$ は $F(x) \in \mathcal{F}$ の r-level 集合を表す.

[1] では, この関数に注目し, 上述の補助定理を用いて, fuzzy 数値写像の凸性に関する次の定理を証明した.

定理 3.1 ([1]). C を線形空間の凸集合とし, F を C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, F が凸 $\Longrightarrow$ 任意の $r \in [0,1]$ に対し, f_r^F は凸.

定理 3.2 ([1]). C を線形空間の凸集合とし, F を C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, F が凸 $\Longrightarrow$ 任意の $r \in [0,1]$ に対し, g_r^F は凸.

定理 3.3 ([1]). C を線形空間の凸集合とし, F を C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, 任意の $r \in [0,1]$ に対し, f_r^F と g_r^F がともに凸 $\Longrightarrow$ F は凸.

一見, $A : \mathbf{R} \to [0,1]$ に連続性等が仮定されないと, 成立しないように思える結果であるが, fuzzy 数の定義から, 全ての $r \in [0,1]$ に対し, A の r-level 集合 A_r が $\mathbf{R}$ の有界で連結な区間となるので, 証明が可能になった.

さて, ここに至って fuzzy 数値写像 F に対し, その凸性の特徴付けが次のようになされたことが分かる:

F が凸 $\Longleftrightarrow$ 任意の $r \in [0,1]$ に対し, f_r^F および g_r^F がともに凸.

4. L-R FUZZY 数と FUZZY 数値写像の凸性

この節では, Ramík-Římánek [9] において導入された L-R fuzzy 数の概念を用いて fuzzy 数値写像の凸性を議論する. この概念は, fuzzy 数間の演算や順序関係の計算の手間を軽減し, 議論を簡略化することなどで, 応用面での有効性が認められている概念である.

S を $\mathbf{R}$ から $(-\infty, 1]$ への関数とする. このとき, S が**型関数**であるとは, 次を満たすときをいう:

(1) S は quasi-concave である;

(2) $S(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$;

(3) 集合 $\Big\{x \in \mathbf{R} : S(x) > 0\Big\}$ が $\mathbf{R}$ の有界集合;

(4) 全ての $x \in \mathbf{R}$ に対し, $S(x) = S(-x)$.

S, T を型関数とし, $m \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$ とする. このとき, **L-R fuzzy 数** μ とは, 次で定められる fuzzy 数である:

$$\mu(x) = \begin{cases} \max\Big(S(\frac{x-m}{\alpha}), 0\Big), & \forall x \leq m, \\ \max\Big(T(\frac{x-m}{\beta}), 0\Big), & \forall x \geq m. \end{cases}$$

このとき, μ **は型関数** S **と** T **で生成される**という. さらに, この L-R fuzzy 数 μ を

$$\mu = (m, \alpha, \beta)_{L_S R_T}$$

のように表す.

註: 上の定義において, 例えば $\alpha = 0$ かつ $\beta > 0$ のような場合は,

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \forall x < m, \\ \max\Big(T(\frac{x-m}{\beta}), 0\Big), & \forall x \geq m. \end{cases}$$

と定める. さらに, $\alpha = \beta = 0$ のときは, 任意の $x \in \mathbf{R}$ に対し, $\mu(x) = \mathbf{1}_{\{m\}}(x)$ と定める.

定理 3.3 を用いると, 同一の型関数で生成された L-R fuzzy 数に値をとる fuzzy 数値写像の凸性に関し, 次が示される.

定理 4.1 ([1]). *C を線形空間の凸集合, m を C 上の実数値関数, $\alpha, \beta : C \to [0, \infty)$ を関数とし, $S, T : \mathbf{R} \to (-\infty, 1]$ を型関数とする. F を, 任意の $x \in C$ に対し,*

$$F(x) = \Big(m(x), \alpha(x), \beta(x)\Big)_{L_S R_T}$$

で定義される C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, m と β が凸であり, α が凹であるならば, F は凸である.

次は, [6, 9] で得られた, 同一の型関数で生成された L-R fuzzy 数間の順序に関する結果を, level 集合を用いて記述し直したものである.

命題 4.1 ([6, 9]). *$m, n \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ とし S, T を型関数とする. このとき,L-R fuzzy 数 $A = (m, \alpha, \beta)_{L_S R_T}$ と $B = (n, \gamma, \delta)_{L_S R_T}$ に対し, 次が成り立つ.*

$$A \preceq B \iff \sup A_1 \leq \sup B_1, \ \sup A_0 \leq \sup B_0, \ \inf A_0 \leq \inf B_0.$$

補助定理 3.3 と命題 4.1 を用いると, [6] で示された, 次の結果が容易に得られる. これも, 結論を, f_r^F, g_r^F を用いて表現し直したものである.

命題 4.2 ([6]). C を線形空間の凸集合, m を C 上の実数値関数, $\alpha,\beta: C\to[0,\infty)$ を関数とし, $S,T:\mathbf{R}\to(-\infty,1]$ を型関数とする. F を, 任意の $x\in C$ に対し,

$$F(x)=\Big(m(x),\alpha(x),\beta(x)\Big)_{L_S R_T}$$

で定義される C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき,

$$F\text{ が凸} \iff f_1^F,\ f_0^F,\ g_0^F \text{ が凸}.$$

5. Fuzzy 数値写像に関する最小値定理

この節では, fuzzy 数値写像に対し, 最小化問題を議論する. その前に, fuzzy 数値写像で制約条件が記述された fuzzy 最適化問題を簡単に説明することにしよう.

$X=\mathbf{R}^n$, $E=\mathbf{R}^n_+=[0,\infty)^n\subset X$, $C_1,C_2,\dots,C_n\in\mathcal{F}$ とし, F を各 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E$ に対し,

$$F(x)=x_1C_1\oplus x_2C_2\oplus\cdots\oplus x_nC_n$$

で定められる E 上の fuzzy 数値写像とする. また, 任意の $i=1,2,\dots,m$ と任意の $j=1,2,\dots,n$ に対し, $A_{ij}\in\mathcal{F}$ とし, $G_1,G_2,\dots,G_m$ を各 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E$ と各 $i=1,2,\dots,m$ に対し

$$G_i(x)=x_1A_{i1}\oplus x_2A_{i2}\oplus\cdots\oplus x_nA_{in}$$

で定められる E 上の fuzzy 数値写像とし,

$$E_0=\Big\{x\in E: G_1(x)\preceq b_1, G_2(x)\preceq b_2,\dots,G_m(x)\preceq b_m\Big\}.$$

とする. ここで, $b_1,b_2,\dots,b_m\in\mathbf{R}$ である. このとき, 次のような fuzzy 最適化問題が立つ:

全ての $x\in E_0$ に対し, $F(x_0)\preceq F(x)$ を満たす $x_0\in E_0$ を求めよ.

上の設定で注目すべきは, F と G_i の定義に fuzzy 数を用いたところである. これは, 通常の線形計画問題の form においては, 目的関数と制約関数の係数に相当し, 具体的な生産計画では, 生産の単位に当たるところである. 周知のように, この係数の決定は, 計画の立案において肝心であるが, fuzzy 数はこの際, 決定者の判断に幅を持たせ, その意志に即した柔軟な計画構築をなし得る概念として導入が考えられるようになり, 理論的には, 上述のように定式化される fuzzy 最適化問題を起こしたのである.

さて, 上のような問題は, L-R fuzzy 数などの有力な概念を用いることにより, これを通常の線形計画問題に帰着できることが分かっており, 研究が進んでいるが (例えば, [3, 5, 9] を参照), いっぽう凸問題 (convex problems) からの類推で定式化される問題 (以下述べる) については, 現段階ではあまり研究が進んでいるとは言えない. これを踏まえて, 高橋と著者は, [1] においてこの問題の解の存在に関連する定理を証明した. 本節では, それらからいくつか選んで述べることにする. その前に, 凸解析的見地から fuzzy 最適化問題を定式化しておこう.

C を線形空間の凸集合, F を C 上の凸 fuzzy 数値写像とする. このとき, 全ての $x\in E_0$ に対し, $F(x_0)\preceq F(x)$ を満たす $x_0\in E_0$ を求めよ.

いま, C 上の実数値関数からなる族 $\mathcal{P}^F$ を

$$\mathcal{P}^F = \left\{ f_r^F, g_r^F : r \in [0,1] \right\}$$

により定めると, **上の問題は, 半順序関係 $\preceq$ の定義から, $\mathcal{P}^F$ の元に対する共通の optima $x_0 \in C$ を求める次のような問題に帰着することができる:**

> 全ての $h \in \mathcal{P}^F$ と全ての $x \in E_0$ に対し, $h(x_0) \le h(x)$ を満たす $x_0 \in E_0$ を求めよ.

[1] では, 上の事実を踏まえた議論を行った. なお, 3 節の結果から上の h は全て凸となることに注意する. まず, fuzzy 数値写像に対して下半連続性を定義しよう.

F を位相空間 X 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, F **が下半連続であるとは**, 任意の $r \in [0,1]$ に対し, f_r^F および g_r^F がともに下半連続であるときをいう.

L-R fuzzy 数を用いると, fuzzy 数値写像の下半連続性に関し, 次が示される.

定理 5.1 ([1]). *C を線形空間の凸集合, m を C 上の実数値関数, $\alpha, \beta : C \to [0,\infty)$ を関数とし, $S,T : \mathbf{R} \to (-\infty, 1]$ を型関数とする. F を, 任意の $x \in C$ に対し,*

$$F(x) = \Big(m(x), \alpha(x), \beta(x) \Big)_{L_S R_T}$$

で定義される C 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, m と β が下半連続であり, α が上半連続であるならば, F は下半連続である.

次が凸 fuzzy 数値写像に関する最小値定理である.

定理 5.2 ([1]). *C を線形位相空間の compact な凸集合とし, F を C 上の下半連続な凸 fuzzy 数値写像とする. また, φ を, 各 $(x,h) \in C \times \mathcal{P}^F$ に対し, $\varphi(x,h) = h(x) - \min_{u \in C} h(u)$ で定められる実数値関数とする. このとき, φ が第 2 変数に関して concavelike であるならば, $x_0 \in C$ が存在して, 全ての $x \in C$ に対し, $F(x_0) \preceq F(x)$ を満たす.*

F をある集合 X 上の fuzzy 数値写像とする. このとき, $\mathcal{P}_0^F$ **は X で定義された実数値関数からなる族** $\left\{ f_1^F, f_0^F, g_0^F \right\}$ を表す. L-R fuzzy 数の概念を用いると, さらに次が得られる.

定理 5.3 ([1]). *C を線形空間の compact な凸集合, m を C 上の実数値関数, $\alpha, \beta : C \to [0,\infty)$ を関数とし, $S,T : \mathbf{R} \to (-\infty, 1]$ を型関数とする. F を, 任意の $x \in C$ に対し,*

$$F(x) = \Big(m(x), \alpha(x), \beta(x) \Big)_{L_S R_T}$$

で定義される C 上の凸 fuzzy 数値写像とする. また, φ_0 を, 各 $(x,h) \in C \times \mathcal{P}_0^F$ に対し, $\varphi_0(x,h) = h(x) - \min_{u \in C} h(u)$ で定められる $C \times \mathcal{P}_0^F$ 上の実数値関数とする. このとき, 任意の $h \in \mathcal{P}_0^F$ に対し, h が下半連続であり, φ_0 が第 2 変数に関して concavelike であるならば, $x_0 \in C$ が存在して, 全ての $x \in C$ に対し, $F(x_0) \preceq F(x)$ を満たす.

References

[1] M. Amemiya and W. Takahashi, *Convexity of fuzzy-valued maps and minimizaion theorems*, Sci. Math. Japonicae, to appear.

[2] J. P. Aubin, *Optima and Equilibria*, (Springer, Berlin, 1993.)

[3] L. Campos and J. L. Verdegay, *Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers,* Fuzzy Sets and Systems, **32** (1989), 1-11.

[4] D. Dubois and H. Prade, *Operations on fuzzy numbers* Int. J. Systems Sci., **9** (1978), 613-626.

[5] D. Dubois and H. Prade, *Systems of linear fuzzy constraints,* Fuzzy Sets and Systems, **3** (1980), 37-48.

[6] N. Furukawa, *Convexity and locally Lipschitz continuity of fuzzy-valued mappings,* Fuzzy Sets and Systems, **93** (1998), 113-119.

[7] S. Nanda and K. Kar, *Convex fuzzy mappings,* Fuzzy Sets and Systems, **48** (1992), 129-132.

[8] H. T. Nguyen, *A note on the extension principle for fuzzy sets,* J. Math. Anal. Appl., **64** (1978), 369-380.

[9] J. Ramík and J. Římánek, *Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization,* Fuzzy Sets and Systems, **16** (1985), 123-138.

[10] J. Ramík and H. Rommelfanger, *A single- and a multi-valued order on fuzzy numbers and its use in linear programming with fuzzy coefficients,* Fuzzy Sets and Systems, **57** (1993), 203-208.

[11] J. Ramík and H. Rommelfanger, *Fuzzy mathematical programming based on some new inequality relations,* Fuzzy Sets and Systems, **81** (1996), 77-87.

[12] W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems,* J. Math. Soc. Japan., **28** (1976), 168-181.

[13] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets,* Information and Control, **8** (1965), 338-353.

[14] L. A. Zadeh, *The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning, (I);(II);(III),* Information Science, **8** (1975), 199-249;**8** (1975), 301-357;**9** (1975), 43-80.

Department of Mathematical and Computing Sciences, Tokyo Institute of Technology, Ohokayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8552, Japan
E-mail: amemiya@is.titech.ac.jp