

## 河川の形態とダイナミクスの関係

北海道大学 電子研 柳田達雄 Tatsuo Yanagita Hokkaido Univ.  
大阪府立大 工学部 西森 拓 Hiraku Nishimori Osaka Pref. Univ.  
名古屋大学 理学部 小西哲郎 Tetsuro Konishi Nagoya Univ.

### 1 はじめに

河川は流量や河床、河岸の土砂特性に伴い直線流、屈曲流、蛇行流、扇状流など多様な流れの形態を持っている(図 1、図 1)[1, 2]。しかしながら、これらの形態がどのような環境下で形成され、どのようなメカニズム、どのような環境下で形態が選択されるか明らかになっていない。

川の形態は流れにより川岸/河床が削られ、その土砂の移動、堆積により、流れにフィードバックされる過程により自発的に自己境界が形成される。また、蛇行流はガラス板上の流れ、氷河上の流れ、黒潮などと普遍的に見られるが、スケール、素過程(氷河上の流れには堆積がなく、ガラス板上と黒潮の蛇行には侵食/堆積がない)とも異なっており現象間での蛇行発生のメカニズムの関連性・普遍性という観点からも興味深い現象である。

河川の形態は流れによる侵食堆積とそれによる流れへのフィードバックにより形成され、境界が時間的に変動するため、3次元流体方程式を用いた直接的なシミュレーションは難しい。しかも、その時空間スケールのため十分な観察・実験も困難である。このような系の理解には数理モデル化とシミュレーションによる解析が有効なアプローチとなる。

河川の運動の数理モデルによる研究は2次元流体モデルに基づく線形解析 [3, 4, 5]、曲率のダイナミクス [6, 7]、セルオートマトン (CA)[8] を用いる方法などのいくつかの試みがなされているが、それぞれ直線流の不安定化の解析、蛇行ダイナミクス、網状流のモデルとして個別に扱われており、形態変化まで扱っておらずどのような要因で多様な形態が形成されるかという問いの解明には至っていない。

### 2 モデル

Hansen ら [3, 4] にもとづいて水深方向に関して平均化した平面2次元流を用い、簡略化した侵食/堆積(掃流、浮遊土砂流)のダイナミクスを導入した数理モデル化を用いてシミュレーションを行い形態遷移の主要因の解明をこころみる。

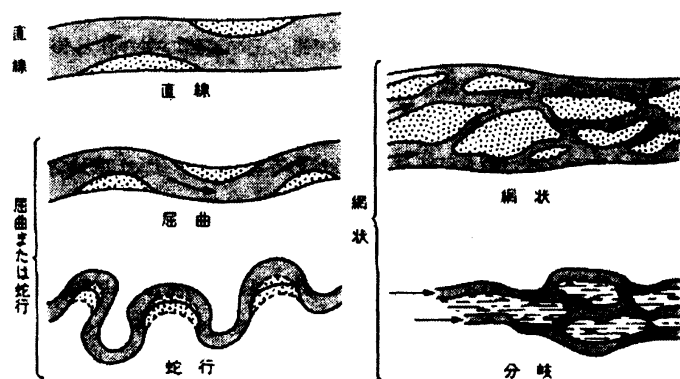


図 1-22 流路の形態 (Mull, A.D.: *Contem. Soc. Phys. Geol.*, 1907)

図 1: 河川の流れ様式の模式図

河川の流れ様式で典型的な蛇行(左図)と網状流(右図)。これらの形態は流量、傾斜角、土砂の性質などにより決定されることがわかっているが、形成のメカニズムは明らかになっていない。

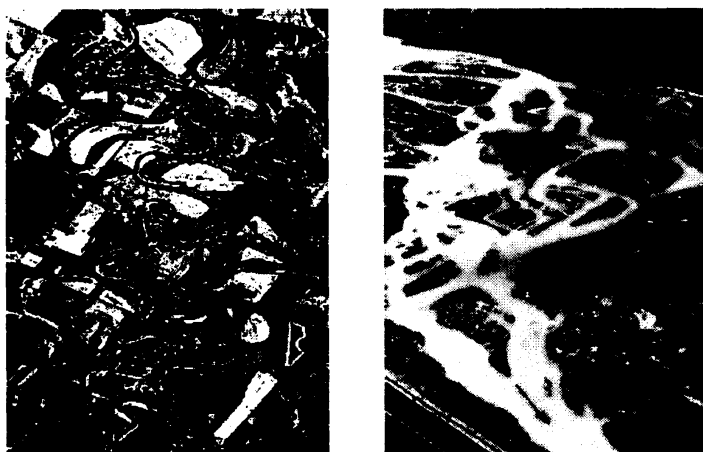


図 2: 実際の河川の典型的な流れ様式

河川の流れ様式で典型的な蛇行(左図)と網状流(右図)。これらの形態は流量、傾斜角、土砂の性質などにより決定されることがわかっているが、形成のメカニズムは明らかになっていない。

場の変数として流体の運動を深さ（鉛直）方向に平均化した2次元速度場  $\vec{v}(x, y, t)$ 、水深  $h(x, y, t)$ 、基準面からの河床位置  $H(x, y, t)$ 、単位体積中に含まれる浮遊土砂量  $m(x, y, t)$  を取り、以下のように河川のダイナミクスをモデル化した（図 3）。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{F}_{fric} \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_b + M_{\downarrow} - M_{\uparrow} \quad (3)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}_s - M_{\downarrow} + M_{\uparrow} + D_m \nabla \cdot \left( h \nabla \frac{m}{h + \epsilon} \right) \quad (4)$$

ここで、 $\vec{j} = h\vec{v}$  は流束密度、 $\vec{j}_b$  は河床を移動する掃流 (bed load)、 $\vec{j}_s = m\vec{v}$  は浮遊土砂流束密度 (suspension load)、 $\vec{F}_{fric}$  は河床から流体が受ける摩擦力、 $M_{\downarrow}$  は単位時間での堆積量、 $M_{\uparrow}$  は単位時間での侵食量である。

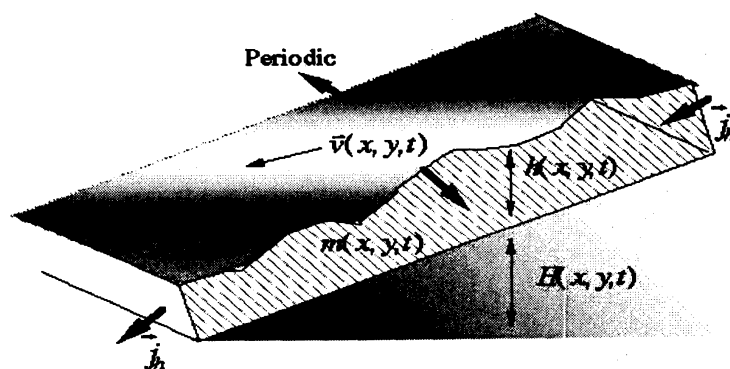


図 3: モデル

初期勾配方向を  $x$  軸として、流体の運動を深さ（鉛直）方向に平均化した2次元速度場  $\vec{v}(x, y, t)$  で表し、水深  $h(x, y, t)$ 、河床位置  $H(x, y, t)$ 、単位体積中に含まれる浮遊土砂量  $m(x, y, t)$  を変数としたモデル化を行う。

侵食・堆積のダイナミクス  $M_{\downarrow}, M_{\uparrow}$  は土砂の粒径などの性質により異なり、定量的な解析を主眼とした河川工学などでは実験式から得られた経験的な方程式を適用するが、ここでは以下のような極力簡略化したモデルを用いる。堆積量は土砂密度に、また、侵食量は流量に比するとし、掃流量は河床傾斜に比例すると仮定した。また、河床から流体が受ける応力は水深に反比例するとし、以下のような現象論的方程式を用いた。

$$M_{\downarrow} = \alpha m / (h + \epsilon) \quad (5)$$

$$M_{\uparrow} = \beta |h\vec{v}| \quad (6)$$

$$\vec{j}_b = -D_H(h\nabla H) \quad (7)$$

$$\vec{j}_s = m\vec{v} \quad (8)$$

$$\vec{F}_{fric} = k\vec{v}/(h + \epsilon) \quad (9)$$

ここで、 $\epsilon$ は河川 ( $h > 0$ ) と陸 ( $h = 0$ ) を同時に数値的に取り扱うためのパラメータである。また、動圧を無視して静水圧を水面高の関数  $p \sim H + h$  と仮定し、式 (4) の非線形拡散項は、浮遊土砂が3次元的流れやマイクロなスケールの渦 (乱流) などにより拡散する過程を表している。もちろん、これらの現象論的方程式が形態にどのような影響をおよぼすかという点も我々の興味であると同時に、これらマイクロなダイナミクスとマクロな流路パターンとの関係や普遍的構造も明らかにして行かなければならない。

このモデルの水深  $h$  を  $\rho$  と読み替えると方程式は2次元圧縮性流体の方程式に類似した形であることがわかる。さらに、水量のある場所 (河川  $h > 0$ ) とそれ以外を数値的に安定に解くため、(1) 食い違い格子 (2) 1次風上差分 (3)  $h$  に対して下駄  $\epsilon$  を履かせ (4) Fehlberg 数値積分により時間刻みを変化させるアルゴリズムを用いてシミュレーションを行った。y軸方向に関しては周期的境界条件を課し、x軸 (傾斜) 方向に関して河床高に関しては  $H(x, y = 0) + \Delta z = H(x, y = Y)$  なる条件を課しその他の変数は周期境界条件とした。この境界条件の下で総水量  $\iint h(x, y) \delta x \delta y$  総土砂量  $\iint \{H(x, y) + m(x, y)\} \delta x \delta y$  は保存量であり、シミュレーションの河川区間ではトータルな土砂の流入、流出はない。

### 3 シミュレーション

#### 3.1 蛇行の形成

初期状態として一定の地盤勾配を持つ直線流 (図 4) から始めるとある臨界勾配以下では直線流は安定であるが、それ以上では不安定化し蛇行流が形成される。蛇行流形成の初期過程では直線流にある不安定モードの交互砂州が形成される (図 5)。その後、交互砂州間を流れる複数の流路から一つの流路が選択され蛇行流となる。このように交互砂州の形成から直線流が蛇行流へと移行する過程は実験流路においても見い出され (図 6) シミュレーション結果と定性的に一致する。

最終的に形成された蛇行流はパラメータにより (1) 空間周期的に蛇行し、蛇行

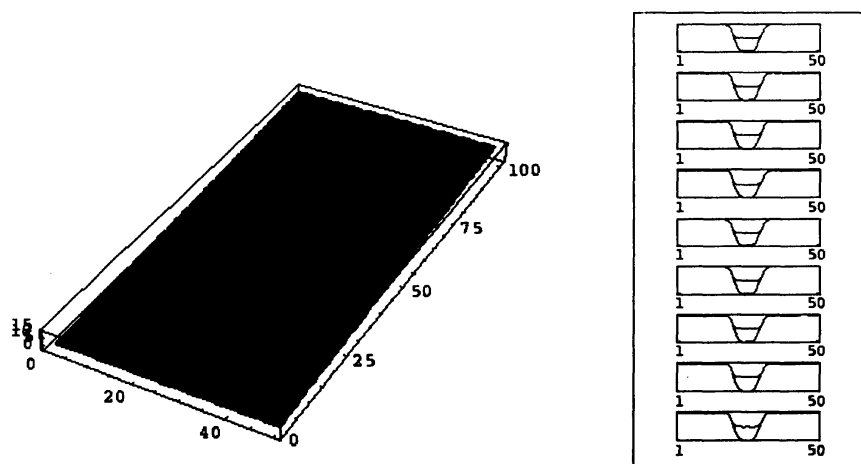


図 4: 河川の初期状態

シミュレーションの初期状態として直線流とした。その鳥瞰図（左図）とその断面（右図）。断面形状はガウス型の関数を用い、流速場に小さいランダムノイズを加えてある。

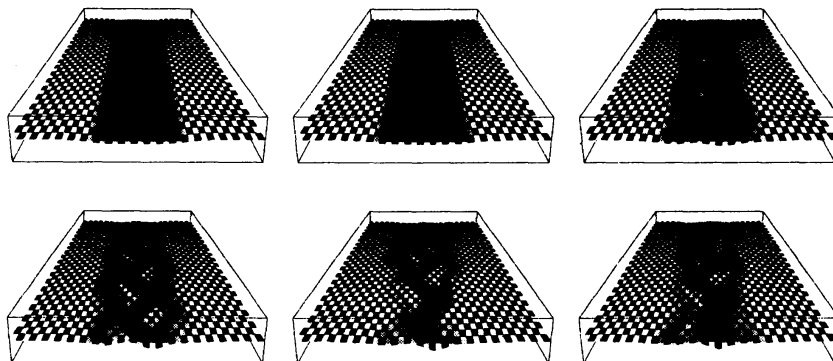


図 5: 蛇行形成の初期時間発展

蛇行形成初期の時間変化。時間は上段の左から右へと発展する。初期状態  $t = 0$  で直線流から時間発展をはじめると、直線流にあるモードが励起され多数の交互砂州が形成せられ複数の流路を持つ（上段中）。その後、それらの流路の中から次第に主流路が選択され蛇行が形成される。この蛇行形成初期の流路選択過程は実験流路での観測と一致する（図 6）。傾斜角  $\partial H(x, y) / \partial x = 0.01$

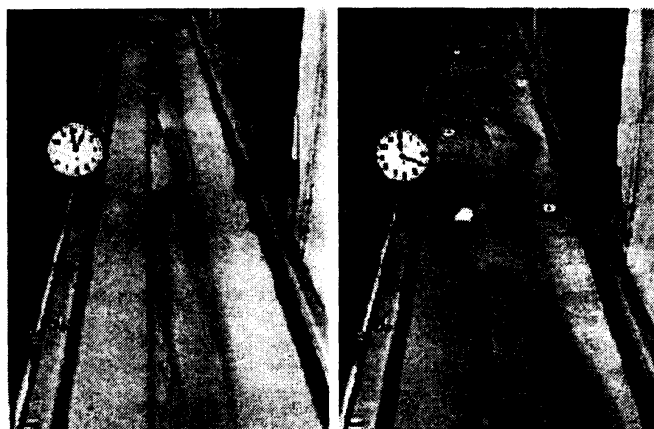


図 6: 実験流路における蛇行形成

実験流路における蛇行流の形成過程。直線流が不安定化し交互砂州が形成 (左図) された後に、主流路が選択され蛇行流が形成 (右図) される。

点は時間とともに定常的に下流へ動く (2) 空間的に非周期的に蛇行し、蛇行点は時間的に不規則に変動 (3) 空間的に非周期的に蛇行し不規則なショートカットが生じるという運動を示す。このカオス的な「よろめき」運動は実際の河川でも観察されており [9]、また、最近になり実験系においても見出されている [10]。

### 3.2 形態変化

傾斜角度の増加にともない流れ様式が変化することが知られている (図 7)[2]。シミュレーションにおいても、初期勾配の増加にともない、直線流、安定蛇行流、カオティック蛇行流を経て、ショートカットが生じることにより網状化する (図 8)。この形態変化を表面積  $S = \iint \Theta(h(x, y) - \epsilon) dx dy$ 、平均流量  $J = \iint \frac{h(x, y) \bar{v}}{S} dx dy$ 、川幅/水深比  $R = \frac{\iint \Theta(h(x, y) - \epsilon) dx dy}{\int h(x, y) dx}$  により特徴付けを行った。

図 9 に初期傾斜の増大にともなう形態変化を示す。直線流は  $dH/dx \sim 0.008$  で不安定化し蛇行流となり、さらに、傾斜角が増大すると  $dH/dx \sim 0.014$  で増大する流量を河岸が維持できなくなり崩壊し、蛇行流が網状化する。これらの量は直線流/蛇行流の境界では急激に変化し、これは、河床からの抵抗が水深に逆比例しているため侵食による水深の増大と流速の増加という正のフィードバック・ループによっている。この急激な流速増大が直線流を不安定化させ蛇行流を形成させる要因となっていると思われる。このことは、侵食のダイナミクス  $M_f = \beta v$  の係数

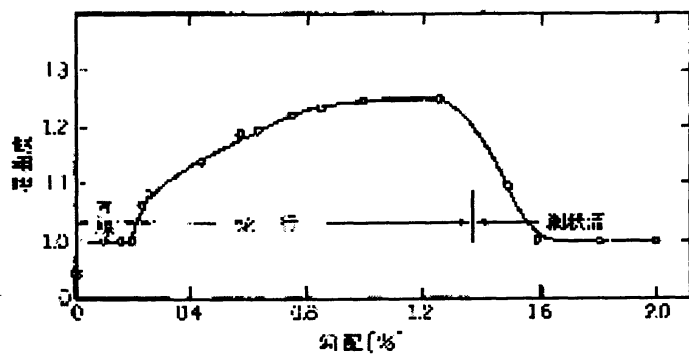
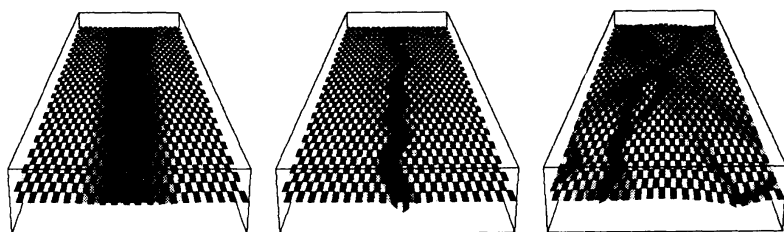


図 9・94 傾斜度と勾配との関係 (Schumann, S. A., Khan, M. R.: *Inst. C. S. A.*, 68: 1755~1770, 1972)

#### 図 7: 傾斜にともなう流路形態の変化 (実測)

傾斜角と屈曲度 (河川の始点終点間の距離と流路長との比) 傾斜角の増加にともない屈曲度は 1.0 (直線流) から増加し蛇行流へと変化する。流路が複数ある場合には主流路 (最も流量の大きい流路) によって屈曲度を定義すると、勾配にともない減少を始め網状化する [2]。



#### 図 8: 傾斜にともなう流路形態の変化

傾斜角の増加にともない河川の流路形態は左：直線流、中：蛇行流、右：網状流と変化する。直線流の形態は安定であるが、形態変化のない蛇行流とカオティックに変動する蛇行流がある。網状流は非周期的に流路が変化し、常に流路の形成消滅を繰り返す。

$\beta$  を増大させるとより小さい傾斜角で蛇行流が形成されることから示唆され、侵食 → 水深増 → 流速増 → 土砂輸送増なるフィードバック・ループが蛇行流の形成において重要と思われる。

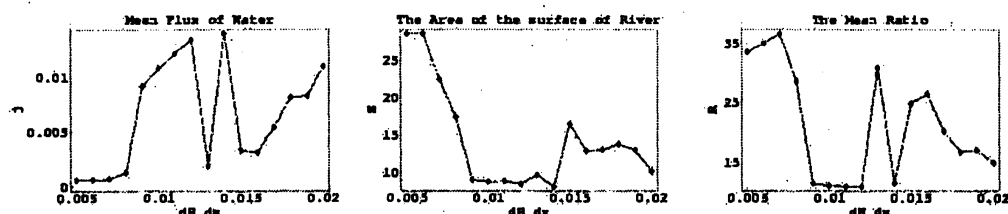


図 9: 形態の特徴

傾斜角の増大にともなう形態変化を流量 (左図)、表面積 (中図)、川幅水深比 (右図) によって特徴づけを行った。 $dH/dx \sim 0.008$  で直線流の不安定化が起り、 $dH/dx \sim 0.014$  で網状化が始まる。

3次元乱流拡散やミクロスケールの渦による拡散のエフェクティブな効果を浮遊土砂の拡散として取り入れているが、この効果が直線/蛇行遷移で重要な役割を担っている。流速一定のもとでは、侵食量と堆積量が平衡となる浮遊土砂量となる。したがって、流線に沿って浮遊土砂量はほぼ一定の値を持つ。そのため、流速の速い河川中心で浮遊土砂量は大きく、同様に河岸で浮遊土砂が少なくなり、拡散により浮遊土砂は河川中心から河岸へと輸送される。それにより河岸では流れにより維持できる浮遊土砂量を越え堆積が起こる。一般に拡散は場を一様にする働きがあるが、この場合には上のプロセスをとおして、拡散が河岸を強化する働きを持つことになる (拡散効果がないと川幅は時間とともにゆっくりと増大し定常状態とならない)。

総水量  $\iint h(x, y) dx dy$  を一定とした直線流を初期状態としたシミュレーションを行い、傾斜角にともなう形態変化を主に調べたが、初期総水量を増加させると蛇行流の波長が増大する傾向がある。これら形態変化を力学系の立場からみれば、直線/蛇行/網状流や波長の違いなどはパラメータの変化による形態の変化でなく (もちろん、パラメータを変えても形態は変化するが)、初期条件の違いにより異なるアトラクターに収敛したと見なすことができ、多重アトラクターを持つ系となる。

このモデルのパラメータは多数あるが、そのうちの浮遊土砂の拡散係数、掃流係数、抵抗係数、などを変化させてパターンへの影響を調べた (図 10)。河川形



態は掃流量に比べて浮遊土砂量が大きいほどの蛇行流となる傾向がある。言い換えると、浮遊土砂の非線形拡散による流線に対して法線方向の輸送が大きいほど蛇行流となる傾向が強い。

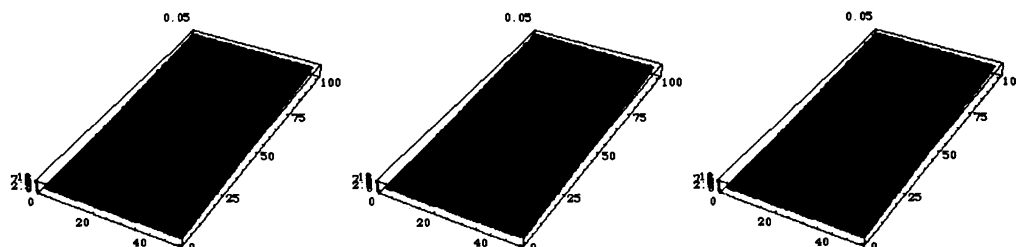


図 10: パラメータによる形態の変化

浮遊土砂拡散係数の変化に伴う流路形態の変化。 $m = 0.00025$ (左図)、 $m = 0.0005$ (中図)、 $m = 0.0015$ (右図)。拡散係数が小さいほど浮遊土砂輸送が掃流輸送より小さくなり網状流となる傾向が強い。

## 4 まとめ

河川の多様な流れ形態を持つ、その形態変化の主要因を明らかにするための動力学モデルを提案した。3次元流を鉛直方向に平均化した2次元流で表し、現象論的な侵食堆積のダイナミクスと流体運動との相互作用を考慮したモデルである。ここで、河川工学などで重要と思われているスパイラル流(3次元の流れ運動)は直接的には考慮されていない。流体運動と侵食堆積のダイナミクスにより直線/蛇行/網状という流れ様式の変化をはじめて動力学モデルで統一的に再現した。傾斜角にともなう形態変化は実際の河川でも観測されており、シミュレーションと定性的に一致する。

浮遊土砂の非線形拡散は河岸の堆積を強め、定常直線流路を安定化させる働きを持つ。浮遊土砂の拡散がない場合は直線流路は定常とならず時間とともに川幅が増大し、また、浮遊土砂は移流による輸送のみとなり、流線方向の輸送しか起こらず、河川の傾斜方向に対して垂直方向のいわゆる蛇行するための土砂の輸送が起こらないことになる。一方、浮遊土砂量は流速が大きいほど多く、流速は水深が大きいほど早いので河川中央部で浮遊土砂量が多くなる。このため、浮遊土砂の非線形拡散項は河川中央部から側面への土砂の移動を生じさせ、それが正のフィードバックとなり蛇行の要因となっているようである。

侵食/堆積/浮遊土砂拡散などの効果は現象論的に導入しているため、個々のダイナミクスがモデル全体にいかなる影響を与えるかを調べる必要がある。掃流を  $D_H \nabla \cdot (h \nabla H) \rightarrow D_H \nabla \cdot (v \nabla H)$  拡散過程を  $D_m \nabla \cdot (h \nabla \frac{m}{h}) \rightarrow D_m \nabla \cdot (v \nabla \frac{m}{h})$  と変化させたが、定性的な形態変化は同じように存在し、拡散ダイナミクスの詳細にはよらない。先にも述べたように、流線に対して法線方向に物質なり運動量なりの何らかの輸送が起こり流路が変形し、その変形が法線方向の輸送を増大させる正のフィードバック・ループが存在する時に（河川にとどまらず）蛇行が起こるのかもしれないが、詳しい解析は今後の課題である。

## 参考文献

- [1] A.D.Miall. *Canad.Soc.Petrol.Geol*, 1997.
- [2] S.A.Schumm. Patterns of alluvial rivers. *Ann.Rev.Earth Planet. Sci*, 13:5–27, 1985.
- [3] E.Hansen. The formation of meanders as a stability problem. *Hydraul,Lab.,Tech.Univ.Denmark,Basic Res. Prog.*, (13), 1967.
- [4] R.A.Callander. Instability and river channels. *J.Fluid Mech.*, 36:465–480, 1969.
- [5] G.Parker. On the cause and characteristic scales of meandering and braiding in rivers. *J.Fluid Mech.*, 76:457–480, 1976.
- [6] G.Parker S.Ikeda and K.Sawai. *J.Fluid Mech.*, 112:363, 1981.
- [7] S.F.Edward T.B.Liverpool. Dynamics of a meandering river. *Phys.Rev.Lett.*, 75:3016–3019, 1995.
- [8] C.Paola A.B.Murray. A cellular models of braided rivers. *Nature*, 371:54–57, 1994.
- [9] G.Parker. River meanders in a tray. *Nature*, 395:111, 1998.
- [10] C.E.Smith. Modeling high sinuosity meander in a small flume. *Geomorphology*, 25:19–30, 1998.