経済論叢別冊　調査と研究（京都大学）第27号，2003年10月

〈金融工学のフロンティア〉

マルチンゲール法による最適消費／ポートフォリオ選択問題の解法

岩　城　秀　樹
吉　川　大　介

はじめに

本稿は，近年発展を遂げたマルチンゲール法を用いた連続時間モデルにおける最適消費/ポートフォリオ選択問題の解法の要点を簡潔に観望するものである。

最適消費/ポートフォリオ選択問題は伝統的には確率的動的計画法（stochastic dynamic programming）によって特徴付けられてきた〔13〕，〔14〕。Merton は非完備市場においてこの問題に明示的な解を与えた。ただし消費に関する非負制約は無視し，既存の証券ではヘッジできないリスクについてはリスクプレミアムがつかない，と仮定しているためほぼ完備市場と同じ設定となっている。市場が完備であるとは，任意の条件付請求権を既存の証券のポートフォリオで生成できることである。さらに，共分散過程は一定で，消費に対する効用関数が HARA 族，無限期間，遺産のない場合，および有限期間のもとで解を求めた。その後，〔10〕は他の研究者が無視してきた可能性もモデルにいれ，つまり一般の効用関数と破綻（bankruptcy）の効果に関する一般的仮定のもとで最適消費投資，および値関数（value function）を閉じた形式で表現した。確率的動的計画法を用いた手法としては他に〔6〕がある。彼らは確率的動的計画法を用いて最適戦略の存在を非完備市場において示した。ただし，彼らは，証券価格と労働収入が幾何ブラウン運動に従い，投資家が無限の投資期間において一定の相対リスク回避度を示す効用関数をもつと仮定している．しかし，近年ではこの動的計画法に代わってマルチンゲール法が用いられるようになってきた。

というのも，確率的動的計画法は結局は偏微分方程式を解くことに帰着されるため，解を解析的に与えるのがしばしば困難であり，解に対して経済学的解釈を与えることが困難であるのに対し，マルチンゲール法による解は経済学的な解釈が容易であるという利点があるからである。また，マルチンゲール法では多期間ないし連続時間の最適化問題が，実質的には経済学で馴染みのある一期間の最適化問題に帰着される。すなわち生起しうる根元事象ごとに各時点おける消費を考慮し，この消費によって決定される効用の最大化問題を解く，ということである。そして，このような消費を求めた後，この消費を実現するようなポートフォリオを求めるという仕方をとるのである。これは最適消費と最適ポートフォリオを同時に求めねばならない動的計画法に比べてはるかに容易である。

当初，このマルチンゲール法を用いる最適化問題は完備市場において研究が進められ，後に非完備市場においても拡張された。〔16〕は非常に一般的な確率的環境，つまり資産価格がセミマルチンゲールであり，消費と最終富が狭義に負であることを許容するような環境において最適戦略が存在するような効用関数と価格システムに関する条件を与えた。しかし，こうした条件は非常に制約の強いものであり，確認が難しいものだった。

〔2〕，〔3〕は資産価格が幾何ブラウン運動に従い，消費に非負制約を与えた条件下で HARA 族効用関数に対して最適消費，ポートフォリオ戦略を閉じた形で求めた。

また，〔16〕や〔2〕，〔3〕はポートフォリオ選択問題においてマルチンゲール法を用いたが，〔1〕や〔9〕は証券の均衡価格を求める問題においてマルチンゲール法を用いている。

非完備市場におけるマルチンゲール法は〔15〕によってその第一歩が踏み出された。彼は非完備市場で生じる同値マルチンゲール測度のクラスを特徴付けた点で功績がある。

非完備市場においてマルチンゲール法は基本的に以下のように用いられる〔7〕，〔8〕。まず，非完備な市場をいったん完備になるように架空の証券を導入することで任意の条件付請求権を（架空の証券も含めた）既存の証券のポートフォリオで生成可能にする。その上で，これらの架空の証券には投資できないという制約を置く。そうすることによって完備市場におけるポートフォリオ制約つき問題として非完備市場における最適問題を考える。さらに，双対問題を考えることによってこれを制約なし問題に置き換えあたかも完備市場におけるかのように最適消費/ポートフォリオ戦略を導出したのである。さらに〔8〕や〔11〕，〔17〕，〔5〕らは最適消費/ポートフォリオ戦略を有限期間で証券価格が一般の伊藤過程に従う場合にマルチンゲール法によって求めている。特に〔5〕はより一般的な場合で，つまりポートフォリオの重みが閉じた凸空間で値を持つような制約を受ける，といった条件下で考察している。〔4〕はさらにゆるい仮定のもとでこの問題を考察した。すなわち，有限期間モデルでポートフォリオに凸制約があり非取引対象の労働収入が確率的な場合にこの問題を研究した。ただし，この場合には双対性を用いたとしても解の存在証明が困難であるために，制約条件つきの最適消費及びポートフォリオ選択問題の主問題を直接に，つまり双対性を用いずに解いた。ただし，本稿では双対性を用いて議論を簡潔に首尾一貫したものとするため労働収入は確定的な場合に留めておく。

本稿は以下のように構成されている。

第Ⅰ節ではモデルの仮定，および用語の定義を与える。

第Ⅱ節では完備市場における最適ポートフォリオの解を求める。最初に効用関数に関する仮定を与え，最適化問題の定式化を行う。次にマルチンゲール法による解法を与え，若干の例を付与する。

第Ⅲ節では非完備市場での解法を考える。定式化される問題は完備市場におけるそれと同様の効用最大化問題であるが，非完備市場を考えるので，この場合投資可能な証券は限定される。すなわち制約条件つき効用最大化問題を考える必要がある。解法の手続きは，まずこの制約条件つきの最適化問題を制約なしの最適化問題へ埋め込むことからはじめる。次に，この問題を制約なしの最適化問題へと埋め込んだ上で，最適解の条件を考察する。最後に例を用いて問題を考察し，稿を終える。

I　モデルと予備的考察

I. 1　市場モデル

任意の取引は，現時点 0 から所与の将来時点 T，$T>0$，までの任意の時点で $t\in[0, T]$ で連続的に可能とする。$n+1$ 個の資産ないし証券が連続的に取引される市場 $\mathfrak{M}$ を考える。$n+1$ 個の資産のうち，1つは債券あるいは銀行預金であるとし，その時点 t における価格 $B(t)$ は，r を正定数として

$$B(0)=1;\ dB(t)=B(t)rdt, \qquad t\geq 0 \tag{1.1}$$

で与えられるとする。残りの n 個の資産は危険証券であるとし，以降，特に断らない限り株式と呼ぶ。i, $i=1, 2, \cdots, n$, 番目の株式の時点 t での株価 $P_i(t)$ は，次式に従っているとする。

$$\begin{aligned} &P_i(0)=p_i;\\ &dP_i(t)=P_i(t)\left[b_i dt+\sum_{j=1}^{d}\sigma_{ij}dW_j(t)\right],\\ &\quad t\geq 0,\ j=1, \cdots, n \end{aligned} \tag{1.2}$$

ただし，ここで，$\sigma_i \triangleq (\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{id})$ は，d-次元実定数ベクトル，b_i は正定数とし，$W\triangleq$

$\{W(t)=(W_1(t), \cdots, W_d(t))^{\top}; t\in[0, T]\}$ は独立な標準ブラウン運動から成る所与の確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ 上で定義された d-次元ブラウン運動とする[1)]。

$$\mathfrak{F}_t=\sigma\{W(s); 0\leq s\leq t\},\qquad t\in[0, T],$$

を W から生成される部分可算加法族とし，$\mathbf{F}\triangleq\{\mathfrak{F}_t; t\in[0, T]\}$ とする。簡単化のため，**利子率** r，**平均収益率** $\{b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\top}\}$，$(n\times d)$-**行列値ボラティリティー** $\sigma=(\sigma_{ij})$ は，すべて定数とする[2)]。

I. 2 ポートフォリオと消費ルール

市場 $\mathfrak{M}$ において各時点 $t\in[0, T]$ で

1. 各危険証券への投資額 $\pi_i(t)$, $i=1, \cdots, n$,
2. その時点での消費額 $c(t)$

を決定する1投資家（small investor）の問題を考える。ただし，$c(t)$ と $\pi(t)\equiv(\pi_1(t), \cdots, \pi_n(t))^{\top}$ は $\mathfrak{F}_t$-可測な確率変数とする。

時点 t での投資家の富を $X(t)$ とし，$X(t)-\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)$ は債券に投資するものとする。このとき**富過程** $\{X(t); t\in[0, T]\}$ の変動は，

$$\begin{aligned}
dX(t)&=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\frac{dP_i(t)}{P_i(t)}+\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big)\times\frac{dB(t)}{B(t)}-c(t)dt\\
&=\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big[b_i dt+\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dW_j(t)\Big]+\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{n}\pi_i(t)\Big)rdt-c(t)dt\\
&=rX(t)dt+\pi^{\top}(t)[(b-r1_n)dt+\sigma dW(t)]-c(t)dt,\ t\in[0, T]
\end{aligned}\tag{1.3}$$

で表される。ただし，$X(0)=x\in\mathbf{R}$ は初期資本とし，$1_n\equiv(1, \cdots, 1)^{\top}\in\mathbf{R}^n$ とする。(1.3)の解は，

$$\gamma(t)X(t)=x-\int_0^t\gamma(t)c(t)dt+\int_0^t\gamma(t)\pi^{\top}(t)[(b-r1_n)ds+\sigma dW(s)].\tag{1.4}$$

ただし，

$$\gamma(t)\triangleq\frac{1}{B(t)}=\exp\Big(-\int_0^t rds\Big)=e^{-rt}\tag{1.5}$$

とし，これを時点 t での**割引係数**と呼ぶ。

定義 I. 1

1. 非負かつ $c(0)=0$, $\int_0^T c(t)dt<\infty$ となる $\mathbf{F}$-適合過程 $c=\{c(t), 0\in[0, T]\}$ を**消費過程**と呼ぶ。
2. $$\mathbf{E}\Big[\int_0^T\|\pi^{\top}(t)\sigma\|^2dt+\int_0^T|\pi^{\top}(t)(b-r1_n)|dt\Big]<\infty$$
   となる $\mathbf{F}$-適合的過程 $\pi=\{(\pi_1(t), \cdots, \pi_n(t))^{\top}; 0\in[0, T]\}$ を**ポートフォリオ**と呼ぶ[3)]。
3. 所与の $x\in\mathbf{R}$ と (π, c) に対して，(1.3)の過程 $\{X(t)\equiv X^{x,\pi,c}(t), 0\in[0, T]\}$ を初期資本 x，ポートフォリオ π，消費過程 c に対する**富過程**と呼ぶ。

定義 I. 2

$$b-r1_n=\sigma\theta\tag{1.6}$$

となる $\theta\in\mathbf{R}^d$ を**リスクの市場価格（相対リスク）**と呼ぶ。

以下では，簡単化のため，$n=d$ とし，σ は正則であるとする。このとき，(1.6)は，

$$\theta=\sigma^{-1}[b-r1_n]\tag{1.7}$$

と書き換えられ，

$$Z_0(t)\triangleq\exp\Big\{-\int_0^t\theta^{\top}dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t\|\theta\|^2ds\Big\}$$

1) 以下，⊤は転置を表す。
2) 以下の議論は，係数を所定の条件を満たす確率過程に一般化しても成立する（詳しくは，〔12〕などを参照）。
3) 以下，$\|\cdot\|$ はユークリッド・ノルムを表す。

$$= \exp\left\{-\theta^{\top} W(t) - \frac{1}{2}\|\theta\|^2 t\right\},\quad 0 \in [0, T] \tag{1.8}$$

はマルチンゲール，かつ，

$$\mathbf{P}^0(A) = \mathbf{E}\left[Z_0(T) 1_{\{A\}}\right],\qquad A \in \mathfrak{F}(T) \tag{1.9}$$

は，$\mathbf{P}$ と同値な確率測度となる。この $\mathbf{P}^0$ が**リスク中立同値マルチンゲール測度**である。ギルサノフの定理より，確率測度 $\mathbf{P}^0$ の下で

$$W^{(0)}(t) \triangleq W(t) + \int_0^t \theta ds = W(t) + \theta t,\quad t \in [0, T] \tag{1.10}$$

は標準ブラウン運動となる。(1.10) より (1.2) は，

$$dP_i(t) = P_i(t)\left[rdt + \sigma_i dW^{(0)}(t)\right], \tag{1.11}$$

となり，伊藤の公式より，

$$d(\gamma(t) P_i(t)) = \gamma(t) P_i(t) \sigma_i dW^{(0)}(t) \tag{1.12}$$

となる。したがって，$\mathbf{P}^0$ の下で割引株価 $\gamma(t)P_i(t)$ は，マルチンゲールとなる。また，(1.4) は，

$$\gamma(t) X^{x,\pi,c}(t) + \int_0^t \gamma(s) c(s) ds = x + M^{\pi}(t),$$
$$M^{\pi}(t) \triangleq \int_0^t \gamma(s) \pi^{\top}(s) \sigma dW^{(0)}(s),\quad t \in [0, T] \tag{1.13}$$

で書き換えられ，$M^{\pi} = \{M^{\pi}(t); t \in [0, T]\}$ は，確率測度 $\mathbf{P}^0$ の下でマルチンゲールとなる。したがって，$\mathbf{E}^0$ を確率測度 $\mathbf{P}^0$ の下での期待値とすると，**予算制約式**；

$$\mathbf{E}^0\left[\gamma(\tau) X^{x,\pi,c}(T) + \int_0^T \gamma(s) c(t) dt\right] = x + \mathbf{E}^0[M^{\pi}(T)] = x \tag{1.14}$$

が成立する。

$$H_0(t) \triangleq \gamma(t) Z_0(t) \tag{1.15}$$

を**状態価格密度過程**と呼ぶ。(1.13) と (1.15) と伊藤の公式により，

$$H_0(t) X(t) + \int_0^t H_0(s) c(s) ds = x + \int_0^t H_0(s)\left[\sigma^{\top}\pi(s) - X(s)\theta\right]^{\top} \times dW(s),\qquad t \in [0, T] \tag{1.16}$$

となる。また，ベイズ則（付録参照）により，(1.14) の予算制約式は，

$$\mathbf{E}\left[H_0(T) X(T) + \int_0^T H_0(t) c(t) dt\right] = x \tag{1.17}$$

と同値となる。

I.3　完備性

標準市場モデル $\mathfrak{M}$ を考える。

$$u_0 \triangleq \mathbf{E}^0[\gamma(T) Y] = \mathbf{E}[\gamma(T) Z_0(T) Y] < \infty \tag{1.18}$$

となる $\mathfrak{F}_T$-可測な確率変数 $Y : \Omega \to [0, \infty]$ を**条件付請求権**と呼ぶ。

定義 I.3

$$X^{u_0,\pi,0}(T) = Y \tag{1.19}$$

かつ M^{π} が $\mathbf{P}^0$-マルチンゲールとなるポートフォリオ π が存在するとき，条件付請求権 Y は**達成可能**であるという。すべての条件付請求権が達成可能であるとき，標準市場モデル $\mathfrak{M}$ は，**完備**であるといい，完備でない場合，**非完備**であるという。

定理 I.1　標準市場モデル $\mathfrak{M}$ が完備であるための必要十分条件は

1. $n = d$ かつ
2. σ が正則である。

証明　必要性の証明は煩雑なので省略し[4)]，ここは，十分性のみ証明する。任意の条件付請求権に対して，$\hat{M}(t) \triangleq \mathbf{E}^0\left[\gamma(T) Y \middle| \mathfrak{F}_t\right]$，

4)　証明は例えば[12]を参照のこと。

$t\in[0,\ T]$ とすると，$\hat{M}$ は $\mathbf{P}^0$-マルチンゲール。したがって，マルチンゲール表現定理より $\mathbf{E}\left[\int_0^T\|\phi(t)\|^2dt\right]<\infty$ かつ

$$\hat{M}(t)=u_0+\int_0^t\phi^\top(s)dW^{(0)}(s),\quad t\in[0,\ T] \tag{1.20}$$

となる $\phi:[0,\ T]\times\Omega\to\mathbf{R}^n$ が存在する。そこで，$\hat{\pi}^\top(t)\equiv B(t)\phi^\top(t)\sigma^{-1}$ によって過程 $\hat{\pi}$: $[0,\ T]\times\Omega\to\mathbf{R}^n$ を定義すると定義 I.1 の (2) を満たし，かつ

$$\begin{aligned}\hat{M}(t)&=u_0+\int_0^t\gamma(s)\hat{\pi}^\top(s)\sigma dW^{(0)}(s)\\&=u_0+M^{\hat{\pi}}(t)=\gamma(t)X^{u_0,\hat{\pi},0}(t),\\ &t\in[0,\ T]\end{aligned} \tag{1.21}$$

明らかに，$M^{\hat{\pi}}$ は $\mathbf{P}^0$-マルチンゲールかつ

$$\hat{M}(T)\equiv\gamma(T)Y=\gamma(T)X^{u_0,\hat{\pi},0}(T)$$

となるから Y は達成可能となる。以上より，$\mathfrak{M}$ は完備である。 □

定理 I.1 の条件の下で，(1.7) を満たす唯一の θ が存在する。

II マルチンゲール法による最適化問題の解法

II.1 問題の定式化

定義 II.1 関数 $U:(0,\ \infty)\to\mathbf{R}$ が連続，狭義増加，狭義凹，連続微分可能，かつ

$$U'(\infty)\triangleq\lim_{x\to\infty}U'(x)=0,$$
$$U'(0+)\triangleq\lim_{x\to0}U'(x)=\infty$$

となるとき，関数 U を**効用関数**と呼ぶ。

$I(\cdot)$ を**限界効用** $U'(\cdot)$ の逆関数とすると，関数 I と U' は，$(0,\ \infty)\to(0,\ \infty)$ の連続，狭義減少関数で

$$I(0+)=U'(0+)=\infty,\ I(\infty)=U'(\infty)=0.$$

効用関数 $U(\cdot)$ に対して，

$$\tilde{U}(y)\triangleq\max_{x\in(0,\infty)}[U(x)-xy],\qquad y\in(0,\ \infty)$$

を $U(\cdot)$ の**凸双対関数**と呼ぶ。$\tilde{U}(\cdot)$ は，凸かつ減少関数で，$(0,\ \infty)$ 上で連続微分可能であり，次の性質をもつ。

$$\tilde{U}(y)=U(I(y))-yI(y), \tag{2.1}$$
$$\tilde{U}'(y)=-I(y),\qquad y\in(0,\ \infty), \tag{2.2}$$
$$\begin{aligned}U(x)&=\min_{y\in(0,\infty)}[\tilde{U}(y)+xy]\\&=\tilde{U}(U'(x))+xU'(x),\quad x\in(0,\ \infty),\end{aligned} \tag{2.3}$$
$$\tilde{U}(\infty)=U(0+),\qquad \tilde{U}(0+)=U(\infty). \tag{2.4}$$

定義 II.2 関数 $U:[0,\ T]\times(0,\ \infty)\to\mathbf{R}$ が，$U\in C^{0,1}$，かつすべての $t\in[0,\ T]$ に対して $U(t,\cdot)$ が効用関数となるとき，関数 U を**時間依存効用関数**と呼ぶ。すべての $t\in[0,\ T]$ に対して $I(t,\cdot)$ を $U'(t,\cdot)$ の逆関数，$\tilde{U}(t,\cdot)$ を $U(t,\cdot)$ の凸双対関数とする。

定義 II.3

$$X^{x,\pi,c}(t)\geq0,\qquad t\in[0,\ T], \tag{2.5}$$

となるとき，ポートフォリオ/消費過程 $(\pi,\ c)$ は，所与の初期資本 $x\geq0$ に対して**許容可能**であるという。許容可能な $(\pi,\ c)$ のクラスを $\mathfrak{A}_0(x)$ と表す。

問題 II.1 時間依存効用関数 $U_1(\cdot,\ \cdot)$ と効用関数 $U_2(\cdot)$ を所与として，

$$\begin{aligned}&\max\ \mathbf{E}\left[\int_0^TU_1(t,\ c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right]\\&\text{s.to}\quad(\pi,\ c)\in\mathfrak{A}_0(x).\end{aligned} \tag{2.6}$$

以下では，問題 II.1 に対する**値関数**；

$$\begin{aligned}V_0(x)\triangleq\sup_{(\pi,c)\in\mathfrak{A}_0(x)}\mathbf{E}\Big[\int_0^T&U_1(t,\ c(t))dt+\\&U_2(X^{x,\pi,c}(T))\Big]\end{aligned} \tag{2.7}$$

と最適な $(\hat{\pi}_i,\ \hat{c}_i)\in\mathfrak{A}_0(x)$ を求める。

II. 2　マルチンゲール法

補題 II. 1　条件付請求権 ξ と消費過程 c が予算制約式；

$$\mathbf{E}\left[H_0(T)\xi+\int_0^T H_0(t)c(t)dt\right]=x>0 \tag{2.8}$$

を満たすとする。このとき $(\pi, c)\in\mathfrak{A}(x)$, $X^{x,\pi,c}(T)=\xi$ となるポートフォリオ過程 π が存在し，

$$X^{x,\pi,c}(t)=\frac{1}{H_0(t)}\mathbf{E}\left[H_0(T)\xi+\int_t^T H_0(s)c(s)ds|\mathfrak{F}_t\right],\quad t\in[0, T]. \tag{2.9}$$

となる。

証明

$$M(t)\triangleq\mathbf{E}\left[H_0(T)\xi+\int_0^T H_0(s)c(s)ds|\mathfrak{F}_t\right],\quad t\in[0, T]. \tag{2.10}$$

とおくと $M=\{M(t);\ t\in[0, T]\}$ はマルチンゲール。よってマルチンゲール表現定理より

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T\|\phi(s)\|^2 ds<\infty\right]=1,$$
$$M(t)=x+\int_0^t\phi^{\top}(s)dW(s),\quad t\in[0, T] \tag{2.11}$$

となる $\phi:[0, T]\times\Omega\to\mathbf{R}^d$ が存在する。したがって，

$$X(t)\triangleq\frac{1}{H_0(t)}\left[M(t)-\int_0^t H_0(s)c(s)ds\right], \tag{2.12}$$

$$\pi(t)\triangleq(\sigma^{-1})^{\top}\left[X(t)\theta+\frac{1}{H_0(t)}\phi(t)\right],\quad t\in[0, T] \tag{2.13}$$

とおくと，(1.16) より，すべての $t\in[0, T]$ に対して $X(t)\equiv X^{x,\pi,c}(t)$, $X(t)\geq0$ となるから $(\pi, c)\in\mathfrak{A}(x)$ かつ $X(T)=\xi$.　□

定理 II. 1

$$\mathfrak{X}_0(y)\triangleq\mathbf{E}\left[H_0(T)I_2(yH_0(T))+\int_0^T H_0(t)I_1(t, yH_0(t))dt\right],\quad y\in(0, \infty) \tag{2.14}$$

として，$\mathfrak{Y}_0(x)$ を $\mathfrak{X}_0(y)=x$ を満たす y とする。このとき

$$\xi_0\triangleq I_2(\mathfrak{Y}_0(x)H_0(T)),$$
$$c_0(t)\triangleq I_1(t, \mathfrak{Y}^0(x)H_0(t)),\qquad t\in[0, T] \tag{2.15}$$

とおくと，

$$V_0(x)=\mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t, c_0(t))dt+U_2(\xi_0)\right]. \tag{2.16}$$

さらに，$(\pi_0, c_0)\in\mathfrak{A}_0(x)$ となるポートフォリオ過程 π_0 が存在し，

$$X_0(t)\equiv X^{x,\pi_0,c_0}(t)=\frac{1}{H_0(t)}\mathbf{E}\left[H_0(T)\xi_0+\int_t^T H_0(s)c_0(s)ds\,|\,\mathfrak{F}_t\right] \tag{2.17}$$

となる。

証明　(ξ_0, c_0) は，その定義より，

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} H_0(s)c_0(s)ds+H_0(T)\xi_0\right]=x \tag{2.18}$$

を満たす。よって，補題II.1より，$(\pi_0, c_0)\in\mathfrak{A}_0(x)$ となるポートフォリオ π_0 が存在し，(2.17)が成立する。

任意の $x>0$, $(\pi, c)\in\mathfrak{A}_0(x)$, $y>0$ に対して，(1.17)，(2.1)より，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} U_1(t, c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right]\\&=\mathbf{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} U_1(t, c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right]\\&\quad+y\left\{x-\mathbf{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}} H_0(s)c(s)ds+H_0(T)X^{x,\pi,c}(T)\right]\right\}\\&\leq\mathbf{E}\left[\int_0^{\mathrm{T}}\tilde{U}_1(t, yH_0(t))dt+\tilde{U}_2(yH_0(T))\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+xy \\
&=\mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ yH_0(t))\,dt+U_2(yH_0(T))\right] \\
&\quad+y\left\{x-\mathbf{E}\left[\int_0^T H_0(s)I_1(s,\ yH_0(s))\,ds\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+H_0(T)I_2(yH_0(T))\right]\right\} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

一方，$y=\mathfrak{Y}_0(x)$，$(\pi,\ c)=(\pi_0,\ c_0)$ のとき，そのときに限り，(2.19)が等式で成立するので，(2.16)を得る。 □

例 II. 1（対数効用関数）

$$U_1(t,\ x)=U_2(x)=\log x,\quad (t,\ x)\in[0,\ T]\times(0,\ \infty)$$

とする。このとき，

$$I_1(t,\ y)=I_2(y)=\frac{1}{y},\ \mathfrak{X}_0(y)=\frac{T+1}{y},\quad y\in(0,\ \infty),$$

$$\mathfrak{Y}_0(x)=\frac{T+1}{x},\qquad x\in(0,\infty).$$

(2.15)より，最適最終富 ξ_0 と最適消費過程 c_0 は，各々

$$\xi_0=\frac{x}{T+1}\frac{1}{H_0(T)},\ c_0(t)=\frac{x}{T+1}\frac{1}{H_0(t)},\quad t\in[0,\ T].$$

で与えられ，対応する最適富過程は，(2.17)より，

$$X_0(t)=\frac{x}{T+1}\frac{1+T-t}{H_0(T)},\qquad t\in[0,\ T].$$

また，(2.10)のマルチンゲール M が $M(t)\equiv x$，$t\in[0,\ T]$，となり，(2.11)において $\phi(t)\equiv 0$，$t\in[0,\ T]$，となるから，(2.13)より，最適ポートフォリオ過程は

$$
\begin{aligned}
\pi_0(t)&=(\sigma^{-1})^{\top}\theta X_0(t) \\
&=(\sigma\sigma^{\top})^{-1}[b-r1_d]X_0(t),\quad t\in[0,\ T]
\end{aligned}
$$

となる。さらに，(2.7)の値関数は

$$V_0(x)=(T+1)\log\left(\frac{x}{T+1}\right)+\int_0^T\rho(t)\,dt+\rho(T)$$

となる。ただし，

$$\rho(t)\triangleq\left(r+\frac{1}{2}\|\theta\|^2\right)t,\qquad t\in[0,\ T].$$

例 II. 2（べき効用関数）

$$U_1(t,\ x)=U_2(x)=\frac{x^\alpha}{\alpha},\quad (t,\ x)\in[0,\ T]\times(0,\ \infty),\quad \alpha\in(-\infty,\ 1)\setminus\{0\}$$

とする。この場合，

$$I_1(t,\ y)=I_2(y)=y^{-\frac{1}{1-\alpha}}$$

となり，

$$m(t)\triangleq\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}rt+\frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}\|\theta\|^2t\right\},$$

$$N(t)\triangleq\int_0^t m(s)\,ds+m(t),\qquad t\in[0,\ T]$$

として

$$\mathfrak{X}_0(y)=y^{-\frac{1}{1-\alpha}}N(T),\ \mathfrak{Y}_0(x)=\left(\frac{N(T)}{x}\right)^{1-\alpha}.$$

よって，

$$\xi_0=\frac{x}{N(T)}(H_0(T))^{-\frac{1}{1-\alpha}},$$

$$c_0(t)=\frac{x}{N(T)}(H_0(t))^{-\frac{1}{1-\alpha}},\qquad t\in[0,\ T].$$

また，

$$A(t)\equiv\exp\left\{\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^{\top}W(t)-\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}\|\theta\|^2t\right\}$$

とすると A は，マルチンゲールとなる。このことに注意すると(2.17)の最適富過程は，

$$X_0(t)=\frac{x}{N(T)}\frac{A(t)}{H_0(t)}\left(m(T)+\int_t^T m(s)\,ds\right)$$

となる。また消費過程は，

$$c_0(t)=\frac{m(t)X_0(t)}{m(T)+\int_t^T m(s)\,ds}$$

と書き換えられる。一方，(2.10)のマルチンゲール M は，

$$M(t)=\frac{x}{N(T)}\left[A(t)\left(m(T)+\int_t^T m(s)\,ds\right)+\int_0^t m(s)A(s)\,ds\right]$$

となり，

$$dM(t)=H_0(t)X_0(t)\frac{\alpha}{1-\alpha}\theta^{\top}dW(t),$$
$$M(0)=x.$$

したがって，(2.11)と(2.13)より，最適ポートフォリオは

$$\pi_0(t)=\frac{(\sigma\sigma^{\top})^{-1}}{1-\alpha}[b-r1_d]X_0(t),$$
$$t\in[0,\ T].$$

さらに，関数 V_0 は，

$$V_0(x)=\frac{x^{\alpha}}{\alpha}(N(T))^{1-\alpha}$$

となる。

III　非完備市場での最適化

III. 1　問題の設定

本節では，$m=1,\ \cdots,\ n-1$ としてポートフォリオ過程 π のとり得る値は，$\pi(t)\in K\triangleq\{\pi\in\mathbf{R}^n;\ \pi_{m+1}=\cdots=\pi_n=0\}$，$t\in[0,\ T]$，であるという制約の下での最適消費/ポートフォリオ選択問題について考える。前節の仮定を満たす市場 $\mathfrak{M}$ に，K で表されるポートフォリオに対する制約の付いた市場を $\mathfrak{M}(K)$ で表す。制約 K は，$m+1$ 番目から n 番目までの株式には投資できないという制約を表しており，$\mathfrak{M}(K)$ は非完備市場となる。

定義 II.1 の $\mathfrak{A}(x)$ に対応して，所与の初期資本 $x\geq 0$ に対して

$$\mathfrak{A}_*(x;K)\triangleq\{(\pi,\ c)\in\mathfrak{A}_0(x);\pi(t)\in K,\ t\in[0,\ T]\} \tag{3.1}$$

を K-許容可能なポートフォリオ/消費戦略のクラスと呼ぶ。

本節では，$x\in(0,\ \infty)$ を所与として次の問題について考える。

問題 III. 1（ポートフォリオ制約条件付き効用最大化問題）

$$\max \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right]$$
$$\text{s.to}\quad (\pi,\ c)\in\mathfrak{A}_*(x;K).$$

問題 III.1 に対する値関数を

$$V(x)\triangleq\sup_{(\pi,c)\in A_*(x;K)}\mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right],\qquad x\in(0,\ \infty) \tag{3.2}$$

と表す。明らかに(2.7)のポートフォリオに対する制約なしの場合の値関数 $V_0(x)$ と比較して

$$V(x)\leq V_0(x),\qquad x\in(0,\ \infty) \tag{3.3}$$

となる。

III. 2　非制約問題への埋め込み

以下の要領で，制約条件付き市場モデル $\mathfrak{M}(K)$ を，制約条件の無い市場モデルの族 $\{\mathfrak{M}_\nu;\ \nu\in\mathfrak{D}\}$ へ埋め込む。

$\mathbf{F}$-適合的過程 $\nu:[0,\ T]\times\Omega\to\mathbf{R}^n$;

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T\|\nu(t)\|^2dt\right]<\infty \tag{3.4}$$

からなる空間 $\mathfrak{H}$ を考え，

$$\tilde{K}\triangleq\{x\in\mathbf{R}^n;\ \pi^{\top}x\geq 0,\qquad \pi\in K\}$$
$$\equiv\{x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in\mathbf{R}^n;\ x_1=\cdots=x_m=0\} \tag{3.5}$$

として，

$$\mathfrak{D}\triangleq\{\nu\in\mathfrak{H};\nu(t)\in\tilde{K},\ t\in[0,\ T]\}. \tag{3.6}$$

とする。所与の $\nu\in\mathfrak{D}$ に対して，

$$B(0)=1,\quad dB(t)=B(t)rdt, \tag{3.7}$$

$$dP_i^{(\nu)}(t)=P_i^{(\nu)}(t)\left[(b_i+\nu_i(t))dt+\sum_{j=1}^n\sigma_{ij}dW_j(t)\right],$$
$$P_i^{(\nu)}(0)=p_i\in(0,\ \infty),\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3.8}$$

で記述される架空の市場モデルを $\mathfrak{M}_\nu$ とする。$\mathfrak{M}$ での θ, Z_0, $W^{(0)}$, H_0 (cf. (1.7), (1.8), (1.10), (1.15)) に対応して，

$$\theta^{(\nu)} \triangleq \sigma^{-1}[b+\nu(t)-r1_2] = \theta+\sigma^{-1}\nu(t), \tag{3.9}$$

$$W^{(\nu)}(t) \triangleq W(t)+\int_0^t \theta^{(\nu)}(s)ds$$
$$= W^{(0)}(t)+\int_0^t \sigma^{-1}\nu(s)ds, \tag{3.10}$$

$$Z_\nu(t) \triangleq \exp\left[-\int_0^t \theta^{(\nu)}(s)^\top dW(s) -\frac{1}{2}\int_0^t \|\theta^{(\nu)}(s)\|^2 ds\right], \tag{3.11}$$

$$H_\nu(t) \triangleq \gamma(t)Z_\nu(t), \qquad t\in[0, T] \tag{3.12}$$

とする。

(1.13)と(1.16)と同様にして，$\mathfrak{M}_\nu$ における制約の無いポートフォリオ/消費過程 (π, c) に対応する富過程 $X^{(\nu)} \equiv X_\nu^{x,\pi,c}$ は，

$$\gamma(t)X^{(\nu)}(t)+\int_0^t \gamma(s)c(s)ds$$
$$= x+M_\nu^\pi(t),$$
$$= x+\int_0^t \gamma(s)\pi^\top(s)\sigma dW^{(0)}(u)$$
$$+\int_0^t \gamma(s)\pi^\top(s)\nu(s)ds, \qquad t\in[0, T], \tag{3.13}$$

$$M_\nu^\pi(t) \triangleq \int_0^t \gamma(s)\pi^\top(s)\sigma dW^{(\nu)}(u),$$
$$t\in[0, T]$$

もしくは，

$$H_\nu(t)X^{(\nu)}(t)+\int_0^t H_\nu(s)c(s)ds$$
$$= x+\int_0^t H_\nu(s)(\sigma^\top\pi(s)-X^{(\nu)}(s)\theta^{(\nu)}(s))^\top$$
$$\times dW(u), \qquad t\in[0, T] \tag{3.14}$$

で定義される。

注 III. 1 $\pi(t, \omega)\in K$ であるならば，(3.13)，(1.13)，(3.5)，(3.6)より

$$X_\nu^{x,\pi,c}(t) \geq X^{x,\pi,c}(t), \quad t\in[0, T], \quad \nu\in\mathfrak{D} \tag{3.15}$$

であり，等式が成立するのは，

$$\pi^\top(t, \omega)\nu(t, \omega)=0, \quad (t, \omega)\in[0, T]\times\Omega$$

のとき，かつそのときに限る。架空市場 $\mathfrak{M}_\nu$ を考える所以はここにある。

定義 III. 1 所与の初期資本 x に対して

$$\mathfrak{A}_\nu(x) \triangleq \{(\pi, c);\, X^{(\nu)}(t) \equiv X_\nu^{x,\pi,c}(t) \geq 0,$$
$$t\in[0, T]\}, \quad \nu\in\mathfrak{D} \tag{3.16}$$

とする。

注 III. 2 (3.1)，(3.15)と(3.16)から

$$\mathfrak{A}_*(x; K) \subseteq \mathfrak{A}_\nu(x), \qquad \nu\in\mathfrak{D}. \tag{3.17}$$

また，(3.13)と(3.14)から

$$\mathbf{E}\left[H_\nu(T)X_\nu^{x,\pi,c}(T)+\int_0^T H_\nu(s)c(s)ds\right] = x,$$
$$(\pi, c)\in\mathfrak{A}_\nu(x),\ \nu\in\mathfrak{D}. \tag{3.18}$$

$\nu\in\mathfrak{D}$ に対して，

$$V_\nu(x) \triangleq \sup_{(\pi,c)\in A_\nu(x)} \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t, c(t))dt + U_2(X_\nu^{x,\pi,c}(T))\right], \qquad x\in(0, \infty) \tag{3.19}$$

で定義される値関数に対応するポートフォリオに対する制約条件無しの最適化問題を考える。

この問題に対する解は，問題 II.1 の解である定理 II.1 とまったく同様にして以下のとおり与えられる。

$$\mathfrak{X}_\nu(y) \triangleq \mathbf{E}\left[\int_0^T H_\nu(t)I_1(t, yH_\nu(t))dt + H_\nu(T)I_2(yH_\nu(T))\right],$$
$$y\in(0, \infty) \tag{3.20}$$

とする。$\mathfrak{Y}_\nu(x)$ を $x=\mathfrak{X}_\nu(y)$ を満たす y として

$$\xi_\nu \triangleq I_2(\mathfrak{Y}_\nu(x)H_\nu(T)), \tag{3.21}$$
$$c_\nu(t) \triangleq I_1(t, \mathfrak{Y}_\nu(x)H_\nu(t)), \qquad t\in[0, T], \tag{3.22}$$

とすると，

$$V_\nu(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t, I_1(t, \mathfrak{Y}_\nu(x)H_\nu(t)))dt\right.$$

$$+U_2(I_2(\mathfrak{Y}_\nu(x)H_\nu(T)))\Big]. \quad (3.23)$$

また，

$$X_\nu(t) \triangleq \frac{1}{H_\nu(t)}\mathbf{E}\left[\int_t^T H_\nu(s)c_\nu(s)ds + H_\nu(T)\xi_\nu \,|\, \mathfrak{F}_t\right], \quad (3.24)$$

$$M_\nu(t) \triangleq H_\nu(t)X_\nu(t) + \int_0^t H_\nu(s)c_\nu(s)ds = \mathbf{E}\left[\int_0^T H_\nu(s)c_\nu(s)ds + H_\nu(T)\xi_\nu \,|\, \mathfrak{F}_t\right], \quad t \in [0,\ T] \quad (3.25)$$

とすると，

$$M_\nu(0) = \mathbf{E}\,[M_\nu(T)] = \mathfrak{X}_\nu(\mathfrak{Y}_\nu(x)) = x$$

かつ，マルチンゲール表現定理から

$$\int_0^T \|\phi_\nu(s)\|^2 ds < \infty,$$

$$M_\nu(t) = x + \int_0^t \phi_\nu{}^\top(s)dW(s), \quad t \in [0,\ T], \quad (3.26)$$

となる ϕ_ν: $[0,\ T] \times \Omega \to \mathbf{R}^n$ が存在し，補題 II.1 と定理 II.1 から

$$\pi_\nu(t) \triangleq \sigma^{-1}(t)^\top\left[X_\nu(t)\theta^{(\nu)}(t) + \frac{\phi_\nu(t)}{H_\nu(t)}\right], \quad t \in [0,\ T] \quad (3.27)$$

とするとポートフォリオ/消費過程 $(\pi_\nu,\ c_\nu)$ は，(3.23) を達成し，$X^{x,\pi_\nu,c_\nu}(t) = X_\nu(t)$, $t \in [0,\ T]$ となる。

注 III. 3　注 III.1 と注 III.2 より

$$\mathfrak{A}_*(x;K) \subseteq \mathfrak{A}_\nu(x), \quad \nu \in \mathfrak{D},$$
$$V(x) \le V_\nu(x), \quad \nu \in \mathfrak{D}. \quad (3.28)$$

制約条件付き最適化問題，問題 III.1 に対する解法は次のように行う。(3.6) のクラス $\mathfrak{D}$ に属する過程 μ で，(3.22) と (3.27) で定義される最適ポートフォリオ/消費過程 $(\pi_\mu,\ c_\mu)$ が問題 III.1 の最適解にもなっているものを見出す。すなわち，

$$V(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ c_\mu(t))dt + U_2(\xi_\mu)\right] = V_\mu(x) \le V_\nu(x),\ \nu \in \mathfrak{D}, \quad (3.29)$$

$$\pi_\mu(t,\ \omega) \in K,\ (t,\ \omega) \in [0,\ T] \times \Omega \quad (3.30)$$

$$\mu(t,\ \omega)^\top \pi_\mu(t,\ \omega) = 0,\ (t,\ \omega) \in [0,\ T] \times \Omega. \quad (3.31)$$

となる $\mu \in D$ を見出す。

注 III. 4　ある $\mu \in \mathfrak{D}$ に対して (3.30) と (3.31) が成立しているとする。このとき $(\pi_\mu,\ c_\mu)$ は，問題 III.1 の解となっていて (3.29) を満たす。

III. 3　最適性条件

$(\hat{\pi},\ \hat{c}) \in \mathfrak{A}_*(x;K)$ が制約条件付問題 III.1 の最適値となるための条件;

条件 III. 1　$(\hat{\pi},\ \hat{c})$ の最適性

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ \hat{c}(t))dt + U_2(\hat{X}(T))\right] \ge \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ c(t))dt + U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right], \quad (\pi,\ c) \in \mathfrak{A}_*(x;K) \quad (3.32)$$

を考える。

最適性条件 III.1 を，所与の $\mu \in \mathfrak{D}$ に関する次の条件 III.2-条件 III.4 で特徴付ける。

条件 III. 2　$(c_\mu,\ \xi_\mu)$ の資金調達可能性

$$\exists\,\pi_\mu;\ (\pi_\mu,\ c_\mu) \in \mathfrak{A}_*(x,\ K),\ \ \mu^\top(t)\pi_\mu(t) = 0,$$
$$X^{x,\pi_\mu,c_\mu}(t) \equiv \mathfrak{X}_\mu(t) \qquad \forall\, t \in [0,\ T] \quad (3.33)$$

条件 III. 3　μ の最小性

$$V_\mu(x) \le V_\nu(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ c_\nu(t))dt + U_2(\xi_\nu)\right], \qquad \forall\, \nu \in D. \quad (3.34)$$

条件 III. 4　μ の双対最適性

$$\tilde{V}_\nu(y) \triangleq \sup_{x>0}[V_\nu(x) - xy], \qquad y \in (0,\ \infty),\quad \nu \in \mathfrak{D}, \quad (3.35)$$

かつ $y \triangleq \mathfrak{Y}_\mu(x)$ として

$$\tilde{V}_\mu(y) \le \tilde{V}_\nu(y), \qquad \forall\, \nu \in \mathfrak{D}. \quad (3.36)$$

定理 III. 1　条件 III.2-条件 III.4 は同値であり，これらが成立するとき $(\hat{\pi}, \hat{c})=(\pi_\mu, c_\mu)$ として条件 III.1 が成立する。

補題 III. 1　(3.35)の $\tilde{V}_\nu$ について

$$\tilde{V}_\nu(y)=V_\nu(\mathfrak{X}_\nu(y))-y\mathfrak{X}_\nu(y) = \mathbf{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ yH_\nu(t))dt+ \tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right]. \tag{3.37}$$

が成立する。

証明　任意の $x>0$, $(\pi,\ c)\in\mathfrak{A}_\nu(x)$, $y>0$ に対して，(3.18)，(2.1) と $\tilde{U}_i$, $i=1,\ 2$ の定義より，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&\left[\int_0^T U_1(t,\ c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right]\\ &\leq \mathbf{E}\left[\int_0^T U_1(t,\ c(t))dt+U_2(X^{x,\pi,c}(T))\right]\\ &\quad+y\left\{x-\mathbf{E}\left[\int_0^T H_\nu(s)c(s)ds +H_\nu(T)X^{x,\pi,c}(T)\right]\right\}\\ &\leq \mathbf{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ yH_\nu(t))dt+\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right] +xy.\end{aligned} \tag{3.38}$$

(3.38)より

$$V_\nu(x)\leq \mathbf{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ yH_\nu(t))dt +\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right]+xy, \qquad x>0$$

となるから

$$\begin{aligned}V_\nu(x)-xy &\leq \sup_{x>0}[V_\nu(x)-xy]\equiv\tilde{V}_\nu(y)\\ &\leq \mathbf{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ yH_\nu(t))dt +\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right], \qquad y>0.\end{aligned} \tag{3.39}$$

一方，$y=\mathfrak{Y}_\nu(x)$, $(\pi,\ c)=(\pi_\nu,\ c_\nu)$ のとき，そのときに限り，(3.38)が等式で成立するので，

$$V_\nu(x)=\mathbf{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ \mathfrak{Y}_\nu(x)H_\nu(t))dt +\tilde{U}_2(\mathfrak{Y}_\nu(x)H_\nu(T))\right]+x\mathfrak{Y}_\nu(x).$$

ここで，$x=\mathfrak{X}_\nu(y)$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ yH_\nu(t))dt+\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right]\\ &=V_\nu(\mathfrak{X}_\nu(y))-\mathfrak{X}_\nu(y)y\\ &\leq\sup_{x>0}[V_\nu(x)-xy]\equiv\tilde{V}_\nu(y).\end{aligned} \tag{3.40}$$

(3.39)と(3.40)より

$$\tilde{V}_\nu(y)=\mathbf{E}\left[\int_0^T \tilde{U}_1(t,\ yH_\nu(t))dt +\tilde{U}_2(yH_\nu(T))\right]=V_\nu(\mathfrak{X}_\nu(y))-y\mathfrak{X}_\nu(y).$$

□

定理 III. 1 の証明

(3.33) ⇒ (3.32)の証明　注 III.4 の結果から成立。

(3.33) ⇒ (3.34)の証明　注 III.4 の結果から成立。

(3.34) ⇒ (3.36) の証明　$y=\mathfrak{Y}_\mu(x)$ として (3.37)より，

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu(y)&=V_\mu(\mathfrak{X}_\mu(y))-y\mathfrak{X}_\mu(y)=V_\mu(x)-xy\\ &\leq V_\nu(x)-xy\leq\sup_{\xi>0}[V_\nu(\xi)-\xi y]\equiv\tilde{V}_\nu(y).\end{aligned}$$

(3.36) ⇒ (3.33)の証明　ポートフォリオ過程 π_μ が(3.30)と(3.31)を満たすことを示せば良い。適当な $\nu\in\mathfrak{D}$ と適当な停止時の列 $\{\tau_n;\ \tau_n\uparrow T \text{ a.s.}\}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu_*(t)&\equiv\mu^{(\nu)}{}_{\varepsilon,n}(t)\\ &\triangleq\begin{cases}(1-\epsilon)\mu(t)+\epsilon\nu(t); & 0\leq t\leq\tau_n\\ \mu(t); & \tau_n<t\leq T\end{cases}\\ &=\mu(t)+\epsilon(\nu(t)-\mu(t))\ 1_{\{t\leq\tau n\}},\\ &t\in[0,\ T],\ n\in\mathbf{N},\ \epsilon\in(0,\ 1)\end{aligned} \tag{3.41}$$

で定義される $\mu\in\mathfrak{D}$ の微小確率摂動を考える。明らかに，$\mu_*\in\mathfrak{D}$ であるから，

$$0\leq\frac{1}{\epsilon y}[\tilde{V}_{\mu_*}(y)-\tilde{V}_\mu(y)]=\mathbf{E}\,[Y_n^\epsilon]. \tag{3.42}$$

ただし，

$$\epsilon y \cdot Y_n^\epsilon \triangleq \int_0^T [\tilde{U}_1(t, yH_{\mu_\epsilon}(t)) - \tilde{U}_1(t, yH_\mu(t))]dt + [\tilde{U}_2(yH_{\mu_\epsilon}(T)) - \tilde{U}_2(yH_\mu(T))]. \quad (3.43)$$

ステップ 1.

$$R^\epsilon(t) \triangleq \frac{H_{\mu_\epsilon}(t)}{H_\mu(t)} = \exp\left[-\epsilon N(t\wedge\tau_n) - \frac{\epsilon^2}{2}\langle N\rangle(t\wedge\tau_n)\right], \qquad t\in[0, T], \quad (3.44)$$

とおく。ただし，ここで

$$N(t) \triangleq \int_0^t (\sigma^{-1}(\nu(s)-\mu(s)))^\top dW^{(\mu)}(s),$$
$$\langle N\rangle(t) \triangleq \int_0^t \|\sigma^{-1}(\nu(s)-\mu(s))\|^2 ds. \quad (3.45)$$

また(3.41)の停止時を

$$\tau_n \triangleq \inf\left\{t\in[0, T]; |N(t)|+\langle N\rangle(t) + \int_0^t \|\theta_\mu(s)\|^2 ds + \int_0^t \gamma^2(s)\left[X_\mu^2(s) \times \|\sigma^{-1}(\nu(s)-\mu(s))\|^2 + N^2(s)\|\pi_\mu^\top(s)\sigma\|^2\right]ds \geq n\right\}\wedge T, \quad n\in\mathbf{N} \quad (3.46)$$

で定義する。このとき，$R^\epsilon(\cdot) \geq e^{-2\epsilon n}$ となり，さらに

$$Y_n^\epsilon \leq Y_n \triangleq K_n\left[\int_0^T H_\mu(t) I_1(t, ye^{-2n}H_\mu(t))dt + H_\mu(T) I_2(ye^{-2n}H_\mu(T))\right], \quad (3.47)$$

$$Y_n^\epsilon \leq Q_n^\epsilon \triangleq \int_0^T H_\mu(t)\frac{1-R^\epsilon(t)}{\epsilon} \times I_1(t, ye^{-2\epsilon n}H_\mu(t))dt + H_\mu(T) \times \frac{1-R^\epsilon(T)}{\epsilon} I_2(ye^{-2\epsilon n}H_\mu(T))\Big] \quad (3.48)$$

となる。ただし，ここで $K_n \triangleq \sup_{\epsilon\in(0,1)} (1-e^{-2\epsilon n})/\epsilon$ とし，(3.43)と平均値の定理及び，$I(\cdot) = -\tilde{U}'(\cdot)$ が減少関数であることを用いた。

ステップ 2.　Fatou の補題と(3.48)と(3.42)より，$c_\mu(t) = I_1(t, yH_\mu(t))$, $\xi_\mu = I_2(yH_\mu(T))$ として，

$$0 \leq \overline{\lim_{\epsilon\downarrow 0}}\mathbf{E}[Y_n^\epsilon] \leq \mathbf{E}[\overline{\lim_{\epsilon\downarrow 0}} Y_n^\epsilon] \leq \mathbf{E}[\overline{\lim_{\epsilon\downarrow 0}} Q_n^\epsilon] = \mathbf{E}\left[\int_0^T H_\mu(t)N(t\wedge\tau_n)c_\mu(t))dt + H_\mu(T)N(\tau_n)\xi_\mu\right]. \quad (3.49)$$

また，Girsonov の定理と Novikov の定理（付録参照）より，$\{W^{(\mu)}(t\wedge\tau_n); t\in[0, T]\}$ は，確率測度

$$\tilde{\mathbf{P}}_n(A) \triangleq \mathbf{E}[Z_\mu(\tau_n)\cdot 1_A], \qquad A\in\mathfrak{F}(T), \quad \forall n\in\mathbf{N}. \quad (3.50)$$

の下でブラウン運動となる。

ステップ 3.　(3.49)の不等式は，

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{\tau_n} H_\mu(t)\pi_\mu^\top(t)(\nu(t)-\mu(t))dt\right] \geq 0, \quad n\in\mathbf{N}. \quad (3.51)$$

と書き換えられる。実際，(3.45)と(3.13)より

$$dN(t) = (\sigma^{-1}(\nu(t)-\mu(t)))^\top dW^{(\mu)}(t),$$
$$d(\gamma(t)X^{(\mu)}(t)) = -\gamma(t)c_\mu(t)dt + \gamma(t)\pi_\mu^\top(t)\sigma dW^{(\mu)}(t),$$

となるから，

$$\gamma(\tau_n)X^{(\mu)}(\tau_n)N(\tau_n) + \int_0^{\tau_n}\gamma(t)c_\mu(t)N(t)dt = \int_0^{\tau_n}\gamma(t)(\nu(t)-\mu(t))^\top\pi_\mu(t)dt + \int_0^{\tau_n}\gamma(t)[N(t)\pi^\top{}_\mu(t)\sigma + X^{(\mu)}(t)(\sigma^{-1}(\nu(t)-\mu(t)))^\top]dW^{(\mu)}(t). \quad (3.52)$$

確率測度 $\tilde{\mathbf{P}}_n$ の下で上式の期待値をとると，(3.46)の停止時 τ_n の作り方から，(3.52)の確率積分の期待値はゼロとなるので，

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{\tau_n} H_\mu(t)\pi_\mu^\top(t)(\nu(t)-\mu(t))dt\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}\Big[H_\mu(\tau_n)X^{(\mu)}(\tau_n)N(\tau_n) \\
&\quad + \int_0^{\tau_n} H_\mu(t)c_\mu(t)N(t)dt\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}_{\tau_n}\Big[H_\mu(T)X^{(\mu)}(T) \\
&\quad + \int_{\tau_n}^T H_\mu(t)c_\mu(t)dt \,\Big|\, \mathfrak{F}_{\tau_n}\Big] N(\tau_n) \\
&\quad + \int_0^{\tau_n} H_\mu(t)c_\mu(t)N(t)dt\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\Big\{H_\mu(T)X^{(\mu)}(T) + \int_{\tau_n}^T H_\mu(t)c_\mu(t)dt\Big\} \\
&\quad \times N(\tau_n) + \int_0^{\tau_n} H_\mu(t)c_\mu(t)N(t)dt\Big] \\
&= \mathbf{E}\Big[\int_0^T H_\mu(t)N(t\wedge\tau_n)c_\mu(t))dt + \\
&\quad H_\mu(T)N(\tau_n)X^{(\mu)}(T)\Big].
\end{aligned}
$$

上式最右辺は，(3.49) の最左辺に等しい。したがって，(3.52) を得る。

ステップ 4.　任意の $\eta \in \mathfrak{D}$ に対して，(3.41) において $\nu \equiv \mu + \eta$ とおくと，(3.52) より，

$$
\mathbf{E}\Big[\int_0^T H_\mu(t)\eta^\top(t)\pi_\mu(t)dt\Big] \geq 0 \qquad \forall \eta \in \mathfrak{D}. \tag{3.53}
$$

(3.53) より，

$$
\eta^\top(t)\pi_\mu(t) \geq 0, \qquad t \in [0,\ T]; \qquad \forall \eta \in \mathfrak{D} \tag{3.54}
$$

となる。実際，ある $\eta \in \mathfrak{D}$ に対して，$A = \{(t,\ \omega) \in [0,\ T] \times \Omega\,;\ \eta^\top(t)\pi_\mu(t) < 0\}$ が正の確率をもつとすると，$\rho \triangleq \eta 1_{A^c} + k\eta 1_A$ として $k \in \mathbf{N}$ を十分に大きな値とすると，この $\rho \in \mathfrak{D}$ に対して，$\mathbf{E}\Big[\int_0^T H_\mu(t)\rho^\top(t)\pi_\mu(t)dt\Big] < 0$ となり，(3.53) に矛盾してしまうからである。(3.54) において任意の $\tilde{\rho} \in \tilde{K}$ に対して $\eta \equiv \tilde{\rho}$ とおくと，$\eta^\top(t)\pi_\mu(t) \geq 0$ であるから，付録の定理 A.1 より，(3.30) を得る。

一方，(3.41) において $\nu \equiv 0$ とおくと，(3.52) より，

$$
\mathbf{E}\Big[\int_0^T H_\mu(t)\mu^\top(t)\pi_\mu(t)dt\Big] \leq 0. \tag{3.55}
$$

(3.54) において $\eta \equiv \mu$ とおくと，(3.55) と合わせて (3.31) を得る。　□

例 III. 1　例　$n = 2,\ m = 1$ とする。また $\beta_1,\ \beta_2 \in \mathbf{R}$ を定数として，

$$
\begin{aligned}
&U_1(t,\ x) = e^{-\beta_1 t}\log x,\ U_2(x) = e^{-\beta_2 T}\log x, \\
&\quad (t,\ x) \in [0,\ T] \times (0,\ \infty)
\end{aligned}
$$

とする。

$$
\begin{aligned}
&k(t) \triangleq \int_t^T e^{-\beta_1 u}du + e^{-\beta_2 T}, \\
&k \triangleq k(0),
\end{aligned}
$$

とすると (3.20) - (3.27) より，

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_\nu(y) = \frac{k}{y}, \\
&\xi_\nu = \frac{xe^{-\beta_2 T}}{kH_\nu(T)},\ c_\nu(t) = \frac{xe^{-\beta_1 t}}{kH_\nu(t)}, \\
&M_\nu(\cdot) \equiv x,\ \phi_\nu(\cdot) \equiv 0,\ X_\nu(t) = \frac{xk(t)}{kH_\nu(t)}. \\
&\pi_\nu(t) = (\sigma^{-1})^\top\theta^{(\nu)}(t)X_\nu(t) \\
&\qquad = (\sigma\sigma^\top)^{-1}[b + \nu(t) - r1_2]X_\nu(t),
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_\nu(x) = k\log\Big(\frac{x}{k}\Big) - \ell + f(\nu), \\
&\tilde{V}_\nu(y) = -k\log y - (k + \ell) + f(\nu).
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

ただし，ここで，

$$
\begin{aligned}
&\ell \triangleq \beta_1\int_t^T ue^{-\beta_1 u}du + \beta_2 Te^{-\beta_2 T}, \\
&f(\nu) \triangleq \mathbf{E}\Big[\int_0^T e^{-\beta_1 t}\Big(\int_0^t \Big\{r + \frac{\|\theta^{(\nu)}(u)\|^2}{2}\Big\}du\Big) \\
&\qquad \times dt + e^{-\beta_2 T}\int_0^T \Big\{r + \frac{\|\theta^{(\nu)}(u)\|^2}{2}\Big\}du\Big], \\
&\nu \in \mathfrak{D}
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

とした。(3.57) と (3.58) より (3.34) もしくは (3.36) を満たす $\mu \in \mathfrak{D}$ を求めるには，$\tilde{K}$ 上で凸関数 $z \in \tilde{K} \to \|\theta + \sigma^{-1}z\|$ を最小化すればよい。すなわち，

$$
\mu(t,\ \omega) = \arg\min_{z \in \tilde{K}} \|\sigma^{-1}[b + z - r1_2]\|. \tag{3.59}
$$

(1.7) と (3.9) より，(3.59) で定義された $\mu:[0, T]\times\Omega\to\tilde{K}$ は，ある実数 $C>0$ に対して，

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T\|\mu(t)\|^2dt\right]\leq C\cdot\mathbf{E}\left[\int_0^T(\|\theta^{(\mu)}(t)\|^2+\|\theta\|^2)dt\right]\leq 2C\cdot\mathbf{E}\left[\int_0^T\|\theta\|^2dt\right]<\infty$$

となる。したがって，μ は(3.6)のクラス $\mathfrak{D}$ に属し，かつ $f(\mu)<\infty$ となる。定理III.1より，最適な富過程，消費過程，ポートフォリオ過程及び問題III.1の値関数は，各々次式で与えられる。

$$\hat{X}(t)\equiv X_\mu(t)=\frac{k(t)}{k}\frac{x}{H_\mu(t)},\qquad t\in[0, T],\tag{3.60}$$

$$\hat{c}(t)\equiv c_\mu(t)=\frac{e^{-\beta_1 t}}{k(t)}\hat{X}(t),\qquad t\in[0, T]\tag{3.61}$$

$$\hat{\pi}(t)\equiv\pi_\mu(t)=(\sigma\sigma^\top)^{-1}[b+\mu-r1_2]\hat{X}(t),\quad t\in[0, T],\tag{3.62}$$

$$V(x)=k\log\left(\frac{x}{k}\right)-\ell+f(\mu),\quad x\in[0, \infty].\tag{3.63}$$

ただし，ここで μ は(3.59)の過程である。

いまの場合，$\tilde{K}=\{x\in\mathbf{R}^2; x_1=0\}$ であるから，(3.59)と(3.62)は，各々

$$\mu(t)=\arg\min_{z\in R^2, z_1=0}\|\sigma^{-1}(t)(b(t)+z-r(t)1_d)\|=\begin{pmatrix}0\\ r-b_2+\sigma_2\sigma_1{}^\top(\sigma_1\sigma_1{}^\top)^{-1}(b_1-r)\end{pmatrix},\tag{3.64}$$

$$\hat{\pi}(t)=\begin{pmatrix}(\sigma_1\sigma_1{}^\top)^{-1}(b_1-r)\\ 0\end{pmatrix}\tag{3.65}$$

となる。ただし，ここで，

$$\sigma_1=(\sigma_{11}, \sigma_{12}), \sigma_2=(\sigma_{21}, \sigma_{22})$$

とした。

A 付　録

定義 A. 1　C を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とし，$\mathfrak{B}\triangleq\{x\in\mathbf{R}^n; |x|\leq 1\}$ とする。このとき，

$$\cap_{\epsilon>0}\{C+\epsilon\mathfrak{B}\}$$

を C の**閉包**と呼び，以下，cl$C$ で表す。

定理 A. 1　$C\subset\mathbf{R}^n$ を凸集合とする。このとき，次が成立する。

$$x\in\mathrm{cl}C\iff x^\top y\leq\sup\{x^\top y; x\in C\},\quad\forall y\in\mathbf{R}^n.$$

定理 A. 2 (Fatou の補題)　h を可積分な確率変数として，$h\leq f_n$, $n=1, 2, \cdots$, であれば

$$\mathbf{E}[\varliminf_{n\to\infty}f_n]\leq\varliminf_{n\to\infty}\mathbf{E}[f_n].$$

h を可積分な確率変数として，$h\geq f_n$, $n=1, 2, \cdots$, であれば

$$\mathbf{E}[\varlimsup_{n\to\infty}f_n]\geq\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{E}[f_n].$$

確率過程もしくは**過程**とは，**標本空間**と呼ばれる可測空間 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上に定義され，**状態空間**と呼ばれる可測空間 $(\mathbf{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n))$, n は自然数，上の値をとる確率変数 $X_t\equiv X_t(\omega)$, $(t, \omega)\in[0, \infty]\times\Omega$ の集まり $X=\{X_t; t\in[0, \infty]\}$ のことである。標本点 $\omega\in\Omega$ を所与としたとき，関数 $t\to X_t(\omega); t\geq 0$ を ω に関する過程 X の**サンプル・パス**という。以下，確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ を所与とし，特に断らない限り，すべての確率過程はこの確率空間上で定義されているとする

定義 A. 2　確率過程 X が

$$\{(t, \omega)\in[0, \infty)\times\Omega; X_t(\omega)\in A\}\in\mathfrak{B}([0, \infty))\otimes\mathfrak{F},\ \forall A\in\mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$$

をみたすとき，X は**可測である**という。

$$\mathfrak{F}_s\subset\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{F},\qquad 0\leq s\leq t<\infty$$

となる $\mathfrak{F}$ の部分可算加法族の族 $\mathbf{F}\triangleq\{\mathfrak{F}_t; \geq 0\}$

を**フィルトレーション**という。$\mathfrak{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathfrak{F}_t)$ とする。

定義 A. 3 フィルトレーション $\mathfrak{F}$ が右連続，すなわち $\mathfrak{F}_t = \cap_{\epsilon>0}\mathfrak{F}_{t+\epsilon}$, $t\in[0, \infty)$ かつ $\{A\in\mathfrak{F}; \mathbf{P}(A)=0\}\subset\mathfrak{F}_0$ を満たすとき，**通常の条件** (usual condition) を満たすという。

所与の過程 X に対して，すべての $s\in[0, t]$, $t\geq 0$ に対して，$X(s)$ が可測となる最小の可算加法族

$$\mathfrak{F}_t^X \triangleq \sigma(X_s; s\in[0, t])$$

を過程 X から**生成される可算加法族**という。

以下，特に断らない限り，通常の条件を満たすフィルトレーション $\mathbf{F}\triangleq\{\mathfrak{F}_t\subseteq\mathfrak{F}; t\geq 0\}$ 付き確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}, \mathbf{F})$ を所与とする。

定義 A. 4 各 $t\geq 0$ に対して，X_t が $\mathfrak{F}_t$-可測確率変数であるとき，過程 X は $\mathbf{F}$ に対して**適合的**であるといい，フィルトレーション $\mathbf{F}$ が自明であるときは，単に適合的という。

定義 A. 5 $\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{F}$ の部分可算加法族とし，X を可積分な確率変数とする。すべての $A\in\mathfrak{G}$ に対して，

$$\mathbf{E}[X1_{\{A\}}] = \mathbf{E}[Y1_{\{A\}}]$$

を満たす $\mathfrak{G}$ に関して可測かつ可積分な確率変数 Y を，$\mathfrak{G}$ が与えられたときの X の**条件付き期待値**と呼び，$\mathbf{E}[X|\mathfrak{G}]$ と表記する。

条件付き期待値は次の(a)～(d)の性質を満たす。

(a) X が $\mathfrak{G}$ に関して可測な確率変数であるならば，

$$\mathbf{E}[X|\mathfrak{G}] = X,$$

(b) $\mathfrak{H}$ が $\mathfrak{G}\subseteq\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{F}$ を満たす部分可算加法族であるならば，

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathfrak{H}]|\mathfrak{G}] = \mathbf{E}[X|\mathfrak{G}],$$

(c) Y が $\mathfrak{G}$ に関して可測な確率変数であるならば，

$$\mathbf{E}[XY|\mathfrak{G}] = Y\mathbf{E}[X|\mathfrak{G}],$$

(d) 凸関数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ に対して，

$$f(\mathbf{E}[X|\mathfrak{G}]) \leq \mathbf{E}[f(X)|\mathfrak{G}].$$

$[0, \infty]$-値 $\mathfrak{F}$-可測確率変数 T を**ランダム・タイム**という。

定義 A. 6 確率過程 X とランダム・タイム T を所与とする。関数 $X_T: \{\omega\in\Omega; T(\omega)<\infty\}\mapsto\mathbf{R}^n$ を

$$X_T(\omega) \triangleq X_{T(\omega)}(\omega)$$

で定義する。$X_\infty(\omega)$ がすべての $\omega\in\Omega$ で定義できるならば，

$$X_T(\omega) \triangleq \begin{cases} X_{T(\omega)}(\omega); \omega\in\{\omega\in\Omega; T(\omega)<\infty\} \\ X_\infty(\omega); \omega\in\{\omega\in\Omega; T(\omega)=\infty\} \end{cases}$$

とする。

定義 A. 7 ランダム・タイム T が，

$$\{\omega\in\Omega; T(\omega)\leq t\}\in\mathfrak{F}_t, \qquad t\geq 0$$

となるとき，T は，$\mathbf{F}$ の**停止時**であるという。

T を，$\mathbf{F}$ の停止時とするとき，

$$\mathfrak{F}_T \triangleq \{A\in\mathfrak{F}; A\cap\{T\leq t\}\in\mathfrak{F}_t, t\geq 0\}.$$

定義 A. 8 $\mathbf{F}$-適合的確率過程 X が

$$\mathbf{E}_s[X_t] \triangleq \mathbf{E}[X_t|\mathfrak{F}_s] \geq X_s, \ \mathbf{E}[|X_t|]<\infty, \quad 0\leq s\leq t<\infty$$

となるとき，X を**劣マルチンゲール**といい，$-X$ が劣マルチンゲールとなるとき，X を**優マルチンゲール**という。劣かつ優マルチンゲールであるとき，X を**マルチンゲール**という。

定理 A. 3 (劣マルチンゲール収束定理) $\{X_t; t\in[0, T]\}$ を $\sup_{t\geq 0}E[X_t^+]<\infty$ となる劣マルチンゲールとする。このとき殆どいたるところの $w\in\Omega$ に対して，$X_\infty = \lim_{t\to\infty}X_t$ が存在し，$\mathbf{E}[|X_\infty|]<\infty$.

定理 A. 4 (任意抽出定理) $\{X_t; t\in[0, T]\}$ を X_∞ が存在する右連続な劣マルチンゲールとし，$S\leq T$ となる S と T を停止時とする。このとき

$$\mathbf{E}_s[X_T] \triangleq \mathbf{E}[X_T|\mathfrak{F}_s] \geq X_s, \qquad \mathbf{E}[X_T] \geq X_0$$

となる。

定義 A. 9 （サンプルパスが）連続な適合的過程 W が，次の１と２の性質を満たすとき，（１次元）**標準ブラウン運動**という。

1. $W_0 = 0$ a.s.
2. $0 \leq s < t < \infty$ において $W_t - W_s$ は，$\mathfrak{F}_s$ から独立，かつ平均0，分散 $t-s$ の正規分布に従う。

標準ブラウン運動 W は，定義より明らかに，２乗可積分なマルチンゲールで $\mathbf{E}[W(t)^2] = t$, $t \geq 0$ となる。

定義 A.10 狭義増加実数列 $\{t_n; t_0 = 0, \lim_{n\to\infty} t_n = \infty\}_{n=0}^{\infty}$ と確率変数列 $\{\xi_n; \sup_{n\geq 0}|\xi_n(\omega)| < \infty, \omega \in \Omega, \xi_n$ は $\mathfrak{F}_{t_n}$ 可測 $\}_{n=0}^{\infty}$ によって，過程 X が

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega)1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i(\omega)1_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \quad t \geq 0,\ \omega \in \Omega$$

と表せるとき，X を**単純過程**という。単純過程のクラスを $\mathfrak{L}_0$ と表す。

$X \in \mathfrak{L}_0$ の標準ブラウン運動 W による**確率積分**を

$$I_t(X) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1}\xi_i(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_n(W_t - W_{t_n})$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\xi_i(W_{t\wedge t_{i+1}} - W_{t\wedge t_i}), \quad t \in [0, \infty)$$

で定義する。

$\mathfrak{L}^*$ を

$$\left(E\left[\int_0^T X_t^2 dt\right]\right)^{1/2} < \infty, \qquad T \in [0, \infty]$$

を満たす適合的 RCLL 過程 X のクラスとする[5)]。

定義 A.11 $X \in \mathfrak{L}^*$ とする。このとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{E}\left[\int_0^T (X_t^{(n)} - X_t)^2 dt\right]\right)^{1/2} = 0, \quad T \in [0, \infty]$$

となるすべての $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{L}_0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{E}\left[\{I_T(X^{(n)}) - I_T(X)\}^2\right]\right)^{1/2} = 0, \quad T \in [0, \infty]$$

となる唯一の２乗可積分マルチンゲール $I(X) = \{I_t(X), t \in [0, \infty)\}$ を X の標準ブラウン運動 W による**確率積分**とし，

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW(s), \qquad t \in [0, \infty)$$

と表す。

命題 A. 1 $X \in \mathfrak{L}^*$ の標準ブラウン運動 W による確率積分 $I(X) = \{I_t(X), t \in [0, \infty)\}$ は，以下の等式を満たす。

$$I_0(X) = 0,$$
$$\mathbf{E}_s[I_t(X)] = I_s(X),$$
$$\mathbf{E}[(I_t(X))^2] = \mathbf{E}\left[\int_0^t X_u^2 du\right],$$
$$\mathbf{E}_s[(I_t(X) - I_s(X))^2] = \mathbf{E}_s\left[\int_s^t X_u^2 du\right], \quad 0 \leq s \leq t < \infty,$$
$$I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

命題 A. 2 S と T を $S \leq T$ となる任意の停止時とする。任意の $X, Y \in \mathfrak{L}^*$ に対して，確率積分 $I(X), I(Y)$ は，以下の等式を満たす。

$$\mathbf{E}_S[I_{t\wedge T}(X)] = I_{t\wedge S}(X),$$
$$\mathbf{E}_S[(I_{t\wedge T}(X) - I_{t\wedge S}(X))(I_{t\wedge T}(Y) - I_{t\wedge S}(Y))] = \mathbf{E}_S\left[\int_{t\wedge S}^{t\wedge T} X_u Y_u du\right],$$
$$I_{t\wedge T}(X) = I_t(\tilde{X});\ \tilde{X}_t(\omega) \triangleq X_t(\omega)1_{\{t \leq T(\omega)\}}, \quad t \in [0, \infty].$$

定義 A.12 $\mathfrak{L}$ を適合的確率過程から成る集合とし，$\mathfrak{L}^1 \triangleq \left\{\theta \in \mathfrak{L}: \int_0^T |\theta(t)|\, dt < \infty\right\}$ とする。

また，$\{\mu(t): t \in \mathfrak{T}\} \in L^1$, $\{\sigma(t): t \in \mathfrak{T}\} \in \mathfrak{L}^*$ とする。このとき，

5) 過程 X のサンプルパスが右連続で左極限をもつとき，X を RCLL (Right Continuxus Left Limit) 過程という。

$$S(t)=S(0)+\int_0^t \mu(s)ds+\int_0^t \sigma(s)dW(s),\quad t\in\mathfrak{T}. \tag{A.1}$$

で定義される確率過程 $\{S(t): t\in\mathfrak{T}\}$ を**伊藤過程**と呼ぶ。

(A.1) は，形式的に

$$dS(t)=\mu(t)dt+\sigma(t)dW(t),\qquad t\in\mathfrak{T}$$

と表記される。

$\{\theta(t)\mu(t): t\in\mathfrak{T}\}\in\mathfrak{L}^1$, $\{\theta(t)\sigma(t): t\in\mathfrak{T}\}\in\mathfrak{L}^*$ を満たす適合的な確率過程 $\{\theta(t): t\in\mathfrak{T}\}$ から成る集合を $\mathfrak{L}[S]$ と書くことにする。$\{\theta(t): t\in\mathfrak{T}\}\in\mathfrak{L}[S]$ の伊藤過程 $\{S(t): t\in\mathfrak{T}\}$ による確率積分 $\int_0^t\theta(s)dS(s)$, $t\in\mathfrak{T}$, を

$$\int_0^t\theta(s)dS(s)\triangleq\int_0^t\theta(s)\mu(s)ds+\int_0^t\theta(s)\sigma(s)dW(s),\quad t\in\mathfrak{T}$$

で定義する。定義から $\left\{\int_0^t\theta(s)dS(s): t\in\mathfrak{T}\right\}$ も伊藤過程となる。

定理 A. 5（伊藤の公式） $\{X_i(t): t\in\mathfrak{T}\}$, $i=1, 2$, を

$$dX_i(t)=\mu_i(t)dt+\sigma_i(t)dW(t),\qquad t\in\mathfrak{T}$$

という伊藤過程とする。関数 $f(t, x)$, $f:[0,\infty)\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, が t に関して連続微分可能，x に関して 2 階連続微分可能ならば，$Y_i(t)\triangleq f(t, X_i(t))$ と置くと，

$$dY_i(t)=\Bigl(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_i(t))+\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_i(t))\mu_i(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_i(t))\sigma_i(t)^2\Bigr)dt+\frac{\partial f}{\partial x}(t, X_i(t))\sigma_i(t)dW(t)$$

となり，$\{Y_i(t): t\in\mathfrak{T}\}$ も伊藤過程となる。また，関数 $f(t, \boldsymbol{x})$, $f:[0,\infty)\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, が t に関して連続微分可能，$\boldsymbol{x}$ に関して 2 階連続微分可能ならば，$Y(t)\triangleq f(t, \boldsymbol{X}(t))$, $\boldsymbol{X}(t)\triangleq(X_1(t), X_2(t))$ と置くと，

$$dY(t)=\mathfrak{D}f(t, \boldsymbol{X}(t))dt+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \boldsymbol{X}(t))\sigma_i(t)dW(t),$$

$$\mathfrak{D}f(t, \boldsymbol{X}(t))\triangleq\frac{\partial f}{\partial t}(t, \boldsymbol{X}(t))+\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, \boldsymbol{X}(t))\mu_i(t)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(t, \boldsymbol{X}(t))\sigma_i(t)\sigma_j(t)$$

となり，$\{Y(t): t\in T\}$ も伊藤過程となる。

定理 A. 6（マルチンゲール表現定理） W を $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$ 上の標準ブラウン運動とし，$\mathbf{F}\triangleq\{\mathfrak{F}_t; t\geq 0\}$ を W によって生成されるフィルトレーションとする。このとき，$M=\{M_t; M_0=0\}$ を RCLL マルチンゲールとすると，

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T(Y_t)^2dt\right]<\infty,\qquad T\in[0,\infty),$$

$$M_t=\int_0^t Y_sdW_s^{(j)};\ t\in[0,\infty)$$

となる適合的 RCLL 過程 $\{Y_t; t\in[0,\infty)\}$ が存在する。

定理 A. 7（ベイズ則） $T\in[0,\infty)$ と $\mathbf{P}$-マルチンゲール $Z=\{Z_t; t\in[0,\infty)\}$ を所与とする。ある確率測度 $\mathbf{P}$ に対して $Z_T=\dfrac{d\tilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}}$ となるならば，$t\in[0, T]$ として $\mathbf{P}$-可積分な $\mathfrak{F}_t$-可測確率変数 Y に対して

$$\mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{P}}}[Y\mid\mathfrak{F}_s]=\frac{1}{Z_s}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[YZ_t\mid\mathfrak{F}_s]$$

$$\text{a.s. }\tilde{\mathbf{P}}\ \textit{and}\ \mathbf{P},\qquad s\in[0, t].$$

ただし，$\mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{P}}}$, $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}$ は各々確率測度 $\tilde{\mathbf{P}}$, $\mathbf{P}$ の下での期待値を表す。

定理 A. 8（Girsanov の定理） W を標準ブラウン運動とし，$X=\{X_t; t\in[0,\infty)\}$ を

$$\int_0^T(X_t)^2dt<\infty,\ T\in[0,\infty)$$

となる適合的過程として

$$Z_t\triangleq\exp\left[\int_0^t X_sdW_s-\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2ds\right]$$

とする。このとき，$Z=\{Z_t; t\geq 0\}$ がマルチンゲールであるならば，

$$\tilde{W}_t\triangleq W_t-\int_0^t X_sds,\qquad t\in[0,\infty)$$

で定義される過程 $\tilde{W}=\{\tilde{W}_t\,;\,t\in[0,\,T]\}$, $T\in[0,\,\infty)$ は，確率測度を

$$\tilde{\mathbf{P}}_T(A)\triangleq\mathbf{E}\,[1_A Z_T],\qquad A\in\mathfrak{F}_T$$

とする確率空間 $(\Omega,\,\mathfrak{F}_T,\,\tilde{\mathbf{P}}_T)$ 上の標準ブラウン運動となる。

定理 A. 9（Novikov の定理） 上の Girsanov の定理と同じ記号において，

$$\mathbf{E}\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right\}\right]<\infty,\qquad t\in[0,\,\infty]$$

ならば $\mathbf{E}\,[Z_t]=1$, $t\in[0,\,\infty)$. すなわち，$Z=\{Z_t\,;\,t\geq 0\}$ は，マルチンゲールとなる。

参考文献

[1] Chamberlain, G., "Asset Pricing in Multiperiod Securities Markets," *Econometrica,* 56, 1989, pp.1283-1300.

[2] Cox, J. and C. Huang, "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process," *Journal of Economic Theory,* 49, 1989, pp.33-83.

[3] Cox, J. and C. Huang, "A Variational Problem Arising in Financial Economics," *Journal of Mathematical Economics,* 21, 1991, pp.465-488.

[4] Cuoco, D., "Optimal Consumption and Equilibrium Prices with Portfolio Constraints and Stochastic Income," *Journal of Economic Thory,* 72, 1997, pp.33-73.

[5] Cvitanić, J. and I. Karatzas, "Convex Duality in Constrained Portfolio Optimization," *The Annals of Applied Probability,* 2 (4) , 1992, pp.787-818.

[6] Duffie, D. and W. Fleming, and H. M. Soner, and T. Zariphopoulou, "Hedging in Incomplete Markets with HARA Utility," *Journal of Economic Dynamics and Control,* 21, 1997, pp.753-782.

[7] He, H. and N. Pearson, "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Finite Dimensional Case," *Working Paper,* Simon Graduate School of Business Administration, University of Rochester, 1988.

[8] He, H. and N. Pearson, "Consumption and Portfolio Policies with Incomplete Markets and Short-Sale Constraints: The Infinite-Dimensional Case," *Journal of Economic Theory,* 54, 1991, pp.259-304.

[9] Huang, C., "An Intertemporal General Equilibrium Asset Pricing Model: The Case of Diffusion Information," *Econometrica,* 55, 1987, pp.117-142.

[10] Karatzas, I. and J. P. Lehoczky, and S. P. Sethi, and S. E. Shereve, "Explicit Solution of a General Consumption/Investment Problem," *Mathematics of Operations Research,* 11, 1986, pp.264-294.

[11] Karatzas, I. and J. P. Lehoczky, and S. E. Shereve, and G. L. Xu, "Martingale and Duality Methods for Utility Maximization in an Incomplete Market," *SIAM Journal of Control and Optimization,* 29, 1991, pp.702-730.

[12] Karatzas, I. and S. Shreve, *Methods of Mathematical Finance,* Springer-Verlag, 1998.

[13] Merton, R., "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-time Case," *The Review of Economics and Statistics,* 51, 1969, pp.247-257.

[14] Merton, R., "Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model," *Journal of Economic Theory,* 3, 1971, pp.373-413.

[15] Pagés, H., "Optimal Consumption and Portfolio Policies when Markets are Incomplete," *MIT mimeo,* Massachusetts Institute of Technology, 1987.

[16] Pliska, S., "A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal portfolios," *Mathematics of Operations Research,* 11, 1986.

[17] Xu, G.-L. and S. E. Shreve, "A Duality Method for Optimal Consumption and Investment under Short-Selling Prohibition. I. General Market Coeffcients," *The Annals of Applied Probability,* 2, 1992, pp.87-112.