平成五年十一月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第152巻　第4・5号

平成5年10・11月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第152巻第4・5号，1993年10・11月

時系列と集計

中敷領孝能

I イントロダクション

経済を数量的に分析しようとする際に頻繁に行なわれるのは，いくつかの機関が発表したデータに基づき，理論経済のモデルに対し計量経済の方法を適用することである。理論経済のモデルは，それがマクロ変数に対するものであっても，通常，ミクロのレベルでみてもそれほど違和感のない形式になっている。古典的な例では，所得と消費の間の関係である。理論自体はマクロの関係であるが，個々の経済主体がそのような関係，言い替えると行動方程式をもっているものと考えても特に奇妙な感じを受けることはないであろう。ところで，実際の経済の動きは，各経済主体の様々な行動が，結果としてマクロの諸変数に反映されているとみるのが妥当であろう。以上のことをまとめて考えると，マクロの関係で想定される式がミクロの関係で実際に成立しており，それが現実のマクロの関係を成立させていることになる。

理論経済では，このミクロとマクロの関係について様々な議論があるが，情報処理の点からは，それは，ミクロの変数とマクロの変数の関係に一部は集約できる。この問題は，以前，集計の問題として扱われた。これは，マクロの変数のうちで，ミクロの変数の単純な総和になっているものを「集計された変数」と呼び，集計された変数間の関係が，もとの集計される前の変数の関係とどのような関連があるかを扱ったものである。本稿でもその線にしたがって議論を特に時系列関係に展開していく。

単純な総和に限って議論するのは現実に発表されるデータを見ると問題があ

るだろう。多くの場合，理想的な状態では単に集計されるだけで計算できるとされている変数であっても，現実には，「変数の真の値」もしくは，この変数が確率変数だと見なせる場合には，「変数の真の実現値」を求めるような，推計を行なって算出されるからである。とすると，実際の算出のプロセスを理論に取り込む方法として，ミクロ変数からなるベクトルに，あるウェイトのベルトルをかけてマクロ変数を計算している，というのが近似として考えられるであろう。本稿の扱いでは，このウェイトのベクトルが単純に全ての要素が1からなっている特殊ケースに該当するに過ぎない。そのような問題がありながら「理想的な」状態を想定するのは次のような事情による。いくつかのマクロ変数をとった場合，そのミクロ変数からの集計の方法が一通りでない状況，言い替えると，ウェイトベクトルが各マクロ変数の間で異なる状況になっているのが普通だと考えられるのである。この状態で得られるマクロの関係と元のミクロの関係はかなり複雑，かつ意味不明なものになる。

本稿では次のプランで叙述が行なわれる。2節で集計の問題を概念的に特に時間と情報とに関係させながら明らかにする。3節ではマクロ変数を使って行なわれる最小二乗推定量が，ミクロの行動方程式とどのような関係を持つかを時間構造を含まないモデルに限定して見る。4節で定常時系列，5節では非常な時系列を含む場合に関してのべる。

II 集計問題と情報

経済変数間の関係が推定されるに当たって，通常，三つのカテゴリーに分類される主体が必要である。一つは，実際にある環境のもとで経済活動を営んでいる経済主体であり，一つは，経済主体の経済活動を測定し，いくつかの経済データとして発表する統計機関であり，最後の一つは，発表されたデータをもとに経済分析を行なう分析を行なう分析者である。なお，この分類はあくまで機能面からのものであり，特定の主体がいずれかに排反的に分類されなければならないことを意味するものではない。

これら三者の行動を，まず，時間の観点から眺めてみる。まず，経済主体であるが，経済主体は，時間軸上で継続的に活動している，と考えるのが適当であろう。次に，統計機関にとっては時間は大きな意味をもっている。統計機関は，ある期間を区切ってその期間中のデータを集め，期間終了後にまとめたデータを他のものに利用できる形にする。期間中に中間発表的なものがあるかもしれないが，その算出には期間の全てのデータを使うことはできない。分析者は他の2者と同期して分析を行なう必要はとくにない。

次に，情報の観点から眺めてみよう。

経済主体は，通常分散的に活動している。ある種のデータに関しては，ある経済主体は，そのほかの全ての経済主体の持つデータを一切もたないと考える。他の種のデータについては，任意の時点で市場などを通じて全ての経済主体がその気になれば得ることができるであろう前者のデータを各経済主体に固有なデータという意味でローカル変数と呼び，後者を，全ての経済主体が利用可能なデータという意味で，グローバル変数と呼ぶことにする。現実には，ある種の経済主体は前者の種類のデータについても，いくつかの自分以外の主体のデータについて知識があるかもしれないので，これは一つの抽象である。理想的な例としては，ローカル変数は各経済主体の所得，グローバル変数は為替レートがあげられよう。各経済主体は，任意の時点で，自分の管理するローカル変数に関する情報及びグローバル変数に関する情報を得ることができる。

統計機関は，以下の分析では次のことを行なうものとされる。特定期間の終了後に，ローカル変数に関しては，期間の最後の値についてその経済主体に関する総和を他のものが利用できる形で公表する。グローバル変数に関しては，期間中の平均値を公表する。公表されたデータを，マクロデータと呼ぶことにする。統計機関は期間終了後に，全ての期末のローカル変数のデータおよび全ての期間中の任意の時点のグローバル変数のデータを所有していることになる。なお，マクロデータは新たなグローバル変数と考えることができる。

分析者は，統計機関が発表したマクロデータに基づき経済分析を行なう。グ

ローバル変数に関しては，分析者もまた任意の時点のデータを得られると考えるのが妥当であろうが，扱う回帰式がローカル変数の総和になっているデータを含む場合には，データの数の少ない方，または公表されるサイクルの長い方に利用するデータの数を合わせている，と考えることができる。

以上の記述から，ローカル変数に属するものは，その和が意味のあるような変数でなければならない。グローバル変数には特にそのような制約はないが，公表されるものが平均値であるから，その水準が問題になるようなものが望ましい。

さて，ここまでの考察から，ある期において，第 i 経済主体が T 回の決定をするものとして，その t 時点での線形行動方程式は次のようになる。なお，係数は期間の中，または外で不変という想定を置いている。また，行動の決定に当たって変数の以前のデータを参照することが当然あり得るが，それもないものとしている。

$$\Delta Y_{it}=\Sigma\alpha_{ij}\Delta x_{ijt}+\Sigma(\beta_{ij}/T)z_{jt}+e_{it} \qquad (2.1)$$

ただし，Σ は j に関してとるものとする。また，$\Sigma\Delta Y_{it}=Y_i$, $\Sigma\Delta x_{ijt}=x_{ij}$, $\Sigma z_{jt}/T=z_j$, x, Y はローカル変数，z はグローバル変数とする。x の変数の数を p, z の変数の数を q とする。

グローバル変数の中には，定数項1からなるものがあっても構わない。期間の間に決定を行なう回数 T は各経済主体について異なる，または参照するデータの時点が異なるであろうから，実際に $\Sigma z_{jt}/T=z_j$ という式が全ての経済主体に関して成り立つ必然性はないが，これはむしろ些細な問題であろう。

次に，(2.1)式を t に関して総和をとることで，統計機関の保有するデータ，すなわち x_{ij}, Y_i についての式が得られる。

$$Y_i=\Sigma\alpha_{ij}x_{ij}+\Sigma\beta_{ij}z_j+e'_i \qquad (2.2)$$

この式は，実際の時点ごとの行動方程式(2.1)を単に加算していったものであるから，これを「真の行動方程式」または単に「行動方程式」と呼ぶことにする。

さらに，経済主体に関して総和をとることで，マクロデータを統計機関が算出する。

$$\Sigma Y_i = Y,\ \Sigma x_{ij} = x_j$$

これと，先ほどの $\Sigma z_{jt}/T = z_j$ を合わせ，当該の方程式について，全部で Y, x_j, z_j を統計機関がマクロデータとして提供することになる。最終的に分析者は，行動方程式とマクロの変数間の関係が同じ形式であるという想定の元で，次のような回帰式を立てることになる。

$$Y = \Sigma\alpha_j x_j + \Sigma\beta_j z_j + e'' \tag{2.3}$$

この式を「回帰式」と呼ぶことにする。

回帰式(2.3)を観念的に考えた場合，その意味するところはそれほど明らかではない。グローバル変数 z の係数 β に関しては，それが $\Delta Y/\Delta z$ を表わすことが明白である一方，集計されたローカル変数 x の係数 α についてはそうではない。というのは，形式的には同じように $\Delta Y/\Delta x$ を表わすものであるとしても，そもそも $\Delta x = \Sigma\Delta x_i$ と書き直すことができ，Δx_i の配分によって ΔY が変わるからである。

以上の式では，Y を集計されたローカル変数としてきた。そうでなく，Y をグローバル変数を表わすものとして考えよう。各時点の行動方程式(2.1)を考えると，形式的には式の左辺の ΔY_{it} が Y_t に書き換わり，ある特定の経済主体が全ての経済主体にとっての環境となるグローバル変数を決定するのは奇妙なことである。一方，回帰式(2.3)を作る時点だけをとって考えると，ローカル変数の集計がグローバル変数の値を決定するような式を立ててもさほど違和感がないことが多い。例えば，輸出，輸入総額から為替レートを説明するような式である。この矛盾を回避する一つの手段は，グローバル変数をも，一つの加算された値とみることである。すなわち，ある時点において，行動方程式(2.1)の左辺をやはり ΔY_{it} と考えるのである。但し，今度の Δ は，i について総和をとり，ある定数を加算することで Y_t を算出するものとする。つまり，個々の経済主体はグローバル変数の値そのものを決定することはできないが，

グローバル変数の動向を決定することができると考えるのである。

III　行動方程式と回帰式

最初にきわめて簡単なモデルを提示し，後で，一般的に展開する。この節の内容は，Theil (1971) と叙述の形式では異なるとはいえ，本質的に変わるところは全くない。

真の行動方程式が，一つの集計されるローカル変数から一つの集計されるローカル変数を決定するような簡単な場合を考える。

$$Y_i = \alpha_i x_i + u_i \tag{3.1}$$

これに従って，回帰式は次のようになる。

$$Y = \alpha x + v \tag{3.2}$$

以下，α の OLS 推定量と各 α_i の関連を考察する。

行動方程式(3.1)を n 個の経済主体に関し並べて書く。

$$Y^*_t = (Y_{1t},\ Y_{2t},\ ...\ Y_{nt})',\ A = \mathrm{diag}(\alpha_i)$$

$$x^*_t = (x_{1t},\ x_{2t},\ ...\ x_{nt})',\ u^*_t = (u_{1t},\ u_{2t},\ ...\ u_{nt})'$$

$$Y^*_t = Ax^*_t + u^*_t \tag{3.3}$$

但し，ここでの t は，前節での t と異なり，期間内の番号でなく，期間そのものの番号を意味している。T を期間の数，すなわちデータの数とする。

$$Y = (Y^*_T,\ Y^*_{T-1},\ ...\ Y^*_1),\ X = (x^*_T,\ x^*_{T-1},\ ...x^*_1)$$

$$U = (u^*_T,\ u^*_{T-1},\ ...\ u^*_1)$$

$$Y = AX + U \tag{3.4}$$

次に，回帰式を考える。

e を $n\times 1$ のベクトルで全ての要素が 1 からなるものとし，$V = (v_T,\ v_{T-1}\ ..\ v_1)$ と書くと，回帰式(3.2)は次のようにまとめることができる。

$$(e'Y)' = \alpha(e'X)' + V'$$

ここで，α の OLS 推定量を求める。ただし，$E(u) = 0$

$$\hat{\alpha} = ((e'X)(e'X)')^{-1}((e'X)(e'Y)')$$

$$=(e'XX'e)^{-1}(e'XY'e) \tag{3.5}$$

$$E(\hat{\alpha})=(e'XX'e)^{-1}(e'X(AX)'e)$$

$$=(e'XX'e)^{-1}(e'XX'Ae)$$

この式の分子は次のように展開される。

$$\alpha_1\Sigma(x_{1t}\Sigma x_{it})+\alpha_2\Sigma(x_{2t}\Sigma x_{it})+\ ...\ +\alpha_n\Sigma(x_{nt}\Sigma x_{it})$$

一方，分母は，$\Sigma(\Sigma x_{it})^2$ であるから，$E(\hat{\alpha})$ は次のように書くことができる。

$$E(\hat{\alpha})=w_1\alpha_1+w_2\alpha_2+\ ...\ +w_n\alpha_n$$

但し，$w_i=(\Sigma x_{it}\Sigma x_{it})/(\Sigma(\Sigma x_{it})^2)$

このことから，$\Sigma w_i=1$ が成立する。すなわち，回帰式の OLS 推定量の期待値は，真の行動方程式の係数の加重平均になる，といえる。この w_i は，形式的には次の式の w の OLS 推定量と一致している。

$$x_{it}=w_i\Sigma x_{it}+u_t$$

次に，$E(u^*_t, u^*_t{}')=\mathrm{diag}(\sigma^2_i)$, $E(u^*_t, u^*_s{}')=0$, $t\neq s$ として，分散を見る。

$$V(\hat{\alpha})=E(((e'XX'e)^{-1}(e'XU'e))((e'XX'e)^{-1}(e'XU'e))')$$

$E(U'ee'U)=(\Sigma\sigma_i^2)I_T$ （I_T は $T\times T$ の単位行列）であるから，

$$V(\hat{\alpha})=(\Sigma\sigma^2_i)(e'XX'e)^{-1}$$

(3.1)の行動方程式の仮定，及びその撹乱項の仮定のもとで，$(\Sigma\sigma^2_i)$ は ΣY_i の，つまり，真の Y の分散に等しい。従ってこの結果は，標準的な場合の分散の式と何も変わらない。従って，興味の中心は推定量の平均に置かれるべきである。ただし，回帰式(3.2)の撹乱項 v と行動方程式の撹乱項 u_i は，$v=e'u^*$ の関係にあるわけではない。

次に，真の行動方程式が(2.2)の様に書ける一般的なケースを取り扱う。

$$Y^*_t=(Y_{1t},\ Y_{2t},\ ...\ Y_{nt})',\ A_j=\mathrm{diag}(\alpha_{ij})$$

$$x^*_{jt}=(x_{1jt},\ x_{2jt},\ ...\ x_{njt})',\ u^*_t=(u_{1t},\ u_{2t},\ ...\ u_{nt})'$$

$$Y^*_t=A_1x^*_{1t}+\ ...\ +A_px^*_{pt}+\beta_1z_{1t}+\ ...\ +\beta_qz_{qt}+u^*_t$$

ここで，i に関する添え字は経済主体を意味し，j に関する添え字は経済変

数についてのものである。β_j は $n\times 1$ の係数ベクトルである。

$$A=(A_1, A_2 \ldots A_p, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q)$$

$$x^*_t=(x^*_{1t}{}' \ldots x^*_{pt}{}' \, z_{1t} \ldots z_{qt})'$$

このようにおくと，上の式はコンパクトに書くことができる。

$$Y^*_t=Ax^*_t+u^*_t$$

この式を t に関して横に並べる。

$$(Y^*_T \ldots Y^*_1)=A(x^*_T \ldots x^*_1)+(u^*_T \ldots u^*_1)$$

$$Y=AX+U \tag{3.6}$$

$$Y=(Y^*_T \ldots Y^*_1),\ X=(x^*_T \ldots x^*_1),\ U=(u^*_T \ldots u^*_1)$$

(3.6)式は，真の行動方程式に対応する。

次に，回帰式を考える。次のような変換行列 H を考える。

$$H=\mathrm{diag}(I_p\otimes e', I_q)$$

回帰式の係数ベクトルを $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p, \beta_1, \beta_2 \ldots \beta_q)'$ として次のようになる。

$$(e'Y)'=(HX)'\alpha+V$$

なお，V は適当にとった攪乱項である。ここで，α の OLS 推定量を求める。

$$\hat{\alpha}=((HX)')'(HX)')^{-1}((HX)'(e'Y)')$$

$$=(HXX'H')^{-1}(HX(AX+V)'e)$$

$$E(\hat{\alpha})=(HXX'H')^{-1}(HXX'A'e)$$

ここで，$A'e=(\alpha_{11} \ldots \alpha_{n1} \ldots \alpha_{1q} \ldots \alpha_{nq}, (\beta_1'e) \ldots (\beta_q'e))$。さらに，$W=(HXX'H')^{-1}(HXX')$ とおくと，

$$E(\hat{\alpha})=W(A'e)$$

$$WH'=I_{(np+q)}$$

より，次のことがわかる。W の第 i 行を $W(i)$ と書く。W の要素は次のようにウェイトと呼ばれるにふさわしいので，そのように呼ぶ。また H の j 行目を $H(j)$ と書く。

1) $1 \leqq i \leqq p,\ i=j$ の時，$W(i)H(j)'=1$

ある集計されるローカル変数に対応する回帰式の係数に対し，対応する行動方程式の係数のウェイトの和は1になる。

2) $1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq p,\ i \neq j$ の時，$W(i)H(j)'=0$

ある集計されるローカル変数に対応する回帰式の係数に対し，それ以外の行動方程式のローカル変数の係数のウェイトの和は0になる。

3) $1 \leqq i \leqq p,\ p+1 \leqq j \leqq p+q,\ W(i)H(j)'=0$

ある集計されるローカル変数に対応する回帰式の係数に対し，グローバル変数の係数のウェイトは0，つまり影響は0である。

4) $p+1 \leqq i \leqq p+q,\ 1 \leqq j \leqq p,\ W(i)H(j)'=0$

あるグローバル変数に対応する回帰式の係数に対し，集計されるローカル変数の係数のワェイトの総和はそれぞれ0である。

5) $p+1 \leqq i \leqq p+q,\ i=j$ の時，$W(i)H(j)'=1$

あるグロバール変数に対応する回帰式の係数に対し，対応するグローバル変数の係数のウェイトは1である。

6) $p+1 \leqq i \leqq p+q,\ i \neq j$ の時，$W(i)H(j)'=0$

あるグローバル変数に対応する回帰式の係数に対し，それ以外のグローバル変数の係数のウェイトは0である。

IV 定常時系列

問題の設定上，AR モデルを扱い，MA 部分の含まれるものは扱わない。

時系列モデルで問題になるのは，2節のような問題を考えたとき，まず回帰式と真の行動方程式の形が一致しないことである。一般に，$ARMA(p_1, q_1)$ 変数 X_1 と $ARMA(p_2, q_2)$ 変数 X_2 をとって $X=X_1+X_2$ という変数 X を作った場合，X の AR 部分の次数は p_1+p_2 以下，MA 部分の次数は $\max(p_1+q_2, p_2+q_1)$ 以下になり，また，係数がうまくかみ合わない限り一般に「以下」のうち「等しい」ことになる。例えば，2つの $AR(1)$ 変数の和は，通常 $ARMA$

(2,1) になる。これは単に2つの経済主体しか存在しない場合で，一般にはもっと多い状況が当然だろうから，$ARMA$ の次数はさらに大きくなる。有限の $ARMA$ でとどまるには違いないが，実質的にパラメーターの節約という利点で $ARMA$ モデルを採用する意味はない。AR のみの表現では，通常 $AR(\infty)$ になる。逆に言うと，回帰式が $AR(1)$ であって，かつ，その変数が集計されるローカル変数であった場合，各経済主体の行動方程式が同じであるという強い確信がない限り，一般に行動方程式が $AR(1)$ である，という想定とは両立しない。従って，マクロ変数間で時系列モデルを作ったとき，その根拠を各経済主体の行動様式に求めるような説明は，疑ってかかる必要があろう。

行動方程式から回帰式の方向で再び考える。行動方程式が $AR(1)$ であったとき，回帰式を $AR(1)$ で作ることは首尾一貫しないことは上の通りであるが，このことは推定された回帰式の係数が意味のないものであることを直ちに意味するものではない。また，経済変数に対し時系列モデルを当てはめることは多分に近似的な意味をもっているから，もし，真の行動方程式が $AR(1)$ であって，真の回帰式は $ARMA$ でかなり次数の大きいものであろうとも，それが単純に $AR(1)$ で近似され得ることを排除しない。

はじめに簡単な，定数項を含まない定常 $AR(1)$ モデルを考えることにする。

$$X_i=\alpha_i X_{i-1}+u_i \tag{4.1}$$

これは，(3.1)式で Y を X に，x を X_{-1} に置き換えたものである。ただし，$|\alpha_i|<1$ とする。u_i は iid で $E(u_i)=0$, $V(u_i)=\sigma_i^2$, また4次のモーメントを持つものとする。

回帰式は次のようになる。但し，$\xi=e'X$

$$\xi=\alpha\xi_{-1}+v \tag{4.2}$$

(4.2)式の(3.2)式に対する関係は，(4.1)式のそれと全く同じである。従って，行動方程式は，(3.4)に対するように書くことができる。

$$X=AX_{-1}+U \tag{4.3}$$

回帰式(4.2)の条件付き最尤推定量は X^*_1 を与えられたものとする OLS 推

定量である。ここでは，その漸近的な値を問題にする。

$$\hat{\alpha}=((e'X_{-1})(e'X_{-1})')^{-1}((e'X_{-1})(e'X)')$$
$$=(e'X_{-1}X_{-1}'e)^{-1}(e'X_{-1}X'e)$$
$$=(e'X_{-1}X_{-1}'e)^{-1}(e'X_{-1}(AX_{-1}+U)'e) \qquad (4.4)$$

ここで，$U=(u^*_T, u^*_{T-1}\ldots u^*_2)$, $E(U)=0$ また，$X_{-1}=(X^*_{T-1}, X^*_{T-2}\ldots X^*_1)$ で X^*_t は初期値 X_{i1} と $u_{it}\ldots u_{i2}$ の線形結合に書き直すことができるから，U と X_{-1} の関係において対応する部分に関して独立。従って，α の漸近的な値には無関係である。

$$\mathrm{plim}(\hat{\alpha})=\mathrm{plim}((e'X_{-1}X_{-1}'e)^{-1}(e'X_{-1}(AX_{-1})'e))$$
$$=\mathrm{plim}((e'X_{-1}X_{-1}'e)^{-1}(e'X_{-1}X_{-1}'Ae)) \qquad (4.4)$$
$$X_{-1}X_{-1}'=(X^*_{T-1}, X^*_{T-2}\ldots X^*_1)(X^*_{T-1}{}', X^*_{T-2}{}'\ldots X^*_1{}')'$$
$$=\Sigma X^*_tX^*_t{}'$$

$X^*_t=(X_{1t}, X_{2t}, \ldots X_{nt})'$ であるから，

$$X^*_tX^*_t{}'=\begin{pmatrix} X_{1t}X_{1t}, & X_{1t}X_{2t}, & \ldots & X_{1t}X_{nt} \\ X_{2t}X_{1t}, & X_{2t}X_{2t}, & \ldots & X_{2t}X_{nt} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{nt}X_{1t}, & X_{nt}X_{2t}, & \ldots & X_{nt}X_{nt} \end{pmatrix}$$

初期値 X^*_1 の影響は，$|\alpha_i|<1$ の仮定のもとで，漸近的に無視でき，条件のつかない定常過程と同じ性質を $\Sigma X_{it}X_{jt}$ は持つから，次のようになる。

$$\mathrm{plim}((\Sigma X_{it}X_{it})/(T-1))=\sigma_i^2/(1-\alpha_i^2)$$
$$\mathrm{plim}((\Sigma X_{it}X_{jt})/(T-1))=0, \qquad i\neq j$$

$\sigma_i^2/(1-\alpha_i^2)$ は初期条件のない定常過程と X_{it} を見たときの分散である。これを使って，次のように書くことができる。

$$\mathrm{plim}(X_{-1}X_{-1}'/(T-1))=\mathrm{diag}(\sigma_i^2/(1-\alpha_i^2))\equiv\Gamma(0)$$
$$\mathrm{plim}((e'X_{-1}X_{-1}'e)^{-1}(e'X_{-1}X_{-1}'Ae))=(e'\Gamma(0)e)^{-1}(e'\Gamma(0)Ae)$$
$$(e'\Gamma(0)Ae)=\Sigma(\sigma_i^2/(1-\sigma_i^2))\alpha_i$$

$$(e'\Gamma(0)e)^{-1}=\Sigma(\sigma_i^2/(1-\sigma_i^2))$$

$w_i=(\sigma_i^2/(1-\alpha_i^2))/\Sigma(\sigma_i^2/(1-\alpha_i^2))$ と定義すると，最終的に確率極限は $\Sigma w_i\alpha_i$ と書き直すことができる。この結果から，$\Sigma w_i=1$ となって，w が漸近的なウェイトと呼ばれるものにふさわしいことがわかる。この結果は，3節の場合の簡単な場合におけるウェイトに対応するものであるが，個々の時系列の実現値には依存しない。

w_i をながめることによって，回帰式(4.2)と，行動方程式(4.1)との関係は，行動方程式の係数の絶対値が1に近いほど，また，行動方程式の攪乱項の分散が大きいほど，その係数にかかるウェイトが大きいことがわかる。

$\Sigma w_i\alpha_i$ を，予測の観点から眺めてみることにする。ここでは，さらに，攪乱項 u が正規分布に従うことを仮定する。(4.1)式のもとで，$X_{i-1}=x_{i-1}$ が与えられたとき，X_i の最適予測は $\alpha_i x_{i-1}$ である。仮に，集計された変数の回帰によって，推定値が $\Sigma w_i\alpha_i$ にちょうど一致したとしよう。その時，分析者は，集計された変数 $X_{-1}=x_{-1}$ の条件の元で，最適予測を $(w_i\alpha_i)x_{-1}$ として計算することになる。一方，集計される前の変数の真の値が x_{i-1} であり，$\Sigma x_{i-1}=x_{-1}$ であるとしよう。さらに，$\{\alpha_i\}$ がわかっているなら，x の最適予測は，$\Sigma\alpha_i x_{i-1}$ で与えることが妥当である。さて，X_{i-1} は，X_{i-2} 以前の系列を無視すると，以上の仮定のもとで，他の経済主体の変数とは独立に $N(0, \sigma_i^2/(1-\alpha_i^2))$ に従っている。これを使って，次の関係が得られる。

$$E(X_{i-1}\mid X_{-1}=x_{-1})=w_i x_{-1}$$

$$E((\Sigma\alpha_i X_{i-1})\mid X_{-1}=x_{-1})=(\Sigma\alpha_i w_i)x_{-1}$$

集計された変数による係数の推定値の極限 $\Sigma\alpha_i w_i$ は，それを使った X の最適予測が真の係数 $\{\alpha_i\}$ がわかっているもとでの最適予測の期待値に等しいという意味で，望ましい性質をもっている。

次に，一般の，定数項を含む $AR(p)$ モデルについて同じようにみてみることにする。

まず，個々の経済主体の行動方程式，及び回帰式は次のようになる。

$$X_i=\alpha_{1i}X_{i-1}+\ .\ .\ .\ +\alpha_{pi}X_{i-p}+\tilde{\mu}_i+u_i \tag{4.5}$$

$$\xi=\alpha_1\xi_{-1}+\ .\ .\ .\ +\alpha_p\xi_{-p}+\tilde{\mu}+v \tag{4.6}$$

$\tilde{\mu}_i$ や $\tilde{\mu}$ はそれぞれ X_i や ξ の平均を直接表わさない。行動方程式(4.5)の場合，X_i の平均は $\mu_i=\tilde{\mu}_i/(1-\Sigma\alpha_{ji})$ である。漸近理論においては，$\tilde{\mu}_i$ よりも μ_i を用いた方が表現が簡単なので，一部，これを用いる。

$$X^*_t=(X_{1t},\ X_{2t},\ .\ .\ .\ X_{nt})',\ A_j=\mathrm{diag}(\alpha_{ij})$$

$$\tilde{\mu}^*=(\tilde{\mu}_1,\ \tilde{\mu}_2,\ .\ .\ .\ \tilde{\mu}_n)',\ u^*_t=(u_{1t},\ u_{2t},\ .\ .\ .\ u_{nt})'$$

$$X^*_t=A_1X^*_{t-1}+\ .\ .\ .\ +A_pX^*_{t-p}+\tilde{\mu}^*+u^*_t$$

これが，(4.5)式を経済主体に関し並べた式になる。

$$A=(A_1,\ A_2\ .\ .\ .\ A_p,\ \tilde{\mu}^*)$$

$$X_{t-1}=(X^*_{t-1}{}',\ X^*_{t-2}{}'\ .\ .\ .\ X^*_{t-p}{}',\ 1)'$$

とおくとコンパクトに書くことができて

$$X^*_t=AX_{t-1}+u^*_t$$

$$Y=(X^*_T,\ X^*_{T-1}\ .\ .\ .\ X^*_{p+1}),\ X=(X_{T-1},\ X_{T-2}\ .\ .\ .\ X_p)$$

$$U=(u^*_T,\ u^*_{T-1}\ .\ .\ .\ u^*_{p+1})$$

$$Y=AX+U \tag{4.7}$$

これは，行動方程式からなる式である。

$$H=\mathrm{diag}(I_p\otimes e',\ 1)$$

なる H をとり，$V=(v_T,\ v_{T-1}\ .\ .\ .\ v_{p+1})'$, $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_p,\ \mu)$ とすると，回帰式は次のようになる。

$$(e'\ Y)'=(HX)'\alpha+V$$

簡単な例と同じように，$X^*_p\ .\ .\ .\ X^*_1$ を与えられたものとして，OLS 推定量を求める。

$$\hat{\alpha}=(HXX'H')^{-1}(HX(AX+U)'e)$$

X と U はやはり対応する部分が独立で $E(U)=0$ であるから，α の漸近的な値は次のように書くことができる。

$$\mathrm{plim}(\hat{\alpha})=\mathrm{plim}((HXX'H')^{-1}(HXX'A'e))$$

個々の行動方程式(4.5)が定常性の条件を満たしていれば，初期値の影響は漸近的に無視することができる。さらに，次のように定義する。

$$\mu=(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n)', \ \Gamma(j)=\mathrm{diag}(\gamma_i(j))$$

ここで，μ_i, $\gamma_i(j)$ はそれぞれ，(4.5)式のもとでの平均及び j 次の自己共分散である。

$$\mathrm{plim}((XX')/(T-p))=\Xi\equiv$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma(0)+\mu\mu' & \Gamma(1)+\mu\mu' \ldots & \Gamma(p-1)+\mu\mu' & \mu \\ \Gamma(1)+\mu\mu' & \Gamma(0)+\mu\mu' \ldots & \Gamma(p-2)+\mu\mu' & \mu \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \Gamma(p-1)+\mu\mu' & \Gamma(p-2)+\mu\mu' \ldots & \Gamma(0)+\mu\mu' & \mu \\ \mu' & \mu' & \mu' & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{plim}((HXX'H')^{-1}(HXX'A'e))=(H\Xi H')^{-1}(H\Xi A'e)$, $\Gamma=(\Gamma(i-j))$, また，f を p 個の1からなる $p\times 1$ のベクトルとする。

$$(H\Xi H')^{-1}(H\Xi)=\begin{pmatrix} G^{-1}(I_p\otimes e')\Gamma & 0 \\ -(e'\mu)f'G^{-1}(I_p\otimes e')\Gamma+f'\otimes\mu' & 1 \end{pmatrix}$$

ただし，$G=(I_p\otimes e')\Gamma(I_p\otimes e)$

これが，3節の一般的な場合のウェイトに対応する。AR の係数の推定値には，以上から，各々の行動方式における自己共分散が決定的な役割を果たしていることが理解でき，例えば行動方程式における攪乱項の分散が大きければ，それだけ回帰式におけるその行動方程式の係数のウェイトが高いことなどがわかる。しかし，一般に行動方程式の係数とその自己共分散との関係が複雑なこともあり，その関係は複雑である。また，定数項の推定値には，平均的なウェイトは0とはいえ，行動方程式の AR の係数が関係してくることを読みとることができる。

V 非定常過程

定常の場合の定数項のない $AR(1)$ ケースに対応する，簡単なケースのみ扱

う。

(4.1)式で $\alpha=1$ であれば，X_i はランダムウォークになる。このタイプの行動方程式を全ての経済主体がもっている場合，その集計された変数 ΣX_i もまたランダムウォークになるから，問題はない。問題は，行動方程式の一部の係数が $|\alpha_i|<1$ であった場合である。もし，一つでもあると集計された変数は，$ARIMA(0, 1, \infty)$，または $ARIMA(\infty, 1, 0)$ で書き表される。

4節の分析は定常の場合であって非常の場合にはそのまま通用しないが，そこでは時系列の分散が決定的な役割を果たしていた。漸近的には，分散が無限大になる，つまりランダムウォークにしたがう変数がドミネートする事が予想される。これは回帰式(4.2)の α の OLS 推定量の漸近的な値が1になるという事前の知識と一致する

しかし，より重要なのは，単位根の検定に及ぼす定常変数の影響であろう。有限の標本で検定を行なおうとする場合，いくつかの問題が生じる。一つは，部学的には $ARIMA(\infty, 1, 0)$ と書くことができるが，Dickey-Fuller 流の検定を行なおうとするとき，有限の ADF の次数でとどめなければならないことである。もう一つは，有限の標本であれば，ランダムウォーク変数であってもその分散は有限にとどまるから，仮に，行動方程式の攪乱項の分散が，定常なものに大きく，非定常なものに小さければ，真の数学モデルが階差部分を含んでいても，全体の動きは定常に近いものを示す可能性があることである。

これらの問題は，結局の所，攪乱項の自己相関をどのように処理するかにかかっている。そこで，Schmidt and Phillips (1992) の攪乱項の自己相関に対する修正を用いることにして，実験を行ない定常な変数の存在が最終的な和の単位根の検定にどのような影響を及ぼすかを調べてみることにする。但し，Schmidt and Phillips の検定自体はトレンドがあるときに有効なように作られているが，全体の傾向を見る上では，この検定を使うことに問題はないであろう。

2つの経済主体のみからなるモデルを考える。

$$X_{1t}=\alpha X_{1t-1}+u_{1t} \qquad X_{2t}=X_{2t-1}+u_{2t}$$

$|\alpha|<1$, u は iid, $E(u)=0$, $V(u_i)=\sigma^2_i$ とする。また，$\sigma_2{}^2=1$ とおいている。X_{i1} はいずれも 0 に設定する。

$X_{1t}+X_{2t}$ が単位根をもつということを説明しておく。

$(1-\alpha L)X_1=u_1 \quad (1-L)X_2=u_2$ より，

$$(1-\alpha L)(1-L)(X_1+X_2)=(1-L)u_1+(1-\alpha L)u_2$$

右辺は，新たな iid 攪乱項 u を導入して $MA(1)$ の形で書くことができる。

$$(1-\alpha L)(1-L)(X_1+X_2)=(1+aL)u$$

$a=-1$ であることが，左辺の $(1-L)$ と打ち消しあって (X_1+X_2) が定常になるための必要十分条件である。$a=-1$ になるのは，$\alpha=1$ の時，かつその時のみであることが計算によりわかるが，これは，$|\alpha|<1$ の条件に反する。

結果をまとめたものが表 1 である。数字は，1000回の実験の内，単位根をもつという帰無仮説が棄却された回数を示している。／の前の数字は，残差項の相関に基づいて修正をする前の棄却回数，後の数字は，修正を施した後の棄却回数である。$\sigma_1{}^2=1, 4, 10$ の列，及び「非定常のみ」の部分は，すべて帰無仮説が正しく，帰無仮説が正しくないのは「定常のみ」の列だけである。「定常のみ」の列は X_1 のみで，「非定常のみ」は X_2 のみで検定を行なっている。

この検定の実験からわかる傾向は，次の通りである。

1) $\sigma_1{}^2$ が大きいほど，帰無仮説を誤って棄却してしまう確率が大きくなる。

2) α が 1 に近いほど，帰無仮説が棄却される確率が小さくなる。

3) Schmidt-Phillips の攪乱項の自己分散に対する修正を施すと，帰無仮説を誤って棄却する確率は小さくできるが，「定常のみ」の列を見ればわかるように，対立仮説が正しいもとでも，修正を加える前に比べて帰無仮説を棄却する確率もまた小さい。

4) N が大きくなるほど，かえって帰無仮説を誤って棄却してしまう確率が大きい。

1) の結論は，4 節から予測できることである。2) の結論については，こ

表1 繰り返し1000回，有意水準5％で帰無仮説「単位根あり」の棄却回数「定常のみ」は X_i のみでの検定，「非定常のみ」では X_2 のみでの検定

標本数＝25，修正項のラグ・トランケーションの長さ＝4

	$\sigma_1^2=1$	$\sigma_1^2=4$	$\sigma_1^2=10$	定常のみ	非定常のみ
$\alpha=0.2$	264/150	526/247	686/283	827/287	43/22
$\alpha=0.4$	178/74	343/140	452/161	590/191	
$\alpha=0.6$	114/57	188/70	251/95	261/94	
$\alpha=0.8$	73/35	89/44	93/44	102/44	

標本数＝50，修正項のラグ・トランケーションの長さ＝7

	$\sigma_1^2=1$	$\sigma_1^2=4$	$\sigma_1^2=10$	定常のみ	非定常のみ
$\alpha=0.2$	397/340	810/685	959/728	998/522	45/32
$\alpha=0.4$	309/244	679/463	844/529	981/466	
$\alpha=0.6$	208/135	428/277	632/316	793/351	
$\alpha=0.8$	102/71	171/93	197/118	279/141	

標本数＝100，修正項のラグ・トランケーションの長さ＝9

	$\sigma_1^2=1$	$\sigma_1^2=4$	$\sigma_1^2=10$	定常のみ	非定常のみ
$\alpha=0.2$	454/524	936/965	993/988	1000/851	42/44
$\alpha=0.4$	364/402	844/866	984/950	1000/799	
$\alpha=0.6$	266/271	751/677	915/790	999/752	
$\alpha=0.8$	175/161	411/322	592/422	776/513	

のタイプの検定がいまのところ逃れることのできていない問題，つまり，「定常のみ」の列にあらわされている，AR の係数が1に近いもとでのパワーの低さがそのまま反映されていると見なすことができる。4）の結論は，多分，「定常のみ」の列にみられるように N が大きくなるほど対立仮説のもとでのパワーが上昇することと関係があるだろう。

いずれにせよこの結果は，集計された系列においては，その真の時系列的性質は単位根を含むものであっても，集計される前の行動方程式のレベルにおいて単位根を含まないものがあれば，またはその割合が大きいほど，単位根の検定において誤って系列を定常なものと見なしてしまう危険性があることを示している。

参考文献

Banerjee, A. and Hendry, D. F. Testing Integration nd Cointegration : An Overview, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 54, 3, 225-255

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979) Distribution of Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, Journal of the American Statistician Association, 74, 472-431.

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1981) Likelihood Ratio Statitics for Autoregressive Time Series with a Unit Root, Econometrica, 49, 1057-1072.

Fuller, W. A. (1976) Introduction to Statistical Time Series, John Weiley. Granger, C. W. J. and Newbold, P. (1977) Forecastig Economic Time Series, Academic Press.

Harvey, A. C. (1981) Time Series Models, Phillip Allan. 国友直人・山本拓訳「時系列モデル入門」東京大学出版会

Maddala, G. S. (1977) Econometrics, McGrow-Hill.

Shmidt, P. and Phillips, P. C. B. (1992) LM Tests for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 54, 3, 257-287.

Sims, A, Stock, J. H. and Watson, M. A. (1990) Inference in LInear Time Series Models with Some Unit Rosts, Econometrica 58, 113-144.

Theil, H. (1971) Principles of Econometrics, John Wiley & Sons.

山本　拓 (1987)「経済の時系列分析」，創文社