平成十年八月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第162巻　第2号

平成10年8月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第162巻第2号，1998年8月

外部不経済と都市の開発形態

鄭　　炳　潤

I　は　じ　め　に

Alonso [1964] や Mills [1967]，Muth [1969] 等の理論モデルの発展によって都市の全体像を説明することができるようになったが，これらのモデルは静学的なものであるため，都市内部での農地の存在や都心での低層開発等の都市の動態的現象は説明できないという限界を持っている。1970年代から多くの動学モデルが開発されて，こういった現象を理論的に説明できるようになった。(例えば，Fujita [1976, 1982]，Anas [1978]，Brueckner [1980, 1981]，Arnott [1980]，Wheaton [1982])。

これらの動学的モデルは仮定やモデルの違いはあるものの，静学モデルの分析結果とはかなり異なる分析結果を出している。都市のある地点では住宅のビッドレント曲線の勾配が正となる可能性や，中向き式開発等がその例であり，これらの研究成果によって現実の都市像をより豊富に理解できるようになった。

ところで，都市では混雑等様々な形態の外部不経済が存在しており，それによって都市の開発パターンが影響される可能性があるため，都市の動学的現象をより現実的かつ正確に理解するためにはこのような外部不経済を明示的に考慮して分析する必要があるであろう。

この論文は混雑の外部不経済が都市の開発パターンに及ぼす影響を分析することによって従来の理論モデルのこういったギャップを補うためのものである。結論から言えば，外部不経済が十分大きい場合には都市の開発形態が逆転される可能性があることを示す。つまり，外部不経済が十分大きい場合は開発密度

が逆転される場合や中向き式の開発が見られる場合があることを示す。

本論の構成は次のようである。第2節では本論での仮定やモデルについて述べて，第3節では，open city における一般的な開発形態を分析する。第4節では，コッブーダグラス形態の効用関数と生産関数を用いて外部不経済の存在が都市の最適な開発にどのような影響を与えるかを例示する。

II モ デ ル

まず，本論で採択している仮定を整理しておこう。第1に，都市はモノセントリックな open city であるとする。第2に，すべての都市住民は同質的(homogeneous) であり，CBD (point) に出勤する。そうすると，すべての住民は同じ所得と同じ効用を得ることになる。(1)式のように都市住民は住宅サービス q と合成財 z からは正の効用を，外部不経済から負の効用を得るとする。

$$U=U(q,\ z,\ E) \qquad 0,\ Uz>0,\ U_E<0,\ z_E>0 \qquad (1)$$

さらに，分析の便宜上全都市住民は一定の q を消費すると仮定し，それを1としよう。そうすると，(1)式の関係は(1-1)のようになる。

$$U=U(1,\ z,\ E) \qquad Uz>0,\ U_E<0,\ z_E>0 \qquad (1\text{-}1)$$

ここで，外部不経済は高い人口密度から発生する混雑のことを想定する。すべての住民は1単位の住宅サービスを消費しているため，土地1単位当たりの住宅生産量は人口密度を意味することになる。したがって，外部不経済は時間と開発密度 k の関数として表せる。

次に，住民の予算制約から，住宅に対するレント支出は(2)式のように表せる。

$$R(t,\ d,\ k)=y(t)-c(t,\ d)-z(U(t),\ E(t,\ k)) \qquad (2)$$

$R(t,\ d)$：時間 t，距離 d においての住宅サービスに対するレント支出

$y(t)$：t 時点での所得，$c(t,\ d)$：時間 t，距離 d での通勤費，$C_d>0$

とする。

$z(t,\ k)$：時間 t での効用 U を得るために消費する合成財の量

$U(t)$：t 時点での効用，$E(t,\ k)$：t 時点での外部不経済

外部不経済による効用の減少を補うために合成財をもっと消費しなければならないから，$z_E>0$ となる。

次は，開発者側の諸仮定を整理しておこう。第3に，住宅は土地と土地以外の生産要素（資本）から生産されるとし，その生産関数は1次同次関数であると仮定する。

$$H=H(S,\ K) \rightarrow h=h(k), \quad h_K>0,\ h_{kk}<0 \tag{3}$$

S：土地，K：資本，$k=K/S$ 土地1単位当たりの資本の量

第4に，住宅開発者は完全予見的に開発からのレント収入の現在価値を最大化するように最適な開発密度 (k) と最適開発時点 (T) を決定するとしよう。土地1単位当たりの住宅開発からのレント収入の現在価値は(4)式のように表せる。

$$\begin{aligned} V(d,\ k,\ T) \equiv & \int_0^T A(t)e^{-rt} \\ & + e^{-rt}\int_T^{\infty} e^{-r(t-T)}R(d,\ k,\ t)h(k)dt - p_k k e^{-rT} \end{aligned} \tag{4}$$

$A(t)$：t 時点での農地レント収入，$R(d,\ k,\ t)h(k)$：土地1単位当たりの住宅からの総レント収入，p_k：資本の価格，時間に対して一定とする。

第5に，すべての関数は2回微分可能であるとし，最大化の2次条件は満足されているとする。さらに，解は内部解であるため，0時点には開発が行われないと仮定する。

以上のモデルに基づいて開発者がレント収入を最大化するために，開発密度 k と開発時期 T をどのように決めるかが分析できる。

まず，(4)式に(2)式を代入すると，

$$V(d,\ k,\ T)\equiv\int_0^T A(t)e^{-rt}dt+e^{-rT}\int_T^\infty e^{-r(t-T)}[y(t)$$
$$-c(d,\ t)-z(d,\ k,\ t)]h(k)dt-p_k k e^{-rT} \qquad (4\text{-}1)$$

となる。さらに，(4-1)式を(4-2)式のように書き直せる。

$$V(d,\ k,\ \mathrm{T})\equiv\int_0^T A(t)e^{-rt}dt+e^{-rT}\int_T^\infty e^{-r(t-T)}[Y(k,\ t)$$
$$-C(d,\ k,\ t)-Z(k,\ t)]dt \qquad (4\text{-}2)$$

$$y(t)h(k)\equiv Y(k,\ t),\quad c(t,\ d)h(k)\equiv C(d,\ k,\ t),$$
$$z(k,\ t)h(k)+rp_k k\equiv Z(k,\ t) \qquad (5)$$

まず，最適 T の１次条件を求めると，つぎのようになる。

$$V_T(d,\ k,\ T)=0:A(T)$$
$$+rp_k k-y(T)-c(d,\ T)-z(k,\ T)h(k)=0 \qquad (6)$$

(６)式は，開発を延期することから節約された限界利益 $A(T)+rp_k k$ が開発を延期することによって得られなくなった限界損失 $(y(T)-c(d,\ T)-z(k,\ T))h(k)$ と等しいことを意味している。(５)式の関係を用いると，(６)式は(6-1)式のように書き直せる。

$$V_T(d,\ k,\ T)=0:A(T)$$
$$-Y(k,\ T)-C(d,\ k,\ T)-Z(k,\ T)=0 \qquad (6\text{-}1)$$

次に，最適 k の１次条件を求めると，(７)式のようになる。

$$V_k(d,\ k,\ T)=0:\int_T^\infty e^{-r(t-T)}[y(t)h_k-c(d,\ t)h_k-z(k,\ t)h_k-z_k h(k)]dt$$
$$-rp_k=0 \qquad (7)$$

この条件は開発による限界収入が開発の限界費用と等しくなることを意味している。また，(５)式の関係を用いて(7-1)式のように書き直せる。

$$V_k(d,\ k,\ T)=0:\int_T^\infty e^{-r(t-T)}[Y_k(k,\ t)-C_k(d,\ k,\ t)$$
$$-Z_k(k,\ t)]dt=0 \qquad (7\text{-}1)$$

さらに，(7-1)式は(7-2)式のように変形できる。

$$V_k(d, k, T)=0 : Y^*_k(k, T)-C^*_k(d, k, T)-Z^*_k(k, T)=0 \quad (7\text{-}2)$$

(7-2)式では次の関係が用いられている。

$$Y^*_k(k, T)\equiv r\int_T^\infty e^{-r(t-T)}Y_k(k, t)dt,$$

$$C^*_k(d, k, T)\equiv r\int_T^\infty e^{-r(t-T)}C_k(k, d, t)dt,$$

$$Z^*_k(k, T)\equiv r\int_T^\infty e^{-r(t-T)}Z_k(k, t)dt \quad (8)$$

次に最大化の2次条件を求めてみよう。2次条件は $V_{TT}<0$, $V_{kk}<0$, $V_{TT}V_{kk}>(V_{Tk})^2$ がであるから，(6-1)式と(7-2)式から(9)，(10)，(11)の条件が得られる。

$$V_{TT}(d, k, T)<0 : A_T(T) - Y_T(k, T)-C_T(d, k, T)-Z_T(k, T)<0 \quad (9)$$

$$V_{kk}(d, k, T)<0 : Y^*_{kk}(k, T) - C^*_{kk}(d, k, T)-Z^*_{kk}(k, T)<0 \quad (10)$$

$$V_{TT}V_{kk}>(V_{Tk})^2 : [A_T-(Y_T-C_T-Z_T)](Y^*_{kk} - C^*_{kk}-Z^*_{kk})>(-Y_k+C_k+Z_k)^2 \quad (11)$$

III　距離と時間別の都市の開発パターン

1　各距離においての最適 k と T の決定

以上の分析結果に基づいて，各距離別に最適 k と T がどのように決められるか，つまり距離別の都市の開発パターンを分析することができる。一般的に静学的モデルでは都心から離れるほど建物の高さが減少するという結果を得ている（代表的に Muth [1969] モデル)。しかし，時間を考慮すると，多様な開発パターンが見られることになる。最適 k と T は距離ごとに異なるであろうから，陰関数的に k と T は距離 d の関数として表せる。つまり，$k\equiv k(d)$, $T\equiv T(d)$ と書ける。この場合も最大化の1次条件と2次条件を満足しなければならないから，その条件はつぎのように表せる。

$$V_T=0 : A(T(d))-[Y(k(d), T(d))-C(d, k(d), T(d))-Z(k(d), T(d))]=0 \quad (12)$$

$$V_k=0 : Y^*_k(k(d), T(d))-C^*_k(d, k(d), T(d))-Z^*_k(k(d), T(d))=0 \quad (13)$$

各距離別の最適な k と T は(12)式と(13)式を同時に満足するように決められなければならない。(12)式と(13)式を d で微分して得られる関係から，距離の変化に伴う k と T の変化率，T_d と k_d を求めると(14)式と(15)式のようになる[1]。

$$T_d=\frac{(Y_k-C_k-Z_k)C_{kd}+(Y^*_{kk}-C^*_{kk}-Z^*_{kk})C_{Td}}{(Y^*_{kk}-C^*_{kk}-Z^*_{kk})[A_T-(Y_T-C_T-Z_T)]-r(Y_k-C_k-Z_k)^2}$$

$$=\frac{V_{Tk}V_{kd}-V_{kk}V_{Td}}{V_{TT}V_{kk}-rV_{Tk}{}^2} \quad (14)$$

$$k_d=\frac{-r(Y_k-C_k-Z_k)C_d+C_{kd}[A_T-(Y_T-C_T-Z_T)]}{(Y^*_{kk}-C^*_{kk}-Z^*_{kk})[A_T-(Y_T-C_T-Z_T)]-r(Y_k-C_kZ_k)^2}$$

$$=\frac{rV_{Tk}V_{Td}-V_{TT}V_{kd}}{V_{TT}V_{kk}-rV_{Tk}{}^2} \quad (15)$$

(14)式と(15)式の分母は最大化の2次条件から正であることが分かる。そして，

$$V_{Td}=C_d=c_d(d, T)h(k)>0,$$

$$V_{kd}=-C^*_{kd}=-r\int_T^{\infty}e^{-r(t-T)}c_d(d, t)h_kdt<0$$

も符号が一義的に決まる。しかし，$V_{Tk}=-[y(T)-c(d, T)-z(k, T)]h_k+z_kh(k)+nr$ の符号ははっきりしない。したがって，T_d と k_d は V_{Tk} の符号によって異なることになる。V_{Tk} は現在価値式においての開発時期と開発量の関係を表すものである。例えば，$V_{Tk}>0$ の場合は，時間と開発量が正の関係をもっているため，開発時間が遅いほど開発量（密度）が増加することを意味する。

前で見たように外部不経済は最適な開発時期を遅延させるため，もし外部不

1) (13)式と(14)式は $(d, k, T(d))$ で計算したものである。

経済が存在するときには都市の開発パターンも変わる可能性がある。第4節で外部不経済が都市開発の形態に及ぼす影響を分析するために，以下ではまず都市の一般的な開発パターンを分析することにする。

1) $V_{Tk}<0$ の場合[2]

$V_{Tk}<0$ の場合は，(14)式と(15)式から，$T_d>0$，$k_d<0$ となる。つまり，CBD から離れるほど建物の高さ（開発密度）は小さくなり，CBD から郊外の方に開発される。この場合の都市の開発パターンは静学的モデルのそれと一致する。

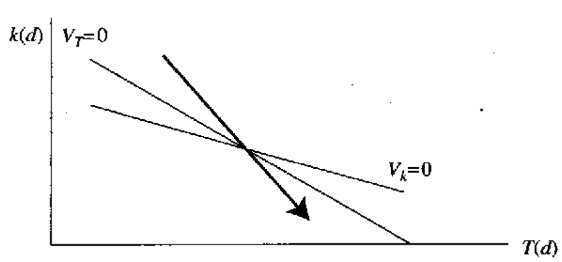
以下では，この開発パターンを $k-T$ space で描いてみよう。まず，$V_T=0$ の曲線の勾配と $V_k=0$ の曲線の勾配を調べてみると，(16)式のように二つともにマイナスであることが分かる。そして，最大化の2次条件から，前者の勾配が後者より急であることが分かる[3]。

$V_T=0$ の曲線の勾配：$dk/dT=-V_{TT}/V_{Tk}<0$,

$V_k=0$ の曲線の勾配：$dk/dT=-V_{Tk}/V_{kk}<0$

そして，$V_{Td}<0$ と $V_{kd}<0$ から，$V_T=0$ の曲線と $V_k=0$ の曲線は距離が増加するにつれて下方にシフトする。$V_T=0$ の曲線と $V_k=0$ の曲線の交点の軌跡を辿ると都市の開発パターンは太線のようになる。

図1 $V_{Tk}<0$ の場合の開発パターン



2) 勿論 $V_{Tk}=0$ となる場合も存在しうる。しかし，この論文では分析の煩雑を避けるために，この場合は考慮しないことにする。

3) 2次条件 $V_{kk}V_{TT}>(V_{Tk})^2$ の両辺に V_{Tk}/V_{kk} で割って整理すると，$-V_{TT}/V_{Tk}<V_{Tk}/V_{kk}$ の関係が導出される。

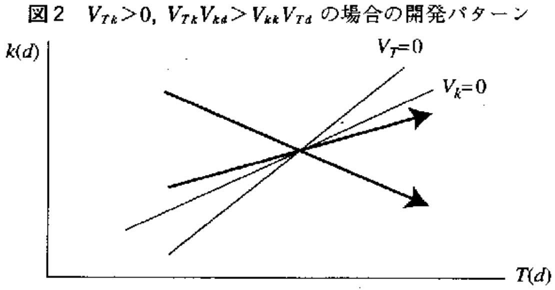
2)　$V_{Tk}>0$ の場合

前述したように外部不経済が十分大きいと，$V_{Tk}>0$ となる可能性がある。この場合は，$V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ の場合と $V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ の場合を分けて検討する必要がある。

i）　$V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ のケース

この場合は $T_d>0$ となるが，k_d の符号は“正”にも“負”にもなりうる。この開発パターンを $k-T$ space で描いてみよう。この場合は $V_T=0$ と $V_k=0$ の曲線の勾配が“正”となるが，$V_T=0$ の曲線の勾配がもっと急になる。そして，$V_{Td}>0$ から $V_T=0$ の曲線は右側に，$V_{kd}<0$ から $V_k=0$ の曲線も右側にシフトする。両曲線の交点の軌跡を辿ると，図 2 のような開発形態が見られる。つまり，CBD から遠くなるほど，開発も遅くなるが，その密度は距離とともに減少することも増加することもあり得る。

図 2　$V_{Tk}>0$, $V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ の場合の開発パターン



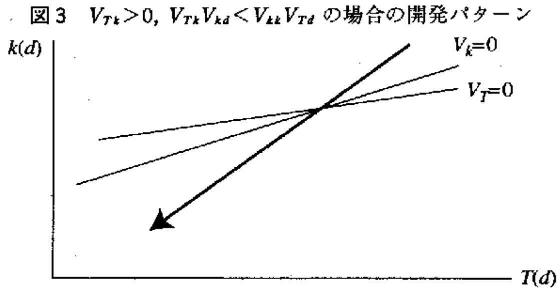
ii）　$V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ のケース

この場合は $T_d<0$, $k_d<0$ となるため，距離が遠くなるにつれて建物の高さは減少するが，遠い地域から中向き式に開発されることになる[4]。この場合は，$V_T=0$ 曲線の勾配が $V_k=0$ の曲線の勾配より急であることと，両曲線の勾配が“正”であること，そして両曲線が距離とともに右側にシフトすることは上

4)　$k_d<0$ は次のように証明される。2 次条件 $V_{kk}V_{TT}>(V_{Kk})^2$ に V_{kd}/V_{kk} を乗じると $V_{kd}V_{TT}>rV_{kd}(V_{Tk})^2/V_{kk}$ の関係が得られる。次いで，$V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ の両辺に rV_{Tk}/V_{kk} を乗じると $rV_{Tk}V_{Td}>rV_{kd}(V_{Tk})^2/V_{kk}$ の関係が得られる。この二つの関係から $rV_{Tk}V_{Td}-V_{kd}V_{TT}<0$ の関係が導出される。

のケースと同じである。この開発パターンは図3のようになる。

図3 $V_{Tk}>0$, $V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ の場合の開発パターン



以上見たように外部不経済が大きく $V_{Tk}>0$ となる場合には CBD→郊外の開発と距離とともに開発密度の減少といった静学的モデルの開発形態が生じる保証はなくなる。V_{kd} と V_{Td} は外部不経済の影響を受けずその符号はいつも一定である反面，V_{Tk} は外部不経済が大きいほど大きくなるため，外部不経済が十分大きい場合は $V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ の開発パターン（図2の開発パターン）より，$V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ の開発パターン（図3の開発パターン）が見られる可能性がある。

2 時間別の最適 k と d の決定

以上距離別の開発形態を分析してきたが，それと対称的に時間別の最適 k と T の軌跡を考察することができる。この場合は陰関数的に k と d が時間 T の関数となるから，$k\equiv k(T)$，$d\equiv d(T)$ とおいて最大化の1次条件を求めると次のようになる。

$$V_T=0: A(T)-[Y(d(T), k(T), T)-C(d(T), k(T), T) -Z(d(T), k(T), T)]=0 \tag{16}$$

$$V_k=0: Y^*_k(d(T),k(T), T)-C^*_k(d(T), k(T), T) -Z^*_k(d(T), k(T), T)=0 \tag{17}$$

(16)式と(17)式を T で微分すると，次のように T 時点では

$$d_T=\frac{(Y^*_{kk}-C^*_{kk}-Z^*_{kk})[A_T-(Y_T-C_T-Z_T)]-r(Y_k-C_k-Z_k)^2}{C^*_{kd}(Y_k-C_k-Z_k)-(Y^*_{kk}-C^*_{kk}-Z^*_{kk})C_d}$$

$$=\frac{V_{kk}V_{TT}-rV_{Tk}{}^2}{V_{Tk}V_{kd}-V_{kk}V_{Td}} \tag{18}$$

$$k_T=\frac{-rC_d(Y_k-C_k-Z_k)+[A_T-(Y_T-C_T-Z_T)]C_{kd}}{(Y_k-C_k-Z_k)C_{kd}-(Y^*_{kk}-C^*_{kk}-Z^*_{kk})C_d}$$

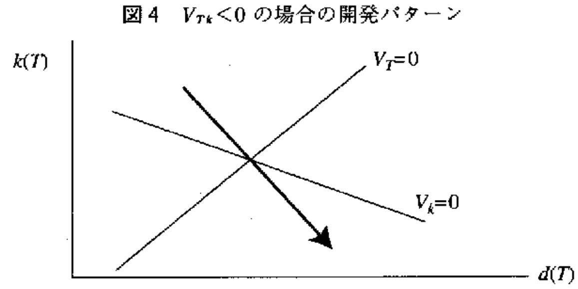
$$=\frac{rV_{Td}V_{Tk}-V_{TT}V_{kd}}{V_{Tk}V_{kd}-V_{kk}V_{Td}} \tag{19}$$

となる。そして，(18)式と(19)式に基づいて，都市の開発パターンを調べることができる。前と同じく，$V_{Tk}<0$ の場合と $V_{Tk}>0$ に分けて分析することにする。

1)　$V_{Tk}<0$ の場合

この場合は，図4のように $d_T>0$，$k_T<0$ となる。つまり，静学的都市モデルのように，時間が経つにつれて開発密度の減少，都心から郊外への開発のパターンが見られる。

図4　$V_{Tk}<0$ の場合の開発パターン



2)　$V_{Tk}>0$ の場合

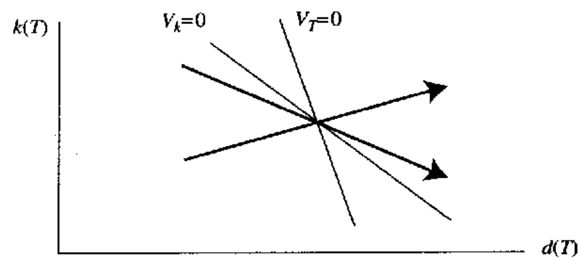
$V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ のケースと $V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ のケースを分けて分析する必要がある。

i）　$V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ のケース

この場合は，$d_T>0$ となるが，k_T はプラスにもマイナスにもなりうる。つまり，図5のように，時間に伴う開発の方向はいつも都心→郊外となるが，開

発密度は増加する場合も減少する場合もあり得る。

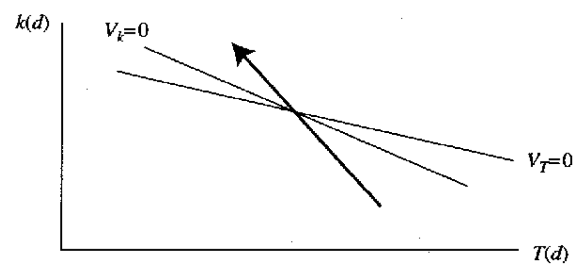
図5 $V_{Tk}>0$, $V_{Tk}V_{kd}>V_{kk}V_{Td}$ の場合の開発パターン



ii) $V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ のケース

この場合は $d_T<0$, $k_T>0$ となるため，都心に近いほど開発密度は高くなるが，郊外から開発が行われて漸次都心の方が開発されるパターンとなる。

図6 $V_{Tk}>0$, $V_{Tk}V_{kd}<V_{kk}V_{Td}$ の場合の開発パターン



IV 具体的な関数形態による都市の開発パターン

これまで，一般的な都市の開発パターンを分析してきたが，以下では，外部不経済が存在するとき，どのような開発パターンが起こるかを分析してみよう。そのために，まず外部不経済のない場合の開発パターンを考察して，外部不経済が存在するときにはその開発パターンがどのように変わるかを分析してみよう。

1 外部不経済のない場合

まず，簡単化のために農地のレントはゼロとし，効用関数は次のように与えられているとしよう。

$$u(z,\ q)=z^a q^b, \qquad a>0,\ b>0 \tag{20}$$

さらに，開発費用は時間と k に関係なく，一定であるとしよう。

$$D(k)=D \tag{21}$$

ところで，すべての住民は一定の住宅サービス量，1を消費するため，(20)式は $u(z)=z^a$ となる。(20)式を z に関して書き直すと，

$$z=u^{1/a}\equiv U \tag{22}$$

となる。ここで，$U(t)$ は時点 t における効用水準を表す。

次に，住宅の生産関数を(23)式のように仮定する。

$$H(S,\ K)=K^{\theta}S^{1-\theta} \rightarrow h(k)=k^{\theta}, \qquad 0<\theta<1 \tag{23}$$

さらに，一般的に次の関数形態を仮定する[5)]。

$$y(t)=y_0 e^{\alpha t},\ y_0>0,\ r>\alpha>0, \qquad (0\leqq t<\infty) \tag{24}$$

$$c(t,d)\equiv c(t)d,\ c(t)=c_0 e^{ct},\ c_0>0,\ r>c\geqq 0, \qquad (0\leqq t<\infty) \tag{25}$$

$$U(t)=U_0 e^{\beta t},\ \beta\geqq 0, \qquad (0\leqq t<\infty) \tag{26}$$

そうすると，次のような関係が得られる。

$$Y(t,\ k)=y(t)k^{\theta},\ C(t,\ d,\ k)=c(t)dk^{\theta},\ Z(t,\ k)=U(t)k^{\theta}+rD \tag{27}$$

以上の関係を用いると，(6)式の $V_T(d(T),\ k(T),\ T)=0$ と(7-2)式の $V_k(d(T),\ k(T),\ T)=0$ は(28)式と(29)式のように表せる。

$$y(T)k(T)^{\theta}-c(T)d(T)k(T)^{\theta}-U(T)k(T)^{\theta}-rD=0 \tag{28}$$

$$\theta k^{\theta-1}r\int_T^{\infty}e^{-r(t-T)}y(t)\,dt-\theta k^{\theta-1}d(T)r\int_T^{\infty}e^{-r(t-T)}c(t)\,dt$$

$$-\theta k^{\theta-1}r\int_T^{\infty}e^{-r(t-T)}U(t)\,dt=0 \tag{29}$$

(29)式に(24)-(26)の関係を代入して積分すると，次のように書ける。

5) ここでは，都市が無限大の時間をかけて開発されると仮定している。

$$\frac{r\theta}{r-\alpha}k^{\theta-1}y(T)-\frac{r\theta}{r-c}d(T)k^{\theta-1}c(T)-\frac{r\theta}{r-\beta}U(T)k^{\theta-1}=0 \qquad (30)$$

そうすると，(28)式と(30)式から，$k(T)$ と $d(T)$ を求めることができる。

$$k(T)=(rD)^{1/\theta}\left\{\left(1-\frac{r-c}{r-\alpha}\right)y_0e^{\alpha T}+\left(\frac{r-c}{r-\beta}-1\right)U_0e^{\beta T}\right\}^{-(1/\theta)} \qquad (31)$$

$$d(T)=\left\{\left(\frac{r-c}{r-\alpha}\right)\frac{y_0e^{\alpha T}}{c_0e^{cT}}-\left(\frac{r-c}{r-\beta}\right)\frac{U_0e^{\beta T}}{c_0e^{cT}}\right\} \qquad (32)$$

(31)式と(32)式から，d_T と k_T を求めて，様々な α, β, c の下での時間に伴う最適 d と k の経路を調べることができる。(31)式と(32)式を T で微分すると，

$$k_T=-\frac{1}{\theta}(rD)^{1/\theta}\{\cdot\}^{-(1/\theta)-1}\left\{\alpha\left(1-\frac{r-c}{r-\alpha}\right)y_0e^{\alpha T}\right.$$

$$\left.+\beta\left(\frac{r-c}{r-\beta}-1\right)U_0e^{\beta T}\right\}$$

$$=-A\alpha\left\{\left(1-\frac{r-c}{r-\alpha}\right)y_0e^{\alpha T}+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{r-c}{r-\beta}-1\right)U_0e^{\beta T}\right\} \qquad (33)$$

ここで，$A\equiv(rD)^{1/\theta}\{\cdot\}^{-(1/\theta)-1}$

$$d_T=\left\{(\alpha-c)\frac{r-c}{r-\alpha}\frac{v_0e^{\alpha T}}{c_0e^{cT}}-(\beta-c)\frac{r-c}{r-\beta}\frac{U_0e^{\beta T}}{c_0e^{cT}}\right\} \qquad (34)$$

となる。以下では，(33)式と(34)式の結果に基づいて，どういう状況の下で，各開発パターンが見られるようになるかを調べてみよう。(33)式と(34)式から分かるように，α, β と c の大小によって様々な開発形態が存在しうる。

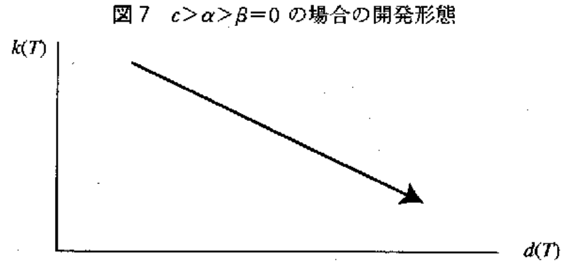
（ケース1）　$c>\alpha>\beta=0$

この場合は，通勤費用の成長率が所得と効用の成長率より大きく，また所得の成長率は効用の成長率より大きい場合である。このケースは，(33)式から $k_T<0$ となるが，(34)式から $d_T>0$ となることが分かる[6]。つまり，開発の密度（建物の高さ）は時間が経つにつれて減少するが，開発方向は都心→郊外の

6) β がゼロではなくても，α が β より十分大きい場合は $d_T>0$ となることが(36)式から分かる。

形態になる。したがって，都心型郊外の方に行くほど，建物の高さは減少する形態の都市開発が行われることになる。この開発パターンは静学的モデルの典型的な都市の形状と一致するものである。この場合は k_d であるため，図７と同じ開発パターンとなる。この開発パターンは V_{Tk} の場合の開発パターン（図４）と同様な開発パターンである。

図７　$c>\alpha>\beta=0$ の場合の開発形態



（ケース２）　$\alpha=\beta>c$

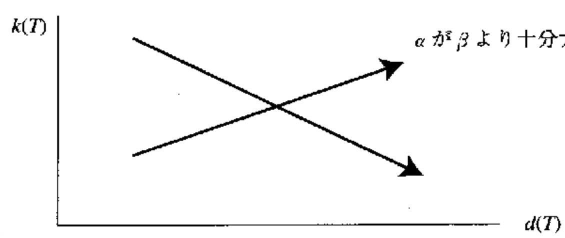
この場合は所得の成長率が効用の成長率と等しいが，通勤費用の成長率よりは大きい場合である。この場合も図７のように，$k_T<0$，$d_T>0$，$k_d<0$ の開発パターンとなる。

（ケース３）　$\alpha>\beta>c$

この場合は，所得の成長率が効用と通勤費用の成長率より大きく，また効用の成長率は通勤費用の成長率より大きい場合である。このケースは，$k_T>0$，$k_T<0$ となるが，$d_T>0$ となる。つまり，開発の密度は時間と共に増加する場合も減少する場合もあり得るが，開発の方向は必ず都心→郊外のパターンとなる[7]。しかし，所得の成長率が効用の成長率より十分大きい場合には $k_T>0$，$d_T>0$ の開発パターンが支配的になる。以上のことを総合すると，この場合は，都心から郊外に行くにつれて建物の高さは減少する場合（$k_d<0$）も増加する場合（$k_d>0$）もあり得るため，図５のような開発パターンとなる。

7）前節で外部不経済のない場合の開発形態を分析する際，$V_{Tk}<0$ の場合だけを考察したため，このタイプの開発形態は見られなかったが，$V_{Tk}>0$ の場合にはこのような開発形態が見られる。

図8 $\alpha>\beta>c$ の場合の開発形態



2 外部不経済が存在する場合[8)]

ここでは，効用関数と開発費用の関数を次のように仮定する。

$$u(z,\ E)=z^{a}E^{-b},\qquad a>0,\ \ b>0 \tag{35}$$

$$D(k)=D \tag{36}$$

(35)式を z に関して書くと，

$$z=u^{1/a}E^{b/a}\equiv UE^{m},\ \ U\equiv u^{1/a},\ \ m\equiv b/a \tag{37}$$

となる。そして，外部不経済の関数形態を次にように仮定する。

$$E(t,\ k)=E(t),\ E(t)=E_0e^{\varepsilon T},$$

$$E_0>0,\ \ r>\varepsilon\geqq 0,\ \ (0\leqq t<\infty) \tag{38}$$

ここで，ε は外部不経済の成長率である。

次に，前と同じく住宅の生産関数を(39)式のように仮定する。

$$H(S,\ K)=K^{\theta}S^{1-\theta}\ \rightarrow\ h(k)=k^{\theta},\qquad 0<\theta<1 \tag{39}$$

そうすると，以上の仮定と(24)-(26)式から，次の関係が得られる。

$$Y(t,\ k)=y(t)k^{\theta},\ C(t,\ d,\ k)=c(t)dk^{\theta},$$

$$Z(t,\ k)=U(t)E(t)^{m}k^{\theta}+rD \tag{40}$$

この関係を用いて，(6)式の $V_T(d(T),\ k(T),\ T)=0$ と(7-2)式の $Vk(d(T),\ k(T),\ T)=0$ を求めると，次のようになる。

$$y(T)k(T)^{\theta}-c(T)d(T)k(T)^{\theta}-U(T)E(T)^{m}k(T)^{\theta}-rD=0 \tag{41}$$

8) 以下では分析の煩雑を避けて結果を明確にするために，$\alpha\geqq\beta$ の場合に限って分析を行う。

$$r\theta k(T)^{\theta-1}\int_T^{\infty} e^{-r(t-T)}y(t)\,dt - r\theta d(T)k(T)^{\theta-1}\int_T^{\infty} e^{-r(t-T)}c(t)\,dt$$

$$-r\theta k(T)^{\theta-1}\int_T^{\infty} e^{-r(t-T)}U(t)E(t)^m dt = 0 \tag{42}$$

次いで，(42)式に(24)-(26)の関係を代入して積分すると，次のようになる[9]。

$$\frac{r\theta}{r-\alpha}y(T)k(T)^{\theta-1} - \frac{r\theta}{r-c}d(T)c(T)k(T)^{\theta-1}$$

$$-\frac{r\theta}{r-\beta-m\varepsilon}U(T)E(T)^m k(T)^{\theta-1} = 0 \tag{43}$$

そうすると，(41)式と(43)式から，$k(T)$ と $d(T)$ を求めることができる。

$$k(T) = (rD)^{1/\theta}\left\{\left(\frac{c-\alpha}{r-\alpha}\right)y_0 e^{\alpha T} + \left(\frac{\beta+m\varepsilon-c}{r-\beta-m\varepsilon}\right)U_0 E_0{}^m e^{(\beta+m\varepsilon)T}\right\}^{-(1/\theta)} \tag{44}$$

$$d(T) = \left\{\left(\frac{r-c}{r-\alpha}\right)\frac{y_0}{c_0}e^{(\alpha-c)T} - \left(\frac{r-c}{r-\beta-m\varepsilon}\right)\frac{U_0 E_0{}^m}{c_0}e^{(\beta+m\varepsilon-c)T}\right\} \tag{45}$$

さらに，(44)式と(45)式を T で微分することによって，時間と共に k と d がどのように変化するかを調べることができる。

$$k_T = -\frac{1}{\theta}(rD)^{1/\theta}\{\cdot\}^{-(1/\theta)-1}\left\{\alpha\left(\frac{c-\alpha}{r-\alpha}\right)y_0 e^{\alpha T}\right.$$

$$\left.+(\beta+m\varepsilon)\left(\frac{\beta+m\varepsilon-c}{r-\beta-m\varepsilon}\right)U_0 E_0 e^{(\beta+m\varepsilon)T}\right\}$$

$$= B\alpha\left\{\left(\frac{\alpha-c}{r-\alpha}\right)y(T) + \frac{\beta+m\varepsilon}{\alpha}\left(\frac{\beta+m\varepsilon-c}{r-\beta-m\varepsilon}\right)u(T)E(T)^m\right\} \tag{46}$$

ここで，$B \equiv \left(\frac{1}{\theta}\right)(rD)^{1/\theta}\{\cdot\}^{(-(1/\theta)-1)}$

$$d_T = (\alpha-c)\left\{\frac{r-c}{r-\alpha}\frac{y_0}{c_0}e^{(\alpha-c)T}\right.$$

$$\left.-\frac{\beta+m\varepsilon-c}{\alpha-c}\frac{r-c}{r-\beta-m\varepsilon}\frac{U_0 E_0{}^m}{C_0}e^{(\beta+m\varepsilon-c)T}\right\} \tag{47}$$

9)　ここで，$r>\beta+m\varepsilon$ を仮定している。

以下では，前と同じく(46)式と(47)式に基づいて，外部不経済が存在するときには，2節で見た開発パターンの内どの開発パターンが見られるかを調べてみよう。ここでは，外部不経済のない場合と比較検討するために，外部不経済のない場合の同じ状況で外部不経済が存在すると，開発パターンがどのように変わるかを検討することにする。

（ケース1） $c>\alpha>\beta$

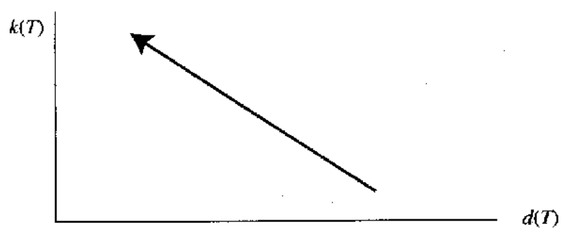
まず，開発密度 k_T の符号を調べてみよう。(46)式と(47)式から，効用の成長率と外部不経済の成長率は開発パターンに同じ方向で影響を与えていることが分かる。したがって，外部不経済が都市の開発パターンに及ぼす影響をはっきりするために，外部不経済が存在しても所得の成長率が効用の成長率と外部不経済の成長率の合計より大きい場合 $(\alpha>\beta+m\varepsilon)$ と外部不経済の成長率が十分大きく所得の成長率が効用の成長率と外部不経済の成長率の合計より小さい場合 $(\alpha<\beta+m\varepsilon)$ を分けて分析する必要がある[10]。まず，$(\alpha>\beta+m\varepsilon)$ の時には外部不経済が存在しない場合と k_T の符号が同じである。つまり，$k_T<0$ であるため，時間と共に開発密度は減少することになる。しかし，$(\alpha<\beta+m\varepsilon)$ の場合は開発パターンが逆転する可能性がある。つまり，外部不経済の成長率が十分大きい場合には $k_T>0$ となり，時間と共に開発密度が増加することになる。

次に，d_T について調べてみよう。外部不経済のない時の分析結果は，開発方向はいつも都心→郊外のパターン $(d_T>0)$ であった。この結果は $(\alpha>\beta+m\varepsilon)$ の場合には変わらない。しかし，$(\alpha<\beta+m\varepsilon)$ の場合は $d_T<0$ となるため，時間と共に中向き式の開発が行われることになる。

以上の結果を総合すると，外部不経済の成長率が十分大きい場合には，$k_T>0$，$d_T<0$ となる。したがって，$k_d(\equiv k_T/d_T)<0$ であるため，図9のような開発パターンが見られることになる。

10) 以下では，どの場合においても両者の差が十分大きいと前提して論議を進める。

図9　$c>\beta+m\varepsilon>\alpha>\beta$ の場合の開発形態



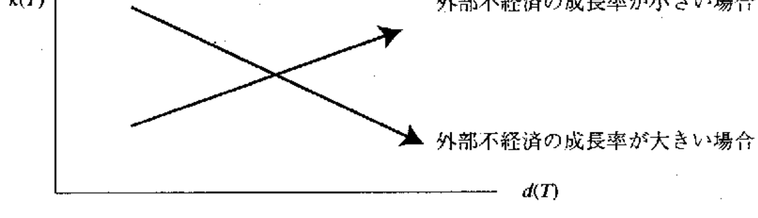
（ケース2）　$\alpha=\beta>c$

この場合はいつも $(\beta+m\varepsilon)>\alpha=\beta$ が成立することになり，開発パターンも外部不経済によって影響されない。つまり，外部不経済のない場合と同じく，$k_T<0$，$d_T>0$ の開発パターンとなる。したがって，図7のような開発パターンが見られる。

（ケース3）　$\alpha>\beta>c$

前の分析で，外部不経済が存在しない場合は，$k_T<0$ 又は $k_T>0$，$d_T>0$ の開発パターンが見られることを見た。そして，この場合でも，所得の成長率が効用の成長率より十分大きい場合は $k_T>0$ の開発パターンが支配的になる。ここでも，$(\alpha>\beta+m\varepsilon)$ の場合と $(\alpha<\beta+m\varepsilon)$ の場合をわけて考えてみよう。(46)式と(47)式から分かるように，$(\alpha>\beta+m\varepsilon)$ で，所得の成長率が十分大きい場合の開発パターンは外部不経済のない場合のそれと一致する。しかし，$(\alpha<\beta+m\varepsilon)$ の場合は，開発方向は都心→郊外の方向となるものの，開発密度

図10　$\alpha>\beta>c$ の場合の開発形態



は逆転してしまう。つまり，外部不経済が十分大きい場合には $k_T<0$ となって，時間とともに開発密度が減少する開発パターンとなる。

V 結びにかえて

本論は，open city の完全予見モデルを用いて，どのような開発パターンがあり得るか，そして外部不経済の存在がどのような最適な開発パターンを導くかを調べたものである。ここでの主な分析結果は，外部不経済は都市の開発を遅延し，中向きの開発を招来する可能性があることと，開発密度を逆転させる可能性があることである。このような結果は，モデルの特性上，開発者が外部不経済を完全に内部化して最適な開発を行ったときの都市の開発パターンであるため，外部不経済に対する課税や土地利用規制などの必要性を最初から排除している。しかし，外部不経済は内部化されないことに問題があり，それを治癒するために課税やゾーニングのような政策が取られるのである。したがって，外部不経済が内部化されずに開発が行われた場合，社会的効率性を回復するための条件は何か，そして，次善策として課税やゾーニングなどの政策が行われた時に開発パターンがどのような影響を受けるかといった問題に対して分析する必要がある。これらの問題に対しては別の論文を期したい。

参考文献

Alonso, W. [1964] *Location and Land Use*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Anas, A. [1978] "Dynamics of urban residential growth," *Journal of Urban Econ.*, 5, pp. 66-87.

Arnott, R. [1980] "A simple urban growth model with durable housing," *Regional Science and Urban Econ.*, 10, pp. 53-76.

Brueckner, J. K. [1980] "A vintage model of urban growth," *Journal of Urban Econ.*, 8, pp. 389-402.

Brueckner, J. K. and Rabenau, B. V. [1981] "Dynamics of land-use for a closed city," *Regional Science and Urban Econ.*, 11, pp. 1-17.

Fujita, M. [1976] "Spatial Patterns of Urban Growth : Optimum and Market," *Journal of Urban Economics*, 3, pp. 209-241.

Fujita, M. [1982] "Spatial patterns of residential development," *Journal of Urban Econ.*, 12, pp. 22-52.

岩田規久男ほか [1992]『都市と土地の理論』ぎょうせい。

Mills, E. S. [1967] "An Aggregative Model of Resource Allocation in a Metropolitan Area," *American Economic Review, 57 (May)*, pp. 197-210.

Muth, R. [1969] *Cities and Housing*, University of Chicago Press, Chicago, Il.

Turnbull, G. K. [1988] "Residential development in an open city," *Regional Science and Urban Econ.*, 18, pp. 307-320.

Wheaton, W. [1974] "A comparative static analysis of urban spatial structure," *Journal of Economic Theory*, 9, pp. 223-237.

Wheaton, W. [1982] "Urban residential growth under perfect foresight," *Journal of Urban Econ.*, 12, pp. 53-67.