平成一一年四月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第163巻　第4号

平成11年4月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第163巻第4号，1999年4月

GARCH (p, q) 型 Black=Scholes モデルによる株式オプションプレミアムの推計*

足　立　光　生

は　じ　め　に

Duan [1995] は，GARCH（Generalized autoregressive conditionally heteroskedasticity，一般化自己回帰条件付不均一分散モデル）を Black-Scholes モデル [1973][1] に導入した。オプションを評価する際に，金融時系列で頻繁に観測される「分散の変動が時折大きくなる現象」を取り込むことができれば非常に有用である。ただしいうまでもなく，金融市場におけるオプション評価は無裁定性条件の下ではじめて一意となるのであって，分散の変動する構造を記述できればそれで良いというわけではない。そこには同時に，市場の無裁定性を保証する何らかの措置が必要とされる。

* 当研究に関しては文部省科学研究費補助金（日本学術振興会特別研究員奨励費）を受けた。また本稿作成に際し貴重なコメントを頂いた京都大学大学院経済学研究科教授古川顕先生，一橋大学経済学部教授斯波恒正先生，法政大学経済学部宮崎憲治先生，関西大学経済学部岡村秀夫先生に感謝する。また本稿では使用することがなかったが東北大学経済学部照井伸彦先生には貴重なガウス性検定のプログラムをお借りした。重ねて感謝したい。なお当然ながら本稿の誤りは筆者の責任である。

1)　$C(t)=S(t)\phi(dt)-K\exp\{-r(T-t)\}\phi(dt-\sigma\sqrt{T-t})$

$P(t)=K\exp\{-r(T-t)\}\phi\{-dt+\sigma\sqrt{T-t}\}-S(t)\phi(-dt)$

ただし，$dt=\{\ln S(t)/K+(r+0.5\sigma^2)(T-t)\}/\sigma\sqrt{T-t}$

$C(t)=$ コールオプションプレミアム，$P(t)=$ プットオプションプレミアム，$S(t)=$Underlying Security，$K=$行使価格，$r=$安全資産利子率，$\sigma=$ボラティリティ，$T=$権利行使日

$\phi(\cdot)$　標準正規分布関数　このモデルのエッセンスは

$$\left.\frac{dE_t(S_t)}{d_\tau}\right|_{\tau=t}=\mu_t \quad \text{a.s.} \quad \left.\frac{dVAR_t(S_\tau)}{d_\tau}\right|_{\tau=t}=(\sigma_t)^2 \quad \text{a.s.} \quad (VAR\ (x)\text{は}\ x\ \text{の条件付き分散})$$

である。

Duan [1995] の意義は市場均衡条件式 LRNVR (Locally Risk-Neutral Valuation Relationship) を使用し，その方程式の下で GARCH を発生させている点である。LRNVR の直接的使用は非常にストレートな説明力を持ち，実際的な評価を可能にする。

本稿の第一の目的は，これを実際のオプションプライシングに使用する方法を整理することである[2]。第二の目的は，実際の市場でオプションプライシングに GARCH 型 Black-Scholes モデルを使用する参入基準，もしくは市場価格に対して GARCH 型 Black-Scholes モデルを使って裁定を試みようとする意志決定の基盤をどこに求めるかについて考察したい。いわば GARCH 型 Black-Scholes モデル使用を開始する incentive を検定に求め，その検定法も併せて考察する。

I 市場の無裁定性を保証する均衡式

市場の無裁定性を保証する均衡式として有名なものとして，Black-Scholes 偏微分方程式

$$F_t + rSF_s + F_{ss}\sigma^2\frac{S^2}{2} - rF = 0 \quad \text{ただし } F = F(S, t)\text{：オプション価格}$$

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t},\ F_s = \frac{\partial F}{\partial S},\ F_{ss} = \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}$$

(Black & Scholes [1973]) が挙げられる。ボラティリティが一意の仮定下では，この方程式を無裁定性の条件式とできる。しかしボラティリティが変動するという仮定では，この方程式は適当ではない。本稿では Duan [1995] が GARCH 発生のベースとした均衡式 LRNVR を考察してみる。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が完備されている[3] とする。また市場で離散時間的表

2) 本稿では実際の日次時系列を取り扱う理由から，連続時間表現ではなく，離散時間表現を採用した。オプションはヨーロピアンタイプを対象としている。また本稿では，条件付分散を扱う場合，表現を簡略化している場合があるので注意されたい。たとえば $n-1$ 期の情報集合 I_{n-1} が与えられたときの条件付分散表現 $\sigma_n|I_{n-1}$ を σ_n と簡略表記する。

3) 加法族の標準的増大系が定義されている。すなわち $F=(F_t)_{t\geq 0}$ とし，F_t は右連続で零集合を含むとする。

現が可能であるとする。すなわち連続時間 $t(t \in [0, T])$ を，離散時間において $t=h,\ 2h,\ \ldots Nh$ と表現する事が可能である（本稿は日次時系列データを扱っていることから $h=1/365$ である）。そこで n 時点の資産価格を S_n とおく。確率測度 P の下で無裁定性が成立するならば，（すなわち資産価格と預金価格の相対価格をマルチンゲールにする同値マルチンゲール測度[4] Q が存在するならば）市場均衡式 LRNVR（Locally Risk-Neutral Valuation Relationship）は以下となる。

$$\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=r+\lambda\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma^2{}_n \tag{1.1}$$

ただし σ_n：n 時点の標準偏差[5]

r：安全資産利子率

λ：リスクの市場価値

〈証明〉 離散時間価格を考えた場合，資産価格（オプションが対象とする Underlying Security）S_n と預金価格 L_n を以下のように設定する。

$$S_n=S_{n-1}\exp\left(\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}h+\sigma_n\sqrt{h}e_n\right)$$

ただし $e_n \sim iid\ N(0,\ 1)$ (1.2)

$$L_n=L_{n-1}\exp(rh) \tag{1.3}$$

(1.2) (1.3) より

$$\frac{S_n}{L_n}=\frac{S_{n-1}}{L_{n-1}}\exp\left\{\left(\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}-r\right)h+\sigma_n\sqrt{h}e_n\right\} \tag{1.4}$$

---

4) $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P に関して，どのような事象 A に対しても $Q(A)>0$ ならば $P(A)>0$ が成立するとき（またその逆も成立するとき），Q と P は同値であるという。同値確率測度 Q が X に対して同値マルチンゲール測度であるということは，以下の２つを満たす。

(1) Q に関して X はマルチンゲールである

(2) Radon-Nykodym 微分係数が有限の分散をもつ

5) 本稿が実際の時系列を取り扱う際は，市場の目安である20日間ヒストリカルボラティリティを採用している。ヒストリカルボラティリティ（以下 *HV*）とインプライドボラティリティ（以下 *IV*）を比較し，*IV* の方が指標性が高い等の議論は多々あるが，*IV* は特定のアルゴリズム（Regula-Falsi 法，Newton-Raphson 法等）を使用して，現実に取引されたオプション価格を基にオプションプライシングモデルから逆算したボラティリティである。即ち *IV* の存在はオプションモデルに対する絶対的信頼性を拠り所としている。本稿では，モデル自体に対する考察であるため，*IV* を使用する事は最初から避けている。

ここで確率測度 P の下で無裁定性が成立する（すなわち相対価格 S_n/L_n をマルチンゲールにする P と同値マルチンゲール測度 Q が存在する）と仮定する。その仮定の下で(1.4)式の $n-1$ 期時点での期待値を求める。(確率測度 Q 下の期待値を $E^Q[]$ とおく）

$$E_{n-1}^Q\left[\frac{S_n}{L_n}\right]=E_{n-1}^Q\left[\frac{S_{n-1}}{L_{n-1}}\right]\cdot E_{n-1}^Q\left[\exp\left\{\left(\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}-r\right)h+\sigma_n\sqrt{h}\,e_n\right\}\right]$$
$$=\frac{S_{n-1}}{L_{n-1}}E_{n-1}^Q\left[\exp\left\{\left(\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}-r\right)h+\sigma_n\sqrt{h}\,e_n\right\}\right]$$

ここで相対価格が適当な測度 Q の下でマルチンゲールであるためには

$$E_{n-1}^Q\left[\exp\left\{\left(\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}-r\right)h+\sigma_n\sqrt{h}\,e_n\right\}\right]=1$$

が要求されるので

$$\sigma_n\sqrt{h}\,e_n=\left(-\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}+r\right)h \tag{1.5}$$

が必要とされる。

測度 Q の下で $\exp(\sigma_n\sqrt{h}\,e_n)$ の期待値を求めると

$$E_{n-1}^Q\left[\exp(\sigma_n\sqrt{h}\,e_n)\right]=E_{n-1}^Q\left[\exp\left(-\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}h+rh\right)\right]$$
$$=\exp\left(-\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}h+rh\right) \tag{1.6}$$

ここで Θ_n を市場価格プロセスとする。(すなわち $-\Theta_n$ はリスクの市場価値である)

$$e_n=\Theta_n\sqrt{h}+e_n^Q \qquad e_n^Q\sim iid\ N(0,1)$$

と変換すると[6]

$$E_{n-1}^Q\left[\exp(\sigma_n\sqrt{h}\,e_n)\right]=E_{n-1}^Q\left[\exp(\Theta_n\sigma_n h+\sigma_n\sqrt{h}\,e_n^Q)\right] \qquad e_n^Q\sim iid\ N(0,1)\ \text{より}$$
$$=\exp\left(\Theta_n\sigma_n h+\frac{1}{2}\sigma_n^2 h\right) \tag{1.7}$$

6) これは Maruyama=Girzanov 定理の応用であり，確率測度 P と同値マルチンゲール測度 Q において e_n は正規分布 $N(\Theta_n\sqrt{h},1)$ に従うことによる。離散時間モデルの測度変換に対する詳しい記述としては刈屋［1997］等を参照されたい。

(1.6) (1.7) より

$$\exp\left(-\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}h+rh\right)=\exp\left(\Theta_n\sigma_n h+\frac{1}{2}\sigma_n^2 h\right)$$

すなわち

$$\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=r-\Theta_n\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2 \tag{1.8}$$

ところで先述したように $-\Theta_n$ はリスクの市場価値であるが，(1.8)式から想像されるように $-\Theta_n$ は市場プロセスに依存している。すなわち $-\Theta_n$ は時系列としては解析的に扱いが困難であるため，$-\Theta_n$ を定数 ($=\lambda$) として取り扱う。よって LRNVR は

$$\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=r+\lambda\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2 \qquad \square$$

II　GARCH オプションプライシングのためのパラメータ設定

Duan [1995] は第 I 節で導いた LRNVR の誤差項が GARCH に従うとしている。すなわち

$$\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=r+\lambda\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2+\varepsilon_n \tag{2.1}$$

ただし，

$$\varepsilon_n=\sigma_n\cdot e_n \qquad e_n\sim iid\ N(0,\ 1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_n^2&=\Phi_0+\Phi_1(\varepsilon_{n-1})^2+\Phi_2(\varepsilon_{n-2})^2+\Phi_3(\varepsilon_{n-3})^2+\cdots\cdots\Phi_q(\varepsilon_{n-q})^2\\&\qquad+\Psi_1(\sigma_{n-1})^2+\Psi_2(\sigma_{n-2})^2+\Psi_3(\sigma_{n-3})^2+\cdots\cdots\Psi_p(\sigma_{n-p})^2\\&=\Phi_0+\sum_{i=1}^{q}\Phi_i(\varepsilon_{n-i})^2+\sum_{j=1}^{p}\Psi_j(\sigma_{n-j})^2\end{aligned} \tag{2.2}$$

を扱っている。

(2.1) においてオプションプライシングを可能とするためには，直接的なモンテカルロ法の使用に依存しなければならないが，そのためには σ_n や λ を縫合した Underlying Security パスのモデルを明示的に設定する必要がある。こ

れは第Ⅲ節で示す。

次に GARCH 型 Black-Scholes モデルに必要なパラメータの推定法について考察したい。必要なパラメータは $\{\lambda,\ \Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \ldots\ \Phi_q,\ \Psi_1,\ \Psi_2,\ \Psi_3,\ \ldots\ \Psi_p\}$ である。問題は p と q の次数をどこまで与えたらよいかという点である。p, q 次数を選択する際，高次のものまで検証する必要があるが，本稿では『実際に GARCH モデルを推定する際に次数 (p, q) をデータの特性から決定しなければならないが，単純なケースの GARCH (1,1) モデルでデータ変動をほぼ記述できると指摘する実証研究が多い』(白石・高山 [1998]，127ページ) を参考に，それほど高くない次数をテストしてみた。すなわちモデルの同定方法は最尤法で各年度毎に，GARCH (1,1)，(1,2)，(2,1)，(2,2) の4つのモデルにおいて順次回帰する。4つの中で回帰したパラメーター全てが正則に観測される年度だけを選び，その中で対数尤度 (Log of Likelihood Function) を最大にするモデルを各年度毎に一つ選ぶ。この方法は赤池の情報量基準 (Akaike Information Criterion, AIC) を最小にするモデル選択法と同じである。また定常性の条件を満たすために

$$\Phi_0+\sum_{i=1}^{q}\Phi_i+\sum_{j=1}^{p}\Psi_j<1 \tag{2.3}$$

であることを確認する必要がある。日経平均収益率から年度毎に推定されたパラメータを表1に載せる。

III　モンテカルロ法によるパスの発生とオプションプライシング

前節で得られたパラメーターを使用し GARCH (p, q) 型 Black=Scholes モデルによるオプションプライシングを行う。このプライシングのポイントは GARCH 型の分散系列の作成と平行作業で，資産価格のパスを作成することであり，その際にモンテカルロ法を使用することである。

〈分散の作成〉

$$\sigma_n^2=\Phi_0+\Phi_1(\varepsilon_{n-1})^2+\Phi_2(\varepsilon_{n-2})^2+\Phi_3(\varepsilon_{n-3})^2+\cdots\cdots\Phi_q(\varepsilon_{n-q})^2$$

表1 抽出された GARCH(p, q) パラメーター

〈年度〉	1988	1989	1990	1991	1992
標本数	272	248	245	245	246
最適モデル	GARCH (1, 2)	GARCH (1, 2)	GARCH (1, 1)	GARCH (1, 1)	GARCH (1, 1)
対数尤度	106.605	117.047	57.2529	124.515	195.976
λ	−.421801 (−43.9738)	−.595466 (−63.5116)	−.091154 (−12.3466)	−.255084 (−29.0795)	−.042734 (−5.98195)
ϕ_0	.918243E-02 (3.34211)	.443338E-02 (2.08858)	.331039E-02 (1.79712)	.376601E-02 (1.73403)	.153128E-02 (1.61042)
ϕ_1	.407191 (2.25697)	.310170 (1.68340)	.700017 (2.29383)	.555453 (2.96100)	.407388 (2.79767)
ϕ_2	.313811 (2.01514)	.283412 (1.13295)	—	—	—
Ψ_1	.029958 (.153525)	.262768 (1.13762)	.246164 (.990489)	.334374 (1.82252)	.517323 (3.44608)
Ψ_2	—	—	—	—	—

〈年度〉	1993	1994	1995	1996	1997
標本数	245	246	248	246	244
最適モデル	GARCH (1, 1)	GARCH (1, 2)	GARCH (2, 2)	GARCH (1, 1)	GARCH (1, 1)
対数尤度	278.990	118.185	171.595	220.502	301.660
λ	−.017059 (−2.91685)	−.303285 (−32.9571)	−.053322 (−7.77734)	−.116558 (−21.5902)	−.010177 (−2.20127)
ϕ_0	.529251E-02 (6.58577)	.140239E-02 (1.48384)	.464612E-02 (.744179)	.123941E-02 (2.24721)	.484608E-02 (.418223)
ϕ_1	.712100 (2.30303)	.150343 (1.05227)	.27622 (1.44632)	.187433 (2.77453)	.029009 (.430056)
ϕ_2	—	.184018 (.989371)	.511024E-02 (.108009)	—	—
Ψ_1	.823921E-4 (.23392E-03)	.596329 (4.24222)	.824066E-03 (.58200E-03)	.637918 (5.71965)	.921980E-03 (.39175E-03)
Ψ_2	—	—	.445540 (.548418)	—	—

( ) 内は t 値。

$$+\Psi_1(\sigma_{n-1})^2+\Psi_2(\sigma_{n-2})^2+\Psi_3(\sigma_{n-3})^2+\cdots\cdots\Psi_p(\sigma_{n-p})^2$$

$$=\Phi_0+\sum_{i=1}^{q}\Phi_i(\varepsilon_{n-i})^2+\sum_{j=1}^{p}\Psi_j(\sigma_{n-j})^2 \tag{3.1}$$

である。たとえば GARCH (1, 1) モデルは,

$$\sigma_n^2=\Phi_0+\Phi_1(\varepsilon_{n-1})^2+\Psi_1(\sigma_{n-1})^2 \tag{3.2}$$

として分散を発生させる。しかし注意を要するのは(3.1)(3.2)は測度Pと同値なリスクニュートラル確率測度 (Q) 下で発生した分散の流列であるということである。そこで $\varepsilon_{n-1}=\sigma_{n-1}e_n$ は確率測度 Q の下で

$$e_n=\lambda\sqrt{h}+e_n^Q \qquad e_n^Q\sim iid\ N(0,\ 1) \tag{3.3}$$

であることに注意する。そこで(3.2)は(3.3)に従って

$$\sigma_n^2=\Phi_0+\Phi_1\sigma_{n-1}^2[\lambda\sqrt{h}+e_n^Q]^2+\Psi_1\sigma_{n-1}^2 \tag{3.4}$$

となる。一般的には

$$\sigma_n^2=\Phi_0+\sum_{i=1}^{q}\Phi_i(\sigma_{n-i})^2(\lambda\sqrt{h}+e_n^Q)^2+\sum_{j=1}^{p}\Psi_j(\sigma_{n-j})^2 \tag{3.5}$$

となる。

〈資産価格パスの作成〉

測度 Q の下で収益率の期待値は

$$E^Q\left[\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}\right]=E^Q\left[\ln\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}h+\sigma_{n-1}\sqrt{h}e_n^Q\right] \qquad \text{ただし } e_n^Q\sim iid\ N(0,\ 1) \tag{3.6}$$

(3.6)式右辺に LRNVR を代入すると

$$E^Q\left[\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}\right]=E^Q\left[\left(r+\lambda\sigma_{n-1}-\frac{1}{2}\sigma_{n-1}^2\right)h+\sigma_{n-1}\sqrt{h}e_n^Q\right] \tag{3.7}$$

Q はリスクニュートラル確率測度なので $\lambda=0$ を代入して

$$E^Q\left[\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}\right]=E^Q\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma_{n-1}^2\right)h+\sigma_{n-1}\sqrt{h}e_n^Q\right] \text{ よって}$$

$$\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=\left(r-\frac{1}{2}\sigma_{n-1}^2\right)h+\sigma_{n-1}\sqrt{h}e_n^Q$$

結局，確率測度 Q の下では資産価格パスは

$$S_n=S_{n-1}\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma_{n-1}^2\right)h+\sigma_{n-1}\sqrt{h}\,e_n^Q\right] \qquad \text{ただし } e_n^Q\sim iid\ N(0,\ 1) \tag{3.8}$$

となる。

たとえば GARCH(1.1) モデルの場合，

$$\sigma_1^2=\Phi_0+\Phi_1\sigma_0^2(\lambda\sqrt{h}+e_1^Q)^2+\Psi_1\sigma_0^2$$

$$\sigma_2^2=\Phi_0+\Phi_1\sigma_1^2(\lambda\sqrt{h}+e_2^Q)^2+\Psi_1\sigma_1^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_N^2=\Phi_0+\Phi_1\sigma_{N-1}^2(\lambda\sqrt{h}+e_N^Q)^2+\Psi_1\sigma_{N-1}^2$$

と発生させていき，できあがった $\{\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ \sigma_N\}$ をそれぞれ(3.8)の該当する流列にいれていく。その過程において(3.8)の S_n の流列

$$S_1=S_0\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma_0^2\right)h+\sigma_0\sqrt{h}\,e_1^Q\right]$$

$$S_2=S_1\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma_1^2\right)h+\sigma_1\sqrt{h}\,e_2^Q\right]$$

$$S_3=S_2\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma_2^2\right)h+\sigma_2\sqrt{h}\,e_3^Q\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_N=S_{N-1}\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma_{N-1}^2\right)h+\sigma_{N-1}\sqrt{h}\,e_N^Q\right] \qquad \text{ただし } e_N^Q\sim iidN(0,\ 1)$$

とできる。このパスを出来るだけ多く作成する（パスの個数を M とおく）。デリバティブ（オプション）の価格 D_n はこのパスを実際に発生させることで評価できる。

パス S_n を n ひとつにつき，乱数 M 個発生させ $(S_n)^{(m)}$ とおくとオプション価格期待値は，K を行使価格とした場合，

$$D_n=\frac{1}{M}\exp(-rnh)\left[\sum_{m=1}^{M}\max\{(Sn)^{(m)}-K,\ 0\}\right] \tag{3.9}$$

となる。

IV 再　検　証

GARCH パラメータが獲得できた時点で何らかの外挿を行い，パラメータを使用した場合の影響（ボラティリティ変動の形態）を事前に確認しておくことが望ましい。パラメータ再検証法に関して本節では以下のように構成する。

(例)　『ある期間（たとえば1989年1月4日～1989年12月28日）の日経平均収益率に GARCH を挿入して必要なパラメータを得る。得られたパラメータを使用し，「ある期間」の翌営業日（1990年1月4日）に，次期間（1990年1月4日～1990年12月30日）の「予想ＨＶ（ヒストリカルボラティリティ)」を作成する。その期間の終了日（1990年12月30日）に「実際のＨＶ」と「予想ＨＶ」の1年間のデータを比較する。』という設定のもとで再検証を行う[7]。

注意されたいのは，GARCH 型 Black-Scholes モデルと Black-Scholes モデルの根元的な差異は，ボラティリティが残存期間を通じて変化するか否かのみに依存する点である。本稿では上記の設定のように，前年度のパラメータを使用して1年間の検証を行うが，検証のポイントは「ボラティリティクラスタリング」等の現実のボラティリティの変動を巧く表現できていたか，である。「予想ＨＶ」は(3.5)式

$$\sigma_n^2=\Phi_0+\sum_{i=1}^{q}\Phi_i(\sigma_{n-i})^2(\lambda\sqrt{h}+e_{n-i}^{Q})^2+\sum_{j=1}^{p}\Psi j(\sigma_{n-j})^2$$

でモンテカルロを発生させて行う。

〈結果〉　年度毎に実際のＨＶと予想ＨＶを比較してみた（代表的な2例のみ掲載：図1，2）。

(1989年度)　変動に過剰な反応をみせており的確な予想とは言い難い。

(1990年度)　営業日100日目～150日目の予測は的確である。

7)　ある期間から得られたパラメータを該当期間に当てはめた場合，優位性があるのは当然であり，パラメータを次期年度にあてはめて予測力を検証する本稿の措置は適当と思われる。

図1 ボラティリティ1992年度予想と実際

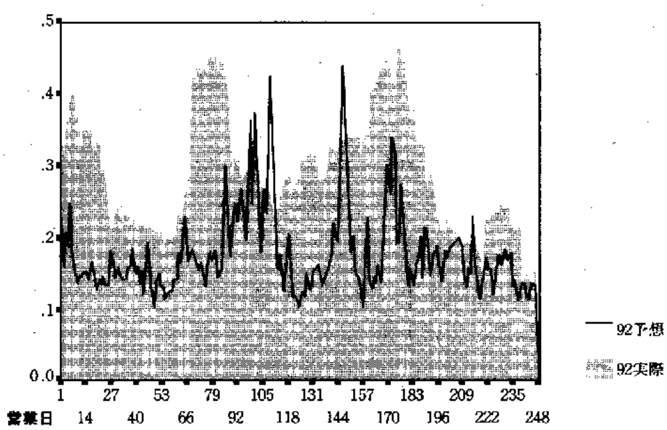
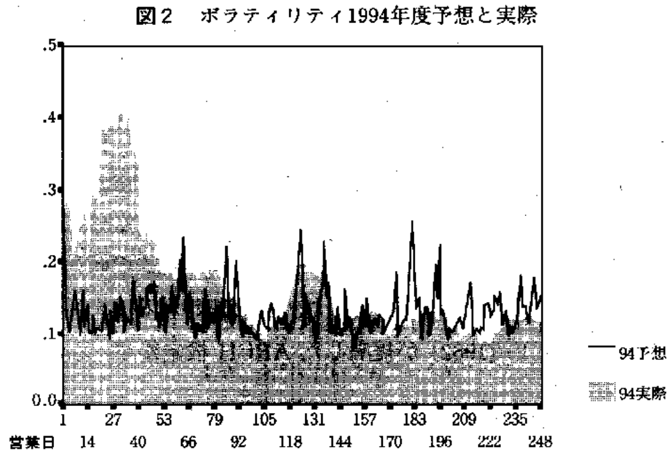


図2 ボラティリティ1994年度予想と実際



(1991年度) 全般的に優れている。100日目を越えるころから変動を巧く予測している。

(1992年度) 全般的な変動を巧く表現できている。

(1993年度) 130日を越えるころから外したが全般的な予測力はある。

(1994年度) 全般的な変動を表現している。

(1995年度) 現実の変動に対応しきれていない。

(1996年度) 全般的に対応しているが，前半及び100～140日目は予測が大きく外れる。

(1997年度) 予測を大幅に外しており対応しきれていない。

パラメータとしては前年度のものを使用したため，全年度に関しボラティリティ予測力が優れているとはいえない。ただし，たとえば91，92，94年度などは全般的なラティイリティクラスタリングを予測している。実際の使用を開始する判断は検定に任されることになろう。

V 検 定 法

実際に金融市場で，オプションプライシングに Black-Scholes モデルでなく，GARCH 型 Black-Scholes モデルを使用しようとする参入基準，もしくは市場価格に対して GARCH 型 Black-Scholes モデルを使って裁定を試みようとする参入基準をどこに求めたらよいかについて考察する。

オプションを市場で売買する際，GARCH 型 Black-Scholes モデルと Black-Scholes モデルの2つのモデルの選択肢があるとする。この場合，オプションの原証券市場に検定を行い，売買を行う市場の過去の時系列の特徴を考慮した上でモデルを選択するのが，適当な方法と思われる。単純な検定法の一つとして，Engle, R. F. [1982] が提唱した ARCH 検定が挙げられる。これは(2.1)式

$$\ln\frac{S_n}{S_{n-1}}=r+\lambda\sigma_n-\frac{1}{2}\sigma_n^2+\varepsilon_n$$

で σ_n を実際に市場で得られるボラティリティとした上で ε_n が過去の2乗した残差に依存するとし，$(\varepsilon_n)^2=\beta_0+\beta_1(\varepsilon_{n-1})^2+\beta_2(\varepsilon_{n-2})^2+\beta_3(\varepsilon_{n-3})^2+\cdots\cdots+\beta_q(\varepsilon_{n-q})^2$ で回帰の決定係数を R^2 とし nR^2 を計算する。その場合，帰無仮説 $\beta_0=\beta_1=\cdots=\beta_q=0$ のもとで nR^2 は自由度1の χ^2 分布に従うとする方法である。

図3 〈BDS統計量の概要〉

〈1〉 時系列データ $\{X_1, X_2, X_3 \ldots X_T\}$ の採取

〈2〉 2つのN次元のベクトル（Nヒストリー）の作成

$$X_t^N=(X_t, X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots X_{t+N-1})', \quad X_s^N=(X_s, X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots X_{s+N-1})'$$

〈3〉 距離の測定

(3-1) 相関積分 (Correlation Integral) の定義：

$$C_N(l, T)=\frac{2}{(T-N)(T-N+1)}\sum_{t<s} I_l(X_t^N, X_s^N)$$

$$\text{ただし} I_l(X_t^N, X_s^N)=\begin{cases}1, & \| X_t^N-X_s^N\|<l \\ 0, & \| X_t^N-X_s^N\|\geqq l\end{cases}$$

Nとlを固定して $T\to\infty$ とした場合，確率1で $C_N(l, T)\to C_1(l)^N$ とすると

$[C_N(l, T)-C_1(l)^N]\sqrt{T}$ は平均 1

分散

$$\sigma^2{}_N(l)=4V^N+8\sum_{j=1}^{N-1} V^{N-1}C^{2j}+4(N-1)^2C^{2N}-4N^2VC^{2N-2}$$

$$\text{ただし}\quad C=C(l)=\int [F(z+l)-F(z-l)]dF(z)$$

$$V=V(l)=\int\int [F(z+l)-F(z-l)]^2dF(z)$$

(3-2)

C (l) の普遍推定量 $C_1(l, t)=\frac{2}{T(T-1)}\sum_{t<s} I_l(X_t, X_s)$

V (l) の普遍推定量

$$V(l, t)=\frac{6}{(T-N-1)(T-N)(T-N+1))}\sum_{t<s<r} I_l(X_t, X_s)I_l(X_s, X_r)$$

とおき，分散を

$$\sigma_N^2(l, T)=4[V(l, T)]^N+8\sum_{j=1}^{N-1}[V(l, T)]^{N-1}[C_1(l, T)]^{2j}+$$
$$4(N-1)^2[C_1(l, T)]^{2N}-4N^2[V(l, T)][C_1(l, T)]^{2N-2}$$

とおく。

〈4〉

$$BDS=\frac{[C_N(l, T)-C_1(l, T)^N\sqrt{T}}{\sigma_N(l, T)}$$

帰無仮説「時系列 $\{X(t)\}$ データが iid に従う」の下でデータ数 $n\to\infty$ のとき標準正規分布 $N\sim(0, 1)$ に従う。

参考：Hsieh [1989]。

このARCH検定で過去の時系列で帰無仮説が棄却できなかった場合，GARCH型Black-Scholesモデルを使用すると指針をたてておけば，自分の売買に関して整合性を維持できる。

またノンパラメトリックに市場の独立同一分布性自体を検証する方法もある。たとえば古典的な検定としては連検定（runs test）が挙げられる。また全く違った視点からBrock, William A., Dechert, W. D., Scheinkman, Joseの3者は1987年にBDS検定を開発した。BDS検定は時系列のiid[8]検定である。BDS検定は「古典的な」ノンパラメトリック検定ではなく，chaosの枠組みに由来するものである。具体的には相関次元の測定が基底となっている。（検定の概要は図3）

過去10年の日経平均収益率に対して対してBDS検定を行った。BDS検定の計算に必要な距離lの決定は，標準偏差/spreadが一応の目安とされる。これから.05の幅で上下1本ずつ設定する。例えば1988年度は標準偏差/spreadは0.092907なのでlを0.042907, 0. 092907, 0.142907の3通り設定する。また埋込次元mの決定に関しては，「mは5前後が妥当」とする先行研究が多いことを参考にして，整数次元$m=4, 5, 6$の3種類を適用する。すなわち1年度に関して9検定を行うこととする。（結果は表2）日経平均収益率はiid帰無仮説を棄却する可能性が高いことがわかる。また第Ⅳ節との関連から，BDS検定で高い帰無仮説棄却を示した年度では，総じて，前年度のGARCHパラメータを使用した予想HVの予測力は結果的に良好であったといえる。

VI まとめおよび今後の課題

GARCH型Black-Scholesモデルを現実のプライシングに使用開始する基準は

1. 対象とする市場の独立同一分布性検定（第Ⅴ節）

8) Independent Identically Distributedの略，独立・同一分布。

表2 検　　定

〈連検定〉

年度	1988	1989	1990	1991	1992
統計量	−0.9093	0.19076	−2.1722*	−1.91665	2.231832*
年度	1993	1994	1995	1996	1997
統計量	1.40554	0.574091	0.444766	1.721758	2.497043*

注：判定はいずれも＊は5％水準で，＊＊は1％水準で有意。

〈BDS検定〉

1988年度日経平均収益率（標準偏差／spread＝0.092907）

	l＝0.042907	l＝0.092907	l＝0.142907
次元数　m＝4	5.3684**	3.9816**	4.7343**
5	6.0903**	4.1125**	4.6204**
6	7.4493**	3.9222**	4.4145**

1989年度日経平均収益率（標準偏差／spread＝0.126508）

	l＝0.076508	l＝0.126508	l＝0.176508
次元数　m＝4	1.5504	1.6531*	1.65474*
5	0.77319	1.4071	1.6661*
6	0.35905	1.2123	1.6547*

1990年度日経平均収益率（標準偏差／spread＝0.10656）

	l＝0.05656	l＝0.10656	l＝0.15656
次元数　m＝4	11.335*	8.2497**	6.2328**
5	15.280**	10.050**	7.4468**
6	19.835**	12.844**	8.5839**

1991年度日経平均収益率（標準偏差／spread＝0.123071）

	l＝0.073071	l＝0.123071	l＝0.173071
次元数　m＝4	0.3393	0.40069	0.57115
5	0.7129	0.93388	1.2323
6	1.0868	1.8304*	2.0325*

1992年度日経平均収益率（標準偏差／spread=0.161434）

	l=0.111434	l=0.161434	l=0.211434
次元数 m=4	3.3034**	4.4986**	4.3444**
5	3.3861**	4.7542**	4.5906**
6	2.9879**	4.9821**	4.7302**

1993年度日経平均収益率（標準偏差／spread=0.14557）

	l=0.09557	l=0.14557	l=0.19557
次元数 m=4	3.3821**	3.8191**	3.2022**
5	4.4285**	4.7959**	3.7894**
6	5.2557**	5.6162**	4.1902**

1994年度日経平均収益率（標準偏差／spread=0.088959）

	l=0.038959	l=0.088959	l=0.138959
次元数 m=4	1.4494	3.6521**	4.0344**
5	0.96163	4.2303**	4.7090**
6	0.2210	4.4925**	5.1521**

1995年度日経平均収益率（標準偏差／spread=0.120638）

	l=0.070638	l=0.120638	l=0.170638
次元数 m=4	0.58294	0.22621	0.21369
5	0.8595	0.20338	0.10657
6	0.89857	0.20294	0.23036

1996年度日経平均収益率（標準偏差／spread=0.142743）

	l=0.092743	l=0.142743	l=0.192743
次元数 m=4	1.2265	0.75948	1.4824
5	1.9404*	1.2531	1.9243*
6	3.1726**	1.3471	2.0872*

1997年度日経平均収益率（標準偏差／spread=0.134348）

	l=0.084348	l=0.134348	l=0.184348
次元数 m=4	2.8636**	4.0145**	5.2592**
5	2.2531*	4.2353**	5.8052**
6	1.8913*	4.3001**	6.1521**

注：判定はいずれも＊は5％水準で，＊＊は1％水準で有意。

に委ねられることになろうし，

2. パラメータが得られた時点でのパラメータ再検証（第Ⅳ節）

で GARCH パラメータ使用時の特徴をチェックしておく必要もある。当然だが市場の方向性は，オプションを売買する際には予測不可能であるため，オプション評価に際してGARCH (p, q) 型 Black-Scholes モデルと Black-Scholes モデルの優位性比較は単純でない。市場に iid 性が強ければ無理に GARCH を導入する意義はないと思われる。ただ市場が非 iid 性を強く示していれば，GARCH (p, q) 型 Black-Scholes モデルは非常に有用な評価法となろう。

最後に同種のオプションプライシングの今後の展望を述べたい。GARCH 以外にも条件付き分散が時間に依存して変化するモデルとして確率的ボラティリティ（ＳＶ）モデル（Taylor, S. [1986]）が挙げられる。これはある時点のボラティリティが Underlying Security もしくはその収益率の過去のパスに依存しないボラティリティモデルである。特に Heynen, R. C. and Kat, H. M. [1994] では金融時系列においてＳＶモデルと GARCH モデルを比較し，株式指数にはＳＶモデルが適切である，と結果を出している。また「ボラティリティがロングメモリーの性質を持つ場合にこれらのモデル（GARCH / EGARCH, SV）を推定するとボラティリティ方程式に単位根が発生する。これはこれらのモデルはショートメモリー・モデルであるため，単位根によってロングメモリーの性質を記述しようとするからである。」として白石・高山 [1998] はボラティリティ方程式に自己回帰分数和分移動平均確率過程（ARFIMA）を導入し，分数階差によってボラティリティの長期依存性を記述するロングメモリー・モデルを採用している。次回は発展型オプションプライシングモデルとして，これらのモデルを織り込むことを考察の対象としたい。

参 考 文 献

刈屋武昭 [1996] 「離散時間マルチンゲール無裁定オプション理論」『経済研究』47, 39-46ページ。

刈屋武昭［1997］『金融工学の基礎』東洋経済新報社。

刈屋武昭・照井伸彦［1997］『非線形経済時系列分析法とその応用』岩波書店。

白石典義・高山俊則［1998］「株価収益率ボラティリティの長期依存性とロングメモリー・モデル」『ジャフィージャーナル1998』東洋経済新報社，123-150ページ。

伏見正則［1989］『乱数』東京大学出版会。

森村英典・木島正明［1991］『ファイナンスのための確率過程』日科技連出版社。

Black, F. and M. Scholes [1972] "The Valuation of Option Contracts and A Test of Market Efficiency," *Journal of Finance*, 27, pp. 399-417.

Black, F. and M. Scholes [1973] "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

Bollerslev, T. [1986] "Generalized Autoregressive Conditionally Heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327.

Bollerslev, T. [1987] "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Security Prices and Rates of Retrurn Data," *Review of Economics and Statistics*, 59, pp. 542-547.

Boyle, P. P. [1977] "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, 4, pp. 323-338.

Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. [1997] "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, pp. 1267-1321.

Brock, William A., Hsieh, David A., Lebaron, Blake [1991] *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, Mit Pr.

Duan, J. C. [1995] "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5, pp. 13-32.

Duffie, D. [1996] *Dynamic Asset Pricing Theory*, NJ, Princeton University Press.

Engle, R. F. [1982] "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, 50, pp. 987-1007.

Heynen, R. C. & Kat, H. M. [1994] "Volatility Prediction: A Comparison of the Stochastic Volatility, GARCH (1, 1), and EGARCH (1, 1) Models," *The Journal of Derivatives*, Winter, pp. 50-65.

Hsieh, D. A. [1989] "Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rates," *Journal of Business*, Vol. 62, No. 3, pp. 339-368.

Siegel, S. [1956] *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*, McGraw-Hill. (藤本煕監訳『ノンパラメトリック統計学～行動科学のために』マグロウヒルブック，1983年)。

Taylor, S. [1986] "Modeling Financial Time Series," John Wiley, New York.