經濟論叢

第170巻　第1号

平成14年7月

京都大學經濟學會

平成一四年七月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第170巻　第1号

平成14年7月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第170巻第1号，2002年7月

資源配分機構モデルと普遍写像問題[1)]

島　義博

I　はじめに

Debreu [1959] に代表されるワルラス均衡の特徴づけに対して，「資源配分機構」を明示的にモデル化してワルラス均衡を定式化するアプローチは，Hurwicz [1959] によって始められた。そこでは，経済主体間でのメッセージの交換過程とその結果定まる均衡メッセージに対して配分を割り当てる過程の２段階の機構として，資源配分機構が定式化された。そして，価格機構が「情報効率的」であることを示した。

Sonnenschein [1974] は，資源配分機構モデルとコアの概念を組合せ，明示的に「普遍写像問題の解」の概念を用いてワルラス均衡を達成する価格機構を特徴付け，Hurwicz [1959] と同様に価格機構のメッセージ集合が「情報効率的」であることを示した。

Hurwicz [1959] で定義された「情報効率性」の概念は，ユークリッド空間という特殊な空間についてしか適用できなかった。これに対し，Mount and Reiter [1974]，Osana [1978]，Sato [1981]，や Jordan [1982] では，一般の位相空間に対して「情報効率性」を定義し，その中で最も情報効率的な資源配分機構が価格機構になることを示して，ワルラス均衡を達成する資源配分機構を特徴づけた。特に Jordan [1982] では，情報効率的な資源配分機構の

1)　本稿は，1997年１月に京都大学へ提出した修士論文を大幅に加筆訂正したものである。ご指導いただいた京都大学の吉田和男教授と，修士論文に対して貴重なコメントを下さった京都大学の小島教授と根井教授に対して感謝の意を表したい。なお，本稿における誤りは，全て筆者の責任に帰するものである。

「普遍写像問題の解」として「価格を通じてワルラス均衡を選択する資源配分機構」を定式化できるクラスを定めた。

本稿では，それぞれのアプローチに関して代表的なモデルを取り上げて，そのモデルでの均衡概念にしたがってワルラス均衡に関する様々な定式化を分類する。さらに，Sonnenschein [1974] や Jordan [1982] らによって指摘されたように，圏に対する「普遍写像問題の解」と資源配分機構モデルとの関連を明らかにするとともに，これらの定式化の間に「普遍問題の解」の考え方が共通に用いられることを示す。

そこで，以下の章は次のような構成をとる。第Ⅱ章では，普遍写像問題の定式化を行うとともに，資源配分機構のモデルを導入する。第Ⅲ章では，コアの概念を用いてワルラス均衡を定式化するアプローチを取り上げる。第Ⅳ章では，メッセージ集合の情報効率性の点からワルラス均衡を特徴付けていくアプローチを見ていく。

Ⅱ　資源配分機構モデルと普遍写像問題の定式化

1　資源配分機構（resource allocation mechanisms）の定義

以下では，Groves and Ledyard [1987] にまとめられている資源配分機構の簡潔な定義を振り返ることにする。

資源配分機構モデルは次の4つの基本的な要素から構成されている：(1) 環境，(2) 配分機構（情報を伝える言語と配分を決定するルール），(3) 自分の利益を追求するという主体の行動仮説，(4)「よい」配分の基準（例えばパレート最適性や平等性など）。これらの基本要素から構成されるものが，資源配分機構と呼ばれるものである。

(1)　経済環境（economic environment）

資源配分機構モデルの定義自体は，上述の基本的な要素から構成される機構についての一般的な定義である。特に経済問題に限定した定式化をされている訳ではない。経済問題に限定して資源配分機構モデルを用いる場合には，その

環境は「経済環境」と呼ばれる。以下で，その経済環境を特定する。

L $(<\infty)$ 個の私的財が存在する経済を考える。消費者全体の集合を C とする。消費者には，各財に関して初期保有量が与えられており，それは L 次元ベクトル ω_i で表される。また，消費者の選好は効用関数 u_i で表されるものとし，各消費者の効用関数全体の集合を U_i で表すものとする。標準的に使われるのは，効用関数は連続，単調かつ強い意味の準凹関数という仮定である。以下では，効用関数の仮定として，この仮定をおくことにする。仮定の変更はその都度明記することにする。

消費者 i の特性は，$e_i=(u_i, \omega_i)$ で表される。このとき，経済環境は $e=(e_i)_{i\in C}$ で表される。初期保有量の存在する領域は R^L_{++}[2] とされるので，消費者 i の特性全体の集合は $E_i=U_i\times R^L_{++}$ で表現でき，経済環境全体の集合は $E=\prod_{i\in C} E_i$ で表される。

経済環境 e に対して，配分は個人の消費ベクトルのプロファイル $x=(x_i)_{i\in C}$ で定められる。ここで，幾つかの特別な配分の定義を与えておく。

定義Ⅱ－1

配分 x が経済環境 e について実行可能であるとは，$\forall i\in C, x_i\geq 0$ かつ $\sum_{i\in C} x_i=\sum_{i\in C}\omega_i$ であることと定義する[3]。

定義Ⅱ－2

配分 x^* が経済環境 e についてパレート効率的であるとは，(1) x^* が e について実行可能であり，かつ (2) x が e について実行可能ならば，少なくとも一人の i について $u_i(x_i)<u_i(x_i^*)$ が成立つことを意味する。

定義Ⅱ－3

配分 x が，経済環境 e についてワルラス的（ワルラス均衡配分）である

2)　ここでは，R^L，R^L_+，R^L_{++} をそれぞれ，L次元実ベクトル空間，L次元実ベクトル空間の非負象限，L次元実ベクトル空間の正象限を表すものとする。

3)　記号 $\geq$ は，$x_i=(x_{i1},\cdots,x_{iL})$ と表した時，全ての財 j について $x_{ij}\geq 0$ なることを表す。

とは，(1) x は e について実行可能であり，さらに (2) 価格ベクトル $p\in R^l_+$ が存在して，

(2-1)　$px_i=p\omega_i$；

(2-2)　$u_i(x_i^*)>u_i(x_i)\Rightarrow px_i^*>p\omega_i$

を満たすことをいう。

(2) 配分機構 (allocation mechanisms)

一般に，配分機構は資源配分のための制度を抽象化して得られるものである。しかし，資源配分のための制度について論及することが本稿の目的ではないので，抽象的なモデルの背後に考えられている制度を特定化することはしない。本稿で考える配分機構は，メッセージと配分を定めるルールの対である。

ここで，メッセージあるいは言語 (language) について定義しておく。m_i でもって，配分機構において消費者 i が他の消費者全員に対して発するメッセージを表すとする。各消費者についてのメッセージのプロファイルを $m=(m_i)_{i\in C}$ とおく。そして消費者 i ついてのメッセージ全体の集合を M_i で表すことにし，経済全体のメッセージ空間を $M=\prod_{i\in C} M_i$ で表し，配分機構のメッセージと呼ぶ。

配分を決定するルールとは，任意のメッセージのプロファイル $m\in M$ に対して，実行可能な配分を対応させる帰結関数 (outcome function) のことを意味する。実行可能な配分の集合を A とすれば，帰結関数は $h: M\rightarrow A$ と表現することができる。均衡メッセージに対して配分が一つ定まるためには，この関数が1価関数であることが決定的である。また，帰結関数が意味を持つためには，経済環境の特定化に注意をしなければならない。特に，消費者の人数と，最終的にどのような配分を達成するかということについての知識が重要である。

(3) 個人の利益追求行動について

経済全体からメッセージの集合への写像 $\mu: E\rightarrow M$ によって，その経済における主体がいかなる行動仮説に基づいて行動しているかが要約されている。例えば，「消費者は支配戦略を採用する」という仮説を使用したときには，

μは経済全体から支配戦略の集合への写像になる。また，それが「ナッシュ均衡を採る」という仮説ならば，μは経済全体からナッシュ均衡戦略の集合への写像となる。もちろん，このμが配分機構に依存して決定されることには注意を要する。

(4) パフォーマンスとその評価

経済 e，配分機構 h，行動仮説μが与えられたとき，その行動仮説の下での環境 e における配分機構 h のパフォーマンスを対応 $F:E\rightarrow A$ に集約させる。ただし，任意の $e\in E$ に対して，$F(e;\ h,\ \mu)=h(\mu(e))$ となる。

このことは次の図式に要約されている。

第1図

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \\
& M \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

出所：Reiter [1977] をもとに筆者作成。

パフォーマンスが決定されると，パフォーマンスが満たすべき性質についての評価が必要になる。その評価基準の集合を

$S(e)=\{e$ における配分 $|$ 配分は e において評価基準の性質をみたす$\}$

と表せば，$F(e)\subset S(e)$ となるかどうかが問題になる。この条件を満たすとき，そのパフォーマンスは実現可能であるという。この評価基準として用いられるものは，次のようなものが代表的である：(1) パレート最適性；(2) 個人合理性；(3) コア配分；(4) ワルラス的配分；(5) 公平な配分。

2 数学的準備：普遍写像問題の定式化

本節では，圏論的観点から関手に対する普遍写像問題の解の考え方を述べる

ことにする。大雑把にいうと，圏とはある構造を持つ対象とそれらの間に定義される準同型写像（これを「射」と呼ぶ）からなる「集まり」のことであり，「関手」とは圏と圏との間の「写像」と考えられるものである[4]。例えば，集合の圏 ***Sets*** とは，対象として集合を持ち，射として集合間に定義される写像全体の集合から構成される「集まり」である。

ここでは，集合の圏から集合の圏への具体的な関手を考えて，その関手に対する普遍写像問題の解を定義することにする。

集合の圏 ***Sets*** から集合の圏 ***Sets*** への共変関手（covariant functor）F を次のように定義する：各集合 X に対し，$F(X)$ は，ある固定された集合 L から X への写像全体の集合と定義し，圏 ***Sets*** の任意の射 $h: X \to Y$ と $f \in F(X)$ について，$F(h)(f) = h \circ f$ と定義する。

「この共変関手 F に対して，次の普遍性をみたす集合と写像の対が存在するのか」という問題が，圏 ***Sets*** と共変関手 F に関する L についての「普遍写像問題」である：

（普遍性）任意の集合 X と写像 $f \in F(X)$ に対して，ある一意的な写像 $h: U \to X$ が存在して，$f = h \circ u$ となる。

この問題について，普遍性をみたす集合 U と $u \in F(U)$ が存在するならば，対 (U, u) は圏 ***Sets*** と共変関手 F に関する L についての「普遍写像問題の解」であるといわれる。さらに，このような写像 u は「普遍写像性（universal mapping property）」を持つという。

共変関手にはその双対の概念として反変関手（contravariant functor）が定義されることが知られている。そこで，上の共変関手に対する反変関手を定義し，その反変関手についての普遍写像問題の解を定義することにする。

集合の圏 ***Sets*** から集合の圏 ***Sets*** への反変関手 T を次のように定義する：

4）圏（category）と関手（functor）の基本的な定義は，河田［1990］などの数学のテキストを参照。ここでの関手の定義については，Urai［1995］を参照。また，このような関手は一般に表現可能な関手（representative functor）と呼ばれる。（河田［1990］定義6．8）

集合 L を固定したものとして考える。各集合 X に対し，$T(X)$ は X から L への写像全体の集合と定義し，圏 ***Sets*** の任意の射 $h: X \to Y$ と $f \in T(X)$ について，$T(h)(f) = f \circ h$ と定義する。

この反変関手 T に対して，次の普遍性をみたす対 (U, u) が，この圏 ***Sets*** と反変関手 T に関する L についての普遍写像問題の解である：

（普遍性）任意の集合 X と写像 $f \in T(X)$ に対して，ある一意的な写像 h：$X \to U$ が存在して，$f = u \circ h$ となる。

この普遍写像問題の解は，ここで定義された関手についてだけではなく，一般の圏と関手について成立するものである[5]。そして，普遍写像問題の解の持つ重要な性質は，それが存在すれば同型対応を除いて一意的に決定されることである。この性質を用いて集合の同値類や直積集合の特徴づけといったことが行われている。このような定式化において重要なことは，X と U が同じ構造を持つこと（同じ圏に属すること）である。

ここで，共変関手と反変関手の普遍写像問題の解についての可換図式を挙げておく。

第２図

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & X \\ U \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

共変関手のときの図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & L \\ U \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

反変関手のときの図式

III　コアの概念と資源配分機構モデル

Edgeworth に起源を持つコア（core）の概念は，消費者の間の契約という側

5)　普遍写像問題についての詳しい解説は Bourbaki［1939-］にあるが，一般の関手に対する普遍写像問題の解の簡潔な定式化については，彌永・小平［1961］を参照。

面から均衡を捉えたもので，経済学にとって重要な視点である。この消費者の間の契約という視点と，市場の一般均衡という視点とを統一的に扱うことを厳密に保証したのは，Debreu and Scarf [1963] によるコアの極限定理である。この定理によれば，消費者のタイプが有限で各タイプについて人口が無限に増えたとき，ワルラス均衡とコアの概念は一致する。さらに，Aumann [1964] は，連続的消費主体の概念を導入してプライス・テイカーの仮定を数学的に説明したが，その結果，連続主体モデルにおいてはコア配分とワルラス均衡配分は同値であることが示された。こうした定理から，コアの概念を用いてワルラス均衡を定式化する手法が確立された。

第Ⅱ章でも述べたように，資源配分機構のパフォーマンスについて評価した場合，コア配分自体も望ましい望ましい基準の一つである。さらに，Sonnenschein [1974] では，ワルラス均衡の Edgeworth 的な視点からの特徴づけという意味を持たせるために，このコアの性質と資源配分機構の考え方とを組み合わせて資源配分機構としての「価格機構」を具体的に定式化した。そして，コアの極限定理を用いて価格機構を公理論的に特徴付けると同時に，価格機構が様々な資源配分機構における普遍写像問題の解として特徴付られることを初めて示した。

Sonnenschein [1974] は，資源配分配分機構において普遍写像問題の解という考え方を用いる基本的な枠組みを提供しているので，以下でこのモデルを詳しく検討することにする。

Sonnenschein [1974] のモデル

まず，消費者の特性は，効用関数と初期保有量の対 (u, ω) で表されるとする。効用関数 $u: R^l_+ \to R$ は連続，狭義単調，狭義準凹性を満たすものとする。また，原点からの自然数の線分の集合を定義域とし，値域を C とする関数の集合を $\mathbf{F}$ とする。$\mathbf{F}$ の要素を有限交換経済（あるいは経済環境）と呼ぶ。すなわち，経済環境 $E=[(u_1, \omega_1), (u_2, \omega_2), \cdots (u_m, \omega_m)] \in \mathbf{F}$ である。また，ω

$(E)=(\omega_1,\cdots\omega_m)$ と表すことにする。さらに，core E で E におけるコア配分を表すものとする。

任意の経済環境Eについて，その経済の純取引(これを「解取引」(solution trade) と呼んでいる) を対応させて，しかもそこから得られる粗取引が E のコア配分に属するような写像を「コアと両立する取引の対応」(core compatible trade correspondence) と定義する。便宜上これを「コア取引対応」と呼ぶことにする。厳密に定義すると，任意のコア取引対応を g とすれば，全ての E と全ての $x\in g(E)$ に対して，$x+\omega(E)\in$ core E が成立つ。つまり，パフォーマンスについてコア配分であることを要請するのである。

任意のコア取引対応 g に対して三重対 (triplet) $(A,\ \omega,f)$ が定義される：A は各消費者が交換するメッセージの集合とする；μ は $\mathbf{F}$ から A のべき集合への対応であり，各経済 E について「解となるメッセージ」(solution message for E) の集合 $\mu(E)\subset A$ を対応させる；また，f: $C\times A\rightarrow R^L$ と定義し，$f(u,\omega,a)$を消費者(u,ω) のメッセージ $a\ (\in A)$ に対する反応関数と考えることにする。各 $E=[(u_1,\omega_1),\cdots,(u_m,\omega_m)]$ と各 $a\in\mu(E)$ に対して，$(f(u_1,\omega_1,a),\cdots,f(u_m,\omega_m,a))$ をメッセージ a に対応する解取引と呼び，$g(E)=\bigcup_{a\in\mu(E)}(f(u_1,\omega_1,a),\cdots,f(u_m,\omega_m,a))$ となることを仮定する。

この三重対はコア取引対応ごとに決定されるメカニズムという意味で，“private representation” と呼ばれる。ここでは，これを「個別表現集合」と呼ぶことにする。

そこで，ワルラス均衡を対応させるコア取引対応を w とすると，この w の個別代表集合は，メッセージ集合を価格単体 $p=\left\{(p^1,p^2,\cdots,p^L)\in R^L_+\ \middle|\ \sum_{l=1}^{L}p^l=1\right\}$ にとり，$\pi(E)$を E の競争均衡価格の集合とし，さらに $e(u_1,\omega_1,p)=e_i(p)$ によって e：$P\rightarrow R^L$ を定義する三重対 $(P,\ \pi,\ e)$ である。ここで，e_i：$P\rightarrow R^L$ は，第 i 消費者の p に関する通常の超過需要関数とする。Sonnenschein [1974] では，この個別代表集合 $(P,\ \pi,\ e)$ を「価格機構」と呼んでいる。

次に，コア取引対応の個別代表集合に対して次の公理系を導入する。

公理S　（拡大に対する解メッセージの情報効率性）：

任意の経済環境 E^1 に対して，各メッセージに対して，消費者の選好のタイプを増やした経済 E^2 を考え，さらに E^1 でのメッセージが E^2 でも選択される，という性質を満たす時，個別代表集合（A, μ, f）を持つコア取引対応 g は公理 S をみたすという[6]。このとき，E^2 を E^1 の拡大と呼ぶ。

公理X　（均衡の存在）：

任意の経済 E に対して，$g(E) \neq \phi$ なるとき，コア取引対応 g は公理 X をみたすという。

公理M　（Aの最小性）：

（A, μ, f）をコア取引対応 g の個別代表集合とする。全ての $(u, \omega) \in C$ に対して，$f(u, \omega, a) = f(u, \omega, b)$ を満たすような $a, b \in A, a \neq b$ は存在しないならば，（A, μ, f）は公理Mをみたすという。

公理C　（μ の完備性）：

（A, μ, f）をコア取引対応 g の個別代表集合とする。（A, μ, f）が任意の経済 E と任意のメッセージ $a \in A$ について公理Cをみたすというのは，次の条件を満たすときである：a に対応する解取引から得られる粗取引が E のコアに属している[7]ならば，$a \in \mu(E)$ となる。

これらの公理を用いて，Sonnenschein［1974］は価格機構を特徴付けている。以下の各命題の証明に関しては，Sonnenschein［1974］を参照。

定理1　（Sonnenschein［1974］命題1）

---

6)　厳密に述べると，任意の経済 $E^1 = [(u_1, \omega_1), \cdots, (u_m, \omega_m)]$ と各メッセージ $a \in A$ に対し，$E^2 = [(u_1, \omega_1), \cdots, (u_m, \omega_m)(u_{m+1}, \omega_{m+1}), \cdots, (u_{m+r}, \omega_{m+r})] \in F$ が存在して，$a \in \mu(E^2)$ をみたすとき，個別代表集合(A, μ, f) を持つコア取引対応 g は公理Sをみたすという。

7)　すなわち $[(f(u_i, \omega_i), a))_{i \in I}] \in \text{core } E$ が成立つときである。

(A, μ, f) をコア取引対応 g の個別代表集合とする。そして，(A, μ, f) が公理Sをみたすならば，一意的な関数 $\phi：A \to P$ が存在して，次の可換図式を成立させる：

第3図

$$\begin{tikzcd}
C \times P \arrow[rr, "e"] & & R^L \\
C \times A \arrow[u, "1c \times \phi"] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

出所：Sonnenschein［1974］をもとに筆者作成。

この定理はコア取引対応という性質を用いて証明されている。定理の結果は，価格機構のメッセージ領域と反応関数が，反変関手の普遍写像問題における（普遍性）を満たすことを意味している。

定理2　（Sonnenschein［1974］命題6）：価格機構の個別代表集合の特徴づけ

(A, μ, f) が公理系S，X，M，Cをみたすコア取引対応 g の個別代表集合であるならば，全単射 $\phi：A \leftrightarrow P$ が存在し，$(A, \mu, f)=(\phi^{-1}(P), \phi^{-1}\pi, e(1_C \times \phi))$ となる。したがって，g はワルラス均衡を導くコア取引対応 w になる。ただし，1_C は消費者の集合 C 上の恒等写像である。

定理3　（Sonnenschein［1974］命題7）

(P', π', e') をコア取引対応 w' の個別代表集合とする。(P', π', e') を持つ w' は公理Sをみたすものとし，かつ，公理 S を満たすようなコア取引対応の任意の個別代表集合 (A, μ, f) ついて，$e'(1_C \times \phi)=f$ を満たすような一意的な写像 $\phi：A \to P'$ が存在するならば，$h：P' \leftrightarrow P$ かつ $e'=e(1_C \times \phi)$ となるような全単射 h が存在する。

この命題の証明は，価格機構のメッセージ集合と反応関数が普遍写像問題の

解として特徴付けられることを示せばよい。すなわち，以下の主張を示せばよいことになる。

主張 1

(P, e) は，以下で定義される圏 $\boldsymbol{C}$ から圏 $\boldsymbol{B}$ への反変関手 T と圏 $\boldsymbol{C}$ に関する R^L についての普遍写像問題の解である。

証明　(**Sonnenschein [1974]** による)

$\boldsymbol{C}$：集合の圏(メッセージの集合を対象として持つ)，

$\boldsymbol{B}$：ある固定したメッセージ集合 A に関して公理Sを満たす個別代表集合に対応した反応関数全体の集合の圏，

とおく。

反変関手 T を次のように定義する；

$A \in \boldsymbol{C}$ に対して，

$T(A) = \{(A, f) : (A, f)$ に対して，(A, μ, f) が公理Sをみたす個別代表集合となる μ が存在する$\}$

とおく。

圏 $\boldsymbol{C}$ 内の対象間の射 $\phi : B \to A$ に対して，$T(\phi) : T(A) \to T(B)$ を

$$T(\phi)(A, f) = (B, f(1_E \times \phi))$$

とする。

このとき，定理1から (P, e) が圏 $\boldsymbol{C}$ と反変関手 T に関する R^L についての普遍写像問題の解であることが示される。したがって，定理3の一意性は普遍写像問題の解の（同型対応を除いた）一意性から導かれる。

以上の定理1から定理3をあわせて考えることで次の主張を得る。

主張 2　(**Sonnenschein [1974]** 命題)

価格機構 (P, π, e) は次の性質をみたす個別代表集合である：反応関数が連続；公理Sをみたす；(普遍性：性質U)「ユークリッド空間の任意の部分集合 A と，反応関数が連続となるような任意の個別代表集合 (A, μ, f)

で公理Sを満たすものに対して，ある一意的な連続関数$\phi：A \to P$が存在して$f=e(1_C \times \phi)$をみたす」。

公理Sと性質Uは，価格機構のメッセージ領域と反応関数を特徴付けている。さらに，公理Sと性質Uに加えて，コア取引対応w'の個別代表集合(P', π', e')が公理Cを満たすものとすれば，$w=w'$であり，上述のhを用いて定理2のように(P', π', e')を書き表せる。

この論文においては，ワルラス均衡は圏論的観点から初めて特徴付けられ，しかも価格機構の一意性を述べるのに公理Sのみしか要請していないこと（定理1）が特徴的である。

IV 情報効率性からの定式化

資源配分モデルの情報効率性の概念を最初に規定し，価格を通じた資源配分が情報効率的であることを示したのが，Hurwicz［1959］である。

その論文では，経済取引がメッセージの交換過程を経て選択される配分となることをモデル化し，情報分権性や情報効率性についての明確な定式化を行っている。その情報効率性の概念は，メッセージ空間に対して考えられているものであり，メッセージ空間の持つ「情報量の大きさ」が最小になることを情報効率的と定義した。その時，問題となるのは，どのようにして「情報量を測るか」ということであるが，Hurwicz［1959］は，メッセージ空間をユークリッド空間に限定して，情報量を空間の次元で測り，情報効率性の簡潔な定義を行った。その上で，ワルラス均衡配分を達成する様々な資源配分機構において，メッセージとして価格と需要量を用いる資源配分機構[8]が最もメッセージ空間の次元が少ない資源配分機構であることが示された。

一般の位相空間に対して情報効率性の概念を定義し，ワルラス機構が情報効率的であると示そうとしたのが，Mount and Reiter［1974］である。そこでは，メッセージ空間に対して位相構造を導入し，ワルラス均衡を実現する資源配分

8） これを本稿では，「ワルラス機構」と呼ぶことにする。

機構において，ワルラス機構が最も情報効率的であることを示そうした。しかし，Walker [1977] は，その情報効率性の定義が位相空間の上の情報効率性を測るには不充分であることを指摘し，空間の位相を特定化したときの「空間の大きさ」の様々な順序関係について議論をしている。Osana [1978] は，Walker [1977] で定義された順序にしたがって，Mount and Reiter [1974] が行おうとした命題の証明を完成させている[9]。さらに Sato [1981] では，Walker [1977] の定義した Fréchet 順序による情報効率性の定義を用いて，公共財を含めたモデルでは，リンダール均衡を選択する資源配分機構が情報効率的であることを示している[10]。

情報効率性に関する定理が主張しているのは，「ワルラス均衡を実現するような資源配分機構を考えたとき，少なくともワルラス機構で用いられたメッセージ空間ほどの情報量を持つことが必要である」ということである。一見，情報効率性が保証されれば，普遍写像問題の解をすぐにも適用できると思われるが，実はそうではない。というのも，「もしワルラス機構以外に情報効率的な資源配分機構が存在するならば，そのメッセージ空間の情報量はワルラス機構のそれと同等の量でなくてはならない」ということを効率性定理は主張しているだけであって，そのメッセージ空間とワルラス機構のメッセージ空間とが同型対応で結ばれることを保証しているわけではない。この同型対応が存在するかどうかは，経済環境の設定だけでなく情報量の定義に依存する[11]。

このような問題に対して，Jordan [1982] では，この情報効率性の定理に

9) ワルラス均衡を選択するときの，資源配分機構の点から定式化のその後の発展については，たとえば，Calsamiglia and Kirman [1993] や Aizpurua and Manresa [1993] などを参照。また，パフォーマンスの評価をワルラス均衡配分と特定化しないような資源配分機構一般に関する情報効率性の議論については，Chen [1992]，Mount and Reiter [1996]，Marschak and Reichelstein [1998] などが詳しい。

10) 本稿では資源配分機構の位相的性質については詳しく取り上げないが，その位相的性質についても詳しく言及し，情報効率性の議論を簡潔にまとめた展望論文として Hurwicz [1986] を挙げておく。

11) 例えば，Walker [1977] における Fréchet 順序を用いた場合には情報効率性定理から直接に一意性定理が導かれる。

対して普遍写像問題の解を適用できる条件を示した。その論文において，メッセージの集合を多様体に限ることによって情報量を空間の次元で測れるようにして，ワルラス機構が情報効率的である事を示し，さらにワルラス機構が一意的に決定される資源配分機構のクラスを示している。

そこで，Jordan［1982］のモデルを情報効率性の代表モデルとして取り上げて考えることにする。特に，ワルラス機構が一意的に決定される時に，その背景として普遍写像性の考え方が存在することを示すことにする。

Jordan［1982］のモデル

経済環境（コブ・ダグラス型環境）

N人L私的財の純粋交換モデルを考える。主体を表す添字 i と財を表す添字 j を区別する。各消費者の消費集合は R^L_+ であるものとする。各 i について U_i でコブ・ダグラス型の効用関数全体の集合を表すとする[12]。

R^L_+ にはユークリッドの距離で位相が与えられているとし，U_i には効用関数間における財の指数から定義される距離で位相が与えられているものとする[13]。

また，第 i 主体は初期保有量として $\omega_i \in R^L_{++}$ を持つものとする。各 i について，$E_i = R^L_{++} \times U_i$ であるとし，$E = \coprod_{i \in C} E_i$ としよう。E の代表元を $e = (e_i, \cdots, e_i) = (\omega_i, u_i)_i$ とする。

一般のメッセージ集合を M とする。

定義Ⅳ-1

メッセージ過程（message process）とは，抽象メッセージの集合 M と E から M への（非空な）対応 μ との対（μ, M）である。$Y = \{y = (y^1, \cdots, y^N)$

12）コブ・ダグラス型の効用関数は，ある $\alpha^i \in R^L_{++}$ が存在して，各 $x^i \in R^L_+$ について $u^i(x^i) = \prod_{j=1}^{L} (x^i_j)^{\alpha_j}$ となる効用関数のこと表す。

13）次の距離で与えられる位相をさす：$\forall u', u'' \in U^i$ について u', u'' の距離 $= d(u', u'') = \max_j |\alpha'_j - \alpha''_j|$。

$\in R^{LN} \mid \sum_i y^i = 0\}$ と定める。(μ, M) がメッセージ過程であり，$g: M \to Y$ を持つような三重対 (μ, M, g) を資源配分機構とよぶ。関数 g は帰結関数である。また，経済環境から実行可能配分 Y への写像 f が存在するとき，メッセージ過程が f を実現するとは，$f(e)=g(\mu(e))$ となることをいう。

定義Ⅳ-2

資源配分機構 (μ, M, g) が「浪費的でない」(nonwasteful) とは，次の条件が満たされることをいう：各 $e=(\omega_i, u_i)_i \in E$ と任意の $y \in g(\mu(e))$ に対して，(1)$(\forall i)(\omega_i + y_i \in R^L_+)$；かつ(2)以下の性質をみたす y' は存在しない：各 i について $\omega_i + y'_i \in R^L_+$ かつ $u_i(\omega_i + y'_i) \geq u_i(\omega_i + y_i)$ であり，ある i については強い不等号が成立つ。

定義Ⅳ-3

資源配分機構が (μ, M, g) が強制的でない（あるいは個人合理的）(noncoercive or individually rational) とは，各 $e=(\omega_i, u_i)_i$ と $y \in g(\mu(e))$ のそれぞれに対して，$\forall i(u_i(\omega_i + y_i) \geq u_i(\omega_i))$ が成立つことをいう。

定義Ⅳ-4

メッセージ過程がプライヴァシー保護的 (privacy-preserving) であるとは，各 i について対応 $\mu^i: E_i \to M$ が存在して，$\forall e \in E,\ \mu(e) = \bigcap_{i=1}^N \mu^i(e_i)$ となることをいう。(μ, M) がプライヴァシー保護的であるとき，資源配分機構 (μ, M, g) は情報分権的 (infomationally decentralized) であるという。

定義Ⅳ-5

$\Delta = \{p \in R^L_{++} \mid \sum_{j=1}^{L} p_j = 1\}$ かつ，$M_C = \{(p, y) \in \Delta \times Y \mid \forall i(p \cdot y_i = 0)\}$ と表す[14]。$\mu_C{}^i(\omega_i, u_i) = \{(p, y) \mid p \cdot y'_i \leq 0$ をみたす全ての y'_i について $u_i(\omega_i + y_i) \geq u_i(\omega_i + y'_i)\}$ によって，任意の i について対応 $\mu_C{}^i: E^i \to M_C$ を定義することにしよう。また，$\mu_C(e) = \bigcap_{i=1}^N \mu_C^i(e^i)$ でもって，対応 $\mu_C: E \to M_C$ を定める。

14) 記号・は，ベクトルの内積を表す。

そのとき，(μ_C, M_C) は “competitive process”[15] と呼ばれる。ここで，三重対 (μ_C, M_C, g_C) のことをワルラス機構という。$g_C:(p, y)\to y$ は射影を表している。

この定義に加えて，経済全体の超過需要がゼロになることと，各個人の予算制約式，さらに需要のゼロ次同次性から，関数 $(p, y)\to(q, \tilde{y})\in R^{L-1}_{++}\times R^{(L-1)(N-1)}$ は C^{∞} 級微分同相写像となる。ただし，$(q_1,\cdots q_{L-1})=(p_1/p_L,\cdots p_{L-1}/p_L)$, $\tilde{y}_i=(y_{i1},\cdots, y_{i(L-1)})$ である。従って，ワルラス過程のメッセージ空間は $(L\text{-}1)N$ 次元の微分可能多様体である。

ワルラス過程は浪費的でなく個人合理的であり，かつプライヴァシー保護的である。

一意性定理はコブ・ダグラス型の経済環境についてまず証明されるが，この定理はより一般的な経済環境についても成立する。

そこで，以下のようにして経済環境の拡張を行う。

各 i に対して，以下のように定義される集合 C_i を各効用関数 $u_i: R^L_+\to R\cup\{-\infty\}$ に対応させる：

$$C_i=\begin{cases} R^L_{++}\cdots\forall\omega_i\in R^L_{++},\ \text{集合}\ \{x\mid u_i(x)\geq u_i(\omega_i)\}\ \text{の}\ R^L_{+}\ ; \\ R^L_{+}\cdots\text{それ以外の場合。}\end{cases}$$

これは，個人合理的な経済で，均衡が端点とならないという境界条件を表している。効用関数で以下の3個の条件を満たすもの全体の集合を $U_i^{\#}$ と表す：(1) u_i は連続で C_i 上の実数値関数；(2) u_i は C_i 上で強く単調；(3) u_i は C_i 上で準凹関数。全ての i について $U_i^{\#}$ の効用関数を用いたときの経済環境を $E^{\#}$ と表すことにする。

さらに，各 i について次のいずれかの条件を満たす効用関数 $u_i\in U_i^{\#}$ の集合を U_i^{*} と表す：(1) u_i は C_i 上で強い準凹関数；(2) u_i は C_i 上で凹関数。全ての i について，U_i^{*} の効用関数を用いたときの経済環境を E^{*} と表すことにする。

15）競争過程と訳すべきだが，本稿での表現を統一するため，ワルラス過程と呼ぶことにする。

一意性定理の前に，その基礎となる効率性定理を述べておく。そのために次の言葉を定義しておく。

定義Ⅳ－6

(μ, M, g) を $E^{\#}$ 上の資源配分機構とし，$e^0 \in E$ であるとしよう。μ が e^0 で局所的に糸状（locally threaded at e^0）であるとは，e^0 の近傍 U が E に存在し，任意の $e \in U$ について $f(e) \in \mu(e)$ となるような連続関数 $f: U \rightarrow M$ が存在することを言う。さらに，配分機構 (μ, M, g) が E 上の内点であるとは，各 $(\omega_i, \alpha_i)_i \in E$ と各 $y \in g(\mu[(\omega_i, \alpha_i)_i])$ に対して，各第 i 主体と第 j 財について $\omega_{ij} + y_{ij} > 0$ が成立つことをいう。

定理4　（Jordan［1982］における定理5・2）　効率性定理

(μ, M, g) が $E^{\#}$ 上の資源配分メカニズムで以下の条件を満たすものとする：(E-1) 浪費的でない；(E-2) E 上の内点；(E-3) 情報分権的メカニズム；(E-4) M は多様体；(E-5) μ はある $e^0 \in E$ で局所的に糸状である。しからば，一般のメッセージ集合の次元はワルラス機構のメッセージ集合の次元よりも少なくはならない。すなわち，$\dim M \geqq \dim M_C$ が成立つ。

効率性定理が主張していることは，「(E-1) から (E-5) までの条件を満たす任意の資源配分機構のクラスにおいて，情報効率的なものでワルラス機構とは別の資源配分機構が存在するならば，その情報の大きさはワルラス機構と同じでなくてはならない」ことである。

さらに，ワルラス機構の情報効率性が満たされるクラスの中でも，ワルラス機構のみが情報効率性をみたすというクラス，すなわち，ワルラス機構と同型な資源配分メカニズムのみが情報効率的であるための条件を求めるのが次の一意性定理である。

定理5　（Jordan［1982］における定理4・12）　一意性定理

(μ, M, g) が，E^* 上の資源配分メカニズム以下の条件を満たすものと

する：(U-1) 浪費的でない（パレート効率的）；(U-2) 個人合理的；(U-3) 情報分権的メカニズム；(U-4) Mは連結で，N（L-1）次元の多様体；(U-5) μの Eへの制限は連続関数；(U-6) μ(E) は Mにおいて閉集合。この時，Mから M_Cへの同相写像 hが存在して以下の第4図と第5図が可換になる：

第4図

$$\begin{tikzcd}
E_i^* \arrow[r, "\mu_c^i"] \arrow[d, "\mu^i"'] & M_C \arrow[dl, shift left, "h^{-1}"] \\
M \arrow[ur, shift left, "h"] &
\end{tikzcd}$$

出所：Jordan［1982］をもとに筆者作成。

第5図

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\mu_c"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "f"] & M_c \arrow[d, "g_c"] \arrow[dl, shift left, "h^{-1}"] \\
M \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, shift left, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

出所：Jordan［1982］をもとに筆者作成。

このとき，均衡配分は一意的になり，パフォーマンスの対応は関数になる。そこで，普遍写像問題の解という考え方を用いて[16]，Sonnenschein［1974］におけるものとまったく同様の主張が成立つ。

主張3

（M_C, g_C）は，以下で定義される圏 ***TS*** から圏 ***Sets*** への反変関手Gの普

16）このJordan［1982］の論文において，普遍写像性の考え方を用いているという指摘は，すでに Mount and Reiter［1996］でも行われているが，具体的な形で定式化しているのは，本稿がはじめてである。

遍要素である。反変関手Gを次のように定義する；

TS：位相空間の圏（メッセージ空間を対象として持つ），

Sets：G(M) は，Mから Y への連続写像の集合の圏，

とする。また，

G(M)＝{g：fを実現する μ が存在して，その μ について，E^*上で定義される資源配分メカニズムが条件(U-1)，(U-2)，(U-3)，(U-4)，(U-5)，(U-6) をみたす}

とおく。

圏 ***TS*** 内の対象間の射 ϕ ：B→Aに対して，G(ϕ)：G(A)→G(B) を

$$G(\phi)(G(A))=G(A)\circ\phi$$

とする。

このようにすれば，主張1と同様に，競争的資源配分機構はこの関手Gの普遍写像性問題の解であるとわかり，情報効率的な資源配分機構はワルラス機構に(同型を除いて) 一意的に定まる。Sonnenschein ［1974］ と同様にJordan ［1982］ のモデルから明らかなことは，各プロファイルに対して一意的に配分が決定されなければ普遍写像性の議論は適用できないということである[17]。

V　結　　論

本稿では，資源配分配分モデルを通じてワルラス均衡を特徴付けるモデルをいくつか見てきた。その中でも，コアの概念を中心にしているものと，資源配分配分モデルのメッセージ空間の情報効率性に注目したモデルを見てきた。そして，それらのモデルの背後に普遍写像性の考え方が存在することを指摘し，一つの形に具体的に定式化した。

しかし，本稿で扱っていないアプローチもまだある。

その一つは，Thomson ［1988］ に始まる一貫性[18]の考え方を用いてワルラス

17）効率性定理から直接に一意性が成り立つ場合については，脚注11）を参照。

18）この手法は，van den Nouweland, Peleg, and Tijs ［1996］ や Serrano and Volij ［1998］ など↗

的社会選択対応を定式化するアプローチである。このアプローチに関しては，コアに関する公理を拡張したものであり，この原則が成り立つ場合には一意的に均衡が決定されるので，第Ⅲ章における議論と同様にして，普遍写像問題の解の考え方を用いることができる。

また，情報効率性の議論に加えて，経済主体の「誘因」の点に注目した場合には，ワルラス均衡には，そこから逸脱する誘因が常に存在する。そうした誘因の面からのアプローチにはゲーム理論の手法を用いることが可能であり，ゲーム理論の基本的な均衡概念であるナッシュ均衡を用いて，ワルラス均衡を特徴付ける事ができる。このアプローチに関しては別の論文，島［2002］にて詳しく扱うことにする。そして，そのアプローチに関しても本稿と同様に普遍写像性の考え方が適用可能であることを示す。

参考文献

Aizpurua, J. and A. Manresa [1993] "An Infinite Dimensional Extension of the Theory of Decentralized Mechanisms," *Mathematical Social Sciences*, 26, pp. 157-173.

Arrow, K. J. and G. Debreu [1954] "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica*, 22, pp. 265-290.

Aumann, R. J. [1964] "Markets with a Continuum of Traders," *Econometrica*, 32, pp. 39-50.

Birkoff, G. and S. MacLane [1967] *Algebra*, New York, MacMillan.

Bourbaki, N. [1970] *Éléments de Mathématique, livre I, Théorie des Ensembles*, nouv. ed., Diffusion C. C. L. S., Paris.（前原昭二訳『数学原論』（集合論），東京図書，1968年）。

Calsamiglia, X. and A. Kirman [1993] "A Unique Informationally Efficient and Decentralized Mechanism with Fair Outcomes," *Econometrica*, 61, pp. 1147-1172.

Chakravorti, B. [1991] "Strategy Space Reduction for Feasible Implementation of Walrasian Performance," *Social Choice and Welfare*, 8, pp. 235-245.

Chen, P. [1992] "A Lower Bound for the Dimension of the Message Space of the Decentralized Mechanisms Realizing a Given Goal," *Journal of Mathematical*

↘でさらに拡張されている。

Economics, 21, pp. 249-270.

Debreu, G. [1959] *Theory of Value*, New York, Wiley.

Debreu, G. and H. Scarf [1963] "A Limit Theorem on the Core of an Economy," *International Economic Review*, 4, pp. 235-246.

Groves, T. and J. Ledyard [1987] "Incentive Compatibility since 1972" in *Information, Incentives, & Economic Mechanisms ; Essays in honor of Leonid Hurwicz*, eds. by Groves, T., R. Radner and S. Reiter University of Minnesota Press, Basil Blackwell, Oxford, pp. 48-111.

Hurwicz, L. [1959] "Optimality and Informational Efficiency in Resource Allocation Processes" in *Mathematical Methods in the Social Sciences* 1959, eds. by Arrow, K. J. et al., Stanford, Stanford University Press, 1960, pp. 27-46.

——— [1972] "On Informationally Decentralized Systems" in *Decision and Organization*, eds. by McGuire, C. B. and R. Radner, Amsterdam, North Holland, 1972, pp. 297-336.

——— [1973] "The Design of Mechanisms for Resource Allocation," *American Economic Review*, 63, No. 2, pp. 1-30.

——— [1979a] "Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindahl Allocations at Nash Equilibrium Points," *Review of Economic Studies*, 46, pp. 217-225.

——— [1979b] "On Allocations Attainable through Nash Equilibria, " *Journal of Economic Theory*, 21 pp. 140-165.

——— [1986] "On Informational Decentralization and Efficiency in Resource Allocation Mechanisms" in *Studies in Mathematical Economics*, eds. by Reiter, S., The Mathematical Association of America, Washington, D. C., pp. 238-350.

Hurwicz, L. and D. Schmeidler [1978] "Construction of Outcome Functions Guaranteeing Existence and Pareto Optimality of Nash Equilibria," *Econometrica*, 46, pp. 1447-1474.

Hurwicz, L. and M. Walker [1990] "On the Generic Nonoptimality of Dominant-Strategy Allocation Mechanisms : a General Theorem that Includes Pure Exchange Economies," *Econometrica*, 58, pp. 683-704.

彌永昌吉・小平邦彦 [1961]『現代数学概説 I』岩波書店。

Jordan, J. [1982] "The Competitive Allocation Process is Informationally Efficient Uniquely," *Journal of Economic Theory*, 28, pp. 1-18.

河田敬義 [1990]『ホモロジー代数』岩波基礎数学選書，岩波書店。

Marschak, T. and S. Reichelstein [1998] "Network Mechanisms, Informational Efficiency, and Hierarchies, " *Journal of Economic Theory*, 79, pp. 106-141.

Mas-Colell, A., M. D. Whinston and J. R. Green [1995] *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, Cambridge.

Mount, K. and S. Reiter [1974] "The Informational Size of Message Spaces," *Journal of Economic Theory*, 8, pp. 161-192.

——— [1996] "A Lower Bound on Computational Complexity Given by Revelation Mechanisms," *Economic Theory*, 7, pp. 237-266.

van den Nouweland, A., B. Peleg, and S. Tijs [1996] "Axiomatic Characterizations of the Walras Correspondence for Generalized Economies," *Journal of Mathematical Economics*, 25, pp. 355-372.

Postlewaite, A. and D. Schmeidler [1979] "Notes on Optimality and Feasibility of Informationally Decentralized Mechanisms" in *Game Theory and Related Topics*, eds. by Moeschlin, O. and D. Pallaschke, Amsterdam, North-Holland Pub. Co., pp. 365-382.

Reiter, S. [1977] "Information and Performance in the (New)^2 Welfare Economics," *American Economic Review*, 67, No. 1, pp. 226-234.

Osana, H. [1978] "On the Informational Size of Message Spaces for Resource Allocation Process," *Journal of Economic Theory*, 17, pp. 66-78.

Sato, F. [1981] "On the Informational Size of Message Spaces for Resource Allocation Process in Economics with Public Goods," *Journal of Economic Theory*, 24, pp. 48-69.

Serrano, R. and O. Volij [1998] "Axiomatizations of Neoclassical Concepts for Economies," *Journal of Mathematical Economics*, 30, pp. 87-108.

島義博 [2002]「ナッシュ遂行可能性と普遍写像問題」『経済論叢』第170巻第3号掲載予定。

Sonnenschein, H. [1974] "An Axiomatic Characterization of the Price Mechanism," *Econometrica*, 42, pp. 425-433.

Thomson, W. [1988] "A Study of Choice Correspondences in Economies with a Variable Number of Agents," *Journal of Economic Theory*, 46, pp. 237-254.

——— [2001] "On the Axiomatic Method and its Recent Applications to Game Theory and Resource Allocation," *Social Choice and Welfare*, 18, pp. 327-386.

Urai, K. [1995] "A Game Theoretic Characterization of Monetary Equilibria in Perfect Foresight Double Infinity Economies," *Discussion Paper*, Osaka University.

Walker, M. [1977] "On the Informational Size of Message Spaces," *Journal of Economic Theory*, 15, pp. 366-375.