平成一四年一〇月一日発行（毎月一日一回発行）

經濟論叢

第170巻　第4号

平成14年10月

京都大學經濟學會

経済論叢（京都大学）第170巻第4号，2002年10月

複合リアル・オプション[1]
——couplingを用いたプロジェクト価値算出とボラティリティによる比較静学——

芝　田　隆　志

I　は　じ　め　に

本稿では，金融工学のオプション評価式を用いて企業の投資プロジェクト価値を算出し，その性質について考察する。具体的には，リアル・オプションアプローチから企業の投資プロジェクト価値を複合オプションとして評価し，不確実性が投資プロジェクト価値にどのような影響を与えるかについて考察する。

伝統的な経済学における投資の意思決定理論は，NPV（正味現在価値）法である。NPV法とはプロジェクトによる将来収益の割引現在価値と費用の大小関係により意思決定を行う手法である。最近の投資理論の研究では，NPV法における2つの問題点が指摘されている。一つは投資支出が不可逆性を満たすことであり，もう一つは投資の意思決定には延期するオプションが考えられる点である。前者はもし企業が投資を実行したならば，その投資費用は回収できないことを意味する。なぜならば，投資は企業あるいは産業特有の資産であり，企業は投資プロジェクトによる資産を他に売却することは困難となるからである。後者は企業がいま投資を実行するか否かのオプション以外に，投資を延期するオプションを保有しているということである。NPV法では，企業が投資タイミングを柔軟に対応する性質を考慮していない。現実での企業が投資

1）本稿作成にあたっては，京都大学の木島正明教授に御指導頂いた。また京都大学の岩城秀樹助教授および京都大学大学院生の西出勝正氏から貴重なコメントを頂いた。この場を借りて謝意を表したい。もちろん，ありうべき誤りはすべて筆者の責任である。

タイミングを考慮する理由は，投資による将来の収益が不確実性を伴っており，投資の実行はプロジェクトに対する新しい情報を放棄することなので，企業はそうした機会費用を考慮に入れて意思決定しなければならないからである。以上のように，NPV 法が考慮していない2点に注目し，企業の投資問題に不確実性を明示的に取り入れた分析手法が，リアル・オプションアプローチである。

リアル・オプションアプローチとは，金融工学での金融オプション商品の評価式を実物資産に適用する理論である。プロジェクトの投資機会は，任意の将来時点において特定の費用でプロジェクトから生じる収益を得る権利として捉えられる。その結果，企業の投資における意思決定問題は，企業がどのようにオプションを最適に行使するかという問題に帰着される。リアル・オプションモデルにおける主要な命題は，不確実性が増大すると投資のプロジェクト価値が上昇するというものである。このメカニズムは，不確実性が増大すると企業が収益に関する新しい情報を待つ価値が上昇することから発生する。このように，リアル・オプションモデルでは，不確実性に対する影響を分析することを可能にした。しかしながら，このアプローチは1990年代に入ってから研究が進められた新しい理論であり，リアル・オプションモデルの体系化は十分であるとは言えず，修正されるべき点が多く残されている。そこで本稿では，既存のリアル・オプションモデルの問題点を指摘し，その問題点を修正および拡張することにより，企業の投資問題についての分析を行う。

従来のリアル・オプションモデルでは，企業の投資機会が単一のプロジェクトとして取り扱われている。しかしながら，現実の投資問題を考えると，企業は単一のプロジェクトよりも多段階のプロジェクトに比較的頻繁に直面する。具体的には，企業は新製品開発といった研究開発としての初期投資に直面し，新製品開発に成功した場合，製品販売による市場参入という次なる拡張投資に直面する。したがって，企業の投資機会を単一のプロジェクトではなく多段階のプロジェクトとして評価する方が，投資の意思決定問題において一層現実的

となる。

リアル・オプションの先行研究では，企業の投資機会を2段階プロジェクトとしてモデル化した研究が，Alvarez and Stenbacka [2001] である。しかしながら，Alvarez and Stenbacka [2001] では，企業が研究開発に成功するならば，必ず拡張投資を実行するという第2段階でのプロジェクトに対する意思決定が内生的に考慮されていないモデルとなっている[2]。換言すれば，Alvarez and Stenbacka [2001] では，投資問題を多段階プロジェクトに拡張しているが，単一の意思決定問題であることから，多段階の投資機会は通常のオプションとして評価されている。これに対して，現実の経済問題を考えると，企業は研究開発に成功した場合でさえも市場製品化の費用が非常に高い可能性がある。このとき，企業は市場参入による収益と費用を比較して，参入しないことが利潤最大化の観点から望ましい場合も考えられる。したがって，リアル・オプションアプローチにおいて投資プロジェクトを2段階に拡張するならば，意思決定も2段階に拡張する方が適切であると考えられる。それゆえ本稿では，企業の投資プロジェクトおよび意思決定の両方を2段階に拡張し，企業の投資プロジェクト価値をオプションのオプションである複合オプションとして評価する。

本稿のモデル分析における独創的な点は，従来のリアル・オプションにおける数学よりも直観的に理解しやすい数学を用いて分析している点があげられる。従来の研究では，確率解析における比較的高度な数学ツールが用いられてきた。例えば，Alvarez and Stenbacka [2001] では，グリーン関数とよばれる経済学的な意味づけの難しい関数を使って，投資プロジェクト価値の性質を考察している。これに対して，Hobson [1998] では，金融オプション商品の評価分析に coupling の理論を用いている。新しいアプローチである coupling の理論は，グリーン関数を用いた議論と比較すると，直観的に理解しやすい図を用いた証明を可能にする。それゆえ，coupling の理論は，図を多用する経済学の理論

2) Alvarez and Stenbacka [2001] では，初期投資を初期技術，拡張投資をアップグレード技術として表記している。

と合致している。また平易な数学の使用は，モデルを理解しやすくなることから，理論の発展に大きく貢献すると考えられる。この点に注目して，本稿ではcoupling の議論を用いて，リアル・オプションアプローチによる企業の投資問題を分析する。

本稿で得られた主要な結果とは，企業の投資プロジェクト機会を複合オプションとして評価しても，「不確実性が増大すると企業の投資機会価値も増大する」という命題が得られたことである。この命題の成立する理由は，不確実性が増大すれば，企業は収益についての新しい情報を待つ価値が高くなり，企業の投資機会価値も上昇するからである。この命題は金融オプション理論および従来のリアル・オプション理論において既に示されており，本稿では企業価値を複合リアル・オプションとして評価しても同一の命題を証明することができた。従来の多段階プロジェクトに拡張したリアル・オプション分析では，投資の意思決定問題を単一で扱っており，企業価値が通常のオプションとして評価しているので，企業価値が複合オプションとして評価される先行研究は存在しない。そこで本稿では，企業価値を複合オプションとして評価する分析を行う。

本稿の構成は次の通りである。第Ⅱ節では，企業の投資機会をモデル化する仮定について述べる。本モデルの独創的な点は，従来のリアル・オプションモデルを多段階プロジェクトかつ多段階の意思決定問題に拡張することである。第Ⅲ節では，第Ⅱ節で構築されたモデルの投資機会価値の性質として３つの定理を証明する。その主要な命題は「不確実性が増大すると企業価値も増大する」という命題であり，coupling の議論を用いて証明する。なお，第Ⅲ節での証明は，すべて付録に掲載した。最後の第Ⅳ節では，本論で得られた結果をまとめる。

II モ デ ル

企業の投資プロジェクトによる収益は外生的な状態変数に依存し，その確率過程は完備なフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$ 上の非負の拡散過程

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ として定義され，次の式を満たすと仮定する。

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dz_t, \qquad X_0 = x \tag{1}$$

ここで z_t は標準ブラウン運動，ドリフト μ：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ と拡散係数 σ：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ は，解の一意性を保証する条件を満たすと仮定する。本稿では，時点ゼロで状態 x から出発した拡散過程を X_t^x と書く。P^x を $X_0 = x$ と定義したときの $\{X_t\}_{t>0}$ の確率測度とする。また確率測度 P^x に関する期待値を E^x として表す。

企業は2段階の投資プロジェクトに直面すると仮定し，初期投資を研究開発投資とし，その投資費用を c_1 と定義する。企業の研究開発による収益は，$\pi_1(x)$：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ とする。企業の研究開発はある確率分布に従って成功し，研究開発に成功する初到達時刻は，確率変数 T として定義し，確率変数 T と確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ とは独立と仮定する。企業は研究開発しないと拡張投資は実行できず，研究開発により拡張投資機会に直面すると，費用 c_2 を用いて拡張投資を実行できるとする。拡張投資による収益は，$\pi_2(x)$：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ とする。拡張投資実行後における収益の増分は $\Delta\pi(x) := \pi_2(x) - \pi_1(x) \geq 0$：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ とし，もし企業は研究開発に成功しないならば，企業の収益は $\pi_1(x)$ のまま変化しないと仮定する。本モデルでは，中止するオプションは導入しない。

数学での技術的な仮定として，収益関数 $\pi_i(x)$：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}(i=1, 2)$ は有界で連続かつ厳密に単調増加関数とする。この仮定から累積利潤は絶対可積分となる。

$$E^x\left[\int_0^\infty e^{-rt}|\pi_i(X_t)|dt\right] < \infty \tag{2}$$

ただし割引率を r とした。絶対可積分条件を満たす関数 π_i のレゾルベント作用素（resolvent operator）$R_r\pi_i$ は，

$$(R_r\pi_i)(x) = E^x\left[\int_0^\infty e^{-rt}\pi_i(X_t)dt\right] \qquad (i=1, 2) \tag{3}$$

と定義される。また X_t の生成作用素（infinitesimal generator）を A とする[3]。

3) レゾルベント作用素（resolvent operator）および生成作用素については，Øksendal [1995] を参照。

すなわち，

$$A=\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\mu(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \qquad (4)$$

と定義される。この設定の下で，次節では，企業のプロジェクトに対する価値を算出する。

III 企業価値の評価と比較静学

企業における投資が2段階プロジェクトで，意思決定も2段階であることから，企業の投資プロジェクト価値は複合オプションとして評価される。時刻 τ は企業が投資を実行する時刻とする。企業の投資プロジェクト価値は，$C(x)$ と表し，次のように表される。

$$C(x)=\max_{\tau} E^x[\mathrm{e}^{-r\tau}(\Pi_0-c_1+\max\{\Pi_1, \Pi_2\})] \qquad (5)$$

ただし，

$$\Pi_0=E^x\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-rs}\pi_1(X_{\tau+s})\mathrm{d}s|\mathfrak{F}_\tau\right]$$

$$\Pi_1=E^x\left[\int_T^\infty \mathrm{e}^{-rs}\pi_1(X_{\tau+s})\mathrm{d}s|\mathfrak{F}_{\tau+T}\right]$$

$$\Pi_2=E^x\left[\int_T^\infty \mathrm{e}^{-rs}\pi_2(X_{\tau+s})\mathrm{d}s-\mathrm{e}^{-rT}c_2|\mathfrak{F}_{\tau+T}\right]$$

である。また確率過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ と確率変数 T とは独立と仮定している。この問題は，(5)式で示される期待利得を最大化する時刻 τ を見つける最適停止問題である。

複合オプション価値の(5)式は，3つの要素から成り立っている。括弧内における第1項は初期投資実行による累積収益，第2項は初期投資である。そして第3項は企業が拡張投資に直面した時，拡張投資実行する場合としない場合における累積収益である。換言すれば，第3項は，企業が拡張投資機会に直面した場合に意思決定の選択が与えられた下でのオプション価値である。それゆえ，企業のプロジェクト価値は，第3項のように，オプション価値の中にオプション価値を含んだ複合オプション価値として評価される。

補題1

企業のプロジェクト価値は，レゾルベント作用素を用いて書き換えられる。

$$C(x)=\max_{\tau} E^{x}[\mathrm{e}^{-r\tau}((R_r\pi_1)(X_\tau)-c_1)] \\ +E^{x}[\max\{\mathrm{e}^{-r(\tau+T)}((R_r\Delta\pi)(X_{\tau+T})-c_2),0\}] \quad (6)$$

補題1は，企業プロジェクト価値を拡散過程のレゾルベント作用素を用いて評価することができることを示している。企業プロジェクト価値がレゾルベントを用いて算出されるならば，企業のプロジェクト価値の性質に関する分析が容易になる。それゆえ，企業のプロジェクト価値がレゾルベントで表現されることは非常に有益である。この有益性は次の定理の証明において明らかになる。

定理1

収益関数 $\pi_i(x)\,(i\in\{1, 2\})$，$\Delta\pi(x)$ は単調増加関数とする。このとき，企業のプロジェクト価値は，初期状態に対して単調増加である。すなわち，初期時点における状態 $x, y\,(x<y)$ に対して $C(x)\leq C(y)$ が成立する。

定理1は，企業のプロジェクト価値が状態変数の初期状態に関して増加関数となることを示している。すなわち初期状態が増加すればするほど企業のプロジェクト価値が増大する。なお，coupling の議論を用いるため，以下ではドリフトを線形として議論する。すなわち，$\mu(X)=\mu X$ と仮定する。

定理2

収益関数 $\pi_i(x)\,(i\in\{1, 2\})$，$\Delta\pi(x)$ は単調増加関数かつ凸性を満たすとする。またドリフトは線形 $\mu(X)=\mu X$ とする。このとき，企業のプロジェクト価値は初期状態に関して凸関数となる。

定理2は初期状態に対して収益関数 $\pi_i(x)$ が凸性をもつならば，レゾルベント作用素も凸性をもつという定理である。この定理2は，不確実性に対する企業プロジェクト価値への影響についての定理3の証明において使用される。

定理 3

収益関数 $\pi_i(x)(i\in\{1, 2\})$，$\Delta\pi(x)$ は単調増加関数かつ凸性を満たすとする。またドリフトは線形 $\mu(X)=\mu X$ とする。このとき，企業のプロジェクト価値は，拡散係数 $\sigma(x)$ に対して増加関数となる。換言すれば，$\tilde{\sigma}(x)>\bar{\sigma}(x)$ のとき，$\tilde{\sigma}(x)$ に対する企業のプロジェクト価値は，$\bar{\sigma}(x)$ に対するプロジェクト価値よりも増大する。

定理 3 の成立する理由は以下のように説明できる。不確実性が増大すれば収益の変動が激しく増減する。このとき，企業は収益に対する新しい情報を待つ価値が高くなり，企業のプロジェクト価値が増大する。これが「不確実性が増大すると企業の投資機会価値が増大する」という命題のメカニズムである。

IV　お　わ　り　に

従来のリアル・オプション分析では複数のプロジェクト問題を扱うが，拡張投資に対する意思決定は内生的に組み込まれていない。換言すれば，企業の投資は単一意思決定問題としてモデル化されるので，企業のプロジェクト価値は通常のオプションとして評価されている。それに対して本稿では，複数プロジェクトおよび複数の意思決定問題にモデルを拡張して，企業の投資プロジェクト価値をオプションのオプションである複合オプションとして評価した。本稿で得られた主要な結果は，企業のプロジェクト価値を複合オプションとして評価しても「企業の投資機会価値が不確実性とともに増大する」という命題が得られたことである。証明に関しては，従来のリアル・オプション理論よりも直観的に理解しやすい coupling の議論を用いて示すことができた。本稿のように，比較的平易な数学を用いた研究は，モデル分析が理解し易くなることから，モデル分析の一層の発展につながると考えられる。

リアル・オプション分析は1990年代に入ってから進められている研究であり，その理論は十分に体系化されているとは言い難い。さらなる研究によるモデル

の精緻化が必要とされている。例えば，リアル・オプション分析では企業間競争が考慮されていない。これは経済学でいうところのプライステーカーモデルである。このように企業が独占的と限定される理由は，戦略的相互依存関係が不確実性の要素の一つとして捉えられているからと考えることは可能である。しかしながら，モデル分析では，不確実性に関する特徴を明示することが可能であるならば，不確実性を漠然として取り扱うのではなく，具体的に導入するべきである。例えば，不確実性を競争相手の行動として考えた場合，結果として生じる事象は，競争による独特の性質を保有しているので，その性質を明示的にモデル化する方が望ましい。それゆえ，リアル・オプション分析は企業間の相互依存関係を導入したリアル・オプションモデルへ拡張することが必要とされていると考えられる。この点については，今後の課題としたい。

付　録（証明）

1 補題1の証明

企業の複合オプション価値は次の通りであった。

$$C(x)=\max_{\tau} E^{x}[\mathrm{e}^{-r\tau}(\Pi_0-c_1+\max\{\Pi_1, \Pi_2\})] \tag{5}$$

ただし，

$$\Pi_0=E^{x}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-rs}\pi_1(X_{\tau+s})\mathrm{d}s|\mathfrak{F}_{\tau}\right]$$

$$\Pi_1=E^{x}\left[\int_T^{\infty} \mathrm{e}^{-rs}\pi_1(X_{\tau+s})\mathrm{d}s|\mathfrak{F}_{\tau+T}\right]$$

$$\Pi_2=E^{x}\left[\int_T^{\infty} \mathrm{e}^{-rs}\pi_2(X_{\tau+s})\mathrm{d}s-\mathrm{e}^{-rT}c_2|\mathfrak{F}_{\tau+T}\right]$$

$\max\{\Pi_1, \Pi_2\}=\Pi_1+\max\{\Pi_2-\Pi_1, 0\}$ という性質が成立する。(5)式を条件つき期待値の連鎖公式を用いて書き換える。

$$\begin{aligned}&E^{x}[\mathrm{e}^{-r\tau}(\Pi_0-c_1+\max\{\Pi_1, \Pi_2\})]\\&\quad=E^{x}[\mathrm{e}^{-r\tau}(\Pi_0-c_1+\Pi_1+\max\{\Pi_2-\Pi_1, 0\})]\\&\quad=E^{x}\left[\mathrm{e}^{-r\tau}\left(E^{x}\left[\int_0^T \mathrm{e}^{-rs}\pi_1(X_{\tau+s})\mathrm{d}s|\mathfrak{F}_{\tau}\right]-c_1\right)\right]\end{aligned}$$

$$+E^x\Big[E^x\Big[\int_T^\infty e^{-r(\tau+s)}\pi_1(X_{\tau+s})ds|\mathfrak{F}_{\tau+T}\Big]\Big]$$

$$+E^x\Big[\max\Big\{E^x\Big[\int_T^\infty e^{-r(\tau+s)}\Delta\pi(X_{\tau+s})ds-e^{-r(\tau+T)}c_2|\mathfrak{F}_{\tau+T}\Big],0\Big\}\Big]$$

$$=E^x\Big[E^x\Big[\int_0^\infty e^{-r(\tau+s)}\pi_i(X_{\tau+s})ds|\mathfrak{F}_\tau\Big]-e^{-r\tau}c_1\Big]$$

$$+E^x\Big[\max\Big\{E^x\Big[\int_T^\infty e^{-r(\tau+s)}\Delta\pi(X_{\tau+s})ds|\mathfrak{F}_{\tau+T}\Big]-e^{-r(\tau+T)}c_2,0\Big\}\Big]$$

第3項について積分区間を変更し，第1，2項のそれぞれ $\mathfrak{F}_\tau$, $\mathfrak{F}_{\tau+T}$ 可測な項を期待値の外にはずす。

$$E^x\Big[e^{-r\tau}\Big(E^x\Big[\int_0^\infty e^{-rs}\pi_1(X_{\tau+s})ds|\mathfrak{F}_\tau\Big]-c_1\Big)\Big]$$

$$+E^x\Big[\max\Big\{e^{-r(\tau+T)}\Big(E^x\Big[\int_0^\infty e^{-r\nu}\Delta\pi(X_{\tau+T+\nu})d\nu|\mathfrak{F}_{\tau+T}\Big]-c_2\Big),0\Big\}\Big]$$

マルコフ性を用いて書き換える。

$$E^x\Big[e^{-r\tau}\Big(E^{X_\tau}\Big[\int_0^\infty e^{-rs}\pi_1(X_s)ds\Big]-c_1\Big)\Big]$$

$$+E^x\Big[\max\Big\{e^{-r(\tau+T)}\Big(E^{X_{\tau+T}}\Big[\int_0^\infty e^{-r\nu}\Delta\pi(X_\nu)d\nu\Big]-c_2\Big),0\Big\}\Big]$$

レゾルベントの定義を用いて式を整理すると，企業の複合オプション価値が，

$$C(x)=\max_\tau E^x[e^{-r\tau}(R_r\pi_1(X_\tau)-c_1)]$$
$$+E^x[\max\{e^{-r(\tau+T)}((R_r\Delta\pi)(X_{\tau+T})-c_2),0\}]$$

と得られる。

2　定理1の証明

企業のプロジェクト価値が，初期状態に対して単調増加であることを示す。証明の方法としては，レゾルベントの各項が，現在の状態に対して単調増加となることを示せばよい。換言すれば，初期状態について $x<y$ と仮定するとき，次式が成立することを示す。

$$(R_r\pi_i)(x)\leq(R_r\pi_i)(y)$$

$$(R_r\pi_i)(j):=E^j\Big[\int_0^\infty e^{-rs}\pi_i(X_s)ds\Big]\qquad(i=1,\ 2\ ;\ j=x,\ y)$$

X_t^x は初期時点 0 において状態 x から出発する確率過程であり，それぞれ独立な確率過程 X_t^x と X_t^y を仮定し，停止時刻を次のように定義する。

$$\tau_x := \inf_u \{u \geq 0 \mid X_u^x \geq X_u^y\}$$

上式における停止時刻から次の新しい確率過程 $\{\widetilde{X}_s^x\}_{s\geq 0}$ を定義する。

$$\widetilde{X}_s^x := \begin{cases} X_s^x & \text{if } 0 \leq s \leq T \wedge \tau_x \\ X_s^y & \text{if } T \wedge \tau_x \leq s \leq T \end{cases}$$

ただし期間を［0, T］とした。

まず $\tau_x > T$ のケースを考える。このとき任意の s に対して X_s^x と X_s^y が交わらない。それゆえ明らかに $X_s^x < X_s^y$ が成立する。

次に $\tau_x \leq T$ のケースを考える。このとき $\widetilde{X}_s^x \stackrel{d}{=} X_s^x$ が成立し[4]，さらに，

$$\widetilde{X}_s^x \leq X_s^y \quad \forall_s$$

が成立するので，X_s が初期状態に対して単調となる。それゆえ，増加関数 $\pi_i(x)$ に対して，$\pi_i(X_s)$ に積分かつ期待値をとっても次の不等号が成立する。

$$E^x\left[\int_0^T e^{-rs}\pi_i(X_s)ds\right] \equiv E^x\left[\int_0^T e^{-rs}\pi_i(\widetilde{X}_s)ds\right] \leq E^y\left[\int_0^T e^{-rs}\pi_i(X_s)ds\right]$$

任意の時刻 T に対して，$T \to \infty$ とすると，

$$(R_r\pi_i)(x) \leq (R_r\pi_i)(y) \qquad (i=1,\ 2)$$

が成立する。レゾルベント項は初期状態に関して単調増加となる。他方，$\Delta\pi(x)$ も単調増加なので，同様にしてレゾルベント $R_r\Delta\pi$ も初期状態に対して増加関数となる。したがって，$\max\{\cdot,\cdot\}$ も単調増加なので，企業のプロジェクト価値は初期状態に関して単調増加となる。

3 定理 2 の証明

ドリフトは線形 $\mu(X) = \mu X$ と仮定するので，確率微分方程式は

$$d\widetilde{X}_s = \mu\widetilde{X}_s ds + \widetilde{\sigma}(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_s dz_s$$

とする。いま $X_s = e^{-\mu s}\widetilde{X}_s$ と定義すると，伊藤のレンマにより，

$$dX_s = \sigma(X_s,\ s)X_s dz_s$$

4) ここで $\stackrel{d}{=}$ とは法則的に等しいことを意味する。

と書き換えることができる。ただし $\sigma(X_s, s)=\bar{\sigma}(e^{\mu s}X^s)$ である。初期状態として $x, y, z(0<x<y<z)$ という3つの状態を仮定する。z_s^k は時点ゼロで状態 $k(k\in\{x, y, z\})$ から出発する標準ブラウン運動であり，それぞれの独立な確率過程 X_s^x, X_s^y, X_s^z が次のような確率微分方程式で書き表される。

$$\mathrm{d}X_s^x=\sigma(X_s^x, s)X_s^x\mathrm{d}z_s^x,\quad X_0^x=x$$

$$\mathrm{d}X_s^y=\sigma(X_s^y, s)X_s^y\mathrm{d}z_s^y,\quad X_0^y=y$$

$$\mathrm{d}X_s^z=\sigma(X_s^z, s)X_s^z\mathrm{d}z_s^z,\quad X_0^z=z$$

このとき，X_t^y を基準として停止時刻を，

$$\tau_x := \inf_s\{s\geq 0\,|\,X_s^x\geq X_s^y\}$$

$$\tau_z := \inf_s\{s\geq 0\,|\,X_s^z\geq X_s^y\}$$

定義する。また時刻 $\tau=\tau_x\wedge\tau_z\wedge t$ を定義する。

第1に $\tau=\tau_x$ の場合には $t=\tau_x$ なので，任意の時刻 t に対して $X_t^x\overset{\mathrm{d}}{=}X_t^y$ が成立する。対称性を用いると，

$$(X_t^z-X_t^x)\pi_i(X_t^y)\overset{\mathrm{d}}{=}(X_t^z-X_t^y)\pi_i(X_t^x)$$

が成立する。また $\tau=\tau_x$ において $X_t^x\overset{\mathrm{d}}{=}X_t^y$ から $E[(X_t^y-X_t^x)\pi_i(X_t^z)|\mathfrak{F}_{\tau x}]=0$ が得られるので，

$$E[(X_t^z-X_t^x)\pi_i(X_t^y)|\mathfrak{F}_{\tau x}]=E[(X_t^z-X_t^y)\pi_i(X_t^x)|\mathfrak{F}_{\tau x}]+E[(X_t^y-X_t^x)\pi_i(X_t^z)|\mathfrak{F}_{\tau x}] \qquad (7)$$

が成立する。第2に $\tau=\tau_z$ の場合でも同様にして $X_t^z\overset{\mathrm{d}}{=}X_t^y$ が成立することから対称性を用いると，

$$(X_t^z-X_t^x)\pi_i(X_t^y)\overset{\mathrm{d}}{=}(X_t^y-X_t^x)\pi_i(X_t^z)$$

が成立する。また $\tau=\tau_z$ では，$X_t^z\overset{\mathrm{d}}{=}X_t^y$ から $E[(X_t^z-X_t^y)\pi_i(X_t^x)|\mathfrak{F}_{\tau z}]=0$ を得るので，

$$E[(X_t^z-X_t^x)\pi_i(X_t^y)|\mathfrak{F}_{\tau z}]=E[(X_t^z-X_t^y)\pi_i(X_t^x)|\mathfrak{F}_{\tau z}]+E[(X_t^y-X_t^x)\pi_i(X_t^z)|\mathfrak{F}_{\tau z}] \qquad (8)$$

が成立する。最後の $\tau=t$ では，明らかに $X_t^x<X_t^y<X_t^z$ が成立する。π_i の凸

性を用いると，

$$(X_t^z - X_t^x)\pi_i(X_t^y) \le (X_t^z - X_t^y)\pi_i(X_t^x) + (X_t^y - X_t^x)\pi_i(X_t^z)$$

を得る。期待値をとると，

$$\begin{aligned} E[(X_t^z - X_t^x)\pi_i(X_t^y)] \le\ & E[(X_t^z - X_t^y)\pi_i(X_t^x)] \\ & + E[(X_t^y - X_t^x)\pi_i(X_t^z)] \end{aligned} \qquad (9)$$

が得られる。すなわち $\tau = \tau_x \wedge \tau_z \wedge t$ における（7）式から（9）式により，$X_t^k(k \in \{x, y, z\})$ の独立性とマルチンゲール性を用いると，

$$(z-x)E[\pi_i(X_t^y)] \le (z-y)E[\pi_i(X_t^x)] + (y-x)E[\pi_i(X_t^z)]$$

を得る。$0 < x < y < z(x, y, z \in R_+)$ の仮定より，任意の時点 t での π_i の凸性が示される。

企業のプロジェクト価値が初期状態に対して凸性を満たすことを証明するために，定理 1 の証明と同様にして企業のプロジェクト価値の 2 つのレゾルベント項が初期状態に対して凸性を満たすことを示せばよい。$x, y, z \in R_+ (x < y < z)$, $\xi \in (0, 1) := \dfrac{y-x}{z-x}$ と仮定したので，任意の時刻 s における $\pi_i(X_s)$ の凸性から，

$$\begin{aligned} &(R_r\pi_i)(y) \\ &\quad = E\left[\int_0^\infty e^{-rs}\pi_i(X_s^y)ds\right] \\ &\quad \le E\left[\int_0^\infty e^{-rs}\pi_i(\xi X_s^z + (1-\xi)X_s^x)ds\right] \\ &\quad \le E\left[\int_0^\infty e^{-rs}\{\xi\pi_i(X_s^z) + (1-\xi)\pi_i(X_s^x)\}ds\right] \\ &\quad = \xi(R_r\pi_i)(z) + (1-\xi)(R_r\pi_i)(x) \end{aligned}$$

が成立する。同様にしてレゾルベント $R_r\Delta\pi$ も初期状態に対して凸性を満たすことを示すことができる。$\max\{\cdot,\cdot\}$ の凸性から，企業のプロジェクト価値は，初期状態に対して凸性をもつ。

4 定理 3 の証明

企業の投資プロジェクト価値が，不確実性に対して増大することを証明するためには，レゾルベント作用素が不確実性に対して増大することを示せばよい。

ファイマン＝カッツ（Feynmann-Kac）の公式とは，

$$G(x)=(R_r\pi_i)(x):=E^x\left[\int_0^\infty e^{-rs}\pi_i(X_s)\mathrm{d}s\right],\qquad (i=1,\ 2)\quad (10)$$

が与えられたとき，(10)式は次の微分方程式を満たすことを示す定理である[5)]。

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x)+\mu(x)G'(x)-rG(x)+\pi_i(x)=0,\quad (i=1,\ 2)\quad (11)$$

$\hat{\sigma}^2(x)>\tilde{\sigma}^2(x)$ を仮定する。それぞれの $\hat{\sigma}(x)$，$\tilde{\sigma}(x)$ に対しての生成作用素 $\hat{A}(x)$，$\tilde{A}(x)$ およびレゾルベント作用素 $\hat{G}(x)=(\hat{R}_r\pi_i)(x)$，$\tilde{G}(x)=(\tilde{R}_r\pi_i)(x)$ を定義する。$\tilde{\sigma}^2(x)$ に対する微分方程式は以下の通りである。

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(x)\tilde{G}''(x)+\mu(x)\tilde{G}'(x)-r\tilde{G}(x)+\pi_i(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\tilde{A}-r)\tilde{G}(x)+\pi_i=0,\qquad (i=1,\ 2)$$

同様に $\hat{\sigma}(x)$ に対して同様な次式が成立する。ただし $\hat{\sigma}^2(x)(>\tilde{\sigma}^2(x))$。

$$\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2(x)\hat{G}''(x)+\mu(x)\hat{G}'(x)-r\hat{G}(x)+\pi_i(x)=0$$

$$\Leftrightarrow\ (\hat{A}-r)\hat{G}(x)+\pi_i=0,\qquad (i=1,\ 2)$$

ここで，$\tilde{\sigma}(x)$ と $\hat{G}(x)$ との合成した式を考える。

$$\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(x)\hat{G}''(x)+\mu(x)\hat{G}'(x)-r\hat{G}(x)+\pi_i(x)$$

$$=\frac{1}{2}\{\tilde{\sigma}^2(x)-\hat{\sigma}^2(x)\}\hat{G}''(x)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\ (r-\tilde{A})\hat{G}(x)-\pi_i\geq 0,\qquad (i=1,\ 2)\qquad (12)$$

ただし $\hat{\sigma}^2(x)>\tilde{\sigma}^2(x)$ と $G''(x)\geq 0$ を用いた。(12)式に期待値をとり e^{-rt} を掛けても，不等号は変化しないので，

$$e^{-rt}E^x[(r-\tilde{A})\hat{G}(\tilde{X}_t)-\pi_i(x)]\geq 0$$

$$E^x\left[\int_0^\infty e^{-rt}(r-\tilde{A})\hat{G}(\tilde{X}_t)\mathrm{d}t\right]-E^x\left[\int_0^\infty e^{-rt}\pi_i(\tilde{X}_t)\mathrm{d}t\right]\geq 0\quad (13)$$

を得る。$f(t,\ x)=e^{-rt}\hat{G}(\tilde{X}_t)$ と定義し，伊藤のレンマを用いる。

5) ファイマン＝カッツ（Feynmann-Kac）の公式については，Øksendal [1995] を参照。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(t,\ \widetilde{X}_t) &= \mathrm{d}[\mathrm{e}^{-rt}\widehat{G}(\widetilde{X}_t)] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t}f(t,\ \widetilde{X}_t)+\mu(\widetilde{X}_t)\frac{\partial}{\partial x}f(t,\ \widetilde{X}_t)+\frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\widetilde{X}_t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,\ \widetilde{X}_t)\right]\mathrm{d}t \\ &\quad +\widetilde{\sigma}(\widetilde{X}_t)\frac{\partial}{\partial x}f(t,\ \widetilde{X}_t)\mathrm{d}z_t \\ &= \mathrm{e}^{-rt}\left[\widetilde{A}-r\right]\widehat{G}(\widetilde{X}_t)\mathrm{d}t+\widetilde{\sigma}(\widetilde{X}_t)\mathrm{e}^{-rt}\widehat{G}'(\widetilde{X}_t)\mathrm{d}z_t \end{aligned}$$

両辺を区間［0, s］で積分する。

$$\begin{aligned} \left[\mathrm{e}^{-rs}\widehat{G}(\widetilde{X}_s)\right]-\widehat{G}(x) &= \int_0^s \mathrm{e}^{-rt}\left[\widetilde{A}-r\right]\widehat{G}(\widetilde{X}_t)\mathrm{d}t \\ &\quad +\int_0^s \widetilde{\sigma}(\widetilde{X}_t)\mathrm{e}^{-rt}\widehat{G}'(\widetilde{X}_t)\mathrm{d}z_t \end{aligned}$$

さらに両辺に期待値をとり整理する。

$$E^x\left[\mathrm{e}^{-rs}\widehat{G}(\widetilde{X}_s)\right]-\widehat{G}(x)=E^x\left[\int_0^s \mathrm{e}^{-rt}\left[\widetilde{A}-r\right]\widehat{G}(\widetilde{X}_t)\mathrm{d}t\right] \tag{14}$$

G の有界性より，$s\to\infty$ とすると(14)の左辺第1項はゼロに収束するので，

$$\widehat{G}(x)=E^x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-rt}\left[r-\widetilde{A}\right]\widehat{G}(\widetilde{X}_t)\mathrm{d}t\right] \tag{15}$$

が得られる。(13)と(15)式から

$$\widehat{G}(x)\geq\widetilde{G}(x)$$

を得る。レゾルベント作用素 $G(x)=(R_r\pi_t)(x)$ は，σ^2 に対して増加関数となる。同様にしてレゾルベント $R_r\Delta\pi$ も σ^2 に対して増加関数となることが示される。$\max\{\cdot,\cdot\}$ はレゾルベントに対して単調性なので，任意の T を固定した時に $\widetilde{\sigma}^2(x)$ における複合オプション価値は，$\widetilde{\sigma}^2(x)$ における複合オプション価値よりも増大する。

参考文献

Alvarez, Luis, H. R., Rune Stenbacka [2001] "Adoption of Uncertain Multi-stage Technology Projects: A Real Options Approach," *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 35, pp. 71-97.

Bernardo, Antonio E., Bhagwan Chowdhry [2002] "Resources, Real Options, and

Corporate Strategy," *Journal of Financial Economics*, Vol. 63, pp. 211-234.

Dixit, K. Aninash, Robert S. Pindyck [1994] *Investment under Uncertainty*, Princeton Unversity Press.

Hobson, David G. [1998] "Volatility Misspecification, Option Pricing and Superreplication via Coupling," *Annals of Applied Probability*, Vol. 8, No. 1, pp. 193-205.

Øksendal, Bernt [1995] *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application*, Springer.