経済論叢（京都大学）第174巻第5・6号，2004年11・12月

# 非完備市場におけるマルチンゲール測度（2）

岩　城　秀　樹
吉　川　大　介

## IV　分散最適マルチンゲール測度

**定義 4.1**　（符号付 $\Theta$-）マルチンゲール測度 $\tilde{P}$ が

$$\mathrm{Var}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}\right] \leq \mathrm{Var}\left[\frac{dQ}{dP}\right]$$

$$\equiv \mathbf{E}\left[\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2\right]-1 \qquad \forall Q \in \mathsf{P}_s(\Theta)$$

となるとき，分散最適であるという。$\tilde{P}$ が分散最適であるとき，$\tilde{D}:=\frac{d\tilde{P}}{dP}$ とする。

分散最適（符号付 $\Theta$-）マルチンゲール測度 v-MM は，以下で述べるように平均・分散ヘッジで特徴付けられる（Schweizer [1995b], Delbaen and Schachermayer [1996], Schweizer [1996], Rheinländer and Schweizer [1997], Gourieroux, Laurent and Pham [1998], Pham, Rheinländer and Schweizer [1998]）。平均・分散ヘッジとは，期待値において条件付請求権に一致し，かつ分散を乖離幅の尺度とした場合に条件付請求権との差が最小となるようなリスク・ヘッジのことである。

所与の条件付請求権の割引価値 $H \in \mathfrak{L}^2(P)$ に対して，最小化問題：

$$\min_{(c,\theta)\in\mathbf{R}\times\Theta} \mathbf{E}[(H-c-G_T(\theta))^2] \tag{4.1}$$

の解となる初期コスト $c$ の取引戦略 $\theta$ を求めることを考える。(4.1)の最小化

問題を定義できるように，$G_T(\Theta)\subset\mathfrak{L}^2(P)$ を仮定する。$G_T(\Theta)\subset\mathfrak{L}^2(P)$ とすると，(4.1)については，その最小化のための1階の条件から容易に確かめられるように，

$$\mathsf{E}[H]=c+\mathsf{E}[G_T(\Theta)]$$

が成立する。したがって，(4.1)の最小化問題は，初期コスト $c$ の自己充足的な平均・分散ヘッジ・ポートフォリオ $\theta$ を求める問題である。

**定義 4.2**　$(V_0, \xi)\in\mathsf{R}\times\Theta$ が(4.1)の解を与えるとき，$V_0$ を $H$ の $\Theta$-近似価格と呼び，これを $q_\Theta(H)$ で表わす。

市場が完備であれば，$H$ の価格は $V_0$ となる。したがって，一般に，$q_\Theta(H)$ を $H$ の $\Theta$-近似価格と呼んでいる。

以下では，仮定

$$(\mathrm{STA}):\ \mathsf{P}_s(\Theta)\neq\emptyset \tag{4.2}$$

をおく。これは，$G_T(\Theta)$ が1を含んでいないということと同値で，無裁定を意味する（Schweizer [1996] p. 210)。

$\pi$ を $\pi:\mathfrak{L}^2(P)\rightarrow G_T(\Theta)^{\perp}$ という汎関数とする。

**補題 4.1 (Shweizer [1996] Lemma 1)**　(a)　$\tilde{P}\in\mathsf{P}_s(\Theta)$ が分散最適であるのは，$\tilde{D}:=\dfrac{d\tilde{P}}{dP}$ としたとき，

$$\mathsf{E}[D\tilde{D}]=\mathsf{E}[\tilde{D}^2]\qquad\forall D\in\mathfrak{D} \tag{4.3}$$

となるときであり，また，そのときに限る。

(b)　$\tilde{P}$ は，$K$ を $G_T(\Theta)$ に属するある値として，次式で与えられる。

$$\tilde{D}:=\frac{d\tilde{P}}{dP}=\frac{\pi(1)}{\mathsf{E}[\pi(1)]}=\mathsf{E}[\tilde{D}^2]+K. \tag{4.4}$$

(c)　$\tilde{P}\in\mathsf{P}_s(\Theta)$ が分散最適であるのは，

$$\tilde{D}\in[1,\infty)+G(\Theta)$$

となるときであり，また，そのときに限る。

**証明** (a) $x \neq 0$ となる全ての $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$D \to D^x := xD + (1-x)\tilde{D} = x(D-\tilde{D}) + \tilde{D}$$

で定義される $\mathfrak{D} \backslash \{\tilde{D}\}$ から $\mathfrak{D} \backslash \{\tilde{D}\}$ への写像は全単写となる。したがって，

$$\mathsf{E}[(D^x)^2] - \mathsf{E}[\tilde{D}^2] = x^2 \mathsf{E}[(D-\tilde{D})^2] + 2x\mathsf{E}[\tilde{D}(D-\tilde{D})]$$

より題意を得る。

(b) $1-\pi(1) \in G_T(\Theta)$ より，$\mathsf{E}[\pi(1)(1-\pi(1))]=0$. かつ仮定 (STA) より，$\pi(1) \neq 0$ でなければならないから，

$$\mathsf{E}[\pi(1)] = \mathsf{E}[\pi(1)^2] > 0. \tag{4.5}$$

したがって，$\bar{D} := \dfrac{\pi(1)}{\mathsf{E}[\pi(1)]}$ が定義できて，$\bar{D} \in \mathfrak{D}$. ある $K^0 \in G_T(\Theta)$ によって，$\pi(1) = 1 - K^0$ であるから，$K := -\dfrac{K^0}{\mathsf{E}[\pi(1)]}$ とおくと，$\bar{D} = \dfrac{1}{\mathsf{E}[\pi(1)]} + K = \mathsf{E}[\bar{D}^2] + K$. ここで，$\mathsf{E}[D\bar{D}] = \mathsf{E}[\bar{D}^2]\ \forall D \in \mathfrak{D}$ となることに注意すると補題 4.1(a) より，$\bar{D} = \tilde{D}$。

(c) (a), (b)より明らか。 □

**命題 4.1 (Schweizer [1996] Propostion 2, Rheinländer Schweizer [1997] Theorem 6)**

1. $\tilde{\mathsf{E}}$ を v-MM $\tilde{P}$ の下での期待値演算子とする。$H \in \mathfrak{L}^2(P)$ に対して，

$$q_\Theta(H) = V_0 = \tilde{\mathsf{E}}[H]$$

が成立する。

2. $\tilde{L}^H$ を $\tilde{P}$ の下で $X$ と直交し，$\tilde{L}_0^H = 0$ となる $\tilde{P}$-マルチンゲールとし，$\tilde{L}^H$ と $\tilde{\xi}^H \in \Theta$ は，

$$H = \tilde{\mathsf{E}}[H] + \int_0^T \tilde{\xi}_s^H dX_s + \tilde{L}_T^H \tag{4.6}$$

を満たすものとする。このとき，(4.1)の解をもたらす最適取引戦略 $\theta = \theta^H$ は

$$\theta_t^H = \tilde{\theta}_t^H - \tilde{\varsigma}_t \left( \tilde{\mathsf{E}}[H] \tilde{Z}_0^{-1} + \int_0^t \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H \right)$$

$$=\tilde{\theta}_t^H-\frac{\tilde{\varsigma}_t}{\tilde{Z}_t}\left(\tilde{V}_t^H-\int_0^t\theta_s^H dX_s\right)$$

で与えられる。ただし，

$$\tilde{V}_t^H:=\tilde{\mathsf{E}}[H]+\int_0^t\tilde{\xi}_s^H dX_s+\tilde{L}_t^H,$$

$$\tilde{\theta}_t^H:=\frac{d\langle V^H, X\rangle_t}{d\langle X\rangle_t}$$

である。

証明

1. $\mathbf{R}\times G_T(\Theta)$ が線形空間であることに注意すると，最適化の一階の条件から，

$$\mathsf{E}[H-V_0-G_T(\xi)]=0,$$
$$\mathsf{E}[(H-V_0-G_T(\xi))G_T(\theta)]=0 \qquad \forall\theta\in\Theta.$$

これより，

$$\frac{dQ}{dP}:=\frac{d\tilde{P}}{dP}+H-V_0-G_T(\xi)$$

で定義される $Q$ は $\mathsf{P}_s(\Theta)$ に属する。したがって，補題 4.1 より，

$$0=\mathsf{E}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}\left(\frac{dQ}{dP}-\frac{d\tilde{P}}{dP}\right)\right]=\mathsf{E}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}(H-V_0-G_T(\xi))\right]=\tilde{\mathsf{E}}[H]-V_0$$

となり題意を得る。

2. はじめに國田・渡辺分解より，(4.6) となる $\tilde{\xi}^H$ と $\tilde{L}^H$ が存在することに注意する。

(a)　$H=1$ の場合。

補題 4.1(b) より，ある $\tilde{\varsigma}\in\Theta$ によって

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}=\tilde{\mathsf{E}}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}\right]+\int_0^T\tilde{\varsigma}_s dX_s$$

となるので，

$$\tilde{Z}_t = \tilde{\mathsf{E}}\left[\frac{d\tilde{P}}{dP}\middle|\mathfrak{F}_t\right] + \int_0^t \tilde{\varsigma}_s dX_s. \tag{4.7}$$

よって，$H=1$ の場合には，

$$H=1=\tilde{Z}_0^{-1}\tilde{Z}_T - \int_0^T \tilde{Z}_0^{-1}\tilde{\varsigma}_s dX_s$$

より，

$$\theta^H = -\tilde{Z}_0^{-1}\tilde{\varsigma} \tag{4.8}$$

となる。

(b) $H=\int_0^T \tilde{\xi}_s^H dX_s$ の場合。

この場合，明らかに

$$\theta^H = \tilde{\xi}^H \tag{4.9}$$

となる。

(c) $H=\tilde{L}_T^H$ の場合。

$$\overline{\theta}_t := -\tilde{\varsigma}_t \int_0^t \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H$$

とおくと，(4.7) と伊藤の積公式より，

$$\tilde{L}_T^H - \int_0^T \overline{\theta}_s dX_s = \tilde{Z}_T \int_0^T \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H$$

したがって

$$\mathsf{E}[(H-G_T(\overline{\theta}))G_T(\theta)] = \mathsf{E}\left[\tilde{Z}_T G_T(\theta)\int_0^T \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H\right]$$

$$= \tilde{\mathsf{E}}\left[G_T(\theta)\int_0^T \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H\right] \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

ここで，$[\tilde{L}_s^H, X^i]=0$, $i=1, \ldots, d$ に注意すると伊藤の積公式より，$G(\theta)\int \tilde{Z}^{-1} d\tilde{L}^H$ は $\tilde{P}$-マルチンゲールとなることがわかる。したがって，

$$\mathsf{E}[(H-G_T(\overline{\theta}))G_T(\theta)] = 0 \qquad \forall\, \theta \in \Theta$$

となるので，$\theta_t^H = \overline{\theta}_t = -\tilde{\varsigma}_t \int_0^t \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H$. 以上より，一般の場合には，$H \mapsto \theta^H$ の線形性より，

$$\theta_t^H = \tilde{\xi}_t^H - \tilde{\varsigma}_t\left(\tilde{\mathsf{E}}[H]\tilde{Z}_0^{-1} + \int_0^t \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H\right).$$

ここで，(4.7)に注意すると，伊藤の積公式より，

$$\tilde{Z}_t\left(\tilde{\mathsf{E}}[H]\tilde{Z}_0^{-1} + \int_0^t \tilde{Z}_s^{-1} d\tilde{L}_s^H\right) = \tilde{\mathsf{E}}[H] + \int_0^t \left(\tilde{\mathsf{E}}[H]\tilde{Z}_0^{-1} + \int_0^s \tilde{Z}_u^{-1} d\tilde{L}_u^H\right)\tilde{\varsigma}_s dX_s + \tilde{L}_t^H$$

$$= \tilde{V}_t^H - \int_0^t \theta_s^H dX_s.$$

以上より，題意を得る。 □

命題4.1より，v-MMは，$\Theta$-近似価格に対応する価格体系であると解釈できる。

v-MMは，一般には符号付測度であって，測度になるとは限らないし，測度であっても，$P$と同値な確率測度になるとは，限らない（後述の例5.1参照)。証明は省略するが，v-MM $\tilde{P}$が測度になるための十分条件および$\tilde{P}$が$P$と同値な確率測度となるための必要十分条件は，各々次の2つの定理で与えられる。

**定理 4.1 (Schweizer [1996] Theorem 13)** 仮定（STA）が満たされているとする。$X$が構造条件（SC）を満たす連続な適合過程ならば，$\tilde{P}$は測度となる。

**定理 4.2 (Schweizer [1996] Corollary 11)** $X$は連続であるとし，仮定（STA）が満たされているとする。$G_T(\Theta)$が$\mathfrak{L}^2(P)$上の閉集合であれば，次が成立する。

$$\pi(1) > 0 \iff \tilde{P} \sim P.$$

一般には$\hat{K}$は確定的でないが（Schweizer [1995a]，Schweizer [1996]，Pham, Rheinländer and Schweizer [1998]，Laurent and Pham [1999]），もし確定的であれば，次の定理にあるように，v-MMはMMMと一致する。

**定理 4.3 (Schweizer [1995] Theorem 8)** $\hat{K}$が確定的であるとする。このとき，MMM測度$\hat{P}$は，次の最小化問題の解となる。

$$\min\left\{\mathrm{Var}\left[\frac{dQ}{dP}\right];\ \frac{dQ}{dP}\in\mathfrak{L}^2(P)\right\}.$$

**証明** $\dfrac{dQ}{dP}\in\mathfrak{L}^2(P)$ となる $Q$ に対するマルチンゲール密度過程を $Z$ とすると，$Z\in\mathfrak{M}^2(P)$ であり，(3.7)と(3.10)より，ある $R\in\mathfrak{M}^2_{0,\mathrm{loc}}(P)$ によって

$$\langle Z\rangle_t=\int_0^t Z_s^2 d\hat{K}_s+\langle R\rangle_t$$

となる。$Z^2-\langle Z\rangle$ はマルチンゲールかつ $Z_0=1$ であることに注意すると，

$$\mathsf{E}[Z_t^2]-1=\mathsf{E}[\langle Z\rangle_t]=\int_0^t\mathsf{E}[Z_s^2]d\hat{K}_s+\mathsf{E}[\langle R\rangle_t].$$

ここで最右辺は，Fubini の定理と $K$ が確定的であることを用いた。さらに，ここで

$$h(t):=\mathsf{E}[Z_t^2],$$
$$g(t):=1+\mathsf{E}[\langle R\rangle_t],\qquad t\in[0,T]$$

とおくと，

$$h(t)=g(t)+\int_0^t h(s)d\hat{K}_s$$

$$=\mathfrak{E}(\hat{K})_t+\int_0^t\frac{\mathfrak{E}(\hat{K})_t}{\mathfrak{E}(\hat{K})_s}dg(s).$$

$\hat{K}$ と $g$ は，増加かつ非負であるから，

$$\mathsf{E}\left[\left(\frac{dQ}{dP}\bigg|_{\mathfrak{F}_t}-1\right)^2\right]=\mathsf{E}[Z_t^2]-1\geq\mathfrak{E}(\hat{K})_t-1=\mathsf{E}\left[\left(\frac{d\hat{Q}}{dP}\bigg|_{\mathfrak{F}_t}-1\right)^2\right]$$

最右辺は，$g\equiv1$，すなわち，$R\equiv0$ のときである。以上より，題意を得る。

□

**例 4.1 (Pham, Rheinländer and Schweizer [1998])** 例3.1において，$n=1$ とするが，$m:=b-r$ と $v$ は $W$ から独立とする。この場合，相対リスク過程 $\dfrac{m}{v}$ が有界であっても MVT 過程 $\hat{K}$ が確定的でなければ，定理3.2の仮定

(SA) は満たされない。

いまの場合,

$$\hat{Z}_T=\mathfrak{E}\Big(-\int\frac{m}{v}dW\Big)_T=\exp\Big(-\int_0^T\frac{m_s}{v_s}dW_s-\frac{1}{2}\hat{K}_T\Big),$$

$$\hat{K}_T=\int_0^T\frac{m_s^2}{v_s^2}ds$$

となる。ここで,

$$Z_t:=\frac{e^{-\hat{K}_T}}{\mathsf{E}[e^{-\hat{K}_T}]}\hat{Z}_t$$

とすると, $\mathsf{E}[Z_t]=1,\ t\in[0,\ T]$ かつ $Z$ は狭義に正の $P$-マルチンゲールとなる。$\hat{P}$ は $X$ に対するマルチンゲール測度であるから, $X$ に対する同値マルチンゲール測度 $Q$ を $\dfrac{dQ}{dP}:=Z_T$ で定義できる。$m$ と $v$ が $W$ から独立であることから,

$$\mathsf{E}[\hat{Z}_T{}^2]=\mathsf{E}[e^{\hat{K}_T}].$$

一方,

$$\mathsf{E}[Z_T{}^2]=\frac{1}{\mathsf{E}[e^{-\hat{K}_T}]}.$$

したがって, Jensen の不等式から, $\hat{K}$ が確定的でないなら

$$\left\|\frac{dQ}{dP}\right\|_{\mathfrak{L}^2(P)}<\left\|\frac{d\hat{P}}{dP}\right\|_{\mathfrak{L}^2(P)}.$$

すなわち, $\hat{P}$ は分散最適とならない。この場合, 補題4.1(c)より, 仮定 (SA) は満たされない。

例 4.2 **(Delbaen and Schachermayer [1996])**　$W=\{W_t\ ;\ t\in[0,\ 2]\}$ をフィルトレーション付き確率空間 $(\Omega,\ \mathfrak{F},\{\mathfrak{G}_t\ ;\ t\in[0,\ 2]\},\ P)$ 上の標準ブラウン運動とする。$v$ を

$$v=\begin{cases}0 & \text{w.p. } \dfrac{1}{2}\\[2mm] 1 & \text{w.p. } \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

となる $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上の $W$ と独立な確率変数とする。

$$\mathfrak{F}_t=\begin{cases}\mathfrak{G}_t & t\in[0,1)\\ \sigma(\mathfrak{G}_t\cup\sigma(\nu)) & t\in[1,2]\end{cases}$$

とし，

$$X_t=\nu(t-1)+W_t$$

とする。いまの場合，

$$Z_t^{(1)}=\begin{cases}1 & t\in[0,1)\\ 2\times 1_{\{\nu=0\}} & t\in[1,2]\end{cases}$$

および，

$$Z_t^{(2)}=\begin{cases}1 & t\in[0,1)\\ 2\times 1_{\{\nu=1\}}\exp\left(-(W_t-W_1)-\dfrac{t-1}{2}\right) & t\in[1,2]\end{cases}$$

がマルチンゲール密度過程となり，一般に，$X$ の符号付マルチンゲール密度過程 $Z$ は，

$$Z=\lambda Z^{(1)}+(1-\lambda)Z^{(2)} \qquad \lambda\in\mathrm{R} \tag{4.10}$$

で与えられる。特に，$\lambda=\dfrac{1}{2}$ とすると，MMM の密度過程となる。一方，$\|Z_2^{(1)}\|^2_{\mathfrak{L}^2(P)}=2$, $\|Z_2^{(2)}\|^2_{\mathfrak{L}^2(P)}=2e$ から，

$$\|\lambda Z_2^{(1)}+(1-\lambda)Z_2^{(2)}\|^2_{\mathfrak{L}^2(P)}=2\lambda^2+2e(1-\lambda)^2$$

となる。これより，v-MM の密度過程 $\tilde{Z}$ は，(4.10) において $\lambda=\dfrac{e}{1+e}$ としたものとなる。すなわち，

$$\tilde{Z}=\begin{cases}1 & t\in[0,1)\\ \dfrac{2e}{1+e}1_{\{\nu=0\}}+\dfrac{2}{1+e}1_{\{\nu=1\}}\exp\left(-\left(W_t-W_1\right)-\dfrac{t-1}{2}\right) & t\in[1,2]\end{cases}$$

となる。 □

## V　最小エントロピー・マルチンゲール測度

MMM と v-MM は，一般には符号付測度となるため，測度となるマルチンゲール測度を特定するためには，不十分と考えられることがある。そこで，別の特定化法に基づくマルチンゲール測度として，相対エントロピーを最小化する測度が考えられている。これがいわゆる MEMM である。

**定義 5.1**　$Q$ を $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上の確率測度とする。$Q$ の $P$ に関する相対エントロピー $I(Q, P)$ を次式で定義する。

$$I(Q, P) := \begin{cases} \int \ln\left(\dfrac{dQ}{dP}\right) dQ, & Q \ll P \\ \infty, & \text{その他の場合。} \end{cases}$$

記号を

$$\mathfrak{Q} := \{Q \ll P\,;\, \mathsf{E}^Q[k] = 0, \quad \forall k \in G(\Theta)\},$$
$$\mathfrak{Q}_e := \{Q \in \mathfrak{Q}\,;\, Q \sim P\},$$
$$\mathfrak{Q}^0 := \{Q \in \mathfrak{Q}\,;\, I(Q. P) < \infty\}$$

とする。

**定義 5.2**　次式を満たす確率測度 $Q_0 \in \mathfrak{Q}$ を最小エントロピーマルチンゲール測度（**MEMM**）と呼ぶ。

$$I(Q_0, P) = \min_{Q \in \mathfrak{Q}} I(Q, P).$$

相対エントロピーは，一種の距離の概念を与えている[1]。その意味で MEMM

1)　ただし，距離の定義

1. $I(Q, P) \geq 0\,;\, I(Q, P) = 0 \iff Q = P$.
2. $I(Q, P) = I(P, Q)$.
3. $I(Q, P) + (P, R) \geq I(Q, R)$.

はそのまま満たされるわけではない。定義の 1 と 3 は自明だが 2 は必ずしもいえない。相対エントロピーに距離の概念を持たせるには $d(Q, P) = I(Q, P) + I(P, Q)$ となる $d(Q, P)$ を定義し，この $d(Q, P)$ を通して距離の概念を与えるものとみなす。実際，この $d(Q, P)$ のもとでは距離の定義の 1 ～ 3 は満たされる。

は元の測度 $P$ と“もっとも近い”と言われる。この“近さ”故に MEMM は測度としてよいとされる（Ihara [1993]）。

$\mathfrak{L}:=\cap_{Q\in\mathfrak{Q}^0}\mathfrak{L}^1(Q)$ として，$\mathfrak{K}:=G(\Theta)\cap\mathfrak{L}$ とする。MEMM は，次の定理で示されるように $f\in\mathfrak{K}$ によって表現できる。

**定理 5.1 (Frittelli [2000] Theorem 2.5)** $I(\mathfrak{Q}_e, P)<\infty$ とする。$Q_0\in\mathfrak{Q}$ が MEMM となるのは，$c$ を正定数として，

$$\frac{dQ_0}{dP}=c\exp(-f_0),\ f_0\in\mathfrak{K},\ \mathsf{E}^{Q_0}[f_0]=0 \tag{5.1}$$

を満たすときであり，また，そのときに限る。

証明　十分性のみ証明する[2]。(5.1) が成立しているとする。このとき，$Q_0\sim P$, $I(Q_0, P)<\infty$ となることは容易に確認できる。任意の $Q_1\in\mathfrak{Q}^0$ に対して，

$$\begin{aligned}I(Q_1, P)&\geq I(Q_1, P)-I(Q_1, Q_0)\\&=\mathsf{E}^{Q_1}\left[\ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)\right]\\&=I(Q_0, P)+\mathsf{E}\left[\left(\frac{dQ_1}{dP}-\frac{dQ_0}{dP}\right)\ln\left(\frac{dQ_0}{dP}\right)\right]\\&=I(Q_0, P).\end{aligned} \tag{5.2}$$

最後の等式の導出には，$\mathsf{E}^{Q_0}[f_0]=\mathsf{E}^{Q_1}[f_0]=0$ を用いた。 □

次に，MEMM の経済学的意味について考察する。v-MM，MMM については，ヘッジという観点から，その経済学的意味について議論した。MEMM は，指数ヘッジと整合的であるとされるが，指数ヘッジは，ヘッジ対象資産とヘッジポートフォリオの価値の乖離幅を何らかの基準によって最小化するのではないので[3]，実務的には，ヘッジの一概念として扱うのは，難があるよう

2) 必要性については，Frittelli [2000] の Theorem 2.5 を参照。

3) Delbaen et al. [2002] 参照。

に思われる。そこで，ここでは，効用最大化の観点から，MEMM の経済学的意味について論じる。

ある投資家の初期賦存量を $x\in \mathsf{R}$，自己充足取引戦略を $\theta$ とする。当該投資家には時間 $[0, T]$ では，収入がなく，かつ，時間 $[0, T)$ で消費を行わないとする。この場合の当該投資家の時点 $T$ における富は，

$$\mathfrak{W}(x, \theta)=x+\int_0^T \theta_t dX_t$$

となる。いま，投資家の $\mathfrak{W}(x, \theta)$ に対する効用が，指数型効用関数

$$u(x)=-\frac{1}{a}e^{-ax}, \qquad a>0 \tag{5.3}$$

によって与えられるとし，期待効用 $\mathsf{E}[u(\mathfrak{W}(x, \theta))]$ を最大化するように取引戦略 $\theta$ を決定しているとする。このとき，MEMM $Q_0$ は，次の定理によって特徴付けられる。

**定理 5.2** $\mathfrak{H}$ を有界な可予測過程の空間とし，

$$\theta^*:=\arg\sup_{\theta\in\mathfrak{H}} \mathsf{E}[u(\mathfrak{W}(x, \theta))]$$

とする。このとき，

$$\frac{dQ_0}{dP}=\frac{u'(\mathfrak{W}(x, \theta^*))}{\mathsf{E}[u'(\mathfrak{W}(x, \theta^*))]}. \tag{5.4}$$

**証明** 定理 5.1 より，

$$\frac{dQ_0}{dP}=c\exp(-f_0),$$

$$f_0=-\int_0^T \theta_t dX_s\in\mathfrak{K}$$

であるから，

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \theta_t dX_t \exp\left(-\int_0^T \theta_t dX_t\right)\right]=0.$$

一方，期待効用最大化のF. O. C. より，

$$\mathsf{E}\left[\int_0^T \theta_t^* dX_t u'(\mathfrak{W}(x,\ \theta^*)\right] = \mathsf{E}\left[\int_0^T \theta_t^* dX_t \exp\left(-\int_0^T \theta_t^* dX_t\right)\right]$$

であるから，定理5.1より(5.4)を得る。 □

最後に，MMM と MEMM が一致する場合について言及する。

**定理 5.3 (Schweizer [1995a] Theorem 5)** マルチンゲール密度過程 $\hat{Z}$ が狭義に正で，$\mathsf{E}[\hat{Z}_T]=1$ とする。このとき，MMM $\hat{P}$ は次の最小化問題の解となる。

$$\min\left\{I(Q,\ P)-\frac{1}{2}\mathsf{E}^Q[\hat{K}_T]\ ;\ Q\in\mathfrak{M}_{\mathrm{loc}},\ \mathsf{E}^Q[\hat{K}_T]<\infty\right\}.$$

証明

$$\hat{Z}:=\frac{d\hat{P}}{dP}=\mathfrak{E}\left(-\int\hat{\lambda}dM\right)$$

とする。

$$\begin{aligned} I(Q,\ \hat{P}) &= \mathsf{E}^{\hat{P}}\left[\frac{dQ}{dP}\frac{dP}{d\hat{P}}\ln\left(\frac{dQ}{dP}\frac{dP}{d\hat{P}}\right)\right] \\ &= \mathsf{E}\left[\frac{dQ}{dP}\left(\ln\left(\frac{dQ}{dP}\right)-\ln\hat{Z}\right)\right] \\ &= I(Q,\ P)-\mathsf{E}^Q[\ln\hat{Z}]. \end{aligned}$$

一方，

$$\ln\hat{Z}=-\int_0^T\hat{\lambda}_t dM_t-\frac{1}{2}\hat{K}_T=-\int_0^T\hat{\lambda}_t dX_t+\frac{1}{2}\hat{K}_T$$

であるから，

$$I(Q,\ P)-\frac{1}{2}\mathsf{E}^Q[\hat{K}_T]=I(Q.\ \hat{P})\geq 0.$$

ここで，等号が成立するのは，$Q=\hat{P}$ のとき，またそのときに限る。 □

定理5.3は，MMM の最小性のもう一つの意味付けを与えると共に $\hat{K}_T$ が確定的であれば，MMM と MEMM が一致することを示している。さらに，定理4.3より，$\hat{K}_T$ が確定的であれば，MEMM は，v-MM とも一致する。

**例 5.1 (Frittelli [2000])**　$t=0, 1$ でのみ取引の行われる1期間モデルを考える。

$$X_0=1,\quad X_1=\begin{cases} a_1 & \text{w.p.} & p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & \text{w.p.} & p_n, \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i=1,\ p_i>0,\ i=1,\ldots,n$ とする。いまの場合，MEMM $Q_0=\boldsymbol{q}:=(q_{01}, \ldots, q_{0n})^\top$ は，

$$\begin{aligned} \min_{q\in\mathsf{R}^n,\ q\geq 0}\ & \sum_{i=1}^{n} q_i \ln\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{q}^\top\mathbf{1}=1, \\ & \boldsymbol{q}^\top\boldsymbol{a}=1, \\ & \boldsymbol{a}:=(a_1,\ldots,a_n)^\top, \\ & \mathbf{1}:=(1,\ldots,1)^\top \end{aligned}$$

で与えられる。すなわち，$\ell\in\mathsf{R}$ を

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i-1)e^{\ell a_i}=0$$

を満たす値として

$$q_{0i}=\frac{p_i e^{\ell a_i}}{\mathsf{E}[e^{\ell a_i}]}$$

となる。

ここで，$X_1$ の平均と分散を各々 $1+\mu$ と $\sigma^2$ とすると，MMM $\hat{P}$ と v-MM $\tilde{P}$ は，ともに一致し，

$$\frac{d\tilde{P}}{dP}=\frac{d\hat{P}}{dP}=\mathbf{1}+\frac{\mu}{\sigma^2}((1+\mu)\mathbf{1}-\boldsymbol{a})$$

となる。

さらに，$n=3,\ a_1=1+x+k,\ a_2=1+x,\ a_3=1+x-k,\ x,\ k\in\mathsf{R},\ k>0,\ p_2^2=4p_1p_3$ とする。このとき，無裁定を仮定すると，$|x|<k$ であり，MEMM は，

$$q_{01}=\frac{(k-x)^2}{4k^2},\ q_{02}=\frac{k^2-x^2}{4k^2},\ q_{03}=\frac{(k+x)^2}{4k^2} \tag{5.5}$$

となる。一方，v-MM は，

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}\tilde{q}_1\\ \tilde{q}_2\\ \tilde{q}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{p_3}}{k}(\sqrt{p_3}k-x)\\ 1-\tilde{q}_1-\tilde{q}_3\\ \frac{\sqrt{p_2}}{k}((1-\sqrt{p_3})k+x)\end{pmatrix} \tag{5.6}$$

となる。

(5.5)，(5.6) より，常に MEMM は，$P$ と同値であるのに対して，$\sqrt{p_3}\leq\frac{x}{k}\leq\sqrt{p_3}-1$ とすると v-MM，MMM は，$P$ とは，同値にならない。また，

$$q_{01}\geq\tilde{q}_1,\ q_{02}\leq\tilde{q}_1,\ q_{03}\geq\tilde{q}_3$$

であり，等号が成立するのは，$\frac{x}{k}=2\sqrt{p_3}-1$ のときである。 □

実際に MEMM を求めることは困難な場合が多い。また，MEMM は一般的に存在することが示されているわけではない。どのようなモデルにおいて MEMM が存在するか，そして存在するとしても具体的にどのように導出されるか。これらの問題に対する十分な解答はまだ得られておらず，様々な議論がなされているのが現状である（Miyahara [1996]，[1999a]，[1999b]，[2000]）。

## 参考文献

Coleman, T. F., Li, Y. and Patron, M. C. [2003] "Discrete hedging under piecewise linear risk minimization," *Journal of risk*, 5.

Dalang, R. C., Morton, A. and Willinger, W. [1990] "Equivalent martingale measures and no arbitrage in stochastic securities market models," *Stochastics and stochastics reports*, 29, pp. 185-201.

Delbaen, F., Grandits, P., Rheinländer, T., Samperi, D., Schweizer, M., and Stricker, C. [2002] "Exponential hedging and entropic penalties," *Mathematical finance*, 12, pp. 99-123.

Delbaen, F. and Schachermayer, W. [1994] "A general version of the fundamental theorem of asset pricing," *Mathematische annalen*, 300, pp. 463-520.

——— [1996] "The variance optimal martingale measure for continuous processes," *Bernoulli*, 9, pp. 81-105.

Dellacherie, C. and Meyer, P.-A. [1982] *Probabilities and potential B*, North-Holland.

Föllmer, H. and Schweizer, M. [1991] "Hedging of contingent claims under incomplete information," in *Applied stochastic analysis, stochastics monographs*, 5, London, Gordon and Breach.

Frittelli, M. [2000] "The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets," *Mathematical finance*, 10, pp. 39-52.

Gourieroux, C., Laurent, J. P. and Pham, H. [1998] "Mean-variance hedging and numeraire," *Mathematical finance*, 8, pp. 179-200.

Harrison, J. M, and Pliska, S. R. [1981] "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading," *Stochastic processes and their applications*, 11, pp. 215-260.

Ihara, S. [1993] *Information theory for continuous system*, World Scientific.

Jacod, J. [1979] *Calcul stochastique et problémes de martingales*, Springer.

Laurent, J. P. and Pham, H. [1999] "Dynamic programing and mean-variance hedging," *Finance and stochastics*, 3, pp. 83-110.

Miyahara, Y. [1996] "Canonical martingale measures of incomplete asset market," *Probability thoery and mathematical statistics : proceedings of the seventh Japan-Russia symposium*, Tokyo World Scientific, pp. 343-352.

——— [1999a] "Minimal entropy martingale measures of jump type price processes in incomplete assets markets," *Asia-Pacific financial markets*, 6, pp. 97-113.

——— [1999b] "Minimal relative entropy martingale measures and their applications to option pricing theory," *Proceedings of JIC99, The 5th JAFEE international conference*, pp. 316-323.

——— [2000] "Minimal relative entropy martingale measure of Birth and Death process," *Discussion papers in economics, Nagoya City University*, 273, pp. 1-20.

Pham, H. and Rheinländer, T. and Schweizer, M. [1998] "Mean-variance hedging for continuous processes:new proofs and examples," *Finance and stochastics*, 2, pp. 173-198.

Rheinländer, T. and Schweizer, M. [1997] "On $L^2$-projections on a space of stochastic integrals," *The annals of probability*, 25, pp. 1810-1831.

Schweizer, M. [1991] "Option hedging for semimartingales," *Stochastic processes and their applications*, 37, pp. 339-363.

——— [1992] "Martingale densities for general asset prices," *Journal of mathematical economics*, 21, pp. 363-378.

——— [1994] "Approximation random variables by stochasitc integrals," *The annals of probability*, 22, pp. 1536-1575.

——— [1995a] "On the minimal martingale measure and the Follmer-Schweizer decomposition," *Stochastic analysis and applications*, 13, pp. 573-599.

——— [1995b] "Variance-optimal hedging in discrete time," *Mathemathics of operations research*, 20, pp. 1-32.

——— [1996] "Approximation pricing and the variance-optimal martingale measure," *The annals of probability*, 24, pp. 206-236.