数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 168-174



# 平方根を持つ作用素環

千葉大学自然科学研究科 山本宗宏 (Munehiro Yamamoto)

## 0 序論

複素数係数の代数方程式が根を持つことは, 代数学の基本定理としてよく知られている. Gelfand の定理より, 可換 $C^*$ 環はコンパクト Hausdorff 空間上の連続関数全体がなす環と見ることができるので, 可換 $C^*$ 環の元を係数とする代数方程式の解がその可換 $C^*$ 環の中に存在するか, という問題は代数方程式の係数の連続性と解の連続性という問題の言い換えになる. この問題は数多く研究されており, 良い空間 $X$ 上の可換 $C^*$ 環 $C(X)$ に対して, 代数方程式の解の存在が被覆次元や cohomology 群によって特徴付けできる結果が知られている ([10], [11], [18], [19]).

非可換 $C^*$ 環において同様な問題を考察する. しかし $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_2$ は平方根を持たないので, この問題設定はすぐに行き詰まる. 可換 $C^*$ 環の問題設定の自然な拡張として, 正規元に対する平方根を考える. ここでは, 一般的な代数方程式ではなく平方根を求める (2 次方程式) 話に限定するが, 本質的には一般の代数方程式と大きな違いはなく, また $n$ 乗根の話も平方根の話と大差はない.

**Definition 0.1.** $C^*$ 環 $A$ が平方根を持つ (square root closed) とは, 任意の $A$ の正規元 $a$ に対して, $a=b^2$ となるような $A$ の正規元 $b$ が存在するときをいう. $C^*$ 環 $A$ が近似的な平方根を持つ (approximately square root closed) とは, 任意の $\varepsilon>0$, $A$ の正規元 $a$ に対して, $\|a-b^2\|<\varepsilon$ となるような $A$ の正規元 $b$ が存在するときをいう.

この報告集では次の結果を紹介する.

(1) AI 環は近似的な平方根を持つ.
(2) $A$ を単位的な $C^*$ 環とするとき, $A\otimes M_{2^\infty}$ は近似的な平方根を持つ.
(3) $\mathbb{T}$ 上の Goodearl 型 $C^*$ 環 $A$ については, $A$ が近似的な平方根を持つことと, $K_1(A)$ が 2 で割れることが同値.

## 1 AI 環

$n\times n$ 行列環 $M_n$ は, 正規行列をスペクトル分解することによって, 平方根を持つことがわかる. 同様にして, 有限次元 $C^*$ 環は, ある行列環の有限直和 $\bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}$ に同型なので, 平方根を持つことが分かる.

$C^*$ 環の帰納的系列とは, $\{A_n\}$ を $C^*$ 環の列, $\varphi_n\colon A_n \to A_{n+1}$ を $*$-準同型との組である. $(A, \{\mu_n\})$ が帰納的系列 $(A_n, \varphi_n)$ の帰納的極限であるとは, $A$ が $C^*$ 環, $\mu_n\colon A_n \to A$ が $*$-準同型で次の条件をみたすときをいい, $A = \varinjlim(A_n, \mu_n)$ で表す.

(i) 各 $n$ に対して $\mu_n = \mu_{n+1} \circ \varphi_n$.

(ii) もし $C^*$ 環 $B$, $*$-準同型 $\lambda_n\colon A_n \to B$ が $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ をみたしているならば, ある $*$-準同型 $\lambda\colon A \to B$ が存在して各 $n$ に対して $\lambda_n = \lambda \circ \mu_n$ をみたす.

$C^*$ 環が **AF** 環であるとは, 有限次元 $C^*$ 環の列の帰納的極限であるときをいう.

AF 環の正規元が有限次元部分環の正規元で近似できることは, 見た目より厄介な事実である. 直感的には, AF 環は近似的な平方根を持つと考えられる. では, AF 環は平方根を持つかというと, が平方根を持たない例が存在する. 極大な可換部分環が $C(\mathbb{T})$ に同型な場合に平方根を持たないことがわかる.

$C^*$ 環 $A$ が性質 **(FN)** を持つとは, 任意の $\varepsilon > 0$, $A$ の正規元 $a$ に対しても, 有限個のスペクトルを持つ $A$ の正規元 $b$ が存在して $\|a - b\| < \varepsilon$ となることである.

$C^*$ 環 $A$ が性質 (FN) を持つならば, 有限なスペクトルを持つ正規元を正規行列のように有限スペクトル分解ができるので, $A$ が近似的な平方根を持つことが分かる. ところが, $C([0,1])$ は平方根を持つので近似的な平方根を持つが, 性質 (FN) を持たない. したがって近似的な平方根を持つという性質は性質 (FN) よりも弱い条件であることがわかる.

H. Lin は, ほとんど可換な自己共役行列の対は可換な自己共役行列の対に近いという問題を解決し ([13]), その応用として AF 環が性質 (FN) をもつことを示した ([14]). このことから AF 環が近似的な平方根を持つことがしたがう.

以下, この節を通して $I$ を閉区間 $[0,1]$ とする. $I$ 上の $n \times n$ 行列値連続関数環 $C(I; M_n)$ は平方根を持たない.

**Example 1.1.** $C(I, M_2)$ は平方根を持たない. 実際に,

$$f(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{6\pi i t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (0 \le t \le 1/3, 2/3 \le t \le 1) \\ \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} e^{6\pi i t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & (1/3 \le t \le 2/3) \end{cases}$$

が平方根を持たない.

補題 1.2, 命題 1.3, 系 1.4 のステップを経て, $C(I, M_n)$ が近似的な平方根を持つことを示す. $C(I, M_n)$ が近似的な平方根を持つことの証明の基本的なアイデアは, 上の $f$ に対して, 以下のように $f$ の近似的な平方根を構成するのと同じである.

$0 < \theta < 1$ とし, $u$ を

$$u(t) = I_2 \quad (t \in [0, \theta/3])$$
$$u(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u(t) \quad (t \in [1/3, 1])$$

をみたす $C(I,M_2)$ のユニタリとする. このとき, $C(I,M_2)$ の正規元 $h$ を次のように定義する:

$$h(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+e^{3\pi it/\theta}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & t\in[0,\theta/3]\\ u(t)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}u(t)^* & t\in[\theta/3,1/3]\\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}e^{3\pi it}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} & t\in(1/3,2/3)\\ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+e^{3\pi it}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} & t\in[2/3,1]\end{cases}.$$

もし $1-\theta$ が十分小さければ, $\|f-h^2\|$ も十分に小さい.

$f$ を $C(I,M_n)$ の正規元とすると, 各点 $t\in I$ で, $f(t)$ はスペクトル分解できる, つまり, $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)$ を $f(t)$ の固有値, $P_i(t)$ を $\lambda_i(t)$ に対応する 1 次元固有射影としたときに, $f(t)=\lambda_1(t)P_1(t)+\cdots+\lambda_n(t)P_n(t)$ の形に書ける. Rouché の定理より, 各 $\lambda_i$ は $I$ 上で連続にとれるが, $P_i$ は必ずしも連続ではない. この不連続な射影を十分近くで連続な射影にとりかえる操作を以下で行う.

初めに, 連続な固有値関数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ が $I$ 上でいくつかの束に分けられている場合を考える. このとき, 次の補題が証明できる.

**Lemma 1.2.** $\varepsilon>0$ とし, $f=\sum_{i=1}^n\lambda_iP_i$ を $C(I,M_n)$ の正規元, $C_j$ を $I\times\mathbb{C}$ の互いに交わらない連続なチューブで, 各点 $t\in I$ で $C_j(t)$ が直径 $\varepsilon$ 以下の $\mathbb{C}$ の単閉曲線, $D_j^\circ(t)$ を閉曲線 $C_j(t)$ の閉領域の内部とする. もし $f(t)$ のスペクトルが $\bigcup_j D_j^\circ(t)$ に含まれるならば, $Q_1,\ldots,Q_n\in C(I,M_n)$ が存在して $\|f-\sum_{i=1}^n\lambda_iQ_i\|<2\varepsilon$ をみたす.

一般の場合, $I$ の開被覆で各近傍の閉包 (閉区間) を直前の補題の設定になるようにとることによって, 次の命題が成り立つ.

**Proposition 1.3.** $\varepsilon>0$ とし, $f=\sum_{i=1}^n\lambda_iP_i$ を $C(I,M_n)$ の正規元とする. このとき, $Q_1,\ldots,Q_n\in C(I,M_n)$ が存在して $\|f-\sum_{i=1}^n\lambda_iQ_i\|<\varepsilon$ をみたす.

**Corollary 1.4.** $C(I,M_n)$ は近似的な平方根を持つ.

$C^*$ 環が **AI** 環であるとは, 閉区間 $I$ 上の有限次元 $C^*$ 環値連続関数環の列の帰納的極限であるときをいう.

AI 環 $A=\varinjlim A_n$ ($A_n$ は閉区間 $I$ 上の有限次元 $C^*$ 環値連続関数環) の任意の正規元の十分近くにある $A_n$ の正規元が存在することをいうために, 以下の Loring の結果を用いた.

単位的な $C^*$ 環 $A$ が安定階数 1 であるとは, 任意の $\varepsilon>0$, $a\in A$ に対して, $\|a-b\|<\varepsilon$ となるような $b\in GL(A)$ が存在することである. ただし, $GL(A)$ は $A$ の可逆元の集合.

先ほどあげた H. Lin の結果 ([13]) の証明のテクニックを, Friis-Rordam([7]) や T. A.

Loring([16]) によって拡張されて, 次の結果が得られている.

**Theorem 1.5 (Loring, Theorem 19.2.7 [16]).** $\mathfrak{B}$ を安定階数 1 である単位的な $C^*$ 環の集合とする. $\mathfrak{B}$ の元の列 $\{B_n\}$ に対して, $\prod_{n=1}^{\infty} B_n = \{(b_1, b_2, \ldots) : \sup_i \|b_i\| < +\infty\}$, $\bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n = \{(b_1, b_2, \ldots) : \lim_{i\to\infty} \|b_i\| = 0\}$ とおく. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ とするとき, $C(\mathbb{D})$ は $\mathfrak{B}$ に関して弱半射影的である, つまり, 任意の $*$-準同型 $\varphi\colon C(\mathbb{D}) \to \prod_{n=1}^{\infty} B_n / \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$ に対して, $*$-準同型 $\widetilde{\varphi}\colon C(\mathbb{D}) \to \prod_{n=m}^{\infty} B_n$ が存在して, $\rho_m \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$ となる. ただし, $\rho_m\colon \prod_{n=m}^{\infty} B_n \to \prod_{n=1}^{\infty} B_n / \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, $(b_m, b_{m+1}, \ldots) \mapsto (0, \ldots, 0, b_m, b_{m+1}, \ldots) + \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$.

定理 1.5 と系 1.4 をあわせて, 次を得る.

**Theorem 1.6.** AI 環は近似的な平方根を持つ.

**Remark 1.7.** AF 環は AI 環のクラスに入っている.

## 2 $K_1$ 群による平方根の特徴付け

$C(\mathbb{T}) \otimes M_2$ は平方根を持たない. $C(\mathbb{T})$ は平方根を持たないが, $f \in C(\mathbb{T})$ を $C(\mathbb{T}) \otimes M_2$ に標準的に埋め込むと, 埋め込んだところで $f \otimes 1_2$ が平方根を持つようにできる. $f \in C(\mathbb{T})$ に対して,

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

であるが, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in C(\mathbb{T}, M_2)$ は正規元でないので, 少し工夫が必要である. そこで極分解を用いて,

$$f = e^{i \arg f} |f| = e^{i \arg f} |f|^{\frac{1}{2}} |f|^{\frac{1}{2}}$$

とできるので,

$$y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{f}{|f|^{\frac{1}{2}}} \\ |f|^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \in C(\mathbb{T}, M_2)$$

とおくと, $y$ は正規元で, $y^2 = f \otimes 1_2$ である.

一般には次が成り立つ.

**Lemma 2.1.** $x$ を $C^*$ 環 $A$ の正規元とする. このとき, ある $A \otimes M_n$ の正規元 $y$ が存在して, $x \otimes 1_n = y^n$.

$A$ を単位的な $C^*$ 環, 準同型写像 $\varphi\colon A \otimes M_{2^n} \to A \otimes M_{2^{n+1}}$ を $\varphi(a) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$ とすると, $C^*$ 環 $A \otimes M_{2^\infty}$ は, $A \otimes M_2 \xrightarrow{\varphi_1} A \otimes M_4 \xrightarrow{\varphi_2} A \otimes M_8 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \to A \otimes M_{2^\infty}$ の帰納的極限である.

Lemma 2.1 から, すぐに次がしたがう.

**Theorem 2.2.** $A$ を単位的な $C^*$ 環とする. このとき, $A \otimes M_{2^\infty}$ は近似的な平方根を持つ.

$A$ を $C^*$ 環とする. $U_n(A)$ を $M_n(A)$ のユニタリ群とし, $U_n^0(A)$ を $M_n(A)$ の単位元の連結成分とすると, $U_n^0(A)$ は $U_n(A)$ の開かつ閉な正規部分群となる. 自然な埋め込み $U_n(A) \ni A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right) \in U_{n+1}(A)$ が, $U_n(A)/U_n^0(A)$ から $U_{n+1}(A)/U_{n+1}^0(A)$ への準同型を導く. このとき, 帰納的極限 $\varinjlim U_n(A)/U_n^0(A)$ を $K_1(A)$ と表し, $A$ の $K_1$ 群という.

$A$ を $C^*$ 環とする. $K_1(A)$ が 2 で割れるとは, 任意の $x \in K_1(A)$ に対し, $x = 2y$ となるような $y \in K_1(A)$ が存在するときをいう.

単位的な $C^*$ 環 $A$ が安定階数 1 のとき, $M_n(A)$ も安定階数 1 で, この場合, $U(A) \to K_1(A)$ が全射となることが知られている. [20] を参照.

次の命題がしたがう.

**Proposition 2.3.** $A$ を安定階数 1 の $C^*$ 環とする.

(1) $A$ が近似的な平方根を持つならば, $K_1(A)$ は 2 で割れる.

(2) $A$ が可換で $K_1(A)$ が 2 で割れるならば, $A$ は近似的な平方根を持つ.

命題 2.3 は, 安定階数 1 である可換 $C^*$ 環 $C(X)$ ならば, $C(X)$ が近似的な平方根を持つことと, $K_1(C(X))$ が 2 で割れることが同値であると言っている. ($n$ 乗根を考えても全く同様の議論である.) 単位的な可換 $C^*$ 環 $A \cong C(X)$ について, $A$ が安定階数 1 であることと, $X$ の被覆次元が 1 以下であることが同値であることが知られている. また空間 $X$ の次元が低い場合, cohomology 群はだいたい基本群 $\pi_1(X)$ なので, 非可換環の $K_1$ 群と可換環の first Čech cohomology $\check{H}^1$ 群が対応していると思える. [3] では first Čech cohomology $\check{H}^1$ 群を用いて上記と同様な $C(X)$ の近似的な $n$ 乗根の特徴付けが得られている.

**Definition 2.4.** $X$ をコンパクト Hausdorff 空間, $\{x_n\}$ を $X$ の可算部分集合, $\{k_n\}$ を正整数の単調増加数列で, 各 $n$ で $k_n$ が $k_{n+1}$ を割るとする. *-準同型写像 $\varphi_n\colon C(X, M_{k_n}) \to C(X, M_{k_{n+1}})$ を

$$\varphi_n(f)(x) = \mathrm{diag}(\underbrace{f(x), \ldots, f(x)}_{s(n)}, f(x_n), \ldots, f(x_n)) \quad (f \in C(X, M_{k_n}), x \in X)$$

とする. このとき, 帰納的系列 $(C(X, M_{k_n}), \varphi_n)$ の帰納的極限として得られる $C^*$ 環 $A$ を, $X$ 上の **Goodearl 型** $C^*$ 環とよぶ.

上の定義で $\{x_n\}$ が $X$ で稠密のとき, $A$ は単純になり, Goodearl 環 [8] とよばれている.

$\mathbb{T}$ 上の Goodearl 型 $C^*$ 環 $\varinjlim(C(\mathbb{T}, M_{k_n}), \varphi_n)$ の場合は, AI 環と同様に弱半射影的である性質を持つが, 下の空間が $\mathbb{T}$ なので十分先の*-準同型写像 $\varphi_n$ が平方根を持つような埋め込みでなければ, $A$ が平方根を持たないことが観察できる. また, 各 $K_1(C(\mathbb{T}, M_{k_n}))$ は $\mathbb{Z}$ と同型なので, $K_1(A) = \varinjlim K_1(C(\mathbb{T}, M_{k_n}))$ が 2 で割れる性質も, 十分先の*-準同型写像 $\varphi_n$ の影響を受けることが推察できる.

$\mathbb{T}$ 上の Goodearl 型 $C^*$ 環については, 次の結果が得られた.

**Theorem 2.5.** $A$ を $\mathbb{T}$ 上の Goodearl 型 $C^*$ 環とする. このとき, 次は同値.

(1) $A$ が近似的な平方根を持つ.
(2) 任意の自然数 $n$ に対して, $s(m)$ が偶数となるような自然数 $m \geq n$ が存在する.
(3) $K_1(A)$ は 2 で割れる.

## 参考文献


[1] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications Vol. 5, 2nd ed., Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1998.

[2] ———, *Symmetries of the CAR agebra*, Ann. Math. **131** (1990), 589-623.

[3] A. Chigogidze, A. Karasev, K. Kawamura, and V. Valov, *On commutative and non-commutative $C^*$-algebras with the approximate n-th root property*, preprint.

[4] K. R. Davidson, *$C^*$-algebras by example*, Fields Institute Monographs Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[5] D. Deckard and C. Pearcy, *On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a stonian spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), 322-328.

[6] ———, *On algebraic closure in function algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 259-263.

[7] P. Friis and M. Rørdam, *Almost commuting self-adjoint matrices – a short proof of Huaxin Lin's theorem*, J. Reine Angew. Math. **479** (1996), 121-131.

[8] K. R. Goodearl, *Notes on a class of simple $C^*$-algebras with real rank zero*, Publ. Mat. **36** (1992), 637–654.

[9] D. Hadwin and T. A. Loring, *Normal operators in $C^*$-algebras without nice approximants*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 159-161.

[10] O. Hatori and T. Miura, *On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative $C^*$-algebras in which every element is the square of another*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1185-1189.

[11] K. Kawamura, and T. Miura, *On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations*, preprint.

[12] A. Kumjian, *An involutive automorphism of the Bunce-Deddens algebra*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **10** (1988), 217-218.

[13] H. Lin, *Almost commuting self-adjoint matrices and applications*, Fields Inst. Commun. **13** (1997), 193-233.

[14] ———, *Approximation by normal elements with finete spectra in $C^*$-algebras of real rank zero*, Pac. J. Math. **173** (1996), 443-489.

[15] T. A. Loring, *Normal elements of $C^*$-algebras of real rank zero without finete-spectrum approximants*, J. London Math. Soc. **51** (1995), 353-364.

[16] T. A. Loring, *Lifting Solutions to Purturbing Problems in $C^*$-algebas*, Fields Institute Monographs Vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[17] ______, *When matrices commute*, Math. Scand. **82** (1998), 305-319.

[18] T. Miura, *On commutative $C^*$-algebras in which every element is almost the square of another*, Contemp. Math. **232** (1999), 239-242.

[19] T. Miura and K. Nijima, *On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative $C^*$-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002), 2869-2876.

[20] M. Rieffel, *Dimension and stable rank in the $K$-theory of $C^*$-algebras*, Proc. London Math. Soc. **46** (1983), 301-333.