数理解析研究所講究録 1452 巻 2005 年 215-226

Tsallis の relative entropy と relative operator entropy

柳 研二郎 (Kenjiro Yanagi)
山口大・工
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)
古市 茂 (Shigeru Furuichi)
山口東京理科大
(Tokyo University of Science in Yamaguchi)
栗山 憲 (Ken Kuriyama)
山口大・工
(Department of Applied Science, Yamaguchi University)

1 Classical Tsallis relative entropy

Definition 1 次で定義される $S_q(X)$ を *Tsallis entropy* という.

$$S_q(X) = -\sum_x p(x)^q \ln_q p(x),$$

ただし $p(x) = P(X = x)$ は *random variable* X の *probability distribution* でありまた

$$\ln_q(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}, \quad x \geq 0,\ q \geq 0$$

とする.

このとき

$$\lim_{q \to 1} S_q(X) = S(X) = -\sum_x p(x) \log p(x)$$

である. すなわち Shannon entropy に収束する.

Definition 2 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ を 2 つの *probability distribution* とする. ただし $a_j > 0, b_j > 0$ を仮定する. このとき次で定義される $D_q(A|B)$ を *Tsallis relative entropy* という.

$$D_q(A|B) = -\sum_{j=1}^n a_j \ln_q \frac{b_j}{a_j} = \frac{1 - \sum_{j=1}^n a_j^q b_j^{1-q}}{1-q},$$

ただし $0 \ln_q \infty = 0$ と定義する.

このとき

$$\lim_{q \to 1} D_q(A|B) = D_1(A|B) = \sum_{j=1}^n a_j \log \frac{a_j}{b_j}$$

である. すなわち Kullback-Leibler information に収束する.

Proposition 1 *Tsallis relative entropy* の性質は次の通りである.

(1)(Nonnegativity): $D_q(A|B) \geq 0$.

(2)(Symmetry):

$$D_q(a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(n)}|b_{\pi(1)},\ldots,b_{\pi(n)}) = D_q(a_1,\ldots,a_n|b_1,\ldots,b_n).$$

(3)(Possibility of extension):

$$D_q(a_1,\ldots,a_n,0|b_1,\ldots,b_n,0) = D_q(a_1,\ldots,a_n|b_1,\ldots,b_n).$$

(4)(Pseudoadditivity):

$$\begin{aligned} & D_q(A^{(1)} \times A^{(2)}|B^{(1)} \times B^{(2)}) \\ = \; & D_q(A^{(1)}|B^{(1)}) + D_q(A^{(2)}|B^{(2)}) + (q-1)D_q(A^{(1)}|B^{(1)})D_q(A^{(2)}|B^{(2)}), \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A^{(1)} \times A^{(2)} &= \{a_j^{(1)}a_j^{(2)}|a_j^{(1)} \in A^{(1)}, a_j^{(2)} \in A^{(2)}\}, \\ B^{(1)} \times B^{(2)} &= \{b_j^{(1)}b_j^{(2)}|b_j^{(1)} \in B^{(1)}, b_j^{(2)} \in B^{(2)}\}. \end{aligned}$$

(5)(Joint convexity): $0 \leq \lambda \leq 1$, $q \geq 0$ とする．$A^{(i)} = \{a_j^{(i)}\}$, $B^{(i)} = \{b_j^{(i)}\}$, $(i=1,2)$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & D_q(\lambda A^{(1)} + (1-\lambda)A^{(2)}|\lambda B^{(1)} + (1-\lambda)B^{(2)}) \\ \leq \; & \lambda D_q(A^{(1)}|B^{(1)}) + (1-\lambda)D_q(A^{(2)}|B^{(2)}). \end{aligned}$$

(6)(Strong additivity):

$$\begin{aligned} & D_q(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i_1},a_{i_2},a_{i+1},\ldots,a_n|b_1,\ldots,b_{i-1},b_{i_1},b_{i_2},b_{i+1},\ldots,b_n) \\ = \; & D_q(a_1,\ldots,a_n|b_1,\ldots,b_n) + b_i^{1-q}a_i^q D_q(\frac{a_{i_1}}{a_i},\frac{a_{i_2}}{a_i}|\frac{b_{i_1}}{b_i},\frac{b_{i_2}}{b_i}), \end{aligned}$$

ただし $a_i = a_{i_1} + a_{i_2}, b_i = b_{i_1} + b_{i_2}$.

Proof.

(1): $-\ln_q(x)$ は convex function であるので次を得る．

$$D_q(A|B) \equiv -\sum_{j=1}^n a_j \ln_q \frac{b_j}{a_j} \geq -\ln_q(\sum_{j=1}^n a_j \frac{b_j}{a_j}) = 0.$$

(2), (3) 及び (4): 明らか．
(5): [3] の generalized log-sum inequality より任意の $\alpha_i, \beta_i \geq 0 (i=1,2,\ldots,n), q \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \ln_q(\frac{\beta_i}{\alpha_i}) \leq (\sum_{i=1}^n \alpha_i) \ln_q(\frac{\sum_{i=1}^n \beta_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}). \tag{1}$$

これを用いればよい．
(6): $q \geq 0$ に対して function L_q を次のように定義する．

$$L_q(x,y) \equiv -x \ln_q \frac{y}{x}.$$

また次の記号を導入する.

$$a_{i_1} = a_i(1-s),\ a_{i_2} = a_i s,\ b_{i_1} = b_i(1-t),\ b_{i_2} = b_i t.$$

このとき

$$L_q(x_1x_2, y_1y_2) = x_2 L_q(x_1, y_1) + x_1 L_q(x_2, y_2) + (q-1) L_q(x_1, y_1) L_q(x_2, y_2).$$

これを用いればよい. q.e.d.

Remark 1 次が成り立つ.

(1) *Proposition 1 の (1) より* $S_q(A) \le \ln_q n$.

(2) *Proposition 1 の (4) より*

$$S_q(A^{(1)} \times A^{(2)}) = S_q(A^{(1)}) + S_q(A^{(2)}) + (1-q) S_q(A^{(1)}) S_q(A^{(2)}).$$

(3) *Proposition 1 の (5) より*

$$S_q(\lambda A^{(1)} + (1-\lambda) A^{(2)}) \ge \lambda S_q(A^{(1)}) + (1-\lambda) S_q(A^{(2)}).$$

(4) *Proposition 1 の (6) より*

$$\begin{aligned} & S_q(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \\ = \ & S_q(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) + a_i^q S_q\left(\frac{a_{i_1}}{a_i}, \frac{a_{i_2}}{a_i}\right). \end{aligned}$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を 2 つの finite alphabet sets とする. $W = \{W_{ji}\}, (i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m)$ を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ への transition probability matrix とする. すなわち $\sum_{j=1}^m W_{ji} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$ である. また $A = \{a_i^{(in)}\}, B = \{b_i^{(in)}\}$ を $\mathcal{A}$ における 2 つの異なる probability distribution とする. このとき $\mathcal{B}$ における probability distribution $WA = \{a_j^{(out)}\}, WB = \{b_j^{(out)}\}$ は次のように定義される.

$$a_j^{(out)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(in)} W_{ji}, \quad b_j^{(out)} = \sum_{i=1}^n b_i^{(in)} W_{ji}.$$

Proposition 2 任意の $q \ge 0$ に対して次が成り立つ.

$$D_q(WA|WB) \le D_q(A|B).$$

Proof. generalized log-sum inequality (1) を適用して次を得る.

$$\begin{aligned} D_q(WA|WB) &= -\sum_{j=1}^m a_j^{(out)} \ln_q \frac{b_j^{(out)}}{a_j^{(out)}} \\ &= -\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_j^{(in)} W_{ji} \ln_q \frac{\sum_{i=1}^n b_i^{(in)} W_{ji}}{\sum_{i=1}^n a_i^{(in)} W_{ji}} \\ &\le -\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i^{(in)} W_{ji} \ln_q \frac{b_i^{(in)} W_{ji}}{a_i^{(in)} W_{ji}} \\ &= -\sum_{i=1}^n a_i^{(in)} \ln_q \frac{b_i^{(in)}}{a_i^{(in)}} \\ &= D_q(A|B). \end{aligned}$$

q.e.d.

2 Quantum Tsallis relative entropy

Definition 3 ρ, σ を2つの *density operators* とする. $0 \le q < 1$ に対して 次で定義される $D_q(\rho|\sigma)$ を *quantum Tsallis relative entropy* という.

$$D_q(\rho|\sigma) = \frac{1 - Tr[\rho^q \sigma^{1-q}]}{1-q}.$$

また Umegaki [14] によって quantum relative entropy が次のように定義されていることに注意する.

$$U(\rho|\sigma) = Tr[\rho(\log \rho - \log \sigma)].$$

$D_q(\rho|\sigma)$ を $0 \le q \le 2$ に拡張して定義すると都合がよい. 即ち $0 \le q < 1$ に対しては $D_{2-q}(\rho|\sigma)$, $1 < q \le 2$ に対しては $D_q(\rho|\sigma)$ が定義されるとする.

Proposition 3 次の (1), (2) が成り立つ.

(1) $D_q(\rho|\sigma) \le U(\rho|\sigma) \le D_{2-q}(\rho|\sigma)$ for $0 \le q < 1$.

(2) $D_{2-q}(\rho|\sigma) \le U(\rho|\sigma) \le D_q(\rho|\sigma)$ for $1 < q \le 2$.

Proof. 任意の $x > 0, t > 0$ に対して

$$\frac{1 - x^{-t}}{t} \le \log x \le \frac{x^t - 1}{t}$$

が成り立つので任意の $a, b, t > 0$ に対して次の不等式を得る.

$$a(\frac{1 - a^{-t}b^t}{t}) \le a \log \frac{a}{b} \le a(\frac{a^t b^{-t} - 1}{t}). \tag{2}$$

$\rho = \sum_i \lambda_i P_i$, $\sigma = \sum_i \mu_j Q_j$ をスペクトル分解とすると $\sum_i P_i = \sum_j Q_j = I$ だから次の不等式を得る.

$$\begin{aligned} & Tr[\frac{\rho^{1+t}\sigma^{-t} - \rho}{t} - \rho(\log \rho - \log \sigma)] \\ = & \sum_{i,j} Tr[P_i\{\frac{\rho^{1+t}\sigma^{-t} - \rho}{t} - \rho(\log \rho - \log \sigma)\}Q_j] \\ = & \sum_{i,j} (\frac{1}{t}\lambda_i^{1+t}\mu_j^{-t} - \frac{1}{t}\lambda_i - \lambda_i \log \lambda_i + \lambda_i \log \mu_j) Tr[P_i Q_j] \ge 0. \end{aligned}$$

最後の不等式は (2) の右側の不等式から得られる. したがって

$$Tr[\rho(\log \rho - \log \sigma)] \le \frac{1}{t} Tr[\rho^{1+t}\sigma^{-t} - \rho].$$

左側の不等式も同様にして得られる. したがって $1 - q = t(> 0)$ とおけば Proposition 5 の (1) を得る. また $q - 1 = t(> 0)$ とおけば Proposition 5 の (2) を得る. q.e.d.

ρ, σ: strictly positive operators に対して relative operator entropy $S(\rho|\sigma)$ が Fujii-Kamei [4] によって次のように定義された.

$$S(\rho|\sigma) = \rho^{1/2} \log(\rho^{-1/2}\sigma\rho^{-1/2})\rho^{1/2}.$$

ここで ρ,σ が commutative のとき

$$U(\rho|\sigma) = -Tr[S(\rho|\sigma)]$$

であることは明らかである．一方 Hiai-Petz [8] によって次の関係が成り立つことが示された．

$$U(\rho|\sigma) \leq -Tr[S(\rho|\sigma)].$$

また Yanagi-Furuichi-Kuriyama [15] によって $0 \leq q < 1$ に対して Tsallis relative operator entropy $T_q(\rho|\sigma)$ が次のように定義された．

$$T_q(\rho|\sigma) = \frac{\rho^{1/2}(\rho^{-1/2}\sigma\rho^{-1/2})^{1-q}\rho^{1/2} - \rho}{1-q}.$$

このとき次が成り立つ．

$$\lim_{q\to 1} T_q(\rho|\sigma) = S(\rho|\sigma).$$

また ρ,σ が commutative のとき次が成り立つことは明らかである．

$$D_q(\rho|\sigma) = -Tr[T_q(\rho|\sigma)].$$

さらに次が成り立つ．

$$\lim_{q\to 1} D_q(\rho|\sigma) = U(\rho|\sigma).$$

Theorem 1 ρ,σ を *strictly positive density operators* とする．このとき $0 \leq q < 1$ に対して次が成り立つ．

$$D_q(\rho|\sigma) \leq -Tr[T_q(\rho|\sigma)].$$

Proof. α-power mean $\natural_\alpha$ は次のように定義される．

$$A\natural_\alpha B \equiv A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}.$$

[8] の Theorem 3.4 より任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して

$$Tr[e^A\natural_\alpha e^B] \leq Tr[e^{(1-\alpha)A+\alpha B}].$$

$A = \log\rho$, $B = \log\sigma$ とおくと次を得る．

$$Tr[\rho\natural_\alpha\sigma] \leq Tr[e^{\log\rho^{1-\alpha}+\log\sigma^\alpha}].$$

ここで Golden-Thompson inequality より任意の Hermitian operators A, B に対して $Tr[e^{A+B}] \leq Tr[e^A e^B]$ が成り立つので次が得られる．

$$Tr[e^{\log\rho^{1-\alpha}+\log\sigma^\alpha}] \leq Tr[e^{\log\rho^{1-\alpha}}e^{\log\sigma^\alpha}] = Tr[\rho^{1-\alpha}\sigma^\alpha].$$

したがって

$$tr[\rho^{1/2}(\rho^{-1/2}\sigma\rho^{-1/2})^\alpha\rho^{1/2}] \leq Tr[\rho^{1-\alpha}\sigma^\alpha].$$

ここで $\alpha = 1-q$ とおけばよい． q.e.d.

Corollary 1 (Hiai-Petz [8]) ρ,σ を *strictly positive density operators* とするとき次が成り立つ．

$$Tr[\rho(\log\rho - \log\sigma)] \leq Tr[\rho\log(\rho^{1/2}\sigma^{-1}\rho^{1/2})].$$

Proposition 4 ρ, σ を *density operators* とする. $0 \leq q < 1$ に対して次の (1) ~ (4) が成り立つ.

(1)(Nonnegativity): $D_q(\rho|\sigma) \geq 0$.

(2)(Pseudoadditivity):

$$D_q(\rho_1 \otimes \rho_2|\sigma_1 \otimes \sigma_2) = D_q(\rho_1|\sigma_1) + D_q(\rho_2|\sigma_2) + (q-1)D_q(\rho_1|\sigma_1)D_q(\rho_2|\sigma_2).$$

(3)(Joint convexity):

$$D_q(\sum_j \lambda_j \rho_j | \sum_j \lambda_j \sigma_j) \leq \sum_j \lambda_j D_q(\rho_j|\sigma_j).$$

(4)(Invariance): unitary transformation U に対して

$$D_q(U\rho U^*|U\sigma U^*) = D_q(\rho|\sigma).$$

Proof. 任意の $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq q < 1$ に対して

$$f(q,x,y) \equiv \frac{x - x^q y^{1-q}}{1-q} - (x-y) \geq 0$$

が成り立つので次を得る.

$$D_q(\rho|\sigma) \geq Tr[\rho - \sigma].$$

ρ, σ が density operators であるので (1) が得られる.
(2): 直接の計算で得られる.
(3): Lieb's theorem より任意の operator Z と任意の $0 \leq t \leq 1$ に対して functional $f(A,B) \equiv Tr[Z^* A^t Z B^{1-t}]$ は positive operators A, B について jointly concave である.
(4): Stone-Weierstrass approximation theorem を用いると明らかである. q.e.d.

Theorem 2 任意の *trace-presearving completely positive linear map* Φ と任意の *density operators* ρ, σ と $0 \leq q < 1$ に対して次が成り立つ.

$$D_q(\Phi(\rho)|\Phi(\sigma)) \leq D_q(\rho|\sigma).$$

Proof. [9] と同様にすればよい.

まず composite system AB において partial trace Tr_B に対して $D_q(\rho|\sigma)$ の monotonicity を証明する. ρ^{AB}, σ^{AB} を composite system AB における density operators とする. [10] より次のような unitary operators U_j と probability p_j が存在する.

$$\rho^A \otimes \frac{1}{n} = \sum_j p_j (I \otimes U_j)\rho^{AB}(I \otimes U_j)^*,$$

ただし n は system B の次元, I は system B の identity operator, $\rho^A = Tr_B[\rho^{AB}], \sigma^A = Tr_B[\sigma^{AB}]$ である. Tsallis relative entropy の joint convexity と unitary invarinace より次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} & D_q(\rho^A \otimes \frac{1}{n}) \\ \leq\ & \sum_j p_j D_q((I \otimes U_j)\rho^{AB}(I \otimes U_j)^* | (I \otimes U_j)\sigma^{AB}(I \otimes U_j)^*) \\ =\ & \sum_j p_j D_q(\rho^{AB}|\sigma^{AB}) \\ =\ & D_q(\rho^{AB}|\sigma^{AB}). \end{aligned}$$

ここで

$$D_q(\rho^A \otimes \frac{1}{n}|\sigma^A \otimes \frac{1}{n}) = D_q(\rho^A|\sigma^A),$$

より次を得る.

$$D_q(Tr_B[\rho^{AB}]|Tr_B[\sigma^{AB}]) \leq D_q(\rho^{AB}|\sigma^{AB}). \tag{3}$$

[11] より任意の trace presearving completely positive linear map Φ は total system AB 上の unitary operator U^{AB} と subsystem B 上の projection(pure state) P^B でつぎのように表現される.

$$\Phi(\rho^A) = Tr_B[U^{AB}(\rho^A \otimes P^B)(U^{AB})^*].$$

したがって (3) と $D_q(\rho|\sigma)$ の unitary invariance を再度用いると次を得る.

$$\begin{aligned}
& D_q(\Phi(\rho^A)|\Phi(\sigma^A)) \\
\leq\ & D_q(U^{AB}(\rho^A \otimes P^B)(U^{AB})^*|U^{AB}(\sigma^A \otimes P^B)(U^{AB})^*) \\
=\ & D_q(\rho^A \otimes P^B|\sigma^A \otimes P^B) \\
=\ & D_q(\rho^A|\sigma^A).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Corollary 2 任意の *trace-presearving completely positive linear map* Φ と 任意の *density operator* ρ と $0 \leq q < 1$ に対して次が成り立つ.

$$H_q(\Phi(\rho)) \geq H_q(\rho),$$

ただし

$$H_q(X) = \frac{Tr[X^q] - 1}{1-q}$$

は *quantum Tsallis entropy* である.

3 Generalized Tsallis relative entropy

Definition 4 任意の *positive operators* A, B と任意の実数 $q \in [0,1)$ に対して $D_q(A||B)$ を次のように定義する.

$$D_q(A||B) = \frac{Tr[A] - Tr[A^q B^{1-q}]}{1-q}.$$

Lieb's concavity theorem より次が成り立つ.

$$D_q(\sum_j \lambda_j A_j || \sum_j \lambda_j B_j) \leq \sum_j \lambda_j D_q(A_j||B_j), \tag{4}$$

ただし $\lambda_j > 0(\sum_j \lambda_j = 1)$ である.

Theorem 3 任意の *positive operators* A_1, A_2, B_1, B_2 と任意の $0 \leq q < 1$ に対して次の *subadditivity* が成り立つ.

$$D_q(A_1 + A_2||B_1 + B_2) \leq D_q(A_1||B_1) + D_q(A_2||B_2). \tag{5}$$

Proof. 任意の実数 α, β, 任意の positive operators A, B に対して次が成り立つことに注意する.

$$D_q(\alpha A||\beta B) = \alpha D_q(A||B) - \alpha \ln_q \frac{\beta}{\alpha} Tr[A^q B^{1-q}].$$

(4) より任意の positive operators X_1, X_2, Y_1, Y_2 と任意の $\lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ に対して次を得る.

$$D_q(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 || \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) \le \lambda_1 D_q(X_1||Y_1) + \lambda_2 D_q(X_2||Y_2).$$

ここで $A_i = \lambda_i X_i, B_i = \lambda_i Y_i \ (i = 1, 2)$ とおくと

$$D_q(A_1 + A_2||B_1 + B_2) \le \lambda_1 D_q(\frac{A_1}{\lambda_1}||\frac{B_1}{\lambda_1}) + \lambda_2 D_q(\frac{A_2}{\lambda_2}||\frac{A_2}{\lambda_2}).$$

したがって (5) より結論が得られる. q.e.d.

Theorem 4 任意の *positive operators* A, B と任意の $0 \le q < 1$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$D_q(A||B) \ge \frac{Tr[A] - (Tr[A])^q (Tr[B])^{1-q}}{1-q}.$$

Proof. Holder' inequality より $Tr[|X|^s] < \infty, Tr[|Y|^t] < \infty$ を満たす任意の bounded linear operators X, Y と $1/s + 1/t = 1$ を満たす任意の $1 < s < \infty, 1 < t < \infty$ に対して次が成り立つ.

$$|Tr[XY]| \le Tr[|X|^s]^{1/s} Tr[|Y|^t]^{1/t}.$$

ここで $X = A^q, Y = B^{1-q}$, $s = 1/q, t = 1/(1-q)$ とおくと

$$Tr[A^q B^{1-q}] \le (Tr[A])^q (Tr[B])^{1-q}$$

が得られ結論に至る. q.e.d.

4 Tsallis relative operator entropy

Hilbert space H 上の bounded linear operator T は 任意の $x \in H$ に対して $(Tx, x) \ge 0$ を満たすとき positive といい $T \ge 0$ と表わす. また T が invertible かつ positive であるとき strictly positive といい $T > 0$ と表わす. Tsallis relative operator entropy は次のように定義される.

Definition 5 ([5]) $A > 0, B > 0$ と $0 < \lambda \le 1$ に対して

$$T_\lambda(A|B) = \frac{A^{1/2}(A^{-1/2} B A^{-1/2})^\lambda A^{1/2} - A}{\lambda}$$

を A と B の間の *Tsallis relative operator entropy* と定義する.

$T_\lambda(A|B)$ の基本的性質は [5] で与えられている. ここでは Tsallis relative operator entropy を用いて Shannon type の operator inequality とその逆の inequality を与える.

Theorem 5 $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ を *Hilbert space* H 上の *strictly positive operator* からなる 2 つの列で $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.

$$0 \ge \sum_{j=1}^n T_\lambda(A_j|B_j) \ge \frac{(\sum_{j=1}^n A_j B_j^{-1} A_j)^{-\lambda} - I}{\lambda}.$$

証明にあたり次の Lemma を必要とする.

Lemma 1 $t > 0$ を固定すると次の λ $(0 < \lambda \le 1)$ に関する *inequality* が成り立つ.

$$\frac{t^{\lambda}-1}{\lambda} \le t-1.$$

Proof. $t=1$ のときは明らか. $t \neq 1$ とする. $F(\lambda) = \lambda(t-1) - t^{\lambda} + 1$ とおく. このとき $F'(\lambda) = t - 1 - t^{\lambda}\log t$ かつ $F''(\lambda) = -t^{\lambda}(\log t)^2 < 0$. したがって $F(\lambda)$ は concave function である. $F(0) = F(1) = 0$ だから結論を得る. q.e.d.

Proof of Theorem 5. Lemma 1 より

$$\begin{aligned}
\frac{A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\lambda}A^{1/2} - A}{\lambda} &= A^{1/2}\frac{(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\lambda} - I}{\lambda}A^{1/2} \\
&\le A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2} - I)A^{1/2} \\
&= B - A,
\end{aligned}$$

ただし $A > 0, B > 0$ かつ $0 < \lambda \le 1$. したがって

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} T_{\lambda}(A_j|B_j) &= \sum_{j=1}^{n}\frac{A_j^{1/2}(A_j^{-1/2}B_jA_j^{-1/2})^{\lambda}A_j^{1/2} - A_j}{\lambda} \\
&\le \sum_{j=1}^{n}(B_j - A_j) = 0.
\end{aligned}$$

別の inequality も証明する. $f(x) = -x^{-\lambda}$, $C_j = A_j^{1/2}$ かつ $X_j = A_j^{1/2}B_j^{-1}A_j^{1/2}$ とおくことにより Furuta [6] の Proposition 3.1 を適用すると次を得る.

$$-(\sum_{j=1}^{n} A_j^{1/2}(A^{1/2}B_j^{-1}A_j^{1/2})A_j^{1/2})^{-\lambda} \ge -\sum_{j=1}^{n} A_j^{1/2}(A_j^{1/2}B_j^{-1}A_j^{1/2})^{-\lambda}A_j^{1/2}.$$

したがって

$$(\sum_{j=1}^{n} A_jB_j^{-1}A_j)^{-\lambda} \le \sum_{j=1}^{n} A_j^{1/2}(A_j^{-1/2}B_jA_j^{-1/2})^{\lambda}A_j^{1/2}.$$

ゆえに証明を完了する. q.e.d.

Theorem 5 の corolary として Furuta [6] によって得られた Shannon inequalty とその逆の inequality の operator 版に相当するものが得られる.

Corollary 3 (Furuta [6]) $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ と $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ を *Hilbert space* H 上の *strictly positive operator* からなる 2 つの列で $\sum_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} B_j = I$ を満たすとする. このとき次が成り立つ.

$$0 \ge \sum_{j=1}^{n} A_j^{1/2}(\log A_j^{-1/2}B_jA_j^{-1/2})A_j^{1/2} \ge -\log[\sum_{j=1}^{n} A_jB_j^{-1}A_j].$$

Corollary 3 は [6] の Corollary 2.4 の 1 部分である. 次の section では一般化された Tsallis relative operator entropy を新しく定義し, その性質を調べる.

5 Generalized Tsallis relative operator entropy

relative operator entropy と related operator entropy を思い出そう.

Definition 6 $A>0, B>0$ に対して

$$S(A|B)=A^{1/2}(\log A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}$$

は A と B の間の *relative operator entropy* と定義される. これは *Fujii and Kamei* [4] によって定義された. また $A>0, B>0$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, *generalized relative operator entropy* が *Furuta* [6] によって次のように定義された.

$$S_{\lambda}(A|B)=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\lambda}(\log A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2},$$

$$A\natural_{\lambda}B=A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\lambda}A^{1/2}.$$

特に $S(A|B)=S_0(A|B), A\natural_0 B=A, A\natural_1 B=B$ となることに注意する.

Tsallis relative operator entropy を次のように一般化する.

Definition 7 $A>0, B>0,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,\ k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\tilde{T}_{\mu,k,\lambda}(A|B)=\frac{A\natural_{\mu+k\lambda}B-A\natural_{\mu+(k-1)\lambda}B}{\lambda}$$

を *generalized Tsallis relative operator entropy* と定義する. 特に $\lambda \neq 0$ に対して

$$\tilde{T}_{0,1,\lambda}(A|B)=\frac{A\natural_{\lambda}B-A\natural_0 B}{\lambda}=\frac{A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{\lambda}A^{1/2}-A}{\lambda}=T_{\lambda}(A|B).$$

$S_{\mu\pm k\lambda}(A|B), S_{\mu\pm(k+1)\lambda}(A|B)$ と $\tilde{T}_{\mu,k+1,\pm\lambda}(A|B)$ の間の関係について調べる.

Proposition 5 $\lambda>0, \mu \in \mathbb{R},\ k=0,1,2,\ldots$ のとき次が成り立つ.

(1) $S_{\mu-(k+1)\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,k+1,-\lambda}(A|B) \leq S_{\mu-k\lambda}(A|B)$.

(2) $S_{\mu+k\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,k+1,\lambda}(A|B) \leq S_{\mu+(k+1)\lambda}(A|B)$.

Proof. $\lambda>0, \mu \in \mathbb{R},\ k=0,1,2,\ldots$ のとき　任意の $t>0$ に対して次の inequalities を得る.

$$t^{\mu-(k+1)\lambda}\log t \leq \frac{t^{\mu-(k+1)\lambda}-t^{\mu-k\lambda}}{-\lambda} \leq t^{\mu-k\lambda}\log t,$$

$$t^{\mu+k\lambda}\log t \leq \frac{t^{\mu+(k+1)\lambda}-t^{\mu+k\lambda}}{\lambda} \leq t^{\mu+(k+1)\lambda}\log t.$$

したがって t を $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ で置き換え両辺に $A^{1/2}$ をかけることにより目標の式を得る.
q.e.d.

$k=0$ 又は 1 のとき次のようになる.

Corollary 4 $A>0, B>0, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda>0$ のとき

$$\begin{aligned} & S_{\mu-2\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,2,-\lambda}(A|B) \leq S_{\mu-\lambda}(A|B) \\ \leq\ & \tilde{T}_{\mu,1,-\lambda}(A|B) \leq S_{\mu}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,1,\lambda}(A|B) \\ \leq\ & S_{\mu+\lambda}(A|B) \leq \tilde{T}_{\mu,2,\lambda}(A|B) \leq S_{\mu+2\lambda}(A|B). \end{aligned}$$

特に $\mu=0, \lambda=1$ とおくと次を得る.

Corollary 5 $A>0, B>0$ に対して

$$\begin{aligned} & S_{-2}(A|B) \le \tilde{T}_{0,2,-1}(A|B) \le S_{-1}(A|B) \\ \le\ & \tilde{T}_{0,1,-1}(A|B) \le S_0(A|B) \le \tilde{T}_{0,1,1}(A|B) \\ \le\ & S_1(A|B) \le \tilde{T}_{0,2,1}(A|B) \le S_2(A|B). \end{aligned}$$

書き直すと

$$\begin{aligned} & S_{-2}(A|B) \le AB^{-1}A - AB^{-1}AB^{-1}A \le S_{-1}(A|B) \\ \le\ & A - AB^{-1}A \le S(A|B) \le B - A \\ \le\ & S_1(A|B) \le BA^{-1}B - B \le S_2(A|B). \end{aligned}$$

同様にして $\sum_{j=1}^n S_{\mu\pm k\lambda}(A_j|B_j), sum_{j=1}^n S_{\mu\pm(k+1)\lambda}(A_j|B_j)$ と $\sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,k+1,\pm\lambda}(A_j|B_j)$ の間の関係を求める. ただし $A_j>0, B_j>0$ は $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たすと仮定する. $\lambda>0, \mu\in\mathbb{R}$, $k=0,1,2,\ldots$ のとき次を得る.

$$\sum_{j=1}^n S_{\mu-(k+1)\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,k+1,-\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n S_{\mu-k\lambda}(A_j|B_j),$$

$$\sum_{j=1}^n S_{\mu+k\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,k+1,\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n S_{\mu+(k+1)\lambda}(A_j|B_j).$$

$k=0$ 又は 1 とおくと次を得る.

Corollary 6 $A>0, B>0, \mu\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$ のとき

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n S_{\mu-2\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,2,-\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n S_{\mu-\lambda}(A_j|B_j) \\ \le\ & \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,1,-\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n S_{\mu}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,1,\lambda}(A_j|B_j) \\ \le\ & \sum_{j=1}^n S_{\mu+\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n \tilde{T}_{\mu,2,\lambda}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n S_{\mu+2\lambda}(A_j|B_j). \end{aligned}$$

特に $\mu=0, \lambda=1$ とおくと [6] の Corollary とは違った結果を得る.

Corollary 7 $\sum_{j=1}^n A_j = \sum_{j=1}^n B_j = I$ を満たす $A_j>0, B_j>0$ に対して次を得る.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n S_{-2}(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n A_jB_j^{-1}A_j - \sum_{j=1}^n A_jB_j^{-1}A_jB_j^{-1}A_j \\ \le\ & \sum_{j=1}^n S_{-1}(A_j|B_j) \le I - \sum_{j=1}^n A_jB_j^{-1}A_j \le \sum_{j=1}^n S(A_j|B_j) \le 0 \\ \le\ & \sum_{j=1}^n S_1(A_j|B_j) \le \sum_{j=1}^n B_jA_j^{-1}B_j - I \le \sum_{j=1}^n S_2(A_j|B_j). \end{aligned}$$

References

[1] S Abe,Monotonic decrease of the quantum nonadditive divergence by projective measurements, Physics Letters A, vol.312, pp.336-338, 2003.

[2] N.Bebiano,J.da Providencia Jr. and R.Lemos, Matrix inequalities in statistical mechanics, Linear Algebra and its Applications, vol.376, pp.265-273, 2004.

[3] L.Borland, A.R.Plastino and C.Tsallis, Information gain within nonextensive thermostatistics, J. Math. Phys., vol.39, pp.6490-6501, 1998, and its Erratum, vol.40, pp.2196, 1999.

[4] J.I.Fujii and E.Kamei, Relative operator entropy in noncommutative information theory, Math. Japonica, vol.34, pp.341-348, 1989.

[5] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, Fundamental properties of Tsallis relative entropy, J. Math. Phys. vol.45, pp.4868-4877, 2004.

[6] T.Furuta, Parametric extensions of Shannon inequality and its reverse one in Hilbert space operators, Linear Algebra and its Applications, vol.381, pp.219-235, 2004.

[7] F.Hansen and G.K.Pedersen, Jensen's operator inequality, Bull. London Math. Soc., vol.35, pp.553-564, 2004.

[8] F.Hiai and D.Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, Linear Algebra and its Applications, Linear Algebra and its Applications, vol.181, pp.153-185, 1993.

[9] G.Lindblad, Completely positive maps and entropy inequalities, Comm. Math. Phys., vol.40, pp.147-151, 1975.

[10] M.A.Nielsen and I.Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge Press, 2000.

[11] B.Schmacher, Sending entanglement through noisy quantum channel, Phys. Review A, vol.54, pp.2614-2628, 1996.

[12] C.Tsallis, Possible generalization of Bolzmann-Gibbs statistics, J.Stat.Phys., vol.52, pp.479-487, 1988.

[13] C.Tsallis et al., Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, edited by S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg,2001); see also the comprehensive list of references at http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

[14] H.Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, IV (entropy and information), Kodai Math. Sem. Rep., vol.14, pp.59-85, 1962.

[15] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy, Linear Algebra and its Applications, vol.394, pp.109-118, 2005.