

## Permanence for nonautonomous Lotka-Volterra differential systems with delays

早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻 野上正義 (Masayoshi Nogami)  
Department of Mathematical Sciences, Waseda University

### 1 導入

以下で与えられる非自励的な  $n$ -種 Lotka-Volterra 方程式の permanence のための十分条件について考察する:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i(t)}{dt} = x_i(t) \left[ c_i(t) - \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^m a_{ij}^l(t) x_j(t - \tau_l(t)) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \sum_{j=1}^n \int_{-\sigma_{ij}}^0 r_{ij}(t, s) x_j(t + s) ds \right], \\ t \geq t_0, 1 \leq i \leq n, \\ x_i(t) = \phi_i(t) \geq 0, t \leq t_0, \text{ and } \phi_i(t_0) > 0, 1 \leq i \leq n, \end{array} \right. \quad (1)$$

ここで各  $\phi_i(t), 1 \leq i \leq n$  は  $t \leq t_0$  で連続であり、各  $c_i(t), 1 \leq i \leq n$  と  $a_{ij}^l(t), 1 \leq i, j \leq n, 0 \leq l \leq m$  は  $[t_0, +\infty)$  で連続かつ有界、また各  $r_{ij}(t, s), 1 \leq i, j \leq n$  は  $[t_0, \infty) \times [-\sigma_{ij}, 0]$  で連続かつ有界であり  $s$  に関して積分可能である。また各  $\sigma_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$  は正定数である。さらに

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^m a_{ii}^l(t) \geq 0, 1 \leq i \leq n, \tau_l(t) \geq 0, \tau_l(t) < 1 - \delta, 0 \leq l \leq m, \\ r_{ij}(t, s) \geq 0, 1 \leq i \leq j \leq n \end{array} \right. \quad (2)$$

とする。ここで  $\delta$  は正定数である。

まず、以下に生物数学上重要な定義をいくつか挙げておく。

**Definition 1.1** 系 (1.1)-(1.2) の任意の解に対して以下の不等式を満たすとき系 (1.1)-(1.2) は *persistence* であるという。

$$0 < \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) < +\infty, 1 \leq i \leq n.$$

**Definition 1.2** 系 (1.1)-(1.2) のいかなる正の解に対しても初期関数  $\phi_i(t), 1 \leq i \leq n$  に依存しないある正の定数  $l, L$  が存在し、以下の不等式を満たすとき系 (1.1)-(1.2) は *permanence* であるという。

$$0 < l \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq L < +\infty, 1 \leq i \leq n.$$

上に挙げた Lotka-Volterra 方程式はもともとは第1次世界大戦後のイタリア・アドリア海における漁獲高の捕食者の数が非常に大きくなったことを説明するためにヴィットー・ヴォルテラによって考案されたものである。その時点では以下のような形をしていた。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t)(a - by(t)) \\ \dot{y}(t) &= y(t)(-c + dx(t))\end{aligned}$$

この方程式に対し、数学的、あるいは生物学的な観点から多くの改良がなされてきたが、それらをまとめたものが系 (1-1)(1-2) である。

一度式を立ててしまえば、例えば系 (1-1)(1-2) についていえば、それは  $n$ -種連立の微分方程式とみなすことができる。このときに上に定義した、permanence, persistence, といった状況のための十分条件あるいは必要条件については数学上の問題として捉えることができる。そのようにして得られた結果に対し、生物学的な観点から意味づけあるいは考察を行うことで、対象に対して理解を深めることができる。

このようにして、数学と生物学はお互いに理解を深めていくことができる。最近の例を挙げると、環境破壊による生態系の変化や生態系の多様性に対する危惧、世界レベルで懸念の広がるエイズや鳥インフルエンザ等といった伝染病に如何に対処すべきかといった問題に対し、数学者の立場からひとつの指標を示すことができる。

今回は特に permanence に注目する。permanence は生物数学的に非常に重要な意味を持っている。それはある閉ざされた生物系全ての生物種が死滅することなく存続していくということを保証するものである。例えば系 (1.1)-(1.2) が permanence になるための十分条件が与えられたとする。十分条件が与えられたときそれを実際に生態系に対して適用することができる。つまりそのまま放置しておいたのではある生物種が死滅する恐れがある生態系に対して、人間が外的な力を加える事でその生物種が生き残る事が可能になるわけである。また上にみる permanence の定義では生物の個体数の上界と下界として、初期値に依存しない正定数をとっている事にも注意したい。外的な力を加えることにより、人間が保護しようとしている生態系の全ての種に対して具体数を把握するのは現実問題として不可能である。初期値に依存しないということは、その生態系の各種毎の数を把握している必要はないということである。この様な意味で permanence というものは重要な意味を持っている。

今回の内容は、Z.Li and Z.Teng[1] が元になっている。重要な2つの仮定を付け加えたが、それぞれの仮定を改良することに成功した。仮定をどの様に改良したか、また改良することによって、どの様な拡張が可能になったかのまとめである。

## 2 証明の方針と仮定の紹介

まず、系 (1.1)-(1.2) の任意の解に対して  $0 < \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq L < \infty, 1 \leq i \leq n$  を証明する。ここで、 $L$  は初期値に依存しない正定数である。次に、系 (1.1)-(1.2) の任意の解に対して、 $0 < l \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x_i(t) \leq L < \infty, 1 \leq i \leq n$  を証明する。ここで  $l$  は初期値に依存しない正定数である。この、各  $x_i(t)$  を0より大きいある正定数で下から抑える時に Liapunov 関数を利用する。紙面の都合上、今回はこの Liapunov 関数が関連する部分に話を絞る。まず、以下の仮定を導入する。

$I$  を  $n$  次単位正方行列とする. また  $\tilde{A}(t) = [\tilde{a}_{ij}(t)]$  を  $n$  次正方行列であり

$$\tilde{a}_{ij}(t) = \sum_{l=0}^m \frac{a_{ij}^l(\psi_l^{-1}(t))}{1 - \dot{\tau}_l(\psi_l^{-1}(t))} + \int_{-\sigma_{ij}}^0 r_{ij}(t-s, s) ds \quad (3)$$

とする. ここで  $\psi_l^{-1}$  は  $\psi_l(t) = t - \tau_l(t)$  の逆関数である. 今、 $n$  次正方行列  $B = [b_{ij}]$  と正定数  $M, \epsilon_i, 1 \leq i \leq n$  が存在し以下が成り立つとする、

$$B\tilde{A}(t) \leq I, t \geq t_0. \quad (4)$$

今回系 (1.1)-(1.2) の任意の解に対して以下のように Liapunov 関数  $V_i(t), i = 1, 2, \dots, n$  を作成した.

$$\begin{aligned} G_i(t) = \exp\left[-\sum_{k=1}^n b_{ik} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{l=0}^m \int_{t-\tau_l(t)}^t \frac{a_{kj}^l(\psi_l^{-1}(s))}{1 - \dot{\tau}_l(\psi_l^{-1}(s))} x_j(s) ds \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\sigma_{kj}}^0 \left( \int_{t+s}^t r_{kj}(\theta-s, s) x_j(\theta) d\theta \right) ds \right\} \right] \\ B_i(x(t)) = \prod_{k=1}^n x_k(t)^{b_{ik}}, V_i(t) = B_i(t)G_i(t), 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (5)$$

今回、Liapunov 関数を使うことのメリットは「時間遅れを含む系 (1.1)-(1.2) に対し、遅れを含まない以下のような微分不等式を作ることができる」という点である.

$$\frac{dV_i(t)}{dt} \geq V_i(t) \left( \sum_{k=1}^n b_{ik} c_k(t) - x_i(t) \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

系 (1.1)-(1.2) と上の微分不等式との違いは大きく二点ある. まず第一点は、系 (1.1)-(1.2) には遅れが含まれているのに対し、上の微分不等式には遅れが含まれていない. 第二点目は、系 (1.1)-(1.2) では  $i$  番目の式が、 $n$  種の  $x_i(t)$  に依存しているのに対し、上の不等式では  $i$  番目の式が  $x_i(t)$  にのみ依存しているという点である. これらのことにより、解の考察を比較的簡単に行うことができるようになる.

さて Z.Li and Z.Teng の仮定を紹介する.

**assumption 2.1**  $n$  次正方行列  $B = [b_{ij}]$  は以下のような下ヘッセンバーク行列である.

$$\begin{cases} b_{ij} > 0, & 1 \leq j \leq i \leq n, \\ b_{ii+1} < 0, & 1 \leq i \leq n-1, \\ b_{ij} = 0, & \text{それ以外.} \end{cases} \quad (6)$$

**assumption 2.2** 正定数  $\epsilon, \omega, \eta, T$  が存在し、以下が成り立つとする.

$$\int_t^{t+\omega} \left( \sum_{k=1}^n b_{ik} c_k(s) - \eta \right) ds \geq \epsilon, 0 \leq x(t) \leq \eta, \forall t \geq T, i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

次に今回の仮定を紹介する.

**assumption 2.3**  $\tilde{B} = [\tilde{b}_{ij}]$  を以下のような  $n$  次正方行列とする.  $\tilde{b}_{ii} = b_{ii} > 0, 1 \leq i \leq n, \tilde{b}_{ij} = \min(b_{ij}, 0), i \neq j$ . この時  $\tilde{B}$  は  $M$ -行列になっているとする. また  $B^+ = [b_{ij}^+]$

を  $n$  次正方行列であり,  $b_{ii}^+ \equiv 0, 1 \leq i \leq n, b_{ij}^+ = \max(b_{ij}, 0), i \neq j$  とする. さらに  $\tilde{B}_k = [\tilde{b}_{ij}(k)]$  と  $B_k^+ = [b_{ij}^+(k)]$  は  $(k-1)$  次正方行列であり  $\tilde{b}_{ij}(k) = \tilde{b}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n, b_{ij}^+(k) = b_{ij}^+, 1 \leq i, j \leq n$  とする. また  $\tilde{B}_k^{-1} = [\tilde{b}_{ij}^{(-1)}(k)]$  を  $\tilde{B}_k$  の逆行列とする. また

$$\rho_{kj} \equiv b_{kj} - \sum_{l=1}^{k-1} b_{kl}^+ \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{b}_{lm}^{(-1)}(k) b_{mj} \text{ とおく. この時}$$

$$\rho_{kk} > 0, \rho_{kj} \leq 0, k+1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n \quad (8)$$

が成り立つとする.

**assumption 2.4** また正定数  $M, \epsilon$  が存在し以下が成り立つとする.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left( \sum_{k=1}^n b_{ik} c_k(s) - \epsilon \right) ds = +\infty, \\ \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{k=1}^n b_{ik} c_k(s) - \epsilon \right) ds \geq -M, \forall t_2 > t_1 \geq t_0. \end{array} \right. \quad (9)$$

仮定 2.1. を仮定 2.3. に, 仮定 2.2. を仮定 2.4. にそれぞれ改良した. なお, 証明の本質は, Z.Li and Z.Teng[1] と同じである. 証明の内容は紙面の都合上省略する.

### 3 仮定 2.1. と仮定 2.3. について

$n$  次正方行列  $B$  が Eq.(6) を満たす時に Eq.(8) が成り立つことを証明する. 次に Eq.(8) が成り立ち, かつ Eq.(6) が成り立たないような例を挙げる. その結果が元の系 (1-1)(1-2) にどう影響を及ぼすかについて考える.

**Lemma 3.1**  $n$  次正方行列  $B$  が Eq.(6) を満たすとする. この時,  $B$  は Eq.(8) を満たす.

*Proof.*  $n$  次正方行列  $B$  が Eq.(6) を満たすとする. このとき,  $\tilde{B}$  は上三角行列の一種, で  $b_{ii} > 0, 1 \leq i \leq n, b_{ij} \leq 0, 1 \leq i < j \leq n$  となる. このとき行列  $\tilde{B}$  に逆行列が存在し,  $\tilde{B}^{-1}$  は M 行列となる (cf.[3]). ここで,  $\rho_{kk} = b_{kj} - \sum_{l=1}^{k-1} b_{kl}^+ \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{b}_{lm}^{(-1)}(k) b_{mk}$  について考える. 行列

$B$  に対する仮定から,  $\rho_{kk} = b_{kk} - \sum_{l=1}^{k-1} b_{kl}^+ \tilde{b}_{lk}^{(-1)}(k) b_{k-1k}$  であり,  $b_{kl}^+ \geq 0, 1 \leq l \leq k-1, 1 \leq k \leq n, b_{kk} > 0, b_{k-1k} < 0, 1 \leq k \leq n$  となる. また,  $\tilde{B}^{-1}$  が M 行列であることから, その小行列である  $\tilde{B}_k$  も M 行列となる (cf.[3]). よって,  $\tilde{b}_{lk}^{(-1)}(k) \geq 0, 1 \leq l \leq k-1, 1 \leq k \leq n$  となる. よって,  $\rho_{kk} > 0, 1 \leq k \leq n$  となる.

次に,  $\rho_{kj} \equiv b_{kj} - \sum_{l=1}^{k-1} b_{kl}^+ \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{b}_{lm}^{(-1)}(k) b_{mj}$  について考える. ここで,  $b_{mj}, 1 \leq m \leq k-1, k+1 \leq j \leq n$  に注目する. 行列  $B$  に対する仮定から,  $b_{mj} \equiv 0, 1 \leq m \leq k-1, k+1 \leq j \leq n$  である. よって,  $\rho_{kj} = b_{kj}$  となるが, 行列  $B$  に対する仮定から,  $\rho_{kj} \leq 0, k+1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$  となる.  $\square$

次に Eq.(8) を満たし、Eq.(6) を満たさないような例を挙げる。

$$B = \frac{1}{467} \begin{pmatrix} 59 & -18 & -10 & -1 \\ -29 & 88 & -3 & -47 \\ -38 & 67 & 141 & -126 \\ 62 & -11 & -58 & 18 \end{pmatrix}$$

この時、実際計算すると分かるが、

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{59}{467} > 0, & \rho_{12} &= \frac{-18}{467} \leq 0, & \rho_{13} &= \frac{-10}{467} \leq 0, & \rho_{14} &= \frac{-1}{467} \leq 0, \\ \rho_{22} &= \frac{88}{467} > 0, & \rho_{23} &= \frac{-117}{27753} \leq 0, & \rho_{24} &= \frac{-47}{467} \leq 0, \\ & & \rho_{33} &= \frac{1477}{4670} > 0, & \rho_{34} &= \frac{-429}{2335} \leq 0, \\ & & & & \rho_{44} &= \frac{137281}{311489} > 0. \end{aligned}$$

となり、Eq.(7) を満たしているのが分る。しかしこの行列  $B$  が Eq.(5) を満たしていないのは明らかである。以上により行列  $B$  の条件が改良されたことが分る。このことにより、行列  $\tilde{A}(t)$  の範囲も広がったことになる。簡単な例を以下に挙げる。

**example 3.1** 今、 $n = 4$  とする。行列  $\tilde{A}(t) = [\tilde{a}_{ij}(t)]$  を Eq.(3) のように定義した。この時、行列  $B$  は行列  $\tilde{A}(t)$  に対して、Eq.(4) を満たしている必要がある。ここでは簡単のため、 $a_{ij}(t)$  に含まれる遅れの部分を除くことにする。さらに、 $\tilde{A}(t)$  は変数を成分とするが、定数を成分とすることにする。ここで注意したいのは、遅れの部分を除くことにより、 $\tilde{a}_{ij}(t) \equiv a_{ij}(t)$  となる点である。Eq.(4) を満たすような  $\tilde{A}(t)$  として、行列  $B$  の逆行列をとる。すると、

$$\tilde{A}(t) = B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。この成分の正負は以下の状況を表している。生物  $x_1$  と生物  $x_2$  とが競争関係にあり、生物  $x_3$  と生物  $x_4$  とがやはり競争関係にある。そして、生物  $x_1$  と生物  $x_2$  とが生物  $x_3$  と生物  $x_4$  との“えさ”である状況である。このような状況については、Eq.(6) のような状況では Eq.(4) を満足することができない。それは、 $B\tilde{A}(t)$  の 2 行 1 列成分や 4 行 3 列成分が 0 より大きくなることから分る。

#### 4 仮定 2.2. と仮定 2.4. について

Eq.(7) が成り立っている時に、Eq.(9) が成り立つのは明らかである。Eq.(9) を満たし、Eq.(7) を満たさないような例を挙げる。関数  $\sum_{k=1}^n b_{ik}c_k(t) - \epsilon$  を以下のように置く。

$$\sum_{k=1}^n b_{ik}c_k(t) - \epsilon = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2^{2n}}t\right) & (2^{2n} \leq t < 2^{2n+1}), \\ \frac{\pi}{2^{2n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}t + \pi\right) & (2^{2n+1} \leq t < 2^{2n+2}). \end{cases}$$

$\sum_{k=1}^n b_{ik}c_k(t) - \epsilon$  を区間  $[2^{2n}, 2^{2n+1}]$  と  $[2^{2n+1}, 2^{2n+2}]$  で積分すると

$$\begin{cases} \int_{2^{2n}}^{2^{2n+1}} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2^{2n}}s\right) ds = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin \theta d\theta = -1, \\ \int_{2^{2n+1}}^{2^{2n+2}} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \sin\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}s + \pi\right) ds = \int_{2\pi}^{3\pi} \sin \theta d\theta = 2 \end{cases}$$

となる。これより関数  $\sum_{k=1}^n b_{ik}c_k(t) - \epsilon$  が Eq.(9) にあてはまっている事がわかる。しかし如何なる  $\omega > 0$  に対しても十分大きな  $N_1 \in N$  が存在し、もし  $n > N_1$  ならば、 $\omega < 2^{n+1}$  となる。よって十分大きな  $n \geq N_1$  の時、 $2^{n+1} + \omega < 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$  となる。よって

$$\int_{2^{n+1}}^{2^{n+1}+\omega} \left(\sum_{k=1}^n b_{ik}c_k(s) - \epsilon\right) ds \leq \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} \left(\sum_{k=1}^n b_{ik}c_k(s) - \epsilon\right) ds \leq -1$$

となり Eq.(7) にあてはまっていない。これより permanence のためのより良い十分条件が得られたことになる。

## 反省

大学三年生の後期から始まりましたゼミにあたって、先生から教科書を読んでいくか、あるいは論文を読むかの二択を問われました。自分と友人とで話し合った結果、論文を読み進めていき、教科書のほうは各自で勉強するというほうを選びました。その結果、今回なんとか京都での発表という形につなげることができましたが、その反面やはり勉強不足といったものを感じました。残り少ない大学院生活ですが、自分なりにできるだけ基礎となる部分を埋めていきたいと思います。

## 謝辞

今回の内容は、室谷義昭教授に、多大なご助力を頂きました。深くお礼を申し上げたいと思います。また京都での研究集会では、いろいろな方の講演内容が大変勉強になりました。分野の違いこそあれ、さまざまな方達が一生懸命勉強されているということが確認でき、自分ももっと頑張らなければと思いました。この場を借りてお礼を申し上げたいと思います。どうもありがとうございました。また今後ともどうぞよろしく願います。

## 参考文献

- [1] Z. Li and Z. Teng, Permanence for non-autonomous food chain systems with delay, *J. Math. Anal. Appl.* **286** (2003), 724-740.
- [2] Y. Muroya, Uniform persistence for Lotka-Volterra-type delay differential systems, *Nonlinear Analysis RWA* **4** (2003), 689-710.
- [3] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, New York, 1979.