数理解析研究所講究録
1524巻 2006年 50-55

量子優先の原理と時空構造

京都大学名誉教授　中西　襄 (Noboru Nakanishi)
Kyoto University

究極理論における時空構造は、c数のローレンツ的4次元連続体のままでよいのだろうかという問題を考察する。現在の素粒子物理学は、時空は4次元ミンコフスキーであるとして、大きな成功を収めている。しかし多くの研究者が、時空構造に何らかの変更があることを期待している。拡張への動機は、発散の問題や階層性の問題の解決への期待、内部対称性の時空構造による導出の可能性、量子重力との整合性などであろう。

これまでにいろいろな時空が考えられてきた。離散時空は、発散の問題を根本的になくする可能性として非常に魅力的なアイデアである。しかし残念ながら、結局のところ背景連続時空を導入しなければ、離散時空の定量的な定式化はほとんど不可能なように思える。実際、連続性なしには次元数すら定義できない。

高次元時空 ($4+N$ 次元) は、一番安直な時空概念の拡張の仕方である。これは Kaluza-Klein 以来1世紀近い歴史があり、1980年代から高次元超重力、超弦理論などの関連で、多くの人が研究するようになった。最近は場の量子論的な「余次元理論」も大流行している。しかしこれらの理論は、結局のところ内部の N 次元空間を**手で差別する**のである。$4+N$ 次元対称性はたんなる誇大広告に過ぎない。

もちろん、自発的対称性の破れのようなことが起って、N 次元空間がすべての4次元時空点において完全に一様に小さくなるのだというシナリオが、しばしば「願望」としては述べられている。

しかし最初から、このシナリオが自然な形で定式化されるとは到底思えなかった。そして事実、20 年以上経っても未だにその解決への糸口の片鱗すら見つかっていない。

高次元といっても、余剰の次元がグラスマン的の場合は、それを手で細工する必要はない。超対称性 (SUSY) はその意味で非常に自然な拡張である。しかし、残念ながら、どうも自然は SUSY を選択しなかったように思われる。

SUSY は、物理的 S 行列の対称性としてはポアンカレ対称性の可能な唯一の拡張であるが、それが現実の素粒子の世界で破れているのは明らかである。理論的に知りたい作用積分の対称性の拡張としては、SUSY は決して唯一の可能性ではない。

また、SUSY が自発的に破れているとすると、南部ゴールドストーン・フェルミオンが存在しなければならないが、現実には存在しない。超重力を使って、超ヒッグス機構でそれを吸収するという期待もあるが、それでは素粒子物理学で重力を無視するという近似が、コンシステントに使えないことになってしまう。

そして SUSY が正しいとすると何よりも不思議なのは、これだけ多くの高エネルギー実験がなされていながら、ただの 1 つも超対称性粒子が見つかっていないということである。自然が「完全犯罪」を目論むはずはないだろうから、SUSY が真の対称性であると期待するのは、どうも無理なような気がする。

時空の量子化は半世紀以上前の Snyder に始まるが、最近非可換幾何学の流行により、量子時空が多くの研究者の興味を惹いている。だが量子重力で量子化されなければならないのは 2 時空点間の距離であって、1 時空点 x^μ ではない。x^μ を非可換量にするのは、その根拠も原理もよく分からないのである。

$[x^\mu, x^\nu]$ を 0 でない c 数とすると、2 次元の場合を除きローレンツ共変性と矛盾する。それなのに、作用積分を選択する原理には、

それが 0 のときのローレンツ不変性が使われたりして、甚だ無節操なことが行なわれている。またこの種の理論では、何を「時空」と呼ぶべきかの客観的な判定条件がなく、c 数時空で定式化できるのに、論文の著者の自己満足のために非可換時空が使われたりするようである。

一般相対論は、重力を幾何学に帰着させた。量子論においても、時空の幾何学的構造の問題は重要な議論の対象となっている。しかし、時空のトポロジーなど幾何学的構造は、一体誰が決めるのだろうか。非相対論的量子力学の枠内の話ならば、それは多分実験屋が設定するのであろう。しかし、場の量子論のハイゼンベルク場の x^μ は直接観測される時空ではなく、実験屋がコントロールできるようなものではない。宇宙論屋の中には、ミンコフスキー時空よりも、現実の膨張宇宙を支配しているロバートソン・ウォーカー時空を採る方が正当だなどと主張する人がいるが、これは歴史的事実と物理法則を混同した議論である。現実の複雑な宇宙を勝手に一様等方と近似し、それを擬リーマン空間の理論にあてはめてこしらえた半現象論的モデルを、究極理論の基礎に据えるのは全く理不尽というほかはない。「始めに多様体ありき」という考え方はおかしいと思う。

人間は古典論的にしか認識できない。しかし、自然を律するのは量子論のはずである。そこで観測結果の確率解釈によって、量子論を古典論に翻訳することになる。すなわち、量子論の観測理論は人間サイドの理論であり、これを無理に究極理論の中に取り込もうとすべきではないという立場を採りたい。自然は量子論としてそれ自身で完結しているべきである。そこで次の原理を提起したい。

[量子優先の原理]

究極理論においては、いかなる古典物理的概念も、その

量子論的構成より論理的に先行して現われてならない。

この原理を時空構造に適用すると、先験的に作用積分にいかなる多様体も仮定してはならないことになる。ミンコフスキー空間も特殊相対論の帰結だから許されない。従って、公理論的場の量子論の公理「局所因果律」も否定される。

量子優先の原理から、x^μ はたんなる 4 つの実数の組に過ぎないものと考える。実数体は "0" という特異な元を持つ。"0"の特異性を避けるには、並進不変性の要請をするのが妥当であろう。さらに、x^μ の任意の 1 次結合も平等なのが望ましい。そこで一般線形変換不変性をも要請する。並進不変性と一般線形変換不変性をあわせて、アフィン不変性という。$\boldsymbol{R}^4$ のアフィン変換は、$\boldsymbol{R}^4$ の解析的な自己同型対応として一意的に特徴づけられる。アフィン幾何学は純粋に数学的なもので、いかなる古典物理学とも無縁である。

さて、ドドンデア・ゲージで BRS 量子化された正準形式の量子重力理論は、アフィン不変である。アフィン不変な理論では、正準形式特有の「時間の特別扱い」の困難がない。なぜなら、「時間」は x^μ の任意の 1 次結合でよいからである。

アインシュタイン方程式は計量符号を特定しないが、作用積分と対称性の生成子は $\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$ を含み、エルミート性は計量符号を制限する（不定計量理論では $|\det g_{\mu\nu}|$ は意味がない)。計量符号の指定は、四脚場 $h_\mu{}^a$（ただしその幾何学的意味は忘れよ）を導入し、

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h_\mu{}^a h_\nu{}^b$$

と表わすことにより行なうのが自然である。ここで、対角行列 η_{ab} はシルヴェスターの定理に基づくたんなる符号因子であって、決してミンコフスキー空間の導入を意味するものではないことを強調しておきたい。余分に導入された 6 自由度は、局所ローレンツのゲージ固定と BRS 不変性による補助条件により、物理的部分空間

から排除される。

ゲージ固定後の時空関連の対称性は、並進生成子 P_μ と $GL(4)$ 生成子 $\hat{M}^\mu{}_\nu$ である。後者と四脚場 $h_\mu{}^a$ との交換関係、及び後者とディラック場（もしくはワイル場）ψ との交換関係は、

$$[\hat{M}^\mu{}_\nu,\, h_\lambda{}^c] = -i(x^\mu \partial_\nu h_\lambda{}^c + \delta^\mu{}_\lambda h_\nu{}^c)$$

$$[\hat{M}^\mu{}_\nu,\, \psi] = -ix^\mu \partial_\nu \psi$$

となる。ψ は時空に関してはスカラー量である。また、$SO(3,1)$ 生成子 $M^{ab}(= -M^{ba})$ との交換関係は、

$$[M^{ab},\, h_\lambda{}^c] = -i(\eta^{ac} h_\lambda{}^b - \eta^{bc} h_\lambda{}^a)$$

$$[M^{ab},\, \psi] = -i\sigma^{ab}\psi$$

で与えられる。$SO(3,1)$ は時空変換とは無関係である。

並進不変性は、それが破れるべき特段の理由がないから、自発的に破れていないとするのが自然である。そうすると、四脚場の真空期待値 $\langle 0|h_\mu{}^a|0\rangle = u_\mu{}^a$ は x^μ に依存しない。四脚場を含む交換子の真空期待値をとると、

$$\langle 0|[\hat{M}^\mu{}_\nu,\, h_\lambda{}^c]|0\rangle = -i\delta^\mu{}_\lambda u_\nu{}^c$$

$$\langle 0|[M^{ab},\, h_\lambda{}^c]|0\rangle = -i(\eta^{ac} u_\lambda{}^b - \eta^{bc} u_\lambda{}^a)$$

であるが、四脚場の逆行列の存在条件 $\det u_\mu{}^a \neq 0$ を要請すると、$\hat{M}^\mu{}_\nu$ も M^{ab} も自発的に破れていることが分かる。ここで、$\hat{M}^\mu{}_\nu$ の対称部分の南部ゴールドストーン・ボソンは、重力子に他ならない。

以下、時空に依存しない量の添え字は $\alpha, \beta, ..$ を用いる。$u_\gamma{}^\alpha$ の転置逆行列を $v^\gamma{}_\beta$ と書く（すなわち $u_\gamma{}^\alpha v^\gamma{}_\beta = \delta^\alpha_\beta$）。極めて重要な事実は、自発的に破れていない生成子が存在するということである。実際、

$$\tilde{M}^{\alpha\beta} \equiv [\eta^{\beta\gamma} u_\delta{}^\alpha v^\epsilon{}_\gamma - (\alpha \leftrightarrow \beta)]\hat{M}^\delta{}_\epsilon + M^{\alpha\beta}$$

と置くと、

$$\langle 0|[\tilde{M}^{\alpha\beta},\, h_\lambda^{\ c}]|0\rangle = 0$$

となる。さらに、$\tilde{x}^\alpha \equiv u_\mu^{\ \alpha} x^\mu$（従って $\tilde{\partial}^\alpha \equiv \eta^{\alpha\beta} v^\mu_{\ \beta} \partial_\mu$）と置けば、

$$[\tilde{M}^{\alpha\beta},\, \psi] = -i(\tilde{x}^\alpha \tilde{\partial}^\beta - \tilde{x}^\beta \tilde{\partial}^\alpha + \sigma^{\alpha\beta})\psi$$

である。$\tilde{x}^\alpha$ を物理的時空と呼ぶ。このとき、$\tilde{M}^{\alpha\beta}$ は物理的時空のローレンツ変換の生成子、ψ は物理的時空におけるスピノールに他ならない。

このように、素粒子物理学のミンコフスキー空間が、**勝手な仮定を手で入れないで**得られる。ローレンツ変換は、電弱理論の電磁 $U(1)$ 対称性と同じく、自発的対称性の破れの結果現われる 2 次的対称性である。従って、ポアンカレ対称性を基本原理として出発した SUSY に基く超重力は、正しい方向ではないと信ずる。

アフィン空間からのミンコフスキー空間の導出は、多くのお膳立ての結果であるような印象を受ける人があるかもしれないが、手で勝手な細工をしないで、最初に仮定しなかった時空構造を導出するということが、いかに難しいかを理解して頂きたいと思う。