

氏名	石 森 勇 次 いし もり ゆう じ
学位の種類	工 学 博 士
学位記番号	工 博 第 820 号
学位授与の日付	昭 和 58 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	工 学 研 究 科 数 理 工 学 専 攻
学位論文題目	Studies on Solitons and Evolution Equations of Nonlinear Wave Systems (非線形波動系におけるソリトンおよび発展方程式に関する研究)

論文調査委員 (主査) 教授 上田 顯 教授 大矢勇次郎 教授 伊原千秋

### 論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、ソリトンとそれを記述する非線形発展方程式に関する問題として、1次元非線形系における遠距離力と分散性の関係、Sine-Gordon 型格子系の離散性の効果、連続系に対する逆散乱法の異なる枠組間の相互関係の解明と格子系への拡張などについての数理物理学的研究結果をまとめたものであって、緒論、結語を合めて6章より成っている。

緒論では、ソリトン発見の端緒となった Korteweg-de Vries (KdV) 方程式について、ソリトンが基準モードの性格をもつことが明らかにされる経過を簡潔に述べた後、ソリトン理論の課題に触れている。ついで第5章までの各章を概説している。

第2章では、 $(2n, n)$ Lennard-Jones ポテンシャルで相互作用する1次元非線形格子において、最近接粒子間のみならず、すべての粒子間の力を考慮したとき、格子を伝播するソリトンに現われる影響を考察している。長波長かつ微小振巾近似のもとで、波動伝播を記述する非線形発展方程式は、 $n$  の値によって3種類に分類され、 $n=2$  では代数型ソリトンをもつ Benjamin-Ono (BO) 方程式、 $n \geq 4$  では指数型ソリトンをもつ KdV 方程式となることを証明し、長距離力が分散性を増すことを示している。ついで BO 方程式の  $N$  ソリトン解の別解法として、広田の方法で  $N$  周期波解を求め、その長波長極限として  $N$  ソリトン解を導出している。

第3章では、物性物理でよく現われる Sine-Gordon 系について、連続体近似では見落される系の離散性がキルク・ソリトンの伝播に及ぼす動的効果を、離散性の度合を示すパラメータについて摂動展開し、詳細に解析している。すなわち、ソリトンがパイエルズ障壁によってピン止めされる臨界速度、ピン止めされたソリトンの周期運動の周波数の表式が陽に導かれ、また伝播するキルク・ソリトンがフォノンをまとう結果としての変形、フォノン放出に伴うエネルギー損失の表式も得られている。なお、これらの結果と数値実験の比較もなされている。

第4章では、非線形発展方程式の解法である逆散乱法の二つの異なる枠組が等価であることが示されて

いる。Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) はいくつかの非線形発展方程式を包括的に含む一般的枠組を、2行2列の行列の固有値問題として定式化した。Wadati-Konno-Ichikawa (WKI) は少し異なる行列を採用して、いくつかの新しい積分可能な非線形発展方程式を見出した。著者は一般的 AKNS の枠組に対するゲージ変換を適用し、一般的な古典スピンモデルを記述する方程式を導き、さらに従属変数に依存する時間空間座標変換を導入することにより、WKI の枠組で見出された各方程式が、スピンモデルの方程式から導かれることを証明している。とくに WKI の見出した非線形弾性棒を伝播するループ・ソリトンの方程式は変形 KdV 方程式と等価であることが示されている。

第5章では、ゲージ変換を格子系に拡張し、非線形シュレーディンガー格子モデルから、1次元格子上の可積分なスピンモデルが導かれている。また、この系の逆散乱法による解法が示され、以下の詳しい解析が行われている。まず Gel'fand-Levitan 方程式が導かれ、ソリトン解が構成される。つぎに散乱データに対するポアソン括弧式から、系のハミルトニアンが作用・角変数型の正準共役変数で表示され、系が完全に可積分であることが示される。またこのハミルトニアンから逆にスピン系のハミルトニアンが導かれ、両系の等価なことが示される。

第6章では、結論を簡単に述べるとともに今後の問題をいくつか指摘している。

### 論文審査の結果の要旨

非線形波動で発見されたソリトンの概念は流体力学、プラズマ物理、物性物理、場の理論などの広い分野に適用され、一つの普遍的概念として確立されつつある。またソリトンを記述する非線形発展方程式に関する数理論理学的研究は急速な発展を見せている。

本論文は、このような状況のもとで、1次元非線形格子系における長距離力の分散効果、Sine-Gordon 型格子系の離散性の効果、逆散乱法の枠組などに関して行った研究結果をまとめたものであって、得られた主な成果は以下の通りである。

1. 非線形格子を伝播するソリトンに関する従来の研究は、主として最近接粒子間のみ相互作用のある系に限られていた。しかし物質によっては遠距離力の影響が無視できないものがある。この影響が格子を伝播するソリトンに及ぼす効果を、粒子間ポテンシャルとして  $(2n, n)$  Lennard-Jones ポテンシャルをもつ1次元格子形について調べ、 $n$  の値により3種類の非線形発展方程式が得られることを示した。この方程式は  $n \geq 4$  のとき、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式となり、 $n=2$  のときは流体力学で内部波を記述する Benjamin-Ono (BO) 方程式となる。この結果は長距離力が強くなると、分散性が増し、空間的に指数型減衰の KdV ソリトンからひろがった代数型減衰の BO ソリトンになること、および BO 方程式が格子系でも現われることを示している。さらに BO 方程式の  $N$  ソリトン解の別解法も与えた。

2. Sine-Gordon 系について、格子間隔の有限性がキルク・ソリトンの伝播に及ぼす影響はパイエルス障壁および微小振巾格子振動の励起(フォノン)として現われる。著者はこの影響の動的効果を摂動論によって詳細に解析した。すなわち、ソリトンのパイエルス障壁によるピン止め運動の特徴を明らかにし、またフォノンをまとうことによるソリトンの変形、フォノン放出によるエネルギー損失についての表式を導いた。これらの結果は数値実験とよい一致を示している。

3. 逆散乱法に対して, AKNS は KdV 方程式を含めて同じ分散性をもついくつかの非線形方程式を包括的に含む逆散乱法の一般的枠組を定式化した。他方 WKI は少し異なる定式化により, いくつかの新しい積分可能な非線形方程式を見出した。著者は逆散乱法の枠組に対するゲージ変換の概念を用い, AKNS の枠組から一般的古典スピンモデルの方程式が導かれること, さらにこのモデルに著者が導入した時間空間座標変換を行うと, WKI の枠組の各方程式が導かれることを示した。とくに WKI のループ・ソリトンの方程式は変形 KdV 方程式と等価であることが示された。以上の結果は非線形性は異っても逆散乱法で積分可能ないくつかの非線形発展方程式が同じ分散性をもつならば, それらは等価なことを示唆するものとして, 注目されている。

4. 3のゲージ変換を格子系に拡張し, 非線形シュレーディンガー格子モデルから, 1次元格子上の可積分な新しいスピンモデルを導き, 逆散乱法によりソリトン解を得た。つぎにこのスピン系のハミルトニアンを作用・角変数で表現するための正準変換を見出して, 系が完全に可積分であることを示し, 逆にこのハミルトニアンからスピン系のハミルトニアンを直接導き, 両系が等価なことを示した。このスピンモデルは数学的ではあるが, 互いに隣接するスピンのなす角が小さいとき古典ハイゼンベルグモデルに移行する。

以上を要するに, 本論文は非線形分散波動系について, 系の離散性や遠距離力の効果, 発展方程式間の相互関係, 等価性などに関する新知見を得, また新しい数学モデルを提示するなど, 学術上, 応用上貢献するところが少なくない。

よって, 本論文は工学博士の学位論文として価値あるものと認める。