数理解析研究所講究録
925 巻 1995 年 43-52

Bloch–Kato 予想の紹介 （その 2 ）

杉本 真 (Shin Sugimoto)

Department of Mathematical Sciences
University of Tokyo

1. 序

本稿では、都築氏による第一部を引き継いで、Bloch–Kato 予想の定式化やその具体的な例について述べる。説明なく用いられる motive の用語については、この講究録の斎藤秀司氏の文などを参照されたい。尚、単に 'motive' と言う場合、ここでは pure motive を意味している。

(1.1) motive M に対して、Hasse–Weil 型の L-関数が定まる。Deligne, Beilison, Bloch 等により、Hasse–Weil L-関数の整数点における特殊値の超越数部分の予想が立てられている。これから述べる Bloch–Kato の玉河数予想とは、上の予想を拡張して、有理数部分の値も込めた形で L-関数の特殊値を予想するものである。

以前より、代数群に対して、玉河数と呼ばれる実数が定義され、その値について予想がなされていた ([W])。Lie 環の exponential map を用いて代数群に玉河測度と呼ばれる測度が定まる。玉河数とは、大体、代数群の adele 上の有理点を大域体（代数体）上の有理点で割ったものの玉河測度による volume である。玉河数予想は、それが $\dfrac{\#\mathrm{Pic}_{\mathrm{tor}}}{\#Ш}$ であるというものである。線形代数群に対しては、かなりの場合に証明されている。

Bloch は [B] で、特に Abel 多様体のばあいの玉河数予想から、L-関数の特殊値に関する Birch, Swinnerton-Dyer 予想が導かれることを示した。Abel 多様体は、代数群であると同時に 'motive' と見ることもできる。Abel 多様体に対する玉河数の定義及び玉河数予想を一般の motive に拡張することによって、L-関数の特殊値の予想を定式化しようというのが、Bloch–Kato [BK] の方針である。有理点や exponential map に相当するものを定義するため、motive を realization の system と見て、議論する。そこで、第一部で述べられた p 進 Hodge 理論が不可欠の手段となる。

(1.2) まず、Hasse–Weil の L -関数の定義と性質について復習する。K を有限次代数体、M を K 上の motive 、 w を M の weight 、M_ℓ を M の ℓ 進 realization

とする。(K 上の proper smooth scheme X に対し、 $M = H^i(X)(r)$ であれば、 $w = i - 2r$, $M_\ell = H^i_{\text{ét}}(X \otimes_K \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell(r))$ である。) M の Hasse–Weil L -関数は、

$$L(M,s) = \prod_{\mathfrak{p}} P_{\mathfrak{p}}(M_\ell, \# k(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

で与えられる。但し、$\mathfrak{p}$ は 0 でない O_K の素イデアル全体を動き、$k(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ での剰余体であり、$f_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれそこでの Frobenius 、惰性群とするとき、

$$P_{\mathfrak{p}}(V,T) = \det_{\mathbb{Q}_\ell}(1 - f_{\mathfrak{p}}T | V^{I_{\mathfrak{p}}})$$

と定める。$P_{\mathfrak{p}}(V,T)$ は $\mathbb{Q}[T]$ に入ると予想される。$L(M,s)$ は $Re(s) > \dfrac{w}{2} + 1$ で絶対収束し、 $\mathbb{C}$ 全体の有理型関数に解析接続して、$s = \dfrac{w+1}{2}$ を軸とする関数等式を満たすと予想されている。関数等式の正確な形については、[Se] 参照。

Riemann zeta 、Dedekind zeta 、Dirichlet L 、Artin L 、及び楕円曲線の L などの幾何的なものから生ずる L-関数は、すべて Hasse–Weil の L の一種である。

weight w の motive M に対して、 $L(M,s)$ の整数点での予想される様子について述べる。簡単のため、 $M = H^i(X)(r)$ とした。

(1.2.1) $s > \dfrac{w}{2} + 1$ のとき。

ここでは、$L(M,s)$ が絶対収束するので、零点も極もない。$L(M,s)$ の値の超越数部分に関しては、Beilison の予想がある。

(1.2.2) $s < \dfrac{w}{2}$ のとき。

ここでは、関数等式の予想によって、 $L(M,s)$ の値は、(1.2.1) の場合に帰着される。また、 $\mathrm{ord} = \mathrm{rank}(gr^s_\gamma K_{2r-s}(X))$ の零点を持つと予想される。

(1.2.3) w が偶数で、 $s = \dfrac{w}{2} + 1$ のとき。

$L(M,s)$ はここでのみ極を持ちえて、

$$\mathrm{ord} = \mathrm{rank}(\mathrm{CH}^s(X)/(\mathrm{hom.} \sim 0 \text{ の部分}))$$

と予想される (Tate 予想)。ここで、CH は Chow 群である。

(1.2.4) w が奇数で、$s = \dfrac{w+1}{2}$ のとき。

$L(M,s)$ はここで、$\mathrm{ord} = \mathrm{rank}(\mathrm{CH}(X)^s_{\mathrm{hom.}\sim 0})$ の零点を持つと予想される (Birch, Swinnerton-Dyer 予想の一般化)。特殊値に関しては、Beilinson, Bloch, Gillet–Soulé により定義された Height pairing が寄与すると考えられる ([Be1],[B2])。

(1.3) motive M を r 回 Tate twist して得られる motive $M(r)$ について、$L(M, s+r) = L(M(r), s)$ が成り立つ。従って、任意の motive M に対して $L(M,0)$ の値を予想すれば十分である。また、関数等式を仮定すれば、M の weight を $\leqq -1$ として良い。以下では、まず、weight $\leqq -3$ の motive に対して玉河数予想を定式化する。これは、(1.2.1) の範囲についてのものである。その後、weight $\leqq -1$ の場合に論ずる。

2. 玉河数予想

(2.1)　局所体の場合。K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次代数拡大体、V を $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の ℓ進（resp. p 進）表現、即ち、$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続的に作用する有限次 $\mathbb{Q}_\ell$ （resp. $\mathbb{Q}_p$ ）vector 空間とする（ $\ell \neq p$ ）。T を V の lattice 、即ち、$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ が連続的に作用する free $\mathbb{Z}_\ell$ （resp. $\mathbb{Z}_p$ ）-submodule で、$T \otimes \mathbb{Q} = V$ となるものとする。

都築氏の第一部の (3.1) により、$H^1_*(K,V)$, $H^1_*(K,T)$ （$* = e$, f , g ）が定義される。

次に、大域体の場合。K を有限次代数体、U を空ではない $\mathrm{Spec}(O_K)$ の開集合、T を rank 有限の free Λ -module とする。但し、ここで Λ は $\mathbb{Z}_\ell$, $\mathbb{Q}_\ell$, $\hat{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{A}_f$ などの環を考えている。K_v を素点 v における完備化とする。

この時、 $H^1_{f,U}(K,T)$ を $H^1(K,T)$ の類で $H^1(K_v,T)$ における像が

$$\begin{cases} v \in U \text{のとき、} H^1_f(K_v,T) \text{ に入り} \\ v \notin U \text{のとき、} H^1_g(K_v,T) \text{ に入る} \end{cases}$$

ようなもののなす部分とする。また、$H^1_g(K,T) = \varinjlim_U H^1_{f,U}(K,T)$ と定める。

(2.2)　以下では、必要ならば Weil restriction を考えることによって、基礎体を $\mathbb{Q}$ とする。 $\mathbb{A}_f$ は $\mathbb{Q}$ の adele 群の有限素点部分である。

motivic pair (V,D) を次の data により定義する。motive に対して、Betti realization と de Rham realization との組を見ていることになる。

(1) V は有限次 $\mathbb{Q}$ -vector 空間で、$V \otimes \mathbb{A}_f$ は、$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の連続的で $\mathbb{A}_f$ -linear な作用を持ち、 V は $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ に対し安定である。

　[motive として、 $\mathbb{Q}$ 上の proper, smooth な多様体 X に対する $H^m(X)(r)$ という例を考えると、$V = H^m(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(r))$ である（ $\mathbb{Q}(r) = \mathbb{Q}((2\pi i)^r)$ ）。]

(2) D は有限次 $\mathbb{Q}$ -vector 空間で、減少 filtration $(D^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を持つ。

　[上の例では、 $D = H^m_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{Q})$ である。]

(3) 素点 p に対し、 $V_p = V \otimes \mathbb{Q}_p$, $D_p = D \otimes \mathbb{Q}_p$ と書く。但し、 $p = \infty$ に対しては、 $\mathbb{Q}_p$ とは $\mathbb{R}$ のことである。

　$p < \infty$ ならば、

$$\theta_p : D_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{DR}(V_p)$$

　となる filteration を保つ写像がある。ここに、 $\mathrm{DR}(*) = H^0(\mathbb{Q}, * \otimes \mathbb{B}^i_{\mathrm{dR}})$ である。

　[上の例では、$V_p = H^m_{\text{ét}}(X_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathbb{Q}_p(r))$ であり、 θ_p は p 進 Hodge 理論から定まる写像である。]

　$p = \infty$ ならば、

$$\theta_\infty : D_\infty = D \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} (V_\infty \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})^+$$

という写像がある。右辺の $+$ は複素共役 σ を $\sigma\otimes\sigma$ で作用させるときの不変部分である。

［上の例では、θ_∞ は古典的に知られた写像である。］

更に、$P_{\mathfrak{p}}(V_p,T)$ の independent of ℓ などの、幾つかの技術的な公理を満たすことを要求する。公理の正確な記述はここでは省略する（[BK] *Definition 5.5* 参照）。

(2.3)　motivic pair (V,D) に対して、M を V の $\mathbb{Z}$ -lattice で $M\otimes\hat{\mathbb{Z}}\subset V\otimes\mathbb{A}_f$ が、$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-stable なものとする。

［上の $H^m(X)(r)$ の例では、$M=H^m(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}(r))/\mathrm{torsion}$ である。一般には、M はこのように canonical な取り方はないかもしれないが、玉河数予想の正当性には関係ないことが、(2.7) の後の「注」より判る。］

Φ を有限次 $\mathbb{Q}$ -vector 空間で、同型

$$R_\infty:\Phi\otimes\mathbb{R}\xrightarrow{\sim}D_\infty/(D_\infty^0+V_\infty^+)$$

$$R_{\mathrm{Gal}}:\Phi\otimes\mathbb{A}_f\xrightarrow{\sim}H^1_{f,\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Q},V\otimes\mathbb{A}_f)$$

が存在するものとする。このような Φ の存在を仮定する。

［上の例では、X に対して、$\mathbb{Z}$ 上の proper, regular な model $\mathfrak{X}$ が取れると予想され、

$$\Phi=\mathrm{Image}(H^{m+1}_{\mathcal{M}}(\mathfrak{X},\mathbb{Q}(r))\longrightarrow H^{m+1}_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(r)))$$

である。但し、

$$H^m_{\mathcal{M}}(X,\mathbb{Q}(r))=gr^r_\gamma(K_{2r-m}(X))\otimes\mathbb{Q}$$

と置いた。

写像 R_∞ の target は、Deligne cohomology 群 $H^{m+1}_{\mathcal{D}}(X,\mathbb{R}(r))$ であり、R_∞ は 'Beilinson regulator' として知られる写像である。つまり、ここでは Beilinson 予想を仮定している。R_{Gal} はその有限素点上での類似である。］

(2.4)　代数群の時の有理点に相当するものを定義する。

$$A(\mathbb{Q}_p)=H^1_f(\mathbb{Q}_p,M\otimes\hat{\mathbb{Z}})$$

とする。これは、自然な位相で compact になる。また、

$$A(\mathbb{R})=(D_\infty\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}/(D_\infty^0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}+M))^+$$

と置く。但し、$V_\infty\otimes\mathbb{C}\cong D_\infty\otimes\mathbb{C}$ の同一視によって $M\subset D_\infty^0\otimes\mathbb{C}$ としている。これは、locally compact になる。［上の例の場合、$A(\mathbb{R})$ は中間 Jacobian になる。］

$A(\mathbb{Q})$ は、 Φ に近い群であり、

$$\begin{cases} A(\mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q} = \Phi \\ A(\mathbb{Q})_{\mathrm{tor}} = H^0(\mathbb{Q}, M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{cases}$$

を満たす。定義は、図式

$$\begin{array}{ccc} \Phi \otimes \mathbb{A}_f & \underset{R_{\mathrm{Gal}}}{\xrightarrow{\sim}} & H^1_{f,\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Q}, V \otimes \mathbb{A}_f) \\ \cup & & \cup\, i \\ \Phi & & H^1_{f,\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}(\mathbb{Q}, M \otimes \hat{\mathbb{Z}}) \end{array}$$

において

$$A(\mathbb{Q}) = i^{-1}(R_{\mathrm{Gal}}(\Phi))$$

とする。$A(\mathbb{Q})$ は、有限生成 Abel 群になる。

(2.5) 玉河測度

都築氏の第一部の (3.3) によって、expornential map "exp"

$$\exp : D_p/D_p^0 \ \cdots \to A(\mathbb{Q}_p) \qquad p < \infty$$

が、 0 の近傍の局所同型として定義される。また、 $p = \infty$ に対しては、写像

$$D_\infty/D_\infty^0 \longrightarrow A(\mathbb{R})$$

は自明に定まる。

一方、同型

$$\omega : \det_{\mathbb{Q}}(D/D^0) \cong \mathbb{Q}$$

を固定すれば、

$$\det_{\mathbb{Q}_p}(D_p/D_p^0) \cong \mathbb{Q}_p \qquad (p \leqq \infty)$$

が決まる。これらの写像を用いて $\mathbb{Q}_p$ $(p \leqq \infty)$ の Haar 測度から、$A(\mathbb{Q}_p)$ $(p \leqq \infty)$ に Haar 測度 $\mu_{p,\omega}$ を導入することができる。

S を $\mathbb{Q}$ の素点の有限集合とすると、

$$p \notin S \text{ならば、} \quad \mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p)) = P_p(V, 1)$$

となる（第一部の (4.1) 参照）。ここで、考えている motivic pair の weight が-3 以下であると仮定する。これは L -関数でいえば、(1.2.1) の部分に相当する。このときは、

$$L_S(V, 0)^{-1} = \prod_{p \notin S} \mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p))$$

が収束する。そこで、$\prod_{p\leqq\infty} A(\mathbb{Q}_p)$ 上の測度（玉河測度）を

$$\mu = \prod_{p\leqq\infty} \mu_{p,\omega}$$

によって定めることができる。μ は ω の取り方に依らない。

(2.6)　玉河数、Tate–Shafarevich 群

$$R_\infty : A(\mathbb{Q}) \longrightarrow A(\mathbb{R})/A(\mathbb{R})_{\mathrm{cpt}} = D_\infty/(D^0_\infty + V^+_\infty)$$

による像は discrete で co-compact である。また、R_∞ は、$A(\mathbb{Q}) \longrightarrow A(\mathbb{R})$ に持ち上げられることが判る。$R_{\mathrm{Gal}} : A(\mathbb{Q}) \longrightarrow A(\mathbb{Q}_p)$ をも考えると、玉河数 $\mathrm{Tam}(M)$ を

$$\mathrm{Tam}(M) = \mu(\prod_{p\leqq\infty} A(\mathbb{Q}_p)/A(\mathbb{Q}))$$

によって定義できる。

次に、

$$\alpha_M : \frac{H^1(\mathbb{Q}, M\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{A(\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \longrightarrow \bigoplus_{p\leqq\infty} \frac{H^1(\mathbb{Q}_p, M\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}{A(\mathbb{Q}_p)\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$$

を用いて、Tate–Shafarevich 群 $Ш(M)$ を

$$Ш(M) = \ker(\alpha_M)$$

と定める。ℓ -primary part $Ш(M)\{\ell\}$ が位数有限であることが証明できる。

予想 (2.7).　（玉河数予想）

$\# Ш(M) < \infty$ であり、

$$\mathrm{Tam}(M) = \frac{\# H^0(\mathbb{Q}, M^*\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))}{\# Ш(M)}$$

が成り立つ。ここで、$M^* = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ である。

注. 上の式の右辺／左辺は M の取り方によらないことが示される。

. 予想 (2.7) を L -関数で書き表すと

$$L_S(V,0) = \frac{\# Ш(M)}{\# H^0(\mathbb{Q}, M^*\otimes\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1))} \cdot \mu_{\infty,\omega}(A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})) \cdot \prod_{\substack{p\neq\infty \\ p\in S}} \mu_{p,\omega}(A(\mathbb{Q}_p))$$

となる。

(2.8) weight $\leqq -3$ の仮定がない場合にも予想を拡張する。関数等式の成立を仮定する。すると、対称性より weight $= -1, -2$ のときを考えれば良い。

$L_S(V,0)$ が零点を持ちうるので、μ は前のままでは収束しないのだが、修正して定義することができる。関数等式を認めたことにより、L -関数 $L_S(V,s)$ が複素数全体に有理型に解析接続されるとして、このとき、

$$\mu = \prod_{p\in S}\mu_{p,\omega}\cdot\prod_{p\notin S}\frac{\mu_{p,\omega}}{P_p(V,1)}\cdot|\lim_{s\to 0}\frac{L_S(V,s)}{s^a}|$$

と定義すれば良い。ただし、$a = \operatorname*{ord}_{s=0} L_S(V,s)$ と置いた。

第一部の §1 に書かれている $\mathbb{G}_m(1)$ の場合の計算は、このようにして測度を入れている例になっている。

(2.8.1) weight $= -1$ の場合。(L -関数は (1.2.4) の Birch, Swinnerton-Dyer 予想の部分に相当する。)

motive $H^m(X)(r)$ に対しては、Φ, Φ^* を Chow 群の homologically equivalent to 0 の部分によって、

$$\Phi = \mathrm{CH}^r(X)_{\mathrm{hom.}\sim 0}\otimes\mathbb{Q}$$
$$\Phi^* = \mathrm{CH}^{\dim(X)+1-r}(X)_{\mathrm{hom.}\sim 0}\otimes\mathbb{Q}$$

として定め、一般の motive に対しては、projector による像で Φ, Φ^* を定める。これらから前と同様にして、それぞれ $A(\mathbb{Q}), A^*(\mathbb{Q})$ を定義する。すると、(1.2.4) で述べた Height pairing $A(\mathbb{Q})\times A^*(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}$ が定義される。H をその descriminant とすると
玉河数予想

$$\mathrm{Tam}(M) = \frac{\prod_{p\leqq\infty} A(\mathbb{Q}_p)\cdot H}{\#\, A(\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{tor}}}$$

(2.8.2) weight $= -2$ の場合。(L -関数は (1.2.3) の Tate 予想の部分に相当する。)

まず、Artin motive (1) の形のものに対しては、古典的な玉河数予想が適用される。

次に、$H^0(\mathbb{Q}, V^*\otimes\mathbb{A}_f(1))$ となるものに対しては、$\mathrm{CH}^r/\mathrm{hom}\sim 0$ の寄与がないことになり、$A(\mathbb{R})/A(\mathbb{Q})$ の volume が有限になるので、$\mathrm{Tam}(M)$ が定義でき、玉河数予想を定式化することができる。

任意の weight $= -2$ の motive は、modulo torsion で上に述べた二つの type による extension で書けると思われている。

3. 証明されている場合

(3.1) 円分体

定理. ([BK] *Theorem 6.1*)
$r \geqq 2$ として、*motive* $\mathbb{Q}(r)$ に対する玉河数予想は modulo 2 ベキで正しい。

この証明の鍵は、円分体 $\mathbb{Q}(\zeta)$ に対する explicit reciprocity law である。これを用いて、第一部の (4.2) の定理Vにある $\mu(H^1(K, \mathbb{Z}(r)))$ の公式が導かれる。

まず、 r が偶数のとき。 $A(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/(2\pi)^r\mathbb{Z}$ となる、critical な場合である (regulator 項がない)。第一部の定理Vの公式を適用すると、玉河数予想は次の式になる。

$$\zeta(1-r) = \prod_p \frac{\# H^1(\mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))}{\# H^2(\mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))}$$

ここに、 $\zeta(s)$ は Riemann zeta である。上の式は、Lichtenbaum 予想(の regulator 項のない場合)として知られるもので、Mazur–Wiles による円分体の岩澤 main conjecure の解決 ([MW]) によって、証明されている。

次に、 r が奇数のとき。$A(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり、超越数部分の Beilinson 予想(この場合は解かれている)と第一部の定理Vを用いると、玉河数予想は次の式になる。

$$(※) \qquad \# Ш(\mathbb{Z}(r)) = [A(\mathbb{Q}) : \mathbb{Z} \cdot c_r]$$

ここで、 c_r は $H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta), \mathbb{Q}(r))$ の中の Beilinson cyclotomic element と呼ばれる特殊な元で、regulator map で $\mathbb{R}$ へ送ると $\zeta(r)$ の値を表すことが知られている。また、 $\mathbb{Z} \cdot c_r$ は必ずしも $A(\mathbb{Q})$ に含まれる訳ではないが、上の式の右辺は両者に含まれる index 有限、free な $A(\mathbb{Q})$ の lattice L を取って、 $[A(\mathbb{Q}) : L]/[\mathbb{Z} \cdot c_r : L]$ として定義している。

$c'_r \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta), \hat{\mathbb{Z}}(r))$ を、Deligne, Soulé, Ihara の定義した Galois cohomology 群の中の cyclotomic element とする。Beilinson [Be2] において、Chern class map $H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta), \mathbb{Q}(r)) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta), \hat{\mathbb{Z}}(r))$ によって、 c_r は c'_r へ送られることが示されている。そこで、(※) において c_r の代わりに c'_r を用いて良いことが判る。

(※) は 1 の p ベキ乗根を添加した体を考えるという岩澤理論の手法で証明される。Ш は ideal 類群の類似であり、また、$A(\mathbb{Q})$ は K 群に近い群であったから、単数群の一般化とも思え、c'_r は円単数の類似であることを考えると、(※) は古典的な『類数 = [単数群 : 円単数群] 』という公式の類似と思える。

(3.2)　楕円曲線

玉河数予想を少し弱めた形の ℓ -part 毎の予想（ℓ -玉河数予想）が定式化できる（[BK] *Remark 5.15.2*）。E を虚数乗法を持つ楕円曲線とする。Kolyvagin 、Rubin により証明された E の岩澤 main conjecture を用いると、E が ordinary reduction を持つような ℓ に対し、ℓ -玉河数予想が導かれることが知られている。本稿では詳細は割愛させて頂く（[BK] 第 7 章, [K] 参照)。

また、modular な楕円曲線についても、岩澤理論の一般化と玉河数予想の研究が加藤和也氏により進められている。

(3.3)　$M = \mathrm{Sym}^2(H^1(E))(2)$

E を $\mathbb{Q}$ 上の modular elliptic curve 、$\phi : X_0(N) \longrightarrow E$ を modular parametrization とし、M を motive $\mathrm{Sym}^2(H^1(E))(2)$ とする。M の L -関数は、

$$\begin{aligned} L(M,0) &= \int_{X_0(N)} (\text{weight=2 の modular form}) \\ &= \deg(\phi)\cdot\Omega\cdot C \end{aligned}$$

と書ける。但し、 Ω は period であり、 C は E が bad （だが potentially good ）reduction を持つ素点における局所的な Euler factors 、level N 及び "Manin constant" で書ける有理数である（[F] §0 Introduction 参照)。

一方、玉河数予想によると、

$$L(M,0) = \#\text{Ш}(M)\cdot\Omega\cdot C' \qquad (C' \in \mathbb{Q})$$

と書ける。Flach [F] は、"Euler system" の方法で $\deg\phi\cdot\text{Ш}(M) = 0$ を証明した。

更に、最近の Fermat 最終定理を解決した Wiles [Wi] の証明の結果、この場合の玉河数予想が示されていることになる。これは、岩澤理論的な方法ではない。$\mathcal{O}$ を $\mathbb{Z}_p$ 上有限次拡大の環、 R を $\mathcal{O}$ 上の universal deformation ring 、 $\mathcal{H}$ を $\mathcal{O}$ 上の generalized Hecke algebra とすると、全射 $R \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ がある。$\mathfrak{p}_R = \ker(R \twoheadrightarrow \mathcal{H} \to \mathcal{O})$ と置くとき、 $\#(\mathfrak{p}_R/\mathfrak{p}_R^2)$ を予想される値で押さえることに成功し、$R \cong \mathcal{H}$ が示された。この結果、semi-stable case の谷山–志村予想が導かれた。一方、 $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$ とし、

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\mathfrak{p}_R/\mathfrak{p}_R^2, K/\mathcal{O}) &\cong M \text{の Selmer 群} \\ &\cong \text{Ш}(M) \end{aligned}$$

であることから、$\#\text{Ш}(M)$ の予想される値が出るのである。

References

[B] Bloch, S., *A note on height pairings, Tamagawa numbers, and the Birch and Swinerton-Dyer conjecture*, Invent. Math. **58** (1980), 65–76.

[B2] Bloch, S., *A height pairings for algebraic cycles*, J. Pure and Appl. Algebra **34** (1984), 65–76.

[BK] Bloch, S. and Kato, K., *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, "The Grotendieck Festschrift Vol.1" (1990), Birkhäuser, 333-400.

[Be1] Beilinson, A.A., *Height pairings between algebraic cycles*, Contemporary Math. **67** (1987), 1-24.

[Be2] Beilinson, A.A., *Polylogarithm and cyclotomic elements*, preprint (1989).

[F] Flach, M., *A finiteness theorem for the symmetric square of an elliptic curve*, Invent. math. **109** (1992), 307-327.

[K4] Kato, K., *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functon via* $\mathbb{B}_{dR}$, Lecture Notes in Math. **1553** (1993), Springer-Verlag, 50–163.

[MW] Mazur, B. and Wiles, A., *Class fields of Abelian extension of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76** (1984), 179–330.

[P] Perrin-Riou, B., *Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local*, Invent. Math. **115** (1994), 81–149.

[Se] Serre, J-P., *Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou **19** (1969/70).

[So] Soulé, C., *Eléments cyclotomiques en K-théorie*, Astérisque 147–148 (1987), 225–257.

[We] Weil, A., *Adeles and algebraic groups*, Progress in Math. 23, Birkhäuser, 1982.

[Wi] Wiles, A. (1995).

この文献表では、第一部と共通するものを同じ記号で表しているため、ここのみ見るとおかしな番号の振り方になっている。

7-3-1 Hongo Tokyo 113