数理解析研究所講究録
925巻 1995年 19-33

モチーフについて

東大・数理　　斎藤 秀司

内容

§0 序論

近年`モチーフ' という言葉が常識的に用いられるようになった。これはもともと Grothendieck によって提出された概念である。様々な Weil コホモロジー理論に内在する自然な構造は（例えば複素多様体のベッチ・コホモロジーにおけるホッヂ構造、一般標数の体上の多様体の $\ell$–進エタール・コホモロジーにおけるガロア群の $\ell$–進表現、標数ゼロの体上の多様体のド・ラーム・コホモロジーにおけるホッヂ・フィルター等）それらが全く異なったコンテクストで存在しているにもかかわらず互いに深く影響し合っている。モチーフの哲学（あるいは Grothendieck のいう`モチーフのヨガ'）はこの異なる構造を背後で結びつけている神秘的な`力' を理解する試みより生じたともいえるであろう。モチーフについては筆者はすでに何回か拙論を書かせていただいている（[Sa-1],[Sa-2]）。特に最近精力的な研究が進んでいる混合モチーフについては以前の拙論に委ねることにして今回は Grothendieck がもともと定義した`pure なモチーフ' について簡単にその定義、意義、例、応用等について述べていきたい。

§1 Weil コホモロジー理論と pure なモチーフの圏

今 k を固定された基礎体として $\mathcal{C}_k$ を k 上の非特異射影的なスキームのなす圏とする（後の都合上 $X\in\mathcal{C}_k$ は必ずしも連結とは限らないとする。）。$X\in\mathcal{C}_k$ と整数 $r\geq 0$ にたいし X 上の余次元 r の代数的サイクルとは形式和

$$\sum_{V\subset X} n_V\cdot[V]$$

ことである。ここに和は X の余次元 r の既約部分多様体 V をわたる有限和で $n_V\in\mathbf{Z}$、整数である。X 上の余次元 r の代数的サイクル全体は自然に加法群となるがこれを代数的サイクル上の有理同値と呼ばれる関係

で割った群を X の余次元 r の Chow 群と呼び $CH^r(X)$ で表す。さらに $CH^r(X)_{\mathbf{Q}} = CH^r(X) \otimes \mathbf{Q}$ とおく。

'$\mathcal{C}_k$ 上の Weil コホモロジー理論' とは反変函手

$$H^* \ : \ \mathcal{C}_k \to GrAlg_K;\ X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(X)$$

でいくつかの性質を満たすものである。但し K はある標数ゼロの体で $GrAlg_K$ は K 上の反可換な次数つき多元環のなす圏とする。満たすべき性質とは通常のコホモロジー理論の持つ共通のもので **Künneth** 分解、サイクル写像の存在、ポアンカレ双対定理といったものである。また $H^*(X)$ の多元環としての乗法はコホモロジーのカップ積に対応している。以下 Weil コホモロジー理論の定義を簡単にふりかえってみよう。$\mathcal{C}_k$ の射 $f \ : \ Y \to X$ にたいし

$$f^* \ : \ H^*(Y) \to H^*(X)$$

を函手的射とする。

(1) (**Künneth** 分解公式) $X, Y \in \mathcal{C}_k$ とし

$$p \ : \ X \times Y \to X, \quad q \ : \ X \times Y \to Y$$

を射影とする。このとき

$$H^*(X) \otimes H^*(Y) \simeq H^*(X \times Y) \ ; \ a \otimes b \to p^*(a) \cdot q^*(b)$$

が成立。

(2) (ポアンカレ双対定理) $X \in \mathcal{C}_k$ を連結 n 次元とするとき

(*i*) $i \notin [0, 2n]$ にたいし $H^i(X) = 0$ が成立。

(*ii*) 自然な `向き付け' 同型 $H^{2n}(X) \simeq K$ が与えられている。

(*iii*) 自然な積 $H^i(X) \times H^{2n-i}(X) \to H^{2n}(X) \simeq K$ は非特異である。

(3) (サイクル写像) 函手的射

$$\gamma_X^r \ : \ CH^r(X)_{\mathbf{Q}} \to H^{2r}(X)$$

が与えられている。さらにこれら **Künneth** 分解, ポアンカレ双対定理, サイクル写像の間には種々の適合性が成立。詳しいことは[Kl]を参照。

いくつかの例をあげることにする。

(1-1)

(i) $k \subset \mathbf{C}$（$\mathbf{C}$ は複素数体）の場合 $X(\mathbf{C})$ を X の複素数有理点の集合に $\mathbf{C}$ より定まる通常の位相を与えたものとする。そのときその Betti コホモロジー

$$H^i(X) := H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \quad (K = \mathbf{Q})$$

(ii) $\overline{k}$ を k の代数閉包、ℓ を k の標数と異なる素数としてエタールコホモロジー

$$H^i(X) := H^i_{et}(X \times_k \overline{k}, \mathbf{Q}_\ell) \quad (K = \mathbf{Q}_\ell)$$

(iii) k が標数ゼロの体としてドラームコホモロジー

$$H^i(X) := H^i_{DR}(X/k) \quad (K = k)$$

(iv) k が標数 p の完全体、$W(k)$ を Witt 環, K をその商体としてクリスタリンコホモロジー

$$H^i(X) := H^i_{crys}(X/W(k)) \otimes_{W(k)} K$$

Grothendieck は上に述べた種々の Weil コホモロジー理論に内在する普遍的性質を見据えることによって‘k 上の pure なモチーフの圏’ $\mathcal{M}_k$ の存在を想定した。それはある意味では‘$\mathcal{C}_k$ の線型化’とも見れる。$\mathcal{M}_k$ の満たすべき基本的性質を挙げると

(1-2)

(i) $\mathcal{M}_k$ はアーベル圏でしかも半単純である。更に $\mathcal{M}_k$ にはテンソル積 $\otimes$ が定義されている。

(ii) 自然な反変函手

$$h \ : \ \mathcal{C}_k \to \mathcal{M}_k; \ X \to h(X)$$

が存在する。

(iii) 上の h は次の普遍性を満たす。任意の Weil コホモロジー理論 $X \to H(X)$ は $\mathcal{C}_k$ から K 上のベクトル空間の圏 Vec_K への函手と見たとき一意に $H = R_H \circ h$ と分解する。ここに

$$R_H \ : \ \mathcal{M}_k \to Vec_K$$

は忠実な完全函手で‘実現函手’（‘realization functor’）と呼ばれる。更に R_H はテンソル積を保つ。$\mathcal{C}_k$ の対象 M, N にたいし

$$R_H(M \otimes N) = R_H(M) \otimes R_H(N).$$

次説で $\mathcal{M}_k$ の定義を与えよう。

§2 モチーフ（Motive）の圏の構成

まず代数的サイクル上の二つの同値関係を導入しよう。$X \in \mathcal{C}_k$ を d 次元連結多様体とし $c, c' \in CH^r(X)_{\mathbf{Q}}$ とする。最初に数値的同値（numerical equivalence）を

$$c \sim c' \Longleftrightarrow < c, a > = < c', a > \quad \text{for any } a \in CH^{d-r}(X)_{\mathbf{Q}}$$

で定義する。ここに

$$< \ , \ > \ : CH^r(X)_{\mathbf{Q}} \times CH^{d-r}(X)_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Q}$$

をサイクルの交点数によって与えられるものとする。次に任意に与えられた Weil コホモロジー理論

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(X)$$

に対してホモロジー同値（homological equivalence）を

$$c \sim c' \Longleftrightarrow \gamma_X^r(c) = \gamma_X^r(c'),$$

で定義する。ここに

$$\gamma_X^r \ : CH^r(X)_{\mathbf{Q}} \to H^{2r}(X)$$

をサイクル写像とする。Grothendieck はスタンダード予想の一部として上の二つの同値関係が一致する（特にホモロジー同値は Weil コホモロジー理論の取り方に依存しない）ことを仮定することにより $\mathcal{M}_k$ の構成を行なっている。そこでは $\mathcal{M}_k$ 内の morphisms の群 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_k}$ を定義するのに代数的サイクルを用いている。一方 Deligne は複素多様体上の代数的サイクルの定めるコホモロジーの Hodge サイクルの持つある著しい性質（複素数体 $\mathbf{C}$ の任意の自己同型で移してもそれはまた Hodge サイクルである）に着目して'絶対 Hodge サイクル'を定義しこれを代数的サイクルの代対物とすることによりスタンダード予想の仮定なしに $\mathcal{M}_k$ の定義をしている。この一見 general nonsense ともとれるような抽象的な理論が CM 型アーベル多様体のゼータ関数の特殊値の研究に深い応用があるのは真に興味深い（詳しくは[DMOS]参照）。最近 Jannsen[J] が Grothendieck の定義した $\mathcal{M}_k$ の半単純性をスタンダード予想なしに示している事にも注意しておこう。

さて Grothendieck 流の $\mathcal{M}_k$ の定義を振り返ってみよう。実際以下の定義において代数的サイクル上の適当な同値関係 Rを一つ固定したときそれに関するモチーフの圏 $\mathcal{M}_k(R)$ が定義される。この圏は必ずしもアーベル圏とは限らず後に述べるように $\mathcal{M}_k(R)$ が半単純アーベル圏となるための必要十分条件は Rが数値的同値であることである。一方前節（１－２）(iii) の条件が満たされるためには Rが種々の Weil コホモロジー理論より定まるホモロジー同値より細かい必要がありここに前節でのべた $\mathcal{M}_k$ が存在するためには上のスタンダード予想の一部を仮定する必要があるのである。また Rが有理同値（ rational equivalence ）、ホモロジー同値（ homological equivalence ）、数値的同値（ numerical equivalence ）と粗くなるに従い自然な函手

$$\mathcal{M}_k(rat) \to \mathcal{M}_k(hom) \to \mathcal{M}_k(num)$$

が導かれる。先に述べたように $\mathcal{M}_k(rat)$ はアーベル圏とはならないわけであるが一方次のような利点も持っている。世の中には Weil コホモロジー理論ではないが現代の数論において非常に重要な役目を果たす一般化されたコホモロジー理論と呼ばれるものがある。たとえば素体上の有限生成体上の多様体の絶対 ℓ−進エタール・コホモロジーであるとか、モチーフの L−関数の整数点における特殊値に関する Beilinson 予想において活躍する Deligne-Beilinson コホモロジーがそれである。またこれらは混合モチーフの理論とも関係があり興味深い。$\mathcal{M}_k(rat)$ の利点とはこれらの一般化されたコホモロジー理論を多様体の圏 $\mathcal{C}_k$ からの函手とみたときそれは $\mathcal{M}_k(rat)$ を自然に経由するが $\mathcal{M}_k(hom)$ や $\mathcal{M}_k(num)$ を経由する事はできないということにある。$\mathcal{M}_k(rat)$ と $\mathcal{M}_k(hom)$ の関係については混合モチーフの圏の理論からの美しい解釈があるのだがそれについては今回は省略させていただきたい。

(2-1) k、$\mathcal{C}_k$を前節の通りとする。上で述べたように代数的サイクル上の適当な同値関係 Rを一つ固定する。$X, Y \in \mathcal{C}_k$ と整数 $r \in \mathbf{Z}$ にたいし

$$Corr_R^r(X,Y) = \bigoplus_i CH^{r+d_i}(X_i \times Y)_{\mathbf{Q}}/R,$$

とおくく。ここに $X = \coprod_i X_i$を連結成分への分解とし $d_i = \dim(X_i)$ とおいた。合成写像

$$Corr_R^r(X,Y) \times Corr_R^s(Y,Z) \to Corr_R^{r+s}(X,Z),$$

$$(\alpha,\beta) \to \beta \cdot \alpha := (p_{13})_*(p_{12}^*\alpha \cdot p_{23}^*\beta),$$

が定義される。ただし

$$p_{12} : X \times Y \times Z \to X \times Y, p_{23} : X \times Y \times Z \to Y \times Z, p_{13} : X \times Y \times Z \to X \times Z$$

は射影とする。 同値関係 Rに関するk上のモチーフの圏 $\mathcal{M}_k(R)$ を以下のように定義する。

$\mathcal{M}_k(R)$ の対象は3つ組　$M=(X,\alpha,r)$ からなる。ここに $X\in\mathcal{C}$でまた$\alpha\in Corr_R^0(X,X)$ 、$\alpha\cdot\alpha=\alpha$、$r\in\mathbf{Z}$ とする。$\mathcal{M}_k(R)$ の射の集合は

$$\mathrm{Hom}((X,\alpha,r),(Y,\beta,s))=\beta\cdot Corr_R^{s-r}(X,Y)\cdot\alpha$$

によって定義されまた射の合成は上に述べた合成法則に従って定義される。自然な函手

$$h\ :\ \mathcal{C}_k\rightarrow\mathcal{M}_k(R)\ ;\ X\rightarrow h(X):=(X,\Delta_X,0),$$

が存在する。ただし$\Delta_X\subset X\times X$を対角成分とする。

(2-2) $\mathcal{M}_k(R)$ においてテンソル積が

$$(X,\alpha,r)\otimes(Y,\beta,s)=(X\times Y,\alpha\otimes\beta,r+s)$$

によって定義される。いま

$$L=(\mathbf{P}_k^1,\pi_2,0)$$

とおいて`Lefschetz　モチーフ' と呼ぶことにする。ここに$\pi_2=\mathbf{P}_k^1\times(0)$。このとき 整数$r\geq 0$ にたいし

$$\begin{aligned}(X,\alpha,-r)&\simeq(X,\alpha,0)\otimes L^{\otimes r}\\&=(X\times(\mathbf{P}_k^1)^r,\alpha\otimes(\pi_2^{\otimes r}),0)\end{aligned}$$

が成立する。

次に $\mathcal{M}_k(R)$ を加法的な圏にするため直和を定義しよう。まず特殊な場合に

$$(X,\alpha,0)\oplus(Y,\beta,0)=(X\amalg Y,\alpha\amalg\beta,0)$$

とおく。一般の場合テンソル積の加法性により

$$(X,\alpha,r)\oplus(Y,\beta,s)$$

は一意的に

$$(X\times(\mathbf{P}_k^1)^{m-r}\amalg Y\times(\mathbf{P}_k^1)^{m-s},\alpha\otimes(\pi_2^{\otimes(m-r)})\amalg\beta\otimes(\pi_2^{\otimes(m-s)}),m),$$

と定義されることがわかる。ここに m は $m\geq\max(r,s)$ を満たす任意の整数とする。以上の定義により $\mathcal{M}(R)$ は ` 加法的 $\mathbf{Q}-$線形テンソル圏 (additive $\mathbf{Q}-$linear tensor category)' [DMOS, II 1.15]と呼ばれるも

のの構造を与えられたことになる。この圏は `擬アーベル的（ pseudo-abelian)' である。言い換えるとすべての射影子（ $p \in \mathrm{End}(M)$, $p \cdot p = p$（ $M \in \mathcal{M}_k(R)$ ）なるもの）がその像と核を持つという性質を持つ。

(2-3) （実現函手 (realization functor) ）いま Weil コホモロジー理論

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(X)$$

を一つ選んでおく。代数的サイクル上の同値関係 Rを一つ固定しそれは上の Weil コホモロジー理論が定めるホモロジー同値（ homological equivalence ）より細かいと仮定する（例えば Rとして有理同値をとれる)。このとき各整数 i にたいし準同型

$$Corr_R^0(X,X) \to \mathrm{Hom}(H^i(X), H^i(X)) \ ; \ \alpha \to \alpha_*$$

が定義される。ここに$\sigma \in H^i(X)$ にたいし

$$\alpha_*(\sigma) = (p_2)_*(\gamma^n_{X\times X}(\alpha) \cup p_1^*(\sigma)), \quad (n = \dim(X))$$

とおいた。ただし p_i ： $X \times X$（ $i = 1, 2$ ）は射影とする。このとき対応

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(X)$$

は実現函手（ realization functor ）と呼ばれる函手

$$H^* = \bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} H^i \ : \ \mathcal{M}_k(R) \to (\text{graded } K\text{-vector spaces})$$

に延長される。その定義は

$$H^i((X,\alpha,r)) = \mathrm{Im}(\alpha_* \ : \ H^{i+2r}(X) \to H^{i+2r}(X))$$

に依って与えられる。ただし Kは固定された Weil コホモロジー理論の係数体とする。

次の美しい結果は U. Jannsen[J]による。

定理（２－４）次の条件は同値である。

（１） $\mathcal{M}_k(R)$ は半単純なアーベル圏である。

（２） Rは数値的同値（ numerical equivalence ）である。

系（２－５）$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k(hom)$ をホモロジー同値に関する k 上のモチーフの圏とする。もし数値的同値とホモロジー同値が一致するなら $\mathcal{M}_k$ は前節の（１－２）(i),(ii),(iii) の条件をすべて満たす。

これにより第１節で導入された $\mathcal{M}_k$ が存在するためには **homological equivalence** と **numerical equivalence** が一致することが必要であることがわかる。この二つの同値関係の一致はスタンダード予想の一部であることに注意しておこう。

(2-6) ここでは圏 $\mathcal{M}_k(hom)$ において考えることにする。$X \in \mathcal{C}_k$ を d 次元連結多様体とし

$$[\Delta_X] = \sum_{i=0}^{2d} \pi_X^i, \qquad \pi_X^i \in H^{2d-i}(X) \otimes H^i(X)$$

を対角成分のコホモロジー類の **Künneth** 分解とする。ここで次の条件を考える。

$C(X)$: 任意の整数 i にたいし π_X^i は代数的、つまり $\pi_X^i \in Corr_{hom}^0(X, X)$.
いま $C(X)$ が成立すると仮定する。定義より $\pi_X^i \cdot \pi_X^i = \pi_X^i$ であるから各整数 $r \in \mathbf{Z}$ にたいしホモロジー同値に関する k 上のモチーフ

$$h^i(X)(r) := (X, \pi_X^i, r) \ \in \mathcal{M}_k(hom)$$

が定義される。また

$$h(X)(r) := (X, \Delta_X, r) \ \in \mathcal{M}_k(hom)$$

と書くことにしよう。簡単のため $h(X) = h(X)(0)$ あるいは $h^i(X) = h^i(X)(0)$ と記することもある。定義により

$$H^*(h^i(X)(r)) = H^i(X),$$

$$h(X) = \bigoplus_{i=0}^{i=2\dim(X)} h^i(X)$$

が成り立つ。

§3 Lefschetz の固定点定理と Weil 予想

有限体上の多様体の有理点の数を数え上げることによって定義される **Weil** の合同ゼータ関数にまつわるいわゆる **Weil** 予想が現代数学に与えた影響はあまりにも大きい。**Grothendieck** はその前半部分に当たる有理性

を示したわけであが、じつはこれはエタール・コホモロジーという Weil コホモロジーが構築された暁には形式的に従う事実であった。今

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(X)$$

を任意に与えられた Weil コホモロジー理論としよう。前節（２－２）で見たように写像

$$Corr_R^0(X,X) \to \mathrm{Hom}(H^i(X), H^i(X))\ ;\ \alpha \to \alpha_*$$

がある。ここに R はホモロジー同値（ homological equivalence ）より細かい任意の代数的サイクル上の同値関係。次に述べるいわゆる Lefschetz の固定点定理は Weil コホモロジー理論の持つ公理的性質より形式的な議論によって従うものである（くわしくは[Kl]を参照)。

定理（３－１）(Lefschetz の固定点定理) $X \in \mathcal{C}$ を連結多様体とする。次の公式が成立。

$$< \Delta_X, \Gamma >= \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i Tr(\Gamma_* : H^i(X)).$$

ここに左辺は $X \times X$ 上のサイクルの交点数とする。

ここで注意すべき大切な事実は上式の左辺は Weil コホモロジー理論に依らないことである。

さて今基礎体 k として有限体をとってみよう。k の元の数を q 個（ $k = \mathbf{F}_q$ ）として

$$F\ :\ X \to X$$

を座標を q 乗するいわゆるフロベニウス写像とし F^n をその n 回の合成とする。また簡単のためこれらのグラフ（これらは $Corr^0(X,X)$ の元）も同じ文字で表すことにする。（３－１）より

$$< \Delta_X, F^n >= \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i Tr(F_*^n : H^i(X))$$

を得る。一方上式の左辺は X の q^n 元体に座標を持つ有理点の数 $\nu_n(X)$ に他ならない。かくして

$$\nu_n(X) = \sum_{i=0}^{2\dim(X)} (-1)^i Tr(F_*^n : H^i(X))$$

なる式を得たわけであるがこれから形式的な議論により次を導くことができる。

定理(3−2)(合同ゼータ関数の有理性と関数等式) $X \in \mathcal{C}_k$($k = \mathbf{F}_q$)を d 次元連結多様体としその合同ゼータ関数を

$$\log Z(X,t) = \sum_{n\geq 1} \nu_n(X)\frac{t^n}{n}$$

によって形式的べき級数として定義する。このとき

$$Z(X,t) = \prod_{i=0}^{2d} P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$$

が成立。ここに

$$P_i(t) = det(1 - F_* \cdot t | H^i(X)).$$

さらに $Z(X,t)$ は関数等式

$$Z(X, \frac{1}{q^d t}) = \pm(q^{\frac{n}{2}}t)^{\chi(X)} Z(X,t)$$

を満たす。ここに

$$\chi(X) =< \Delta_X, \Delta_X >= \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \dim(H^i(X)).$$

後半の関数等式は Weil コホモロジー理論の公理的性質のうちの一つポアンカレ双対定理より形式的に従う。

§4 曲線の h^1 とヤコビ多様体

この節ではモチーフの重要な例として曲線の h^1 とそのヤコビ多様体との関係について説明しよう。kを固定された基礎体とし k上の有理同値関係に関するモチーフの圏 $\mathcal{M}_k(rat)$ の中で考えることにする。$\mathcal{C}_k$を以前の通り k上の非特異射影的なスキームの圏とし $X \in \mathcal{C}_k$を d 次元連結多様体とする。Xの k−有理点 $x \in X(k)$ を一つ固定して

$$h^0(X) := (X, x \times X, 0) \in \mathcal{M}_k(rat), \quad h^d(X) := (X, X \times x, 0) \in \mathcal{M}_k(rat)$$

とおく。このとき $\mathcal{M}_k(rat)$ における同型

$$h^0(X) \simeq \underline{1} := h(\mathrm{Spec}(k)) \quad \text{and} \quad h^d(X) \simeq \mathbf{L}^{\otimes d}$$

が見て取れる。

さて $d = \dim(X) = 1$ を仮定しよう。このとき

$$h^1(X) = (X, \Delta_X - (x \times X) - (X \times x), 0) \in \mathcal{M}_k(rat)$$

とおくと

$$h(X) = h^0(X) \oplus h^1(X) \oplus h^1(X)$$

なる $\mathcal{M}_k(rat)$ における直和分解が成り立つ。次の定理は Weil による。

定理（４－１） $X, Y \in \mathcal{C}_k$ を非特異射影的な曲線とし $J(X)$ 、$J(Y)$ をそれらのヤコビ多様体とする。このとき自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_k(rat)}(h^1(X), h^1(Y)) \simeq \mathrm{Hom}(J(X), J(Y)) \otimes \mathbf{Q}$$

が成り立つ。ここに右辺の Hom はアーベル多様体としての準同型ぜんたいを表す。

系（４－２） $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{M}_k(rat)$ を

$$h^1(X), \quad X \in \mathcal{C}_k,\ \dim(X) = 1$$

なるモチーフの直和因子たちより生成される充満な部分圏とすると圏としての同値

$$\mathcal{A}_k \simeq \text{the category of abelian varieties over } k \text{ up to isogeny}$$

が成り立つ。

（４－１）は Weil の結果

$$CH^1(X \times Y) \simeq CH^1(X) \oplus CH^1(Y) \oplus \mathrm{Hom}(J(X), J(Y))$$

より従う。（４－２）に関してはすべてのアーベル多様体は適当な曲線のヤコビ多様体のアーベル部分多様体であるという事実とポアンカレの完全可約性定理より従う。

最後に上の考察より簡単に従う事実として次のことに注意してみよう。ℓを固定された素数としエタール・コホモロジー理論

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell) \quad \overline{X} = X \times_k \overline{k}$$

にたいする $M \in \mathcal{M}_k(rat)$ の実現（ realization ）（２－３）を $H_{et,\ell}(M)$ とする。同様に $k = \mathbf{C}$ 、複素数体としベッチ・コホモロジー理論

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$$

にたいする $M \in \mathcal{M}_k(rat)$ の（実現）realization を $H_B(M)$ とする。このとき曲線 $X \in \mathcal{C}_k$ にたいし

$$H_{et,\ell}(h^1(X)) = T_\ell J(X)(-1) \otimes \mathbf{Q}_\ell,$$

$$H_B(h^1(X)) = H^1(J(X), \mathbf{Q}) = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Q}$$

が成り立つ。ここに

$$T_\ell J(X) = \varprojlim_n J(X)(\overline{k})[\ell^n]$$

は X のヤコビ多様体の Tate 加群で (-1) は 1 の巾根へのガロア群作用による Tate ひねりとする。また $k = \mathbf{C}$ のとき $J(X)(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^g/\Gamma$ を X のヤコビ多様体の解析的表示とする。ここに g は X の種数とし $\Gamma \subset \mathbf{C}^g$ は適当な格子である。

§5 保型形式のモチーフ

この節ではモチーフの重要な例として保型形式 f のモチーフ M_f をあげることにする。これは代数的サイクル上の有理同値（rational equivalence）に関する有理数体 $\mathbf{Q}$ 上のモチーフの圏 $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}(rat)$ の元として定義される。まず $\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}(rat)$ に関する大切な一般的事実に注意しておこう。それは $M \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}(rat)$ は任意に与えられた Weil コホモロジー理論に対し自然な realization functor が存在することである（（2－3）参照）。特に ℓ を固定された素数としエタール・コホモロジー理論

$$X \to H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2\dim(X)} H^i(\overline{X}, \mathbf{Q}_\ell)$$

にたいするその実現（realization）$H_{et,\ell}(M)$ が得られるがこれは有理数体 $\mathbf{Q}$ の絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ の連続な ℓ−進表現

$$\rho_{M,\ell} \;:\; \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{Aut}(H_{et,\ell}(M))$$

を与えることになる。さらにこれはモチーフの L−関数

$$L(M,s) = \prod_p L_p(M, p^{-s}) \quad (s \in \mathbf{C}),$$

$$L_p(M,t) = det(1 - \rho_{M,\ell}(\sigma_p^{-1}) \cdot t | H_{et,\ell}(M)^{I_p})$$

を生じせしめる。ここに上の積はすべての有理素数にわたる。$\sigma_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ は p におけるフロベニウス置換、$I_p \subset \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ は $\mathbf{Q}$ の素点 p の $\overline{\mathbf{Q}}$ への

延長を一つ選んだときの惰性群とする。$L(M,s)$ は s の実部分$\Re(s)$ が十分大きいところで絶対収束する事がわかる（これには Deligne に依って示された Weil 予想の後半部分、フロベニウス写像の固有値の絶対値に関する部分が使われる）。

以下保型形式のモチーフの話に移ろう。

$$\Gamma_1(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) | a \equiv d \equiv 1\ (N), c \equiv 0\ (N)\},$$

$$\Gamma_0(N) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) | c \equiv 0\ (N)\}$$

とし

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}, \quad a_1 = 1$$

を$\Gamma_1(N)$ に関する重さ $k \geq 2$ の new form で Hecke 作用素の同時固有関数とする。よく知られているようにある指標

$$\psi \ : \ (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$$

にたいし

$$(f_{|k}\gamma)(\tau) := (c\tau+d)^{-k} f(\gamma(\tau)) = \psi(d) f(\tau) \quad \text{for any } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

が成立する。いま簡単のためにすべての n にたいし $a_n \in \mathbf{Q}$ とする（この仮定は本質的ではない）。このとき Deligne-Scholl[Sch] は次の性質を満たす $\mathbf{Q}$ 上のモチーフ $M_f \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}(rat)$ を構成した。ℓを固定された素数としエタール・コホモロジー理論にたいするその実現（ realization ）を $H_{et,\ell}(M_f)$ とする。

<u>定理（５－１）</u>　(1) $\dim_{\mathbf{Q}_\ell} H_{et,\ell}(M_f) = 2$.

(2) M_f より生ずるガロア表現

$$\rho_{f,\ell} \ : \ \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{Aut}(H_{et,\ell}(M_f)) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$$

にたいし次が成立。

(i) $p \nmid N\ell$とすると$\rho_{f,\ell}$は p で不分岐で

$$det(1 - \rho_{f,\lambda}(\sigma_p^{-1}) \cdot t | H_{et,\ell}(M_f)) = 1 - a_p t + \psi(p) p^{k-1} t^2$$

が成立。ここに$\sigma_p \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ は p におけるフロベニウス置換。

(ii) $p=\ell$かつ$p \nmid N$とすると$\rho_{f,p}$は$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$の表現としてはFontaineの意味でcrystalline表現で

$$det(1-\phi\cdot t|Crys(H_{et,\ell}(M_f)))=1-a_pt+\psi(p)p^{k-1}t^2$$

が成立。

（５－１）$(2)(i)$の性質はEichler-Schimura（重さ２の場合）とDeligne（重さ一般の場合）の結果の細密化になっている。これはM_fのL–関数$L(M,s)$が保型形式fのMellin変換として表されることを導き、特に$L(M,s)$が全平面$s\in\mathbf{C}$に解析接続されることが帰結される。一般にモチーフのL–関数の解析接続性は数論における重要な問題でわずかな特殊例に対してのみ知られている。最近一大センセーションとなったA.Wilesの志村ー谷山予想に関する仕事によれば次が成り立つ。

定理（A.Wiles） Eを有理数体上の半安定な（semi-stable）楕円曲線とすれば$h^1(E)\in\mathcal{M}_{\mathbf{Q}}(rat)$は適当な保型形式$f$にたいしそれの定めるモチーフ$M_f$と同型になる。とくに$E$の$L$–関数あるいはそのHasse-Weilゼータ関数はfのMellin変換として表され全複素平面への解析接続が保証される。

（５－１）(ii)はいわゆるp–進ホッヂ理論からの応用でその記号の意味も含めて詳しい説明は省略する。ただ一言つけ加えておくなら保型形式の整数論、特に対応するガロア表現の研究において上で現れた$p=\ell$の場合の考察は非常に重要である。$(2)(ii)$の証明にはM_fの構成に加えてFontaine-Messing[F-M]の理論とKatz-Messing[K-M]の定理が使われる。

M_fの構成はレベル構造付きの楕円曲線のモジュライ空間（モジュラー曲線）上のユニバーサルな楕円曲線の何回かのファイバー積の特異点を解消しさらにそのうえに適当な代数的サイクルを構成することがポイントである。

参考文献

[DMOS] P. Deligne, J. Milne, A. Ogus, K. Shih, *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, Lecture Notes in Math. **900** (1982).

[F-M] J.-M. Fontaine and W. Messing, *p-adic periods and p-adic étale cohomology*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207.

[J] U. Jannsen, *Motives, numerical equivalence, and semi-simplicity*, Invent. Math. **107** (1992), 447–452.

[K-M] N. Katz and W. Messing, *Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields*, Invent. Math. **23** (1974), 73–77.

[Kl] S.L. Kleiman, *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, in: Dix Exposes sur La Cohomologie des Schemas, North-Holland.

[Sa-1] 斎藤 秀司, 代数幾何と数論, 数理科学 **3** (1994).

[Sa-1] 斎藤 秀司, モチーフ・*Grothendieck* の見果てぬ夢, 数理科学 **8** (1994).
[Sch] A. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 419–430.