数理解析研究所講究録
988 巻 1997 年 8-15

Mandelbrot 集合の外射線の到達性について

東京工芸大学　中根静男　(Shizuo Nakane)

1　序

本小論では、Mandelbrot 集合の外射線の到達性についての先駆的な Douady-Hubbard [DH] の仕事と、それを簡略化した最近の Milnor [M2] と Schleicher [S] の仕事を紹介する。

２次多項式写像族 $P_c(z) = z^2 + c$ を考える。それらの充填 Julia 集合、Julia 集合を次で定義する。

$$\begin{aligned} K(P_c) &= \{z \in \mathbf{C};\text{その軌道 } \{P_c^n(z)\}_{n\geq 0} \text{ が有界}\}, \\ J(P_c) &= \partial K(P_c). \end{aligned}$$

それらの族の connectedness locus を Mandelbrot 集合という。

$$M = \{c \in \mathbf{C}; J(P_c)\text{ が連結}\}.$$

$c \in M$ ならば、ある等角写像

$$\varphi_c : \overline{\mathbf{C}} - K(P_c) \to \overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{D}},\ \mathbf{D} = \{|z| < 1\}$$

で

$$\varphi_c \circ P_c = P_0 \circ \varphi_c,\ \lim_{z\to\infty} \varphi_c(z)/z = 1$$

を満たすものがただ一つ存在する。この写像による、偏角 t の半直線 $\{re^{2\pi it}; r > 1\}$ の原像 $R_t^{K_{P_c}}$ を $K(P_c)$ の外周角 t の外射線という。$\Phi(c) = \varphi_c(c)$ とおくと、$\Phi : \overline{\mathbf{C}} - M \to \overline{\mathbf{C}} - \overline{\mathbf{D}}$ は等角写像で $\lim_{c\to\infty} \Phi(c)/c = 1$ を満たすので、M の外射線 R_t^M も同様に定義する。$G_c(z) = \log|\varphi_c(z)|$, $G_M(c) = G_c(c)$ を、各々 K_c, M のグリーン関数とする。

外射線 R_t^* の集積点の集合 $\overline{R_t^*} - R_t^*$ が一点からなるとき、R_t^* はその点に到達するという。φ_c や Φ が等角写像のときは、Caratheodory の定理により、$K(P_c)$ や M が局所連結ならば、全ての外周曲線は到達する。Douady-Hubbard [DH] は、局所連結であるなしにかかわらず、全ての $t \in \mathbf{Q}$ に対し $R_t^{K(P_c)}$ 及び R_t^M は到達することを示し、更に相空間とパラメータ空間との関係についても考察した。以下に解説するのは次の結果である。

定理 1.1　*1.* 周期的な外周角 t の外射線 R_t^M は放物的な点 c に到達する。このとき、R_t^c は危値を含む *Fatou* 成分の支持射線（その *Fatou* 成分に隣接するアクセスを通って放物的周期点に到達するもの）である。

2. 放物的な点 c は、その相空間で危値を含む *Fatou* 成分の支持射線の外周角 t の外射線 R_t^M の到達点である。

3. 前周期的な外周角 t の外射線 R_t^M は *Misiurewicz* 点 c に到達する。このとき R_t^c は c に到達する。

4. *Misiurewicz* 点 c は、その相空間で危値 c に到達する外周角 t の外射線 R_t^M の到達点である。

このテーマが [DH] の主結果ではないかと思われるほどの頁を割いて [DH] は証明を与えたが、それは決して読み易いものではない。Schleicher [S] は、tricorn に対する外射線の理論をも念頭において、彼らの証明を簡略化した。それは単なる簡略化ではなく、Ecalle cylinder のような解析的な道具を, 組み合わせ論的なものに置き換えることによって、tricorn のような解析的ではない族に対しても適用できるようにしたのである。一方、Milnor [M2] は [S] とは違った観点から [DH] の結果の簡略化を行なった。

2 Douady-Hubbard の方法

充填 Julia 集合 $K(P_c)$ の外射線の到達性については、次のようにまとめられる。以後、簡単のため、$R_t^{K(P_c)}$ を R_t^c と書く。

補題 2. 1 $K(P_c)$ が連結ならば、有理角 t の外射線 R_t^c は放物的又は反発的な周期点又は前周期点に到達する。$K(P_c)$ が連結でないときは、危値 c の外周角が $2t, 4t, 8t, \dots$ でなければ、R_t^c は反発的な周期点又は前周期点に到達する。$2t, 4t, 8t, \dots$ のどれかならば、R_t^c は危値の逆軌道上の点に跳ね返り、到達しない。逆に、放物的及び反発的な周期点及び前周期点は有限個の有理角の外射線の到達点になる。

パラメータ空間での外射線の到達性を示す際に、次の補題は重要な役割を果たす。

補題 2. 2 (前) 周期的な外周角 t に対し、外射線 $R_t^{c_0}$ が反発的な (前) 周期点 z_0 に到達し、全ての $n \geq 0$ に対し $P_{c_0}^n(z_0) \neq 0$ ならば、c_0 の近傍 W があって、

$$\psi_t : W \times [0, \infty) \to \mathbf{C},\ \psi(c, s) = \varphi_c^{-1}(e^{s+2\pi i t}),$$

は連続で、c に関して正則。特に、c_0 に十分近い c に対しても R_t^c は反発的な (前) 周期点に到達し、到達点は c に関して正則である。

補題 2. 3 周期的な外周角の外射線 R_t^M は、ある放物的なパラメータ $c_0 \in M$ に到達する。$R_t^{c_0}$ は放物的周期点に到達する。前周期的な外周角の外射線は放物的なパラメータか又は *Misiurewicz* 点に到達する。

証明. 最初に t は周期的とする。c_0 を R_t^M の集積点とすると、補題 2. 1 より $R_t^{c_0}$ は放物的又は反発的周期点に到達する。今到達点が反発的としてみよう。補題 2. 2 より c_0 の近傍の点 c でも R_t^c は反発的周期点に到達する。しかし c_0 は R_t^M の集積点なので c_0 の近くに $c \in R_t^M$ をとると危値 c が R_t^c 上にある。今 t は周期的故、補題 2. 1 より R_t^c は到達し得なく、矛盾。よって $R_t^{c_0}$ は放物的周期点に到達する。この周期点の周期と回転数は t で規定され、そのような放物的周期点を持つようなパラメータは有限個しか無いことが分かる。R_t^M の集積点の集合は有限集合で、しかも連結でなければならないので一点からなる。従って R_t^M は放物的なパラメータ c_0 に到達する。

t が前周期的のときは、$t' = 2^m t$ が k-周期的になるような $m > 0$ がとれて、$R_{t'}^{c_0}$ は放物的又は反発的周期点に到達する。放物的周期点に到達すれば明らかに c_0 は放物的である。反発的周期点 z_0' に到達するときは、補題 2.2 より、c_0 の近傍 W と連続関数 $\psi_{t'}$ がとれる。$c_n \in R_t^M$ を c_0 に収束する点列とすると、$s_n = G_M(c_n) \to 0$ 故、

$$\begin{aligned}\psi_{t'}(c_n, 2^m s_n) &= \varphi_{c_n}(e^{2^m(s_n+2\pi it)}) \\ &= P_{c_n}^m \circ \varphi_{c_n}^{-1}(e^{s_n+2\pi it}) \\ &= P_{c_n}^m(c_n).\end{aligned}$$

ここで $n \to \infty$ とすると、

$$z_0' = \psi_{t'}(c_0, 0) = P_{c_0}^m(c_0) = P_{c_0}^{m+1}(0)$$

となり、c_0 が Misiurewicz 点であることが従う。∎

ここまではさほど難しくはない。問題は補題 2.3 の逆、つまり、全ての放物的なパラメータに、M のしかるべき外射線が到達することを示すことにある。Douady-Hubbard [DH] は、放物的力学系の摂動の理論を用いて次の定理を証明した。

定理 2.1 P_{c_0} は固有値 $\rho = e^{2\pi ip/q}$ の放物的な k-サイクル $\{z_1, ..., z_k\}$ を持つとする。危値 c_0 を含む *Fatou* 成分の支持射線の外周角のひとつを t とすると、R_t^M は c_0 に到達する。

その証明は直接的ではあるが、非常に長く読みずらいものであった。基本になるのは次の Shooting lemma である。c_0 の近傍 W 内の点 c に対し、$z = z(c)$ を、$P_c^k(z(c)) = z(c), z(c_0) = z_1$ となるものとする。$z(c)$ は c の連続関数で、特に $q \neq 1$ ならば陰関数定理より $z(c)$ は正則である。Δ を、中心 z_1 の小さい円板、$n_0 \gg 1$、$1 < r < r^*$ を 1 に充分近い数として、$x(c) = P_c^{n_0kq}(c)$, $y(c) = \varphi_c^{-1}(re^{2\pi it})$ とおく。W を小さくとれば、$y(c) \in \Delta$ とできる。

補題 2.4 c_0 の充分小さい任意の近傍 W に対し、ある $N_0 > 0$ が存在して、全ての $N \geq N_0$ に対し、$P_c^{Nkq}(x(c)) = y(c)$ を満たす $c = c_N \in W$ がある。しかも $N \to \infty$ のとき $c_N \to c_0$ となる。

証明には Ecalle cylinder の素朴な理論を用いる。

さて、$s > G_c(0)$ ならば、$s \in I = [s^*/2^{kq}, s^*), s^* = \log r^*$ として、$y(c, s) = \varphi_c^{-1}(e^{s+2\pi it})$ を定義できる。この $y(c, s)$ に対し、Shooting lemma 2.4 より、

$$P_c^{Nkq}(x(c)) = y(c, s),$$

を満たす c がある。$G_c(c) = u = u_{N,s} = s/2^{(n_0+N)kq}$ である。この c を c_u とかくと、c_u は $0 < u < u^* = s^*/2^{(n_0+N_0)kq}$ に対し定義される。$u_{N,s^*/2^{kq}} = u_{N+1,s^*}$ に注意する。やはり Shooting lemma 2.4 より、$u \to 0$ のとき $c_u \to c_0$ が従う。定理2.1 は次の補題から従う。

補題 2.5 $c = c_u$, $0 < u < u^*$ は R_t^M の先端部分をパラメトライズする。

あとは、周期的な外周角の個数と、放物的なパラメータの個数を比較することにより、定理 1.1 の 1. と 2. が示される。そのために、双曲的成分の根を考える。

補題 2.6 M の各双曲的成分 W 上、吸引的サイクルの固有値写像は等角で、$\overline{W}$ 上の同相写像に延ばせる。

∂W 上、固有値写像が 1 となる点を W の根という。前補題2.6 より双曲的成分は唯一つ根を持つ。根は放物的な点である。

そして放物的なパラメータはある双曲的成分の根になっていること、双曲的成分が根を共有しないことを示す。前者は固有値写像の解析性から、後者は双曲的成分の境界が滑らかで、互いに接していることを示すことによって導かれる。こうして、双曲的成分と、放物的なパラメータが 1 対 1 に対応ずけられる。

補題 2.7 周期が n の約数の周期的な外射線の本数は 2^n で、周期が n の約数の双曲的成分の個数は 2^{n-1} である。

証明. 周期が n の約数の外周角は $(2^n-1)t \equiv 0$ を満たすので、2^n 個ある。周期が n の約数の双曲的成分の中心は $P_c^n(0) = P_c^{n-1}(c) = 0$ を満たす。これは c の 2^{n-1} 次方程式で、その解は全て単解であることがわかるので、ちょうど 2^{n-1} 個ある。よって、双曲的成分もちょうど2^{n-1} 個ある。∎

こうして、c_0 に到達する M の外射線の外周角は定理 2.1 の支持射線のそれ以外にはないことがわかる。

次に、前周期的な t に対しては、R_t^M は放物的なパラメータか、又はMisiurewicz 点に到達することが補題 2.3 で示される。実は、放物的な点には到達しないことを示すのだが、この証明も容易ではない。$t' = 2^j t$ が周期的になるように $j > 0$ をとる。$c \in R_t^M$ を c_0 の近くにとると、$c \in R_t^c$ で、$P_c^j(c) = P_c^{j+1}(0) \in R_{t'}^c$ となる。$R_{t'}^{c_0}$ が放物的周期点に到達したとする。このとき、$c \in R_t^M$ を c_0 の近くにとると、$c \in R_t^c$ で、$P_c^{j+1}(0) = P_c^j(c) \in R_{t'}^c$ となる。しかし、Douady-Hubbard は、一方で、$P_c^j(c)$ が $R_{t'}^c$ 上にないことを、Ecalle cylinder の方法を用いて証明するのである。

補題 2.8 R_t^M の到達点 c_0 が *Misiurewicz* 点ならば、相空間で $R_t^{c_0}$ はc_0 に到達する。

証明. $R_t^{c_0}$ の到達する z_0 として、まず全ての $j \geq 0$ に対し、$P_{c_0}^j(z_0) \neq 0$ を示す。ある j で $P_{c_0}^j(z_0) = 0$ とすると、

$$\psi_{2^{j+1}t}(c_0, 0) = P_{c_0}^{j+1}(\psi_t(c_0, 0)) = P_{c_0}^{j+1}(z_0) = P_{c_0}(0) = c_0,$$

が成り立つ。今、c_0 の軌道上には 0 は存在しないので、補題2.2 を $z_0 = c_0$ に適用すると、

$$P_{c_n}^{j+1}(c_n) = \psi_{2^{j+1}t}(c_n, 2^{j+1}s_n)$$

で $n \to \infty$ として、

$$P_{c_0}^{j+1}(c_0) = \psi_{2^{j+1}t}(c_0, 0) = c_0,$$

従って、$P_{c_0}^{j+1}(0) = 0$ となり、矛盾。

よって、補題 2.2 を z_0 に適用すると、

$$c_0 = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \psi_t(c_n, s_n) = \psi_t(c_0, 0) = z_0,$$

となり、補題が従う。∎

補題 2. 9 c_0 が *Misiurewicz* 点で $R_t^{c_0}$ が c_0 に到達するならば、R_t^M は c_0 に到達する。

証明. $z_0 = c_0$ に対して補題 2. 2 を適用すると、$s \geq 0$ に対し、$H_s(c) = \psi_t(c, s) - c$ は c_0 の近傍 W で正則で、$H_0(c_0) = 0$ を満たす。H_0 の $c = c_0$ での零点の位数 m とする。$\varphi_c(c) = e^{2\pi i t}$, 従って、

$$\varphi_c(P_c^{k+m}(c)) = e^{2\pi i 2^{k+m} t} = e^{2\pi i 2^m t} = \varphi_c(P_c^m(c)).$$

よって $P_c^{k+m}(c) \equiv P_c^m(c)$, これは矛盾。こうして $m < \infty$ が従う。更に十分小さい s に対し、$H_s(c) = 0$ は $c = c_0$ の近くに m 個の解を持つ。その一つを c_s とすると、$c_s = \psi_t(c_s, s) \notin K_{c_s}$ 故、$c_s \notin M$ で $\Phi(c_s) = \varphi_{c_s}(c_s) = e^{s+2\pi i t}$ 故、$c_s \in R_t^M$ となる。$\lim_{s \to 0} c_s = c_0$ から、R_t^M が c_0 に到達することが従う。∎

3 Schleicher の方法

Schleicher [S] は定理 2. 1 の証明を簡単にするために、組み合わせ論的方法を用いた。彼はまず補題 2. 3 を精密化して、放物的なパラメータに到達する M の外射線の外周角は、定理 2. 1 に述べられた相空間における外周角以外にはないことを示した。(Douady-Hubbard の方法では、この事実は定理 2. 1 と数え上げの補題 2. 7 とから示されるのである。) そのために次が必要である。

補題 3. 1 その各点に２本以上の外射線が到達するような反発的又は放物的なサイクルを考える。そのサイクルの各点は他の点と、２本の外射線とその共通の到達点である反発的周期点で分離される。

放物的なパラメータ c に対し、周期的な t で R_t^M が c に到達するようなものの全体を Θ_c とおく。

補題 3. 2 $t \in \Theta_c$ ならば、R_t^c は危値 c を含む *Fatou* 成分の根に到達する。

証明. c の近くには $R_t^{c'}$ 上に危値 c' を持つようなパラメータ c' が無数にある。一方、補題 3. 1 より、放物的周期点達は外射線達で分離されるが、それらの到達点が反発的故、補題 2. 2 よりそれらで得られる分割は c の近くで安定なので、R_t^c の到達点は危値に最も近い点でなくてはならない。∎

以下に、放物的な点 c に対し $\#\Theta_c = 2$ であることを、P_c の放物的サイクルの周期に関する帰納法で示す。$n-1$ までは正しいとする。周期 $\leq n-1$ の M の外射線とその到達点は $\mathbf{C}$ を有限個の部分に分ける。この分割を S_{n-1} と書く。周期 n の外射線とその到達点は S_{n-1} の境界とは交わらない。

補題 3. 3 $\#\Theta_c > 1$ ならば $\#\Theta_c = 2$ で、Θ_c は危値を含む *Fatou* 成分の根に、その成分に隣接するアクセスを通って到達する外射線の角の全体に等しい。

証明. 補題は次の事実から従う。

- S_{n-1} の各連結成分内の外射線の kneading sequence の始めの $n-1$ 項は全て一致する。特に周期 n の異なる kneading sequence を持つ外射線は同じ点には到達しない。

- c を放物的な点、z_1 を危値を含む Fatou 成分の根とすると、z_1 に到達する外射線のなかで、危値を含む Fatou 成分に隣接するアクセスを通る２本のみが同じ kneading sequence を持つ。

∎

よって n のときに $\#\Theta_c \leq 2$ が示された。定理 2. 1 をいうためには、$\#\Theta_c = 2$ をいえばよい。そのために、周期 n の外周角の個数と放物的な点の個数を比較する。前節の、補題 2. 7 を用いて、周期が n の約数の放物的パラメータは高々 2^{n-1} 個しかないことが示される。(双曲的成分が根を共有するかもしれないので。) しかし 2^n 本の外射線が高々 2^{n-1} 個の点に高々２本ずつ到達することから、実は放物的パラメータは 2^{n-1} 個あり、その各々にちょうど２本の外射線が到達せねばならない。こうして、n のときにも $\#\Theta_c = 2$ が示され、帰納法が完結する。同時に、双曲的成分の個数に関する命題とそれらが根を共有しないことも示される。

系 3. 1 放物的な点 c は、その相空間で危値を含む *Fatou* 成分に隣接して到達する外射線と同じ外周角の M の外射線の到達点である。

次に前周期的な外射線 R_t^M は Misiurewicz 点に到達することを示す。Schleicher [S] は、kneading sequence の議論を用いて、まずそのような R_t^M は放物的な点には到達しないことを示した。

補題 3. 4 前周期的な t に対し、R_t^M は放物的な点には到達しない。

証明. 前周期的な t の kneading sequence は前周期的で、t の前周期とその kneading sequence の前周期は一致することに注意する。さて、R_t^M が放物的点 c に到達したとする。上の議論より、c には２本の周期的な外射線 $R_{t_i}^M$、$t = 1, 2$ が到達する。$K(t)$ と $K(t_i)$ は第 j 項で異なるとすると R_t^M と $R_{t_i}^M$ は S_j の同じ成分には属し得ない。よって矛盾。∎

R_t^M の集積点を c_0、c_0 に集積する R_t^M の点列を c_n とすると、$c_n \in R_t^{c_n}$ より、$R_t^{c_n}$ は前周期点 z_n に到達する。$f_{c_n}^{k+m}(z_n) = f_{c_n}^m(z_n)$ としよう。z_n の集積点を z_0 とすると、$n \to \infty$ とすることにより、$f_{c_0}^{k+m}(z_0) = f_{c_0}^m(z_0)$ となる。今、$c_n \in R_t^{c_n}$, $G_{c_n}(c_n) = \log \Phi(c_n) \to 0$ 故、$c_n - z_n \to 0$ が従う。すると、

$$|c_0 - z_0| \leq |c_0 - c_n| + |c_n - z_n| + |z_n - z_0| \to 0,$$

よって $z_0 = c_0$、故に c_0 は Misiurewicz 点である。更に、補題2. 2 より $R_t^{c_0}$ は c_0 に到達する。

Misiurewicz 点 c_0 に対し、$R_t^{c_0}$ が c_0 に到達したとき、R_t^M が c_0 に到達することを、前節の方法で示す。

4 Milnor の方法

一方、Milnor [M2] は orbit portrait を分類することにより、周期的な外射線の到達性を論じた。それを紹介する。

P_c の周期 p の周期軌道 $\mathcal{O} = \{z_1, ..., z_p\}$ を考える。A_i を z_i に到達する $K(P_c)$ の外射線の外周角の全体とする。$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{O}) = \{A_1, ..., A_p\}$ を軌道 $\mathcal{O}$ の orbit portrait という。Milnor は、まず orbit portrait の特徴付けを与え、次に、与えられた orbit portrait

$\mathcal{P}$ を持つ反発的軌道を持つような P_c の全体を考えた。パラメータ空間でのそのような領域 $W_{\mathcal{P}}$ は、$\mathcal{P}$ から定まる外周角の M の2本の外射線とその到達点である放物的な点 c_0 で囲まれる。P_{c_0} は orbit portrait $\mathcal{P}$ の放物的軌道を持つことが示される。故に、放物的なパラメータ c_0 に対し、その放物的軌道の orbit portrait $\mathcal{P}$ を考えると、$W_{\mathcal{P}}$ の境界である M の2本の外射線は c_0 に到達しなければならない。こうして定理 2.1 が示される。

さて、$\#A_i = v$ は i によらず一定である。各 z_i とそれに到達する隣り合う外射線で囲まれる領域をセクターと呼ぶ。pv 個のセクターのなかで角度が最小のものが唯一つある。その外周角 $t_\pm$ を特性角、その到達点を特性点、$I(\mathcal{P}) = [t_-, t_+]$ を特性区間という。$\mathcal{P}$ が放物的軌道の orbit portrait ならば、その特性角は危値を含む Fatou 成分の支持射線の外周角に一致することがわかる。

$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \bigsqcup \{e^{2\pi i t}; t \in [0,1)\}$ の中で、無限円周を $\mathcal{O}$ と結ぶ全ての外射線を描いたものを orbit diagram といい、$\mathcal{D}(\mathcal{O})$ とかく。

補題 4.1 全ての $v \geq 2$ の *orbit diagram* $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{O})$ は次の性質を持つ。

1. z_i での危セクター S の角度 $\alpha(S)$ は $1/2$ より大きい。
2. 局所的には、P_c は z_i の近傍を z_{i+1} の近傍に同相に写す。z_i での各セクターは z_{i+1} のセクターに、順序を保ちながら写される。危セクターは危値セクターに写される。
3. 大域的には、z_i での非危セクター S は z_{i+1} でのセクター $P_c(S)$ に写され, $\alpha(P_c(S)) = 2\alpha(S)$ が成り立つ。z_i での危セクターは全平面を覆い、z_{i+1} での危値セクターを2重に覆う。他は1重に覆う。

証明. $S_{z_i}^j$, $0 \leq j \leq v$ を z_i でのセクターとする。$\alpha(S_{z_i}^j) < 1/2$ ならば P_c は $\partial S_{z_i}^j$ のある近傍の上で同相だから、P_c は $S_{z_i}^j$ から z_{i+1} でのセクター $P_c(S_{z_i}^j)$ の上への同相になる。P_c は危点 0 を持つので、この議論は全てのセクターには適用できない。よって、$\alpha(S_{z_i}^k) > 1/2$ を満たす k が唯一つあり、$0 \in S_{z_i}^k$ である。

S を z_i での危セクター、S' を z_{i+1} での危値セクターとする。危値 c の S' 内の近傍の P_c による原像は S に入るので、z_i での S 以外のセクターは P_c で S' 以外のセクターに写る。よって、S が S' に写る唯一のセクターである。∎

補題 4.2 $\mathcal{O}$ の各点での pv 個のセクターの中で角度が最小のものがただ一つある。このセクターは c を含み、他のどのセクターも、$\mathcal{O}$ のどの点も含まない。

証明. S を z_i での非危値セクターとすると、前補題 4.1 より z_{i-1} でのセクター S' があって $S = P_c(S)$ となる。故に$\alpha(S) = 2\alpha(S) > \alpha(S')$ となり S は角度最小でない。よって角度最小のセクターは危値 c を含むものである。∎

補題 4.3 $d \leq 2$ で、$d = 2$ となるのは $v = 2$ かつ回転数が 0 のときに限る。

定理 4.1 c_0 を放物的な点、$\mathcal{P}$ を P_{c_0} の放物的な軌道の *orbit portrait*、$t_\pm = t_\pm(\mathcal{P})$ を特性角とすると、$R_{t_\pm}^M$ はともに c_0 に到達する。$R_{t_\pm}^M$ と c_0 は c-平面を $W_{\mathcal{P}}$ と $\mathbf{C} - W_{\mathcal{P}} \ni 0$ に分ける。

証明. $c \in W_{\mathcal{P}} - M$ とすると、補題 4. 2 より c の K_c に関する（従って c の M に関する）外周角は特性区間 (t_-, t_+) に含まれる。

$c \in R^M_{t_\pm}$ ならば $R^c_{t_\pm}$ はある前危点で跳ね返るので $R^M_{t_\pm} \subset \mathbf{C} - W_{\mathcal{P}}$ が従う。よって、$\partial W - M = R^M_{t_-} \cup R^M_{t_+}$ である。

$A_{\mathcal{P}} = A_1 \cup ... \cup A_p$ を $\mathcal{P}$ の角の全体、$n = pv$ を $\mathcal{P}$ の角の周期、$F_n \subset M$ を P^n_c が、固有値 1 の不動点を持つような c の全体とする。補題 2. 2 より、$c \in M - F_n$ ならば、$R^c_t,\, t \in A_{\mathcal{P}}$ は c の近傍で安定的に反発的周期点に到達する。よって $c \in W_{\mathcal{P}}$ または $c \in \mathbf{C} - \overline{W_{\mathcal{P}}}$、従って $c \notin \partial W_{\mathcal{P}}$ となり、$\partial W_{\mathcal{P}} \cap M \subset F_n$ がわかる。F_n は有限集合なので、$R^M_{t_\pm}$ は F_n 内の同じ点 c_1 に到達しなければならない。$\partial W_{\mathcal{P}} = R^M_{t_-} \cap \{c_1\} \cap R^M_{t_+}$ が示された。∎

補題 4. 4 すべての $c_0 \in W_{\mathcal{P}}$ に対し、P_{c_0} は *portrait* $\mathcal{P}$ の反発的軌道を持つ。

証明. 前定理 4. 1 より $c \in F_n$ としてよい。c_0 の近傍で c_0 を除けば、$R^c_{t_\pm}$ は反発的な p 周期点に到達する。この周期点が c_0 で非反発的とすると、この周期点は摂動で吸引的になり矛盾。よって、c_0 でも反発的である。∎

更に Milnor は放物的な力学系の摂動を考察することにより、次を示した。

補題 4. 5 c_0 を放物的な点、$\mathcal{P}$ を P_{c_0} の放物的サイクルの *orbit portrait* とすると、c_0 のどの近傍にも *portrait* $\mathcal{P}$ の軌道を持たない c がある。つまり、c_0 は $W_{\mathcal{P}}$ の根 $r_{\mathcal{P}}$ であり、c_0 には $R^M_{t_\pm}$ が到達する。

証明は、P_{c_0} の放物的軌道に到達する外射線の、摂動後の到達の仕方を見ることによる。

こうして、放物的な点には少なくとも２本の外射線が到達することが示された。Schleicher とは逆の評価であることに注意する。ちょうど２本であることをいうためには、やはり外周角と放物的点の個数を比べる。双曲的成分が根を共有しないことも示される。

References

[DH] A. Douady and J. Hubbard: Etude dynamique des polynomes quadratiques complexes. Publ. Math. Orsay 84-02 (1984) (1er partie) and 85-02 (1985) (2eme partie).

[M1] J. Milnor: Dynamics in one complex variable: introductory lectures. Stony Brook Preprint, 1990/5.

[M2] J. Milnor: Periodic orbits, external rays and the Mandelbrot set; An expository account. Manuscript, 1995.

[S] D. Schleicher: Internal addresses in the Mandelbrot set and irreducibility of polynomials. Thesis at Cornell Univ. 1994.