数理解析研究所講究録
995 巻 1997 年 80-94

閉曲線の正則ホモトピー不変量と Gauß の問題について

奈良女子大・人間文化　　谷　尾　仁　恵 (Tanio, Hitoe)

平面上の滑らかな閉曲線 $\gamma: S^1 \to \mathbf{R}^2$ に対して，その速度ベクトルが 0 にならないとき，γ を**正則閉曲線** (*regular closed curve*) という．そして２つの正則閉曲線に対して，正則閉曲線のまま連続的に変形して一方から他方の閉曲線が得られるとき，この２つの閉曲線を互いに**正則ホモトピック** (*regular homotopic*) であるといい，正則閉曲線のままの変形を**正則ホモトピー** (*regular homotopy*) という．

正則閉曲線 γ に対して $r(\gamma)$ を,

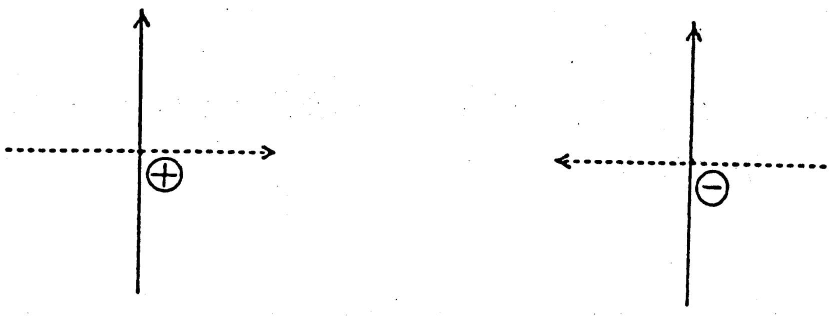
$$r(\gamma) = \deg \left(\frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}: S^1 \to S^1\right),$$

あるいは,

$$r(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \kappa_\gamma \, ds,$$

で定義する．ここで κ_γ は γ の曲率を表わす．上のように定義された量 $r(\gamma)$ は整数に値を取り，γ の**回転指数**という．平面上の回転指数はその定義より正則ホモトピー不変量であることがわかる．

ところで，平面上の正則閉曲線の回転指数については，Whitney によって組み合わせ論的に求める方法が与えられている．まず記号の準備を行う．閉曲線に向きを１つ定め，その向きに対して正の方向に進む．交点を通過するとき，もう一方の線が左から横切るとき，その交点を**正交点**，もう一方の線が右から横切るとき，その交点を**負交点**という．(次頁の図参照.)



Theorem(Whitney, 1937 [W]). $\gamma: S^1 \to \mathbf{R}^2$ を正則閉曲線とする．今，その右側が非有界領域となる点を選ぶ．そして曲線をこの点から出発して，各交点については最初に通過したときの符号をその交点の符号とする．このとき，

$$r(\gamma) = +1 + \#\{\text{ 正交点 }\} - \#\{\text{ 負交点 }\},$$

となる．ここで，左側が非有界領域となる点を選べば，右辺第 1 項の $+1$ が -1 となる．

Whitney の公式を用いると，閉曲線の交点情報からその回転指数を求めることができるが，この公式を使って回転指数を求めるときには，閉曲線の自己交点がすべて横断的に交わっている必要がある．

Definition. 自己交点がすべて横断的 2 重点であるような正則閉曲線を正規閉曲線 (*normal closed curve*) という．

したがって厳密に言えば，Whitney の定理では γ を正規閉曲線とする必要があるが，次の Whitney の補題と，平面上の閉曲線の回転指数が正則ホモ

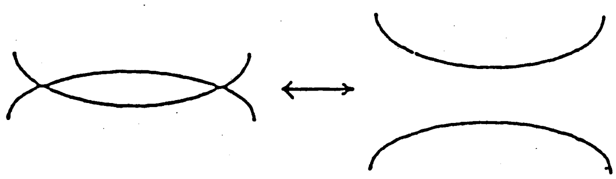
トピー不変量であることから，Whitney の公式は正規閉曲線のみについての公式であるが，十分一般的なものと言える．

Lemma(Whitney, 1937 [W]). 一般の曲面上の正則閉曲線は，それと正則ホモトピックな正規閉曲線で近似できる．

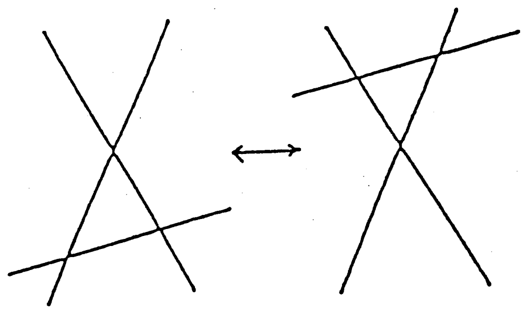
さらに平面に限らず，曲面上の正規閉曲線の正則ホモトピーは，２つの基本変形の有限回の繰り返しで得られることが Francis によって示されている．

Lemma(Francis, 1972 [F]). 曲面上の正規閉曲線の正則ホモトピーは，次の２つの基本変形の有限回の繰り返しで得られる．

①



②



平面上の正則閉曲線の正則ホモトピーによる分類については次の定理がある．

Theorem(Whitney-Graustein, 1937 [W]). $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \to \mathbf{R}^2$ を正則閉曲線とする．このとき，

$$\gamma_0 \cong_R \gamma_1 \iff r(\gamma_0) = r(\gamma_1),$$

となる．ここで，記号 $\cong_R$ は正則ホモトピックであることを表している．

与えられた正則閉曲線が互いに正則ホモトピックならば，その回転指数は一致するが，平面の場合，この定理はその逆も成り立つことを主張している．

さらに，正則閉曲線の正則ホモトピーによる分類は，一般の多様体上の正則閉曲線に対しても拡張されている．

M を多様体，T_xM を M 上の点 x における接ベクトル空間，$\gamma: S^1 \to M$ を正則閉曲線とする．ここで，$S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} = [0,1]/\sim$ と考える（$\sim$ は 0 と 1 の同一視を表している）．つまり，S^1 上の点 t は $t \in [0,1]$ で表すことにする．

今，M にはあらかじめリーマン計量が与えられているものとする．このとき，

$$UT_xM = \{X \in T_xM \mid |X| = 1\},$$

$$UTM = \cup_{x\in M} UT_xM,$$

とおく．そして正則閉曲線 γ に対して，$\vec{\gamma}: S^1 \to UTM$ を，

$$\vec{\gamma}(t) := \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|,$$

と定義する．

今，$\gamma(0) = x \in M$, $\vec{\gamma}(0) = X \in UT_xM$ とする．

Theorem(Smale, 1958 [S]). γ_0, $\gamma_1: S^1 \to M$ を正則閉曲線とする．このとき，

$$\gamma_0 \cong_R \gamma_1 \iff [\vec{\gamma_0}] = [\vec{\gamma_1}] \in \pi_1(UTM, X),$$

となる．ここで，記号 [ ] は $\vec{\gamma_i}(i = 1, 2)$ のホモトピー類を表している．

この Smale の定理より，多様体上の正則閉曲線の正則ホモトピー類全体と，多様体の単位接ベクトルバンドルの基本群の間には，1 対 1 の対応があることがわかる．特にこの定理から次のことを得る．

Corollary. dim $M \geq 3$ とする．このとき，M 上の 2 つの正則閉曲線が互いに正則ホモトピックであることと，ホモトピックであることとは同値になる．

したがって dim $M \geq 3$ のとき，正則ホモトピーと通常のホモトピーに本質的な差は無く，多様体上の正則ホモトピー不変量については dim $M = 2$，すなわち曲面のときが研究の対象となる．

多様体上の正則閉曲線の正則ホモトピーによる分類は，Smale によって理論的に完全に成されたが，実際具体的な量としては，平面上の閉曲線の回転指数が，正則ホモトピー不変量として曲面上の閉曲線に対しても一般化されている．しかし平面の場合と異なり一般の曲面の場合は，正則閉曲線の正則ホモトピー類はその一般化された回転指数では完全に決定することはできないということに注意しておく．

以下で，その一般化された回転指数の定義を行う．以後，M は曲面として話を進めることにする．

写像 p' を自然な射影

$$p': \pi_1(UTM, X) \to \pi_1(UTM, X)/[\pi_1(UTM, X), \pi_1(UTM, X)],$$

とする．基本群とホモロジー群の関係 $\pi_1(UTM, X)/[\pi_1(UTM, X), \pi_1(UTM, X)] \cong H_1(UTM; \mathbf{Z})$ より，p' は $\pi_1(UTM, X)$ から $H_1(UTM; \mathbf{Z})$ への写像とみなすことができる．そして，射影 $p: UTM \to M$ によって誘導されたホモロジー群の間の準同型写像

$$p_*: H_1(UTM; \mathbf{Z}) \to H_1(M; \mathbf{Z}),$$

は全射になることがわかるので，次の完全系列を得る．

$$0 \to \ker p_* \to H_1(UTM; \mathbf{Z}) \xrightarrow{p_*} H_1(M; \mathbf{Z}) \to 0 \qquad (*)$$

この完全系列の ker p_* については，M が連結，かつ向き付け可能な閉曲面のとき，

$$\ker p_* \cong \mathbf{Z}/\chi(M)\mathbf{Z},$$

であることが計算できる．さらに，$\ker p_*$ は具体的に次のように表すことができる．

$c_0: S^1 \to M$ を，次のような条件を満たす M 上の正則閉曲線とする．

$$\begin{cases} \text{・円板の境界となるような単純閉曲線.} \\ \text{・} \vec{c_0}(0) = X. \end{cases}$$

このとき，$p'([\vec{c_0}])$ が $\ker p_*$ の生成元となる．

今，完全系列 $(*)$ の splitting

$$\mu: H_1(M; \mathbf{Z}) \to H_1(UTM; \mathbf{Z}),$$

を１つ与える．このとき，$p_* \circ \mu = 1$ であるから，

$$p'([\vec{\gamma}]) - \mu \circ p_* \circ p'([\vec{\gamma}]) \in \ker p_*,$$

となることがわかる．したがって，ある整数 $n \in \mathbf{Z}$ に対して，

$$p'([\vec{\gamma}]) - \mu \circ p_* \circ p'([\vec{\gamma}]) = n\, p'([\vec{c_0}]),$$

と表すことができる．また $\ker p_* \cong \mathbf{Z}/\chi(M)\mathbf{Z}$ より，このような n は $\chi(M)$ を法として一意的に定まる．

Definition(Reinhart, 1960 [R]). M を連結，かつ向き付け可能な閉曲面とする．このとき，正則閉曲線 $\gamma: S^1 \to M$ に対して r_μ を，

$$r_\mu(\gamma) := n \bmod \chi(M)$$

と定義する．この r_μ を，**一般化された回転指数**という．

ここで，r_μ の性質をいくつか列記しておく．

(1) r_μ は正則ホモトピー不変量となる.

(2) r_μ は $\mathbf{Z}/\chi(M)\mathbf{Z}$ に値を取る. 特に $M = T^2$ のとき $\mathbf{Z}$ に値を取る.

(3) $H_1(M;\mathbf{Z}) \neq 0$ のとき, μ の取り方により r_μ は異なる.

(4) $\gamma = 0$ in $H_1(M;\mathbf{Z})$ のとき, $r_\mu(\gamma)$ は μ の取り方によらない.

(5) $H_1(M;\mathbf{Z}) = 0$, すなわち, 今 M は向き付けられた閉曲面としているので $M = S^2$ のとき, μ は 0 写像のみで $r_0(\gamma) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ となる. 特に, Whitney の公式を使うと $r_0(\gamma)$ は,

$$r_0(\gamma) = 1 + \text{交点数} \bmod 2 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z},$$

で与えられることがわかる.

さらに M が T^2 のとき, 多数ある回転指数 r_μ の中でも特に標準的なものを 1 つ指定することができる. それにはまず, $H_1(M;\mathbf{Z})$ の生成元となる正則閉曲線をうまく指定し, μ を定義する必要がある.

α, β を $H_1(M;\mathbf{Z})$ の生成元とする. このとき, $\mu\colon H_1(M;\mathbf{Z}) \to H_1(UTM;\mathbf{Z})$ の定義域 $H_1(M;\mathbf{Z})$ は, $H_1(M;\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\,\alpha \oplus \mathbf{Z}\,\beta$ と表わされる.

ここで, 次のような条件 (**) を満たす T^2 上の 2 つの正則閉曲線 μ_1, μ_2 を考える.

$$(**)\begin{cases} \cdot\ \mu_1,\ \mu_2 \text{ はどちらも単純閉曲線.} \\ \cdot\ [\mu_1]_H = \alpha,\ [\mu_2]_H = \beta. \end{cases}$$

ここで $[\ ]_H$ は, $\mu_i (i = 1, 2)$ のホモロジー類を表わす. このとき, $H_1(M;\mathbf{Z})$ の生成元 α, β に対して μ を,

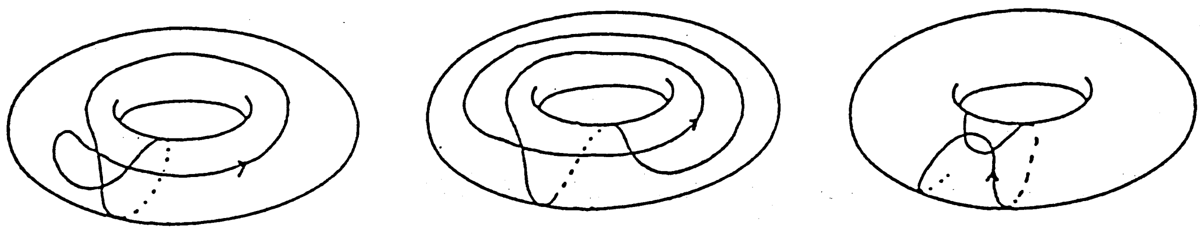
$$\mu(\alpha) := [\vec{\mu_1}]_H \in H_1(UTM;\mathbf{Z}),$$
$$\mu(\beta) := [\vec{\mu_2}]_H \in H_1(UTM;\mathbf{Z}),$$

と定義する. 生成元 α, β に対して μ を上のように定義したので, μ は $H_1(M;\mathbf{Z})$ 全体で定義される.

Remark. このような μ に対して r_μ は，(**) を満たす正則閉曲線 μ_1, μ_2 の取り方によらない．

Defenition. この r_μ を T^2 の標準的な回転指数という．

以下 r_μ を単に r と書くことにする．ここで，T^2 上のいくつかの正則閉曲線を例に上げ，この標準的な回転指数 r を求めてみる．

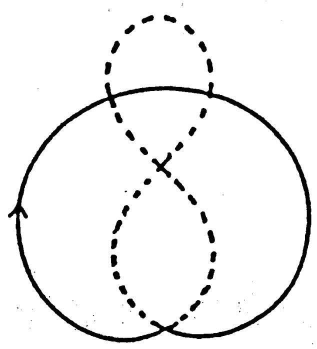


$r(\gamma) = -1$　　$r(\gamma) = 0$　　$r(\gamma) = 1$

図 1

向き付けられた曲面 M 上の正規閉曲線 γ に対して，$t(\gamma)$ という量を定義する．まず記号の準備を行う．

曲面 M 上の正規閉曲線 γ の各自己交点 p は，γ を 2 つのループに分ける．1 つは交点 p から出発して，出発方向の左から交点 p に戻って得られるループ，もう 1 つは右から戻って得られるループである．前者を記号 γ_p，後者を $\gamma_p{}'$ と表すことにする．(次頁の図参照．図では γ_p を実線，$\gamma_p{}'$ を点線で表している.)



p

Definition([TK], [T1]). M を向き付けられた曲面，$\gamma: S^1 \to M$ を正規閉曲線とする．このとき，

$$t(\gamma) := \#\{p \mid \gamma_p = 0 \text{ in } H_1(M;\mathbf{Z})\} - \#\{p \mid {\gamma_p}' = 0 \text{ in } H_1(M;\mathbf{Z})\},$$

と定義する．

Francis の lemma より次は容易に確かめられる．

Lemma. $t(\gamma)$ は正則ホモトピー不変量になる．

Corollary. $t(\gamma)$ は一般の正則閉曲線に対しても，正則ホモトピー不変量として定義される．

この $t(\gamma)$ という量は曲面上の正則ホモトピー不変量となるわけだが，同じく曲面上の正則ホモトピー不変量である一般化された回転指数 r_μ と比較しながら，この $t(\gamma)$ の性質を列記してみる．

(1) $t(\gamma)$ は正則ホモトピー不変量となる．
(2) $t(\gamma)$ は $\mathbf{Z}$ に値を取る．

(3) 回転指数 r_μ が μ の取り方によって異なるのに対して，$t(\gamma)$ はそのような補助的な指定を必要としない．

(4) $\gamma = 0$ in $H_1(M; \mathbf{Z})$ のとき，$t(\gamma)$ は常に 0 となる．が，その逆は成り立たない．

(5) したがって (4) より，球面上の閉曲線 γ に対して $t(\gamma)$ は常に 0 となる．

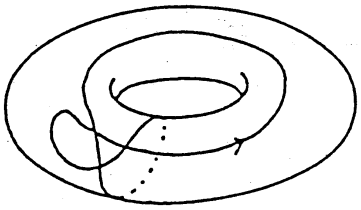
このように，曲面上の正則閉曲線の正則ホモトピー不変量である回転指数 $r_\mu(\gamma)$ と $t(\gamma)$ は，それぞれ性質を異にしているが，T^2 上の null-homologous でない正則閉曲線に対しては，この２つの量は一致する．

Theorem 1([TK], [T1]). $\gamma: S^1 \to T^2$ を正則閉曲線，かつ $\gamma \neq 0$ in $H_1(M; \mathbf{Z})$ とする．このとき，

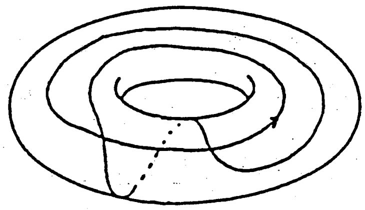
$$r(\gamma) = t(\gamma),$$

となる．

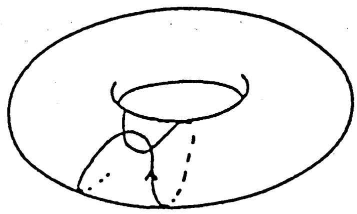
図１にある T^2 上の正則閉曲線の $t(\gamma)$ を求めてみると，null-homologous でない正則閉曲線 γ に対しては，$r(\gamma)$ と $t(\gamma)$ は一致しているが，null-homologous な正則閉曲線に対しては，$t(\gamma)$ と $r(\gamma)$ は一致しないことが確かめられる．(下図参照.)



$r(\gamma) = -1$
$t(\gamma) = -1$



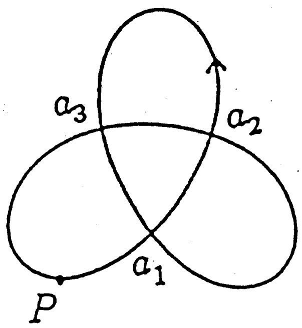
$r(\gamma) = 0$
$t(\gamma) = 0$



$r(\gamma) = 1$
$t(\gamma) = 0$

T^2 上の標準的な回転指数 r を定義に沿って求めるのは容易ではないが，この $t(\gamma)$ は曲線の交点情報から実際計算可能な量であり，したがって，この定理は T^2 上の null-homologous でない正則閉曲線の標準的な回転指数を，簡単に求める方向を与えていることになる．

では実際，$t(\gamma)$ を閉曲線の交点情報から求める具体的な方法を述べる．例えば，下の図のような正規閉曲線 γ を考える．



曲線を図の点 p から出発して，正交点，負交点の符号も含めて通過する交点を順に書き出していくと，次のような文字列が得られる．

$$w(\gamma) := {a_1}^- {a_2}^+ {a_3}^- {a_1}^+ {a_2}^- {a_3}^+.$$

このようにして得られた巡回的な文字列のことを，γ の **Gauß 語**という．そして下記のような条件を満たす文字列のことを，単に **Gauß 語**という．

$$\begin{cases} \text{・各文字 } a_i \text{ は必ず２度現れる．} \\ \text{・その符号は互いに逆になる．} \end{cases}$$

一般に Gauß 語が与えられると，向き付け可能な十分大きな種数の曲面上に，正規閉曲線として実現できることに注意しておく ([K])．

w を n 交点数の Gauß 語とする．このとき，

$$S^\pm = \{{a_1}^\pm, \ldots, {a_n}^\pm\},$$

$$S = S^+ \cup S^-,$$

とする．部分集合 $A \subset S$ に対して，

$$\sigma(A) = \#\{A \cap S^+\} - \#\{A \cap S^-\},$$
$$A^{-1} = \{x^{\mp} |\ x^{\pm} \in A\},$$

とする．そして ${a_i}^+$ から ${a_i}^-$ の間にある文字の集合を S_i とおき，$\bar{S}_i = S_i \cup \{{a_i}^{\pm}\}$ とする．

Definition(Cairns and Elton, 1993 [CE]). Gauß 語 w に対して，

$$\alpha_i(w) = \sigma(S_i),$$
$$\beta_{ij}(w) = \sigma(\bar{S}_i \cap {S_j}^{-1}),$$

と定義する．

$t(\gamma)$ は，この α_i, β_{ij} を用いて次のように表現することができる．

Theorem 2([TK], [T1]). M を向き付けられた閉曲面，γ を M 上の正規閉曲線とする．今，$M \setminus \gamma(S^1)$ の各連結成分は円板に同相であるとする．このとき，

$$t(\gamma) = \#\{i |\ \alpha_i = 0 \text{ and } \beta_{ij} = 0 \text{ for any } j\}$$
$$- \#\{i |\ \alpha_i = 0 \text{ and } \alpha_j + \beta_{ij} = 0 \text{ for any } j\},$$

となる．

後で述べる Gaußの補題を使うと，$\alpha_i \neq 0$ となる交点 i が存在すれば，その閉曲線は null-homologous でない曲線であることがわかる．このことと，α_i, β_{ij} が曲線の交点情報から実際計算可能な量であることを合わせて，定理１と定理２より，この $t(\gamma)$ は T^2 上の null-homologous でない正規閉曲線の回転指数を，その交点情報から容易に求める方法を与えていることになる．し

たがって $t(\gamma)$ は，始めに述べた平面上の閉曲線の回転指数を，その交点情報から求める Whitney の公式の T^2 版と考えることができる.

ところで，Cairns と Elton がこのような α_i, β_{ij} という量を考えたのは，Gauß の問題に解答を与えるためであった.

Gauß の問題. 与えられた Gauß 語が，平面上の正規閉曲線として実現できるための必要十分条件を求めよ.

Gauß はこのような問題を提起し，Gauß 自身はこの問題に対して必要条件は与えている.

Gauß lemma. null-homologous な正規閉曲線（したがって特に平面上の正規閉曲線）に対してその Gauß 語の α_i は，任意の交点 i に対して常に 0 となる.

Cairns と Elton は次のように Gauß の問題に解答を与えた.

Theorem(Cairns and Elton, 1993 [CE]). 与えられた Gauß 語を，平面上の正規閉曲線として実現できるための必要十分条件は，任意の i, j に対して $\alpha_i = 0, \beta_{ij} = 0$ となることである.

ここで，Gauß 語が平面上の正規閉曲線としてに実現できるということと，球面上に実現できるということが同じであることに注目すると，次のような問題が考えられる.

問題. 与えられた Gauß 語が，1 以上の種数 g の閉曲面上に正規閉曲線として実現できるための必要十分条件を求めよ．

$g=1$，すなわち T^2 の場合について，次の定理は必要条件を与えている．

Theorem 3([T2]). γ を T^2 上の正規閉曲線とする．このとき，

$$\alpha_i = \frac{2}{n-t(\gamma)} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \quad \text{for any} \quad i$$

となる．

ここで右辺の $n-t(\gamma)$ は 0 にはならないことに注意しておく．

この定理より，与えられた Gauß 語の α, β -不変量が上の関係式を満たさなければ，その Gauß 語から実現される正規閉曲線は T^2 上には実現できない，すなわち種数 2 以上の閉曲面上に実現されることがわかる．そして与えられた Gauß 語が，種数 1 以下の閉曲面に実現できないための条件としては，上の定理は今まで知られているものの中で最も強力なものと思われる．

参考文献

[CE] Cairns, G. and Elton, D. M.: The Planarity Problem for Signed Gauss Words, *J. of Knot Theory and Its Ramif.* **2** (1993), 359–367.

[F] Francis, G. K.: Generic Homotopies of Immersions, *India. Math. Jour.* **(12) 21** (1972), 1101–1111.

[K] Köing, D.: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, *Leipzig*, 1936.

[R] Reinhart, B. L.: The Winding Number on Two Manifolds, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **10** (1960), 271–283.

[S] Smale, S.: Regular Curves on Riemannian Manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **87** (1958), 492–512.

[W] Whitney, H.: On regular closed curves in the plane, *Comp. Math.* **4** (1937), 276–286.

[TK] Tanio, H. and Kobayashi, O.: Rotation Numbers for Curves on a Torus, *Geom. Dedicata* **61** (1996), 1–9.

[T1] Tanio, H.: 曲面上の曲線の種々の正則ホモトピー不変量について, 修士論文 (1996)

[T2] Tanio, H.: A generalized Gauß Problem concerning Gauß Words, (準備中)