数理解析研究所講究録
1026巻 1998年 156-166

実2次体の剰余体における単数の分布とArtin予想について

名大理　真島一成　(Kazusige Masima)

§0. Introduction～動機～

kを代数体、$\mathcal{O}$, Eをそれぞれkの整数環、単数群とする。kのideal $\mathfrak{m}$に対して、mod $\mathfrak{m}$の ray class fieldの次数が、$h((\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times:\bar{E})$で与えられる。($h$は$k$の類数、$\bar{E}:=E \bmod \mathfrak{m}$) ここで、$h$については多くのことが調べられているが、$((\mathcal{O}/\mathfrak{m})^\times:\bar{E})$についてはあまり分かっていない。

簡単のため、$k=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $m\in\mathbb{Z}^+$: square-freeとし、$\mathfrak{p}$を、素数pを割るkの素idealとするとき、$I_p:=((\mathcal{O}/\mathfrak{p})^\times:\bar{E})$ ($\bar{E}:=E \bmod \mathfrak{p}$) についてのみ考える。明らかに$I_p$は$\mathfrak{p}$の取り方によらない。このとき容易に、 $I_p \geq l_p$

ただし、
$$l_p:=\begin{cases} 1 & (p\text{が}k\text{で分解(または分岐)}) \\ p-1 & (p\text{が}k\text{で惰性かつ}N\varepsilon=1) \\ \frac{p-1}{2} & (p\text{が}k\text{で惰性かつ}N\varepsilon=-1) \end{cases}$$

（εはkの基本単数）

が分かるが、「kを固定したとき、前頁の不等号が等号になるようなpが無限個あるだろうか。」ということが、問題としてあげられる。これに関して、

$$\mathbb{P}_k^1(x) := \{p \leq x \mid p\text{は}k\text{で分解する素数}\}$$

$$\mathbb{P}_k^2(x) := \{p \leq x \mid p\text{は}k\text{で惰性する素数}\}$$

$$P_k^i(x) := \#\mathbb{P}_k^i(x) \quad (i=1,2)$$

$$N_k^i(x) := \#\{p \in \mathbb{P}_k^i(x) \mid I_p = \ell_p\} \quad (i=1,2)$$

とおくとき、石川勝、北岡良之両氏が、[1]で、$\dfrac{N_k^i(x)}{P_k^i(x)}$について計算し、次のことを予想した。

Conjecture 1 (Ishikawa-Kitaoka)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{N_k^i(x)}{P_k^i(x)} \ (\neq 0) \quad \text{が存在する。}$$

この予想は、次の「mod pの原始根に関するArtin予想」と関連があるものと思われる。

Conjecture 2 (Artin予想)

$a \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$，かつ$a$が平方数でないとする。このとき、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{p \leq x \mid ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times : \overline{\langle a \rangle}) = 1\}}{\#\{p \leq x\}} \ (\neq 0) \quad \text{が存在する。}$$

ここで特に、aがsquare-free かつ $a\not\equiv 1(4)$とすると、この密度は、

$$A:=\prod_{q:\mathrm{prime}}\left(1-\frac{1}{q(q-1)}\right)=0.3739558136\cdots\cdots$$

であると予想される。このAを、Artin 定数と呼ぶことにする。

さて、Conjecture 1 に戻ると、その密度は、特に分解する素数に対しては、$\frac{3}{2}A$になるらしい。(中には多少異なるものもある。) 何故だろうか。

Artin 予想については、Hooley[2]が、一般Riemann 予想(代数体KのDedekind zeta 関数 $\zeta_K(s)$の零点に関するRiemann 予想、以下GRHと略す。)を仮定して証明した。それと同様にして、Conjecture 1 も証明出来ないかどうか考える。その結果、分解する素数については、GRHを仮定すれば証明出来ることが分かった。以下、そのことについて、概略を報告する。

§1. 問題の書き換え

以後、kで分解する素数pについてのみ、I_pを考えるので、§0の$\mathbb{P}_k^1(x)$, $N_k^1(x)$を単に、$\mathbb{P}_k(x)$, $N_k(x)$と書く。また、これからqはすべて素数を表すものとする。さらに、$x,\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}^+$, $n\in\mathbb{Z}^+$に対して、次のように定義する。

$$N_k(x,\eta_1):={}^{\#}\{p\in\mathbb{P}_k(x) \mid q\nmid I_p \text{ for } {}^{\forall}q\le\eta_1\}$$
$$M_k(x,\eta_1,\eta_2):={}^{\#}\{p\in\mathbb{P}_k(x) \mid \eta_1<{}^{\exists}q\le\eta_2\ ;\ q\mid I_p\}$$
$$P_k(x,n):={}^{\#}\{p\in\mathbb{P}_k(x) \mid n\mid I_p\}$$

このとき、$\xi_1=\frac{1}{6}\log x$, $\xi_2=x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-2}$, $\xi_3=x^{\frac{1}{2}}\log x$ とおくと、$N_k(x)$に対して、次の不等式が成り立つ。

$$N_k(x,\xi_1)-M_k(x,\xi_1,\xi_2)-M_k(x,\xi_2,\xi_3)-M_k(x,\xi_3,x-1)$$
$$\le N_k(x)=N_k(x,x-1)\le N_k(x,\xi_1) \qquad (1.1)$$

ここで、左辺の第3項と第4項について評価すると、

$$M_k(x,\xi_2,\xi_3)=O(x\log\log x(\log x)^{-2})$$
$$M_k(x,\xi_3,x-1)=O(x(\log x)^{-2})$$

となる。また、第1項と第2項については、$P_k(x,n)$を用いて、

$$N_k(x,\xi_1)=\sum_{n\mid Q(\xi_1)}\mu(n)P_k(x,n) \quad \text{ただし、} Q(\xi_1):=\prod_{q\le\xi_1}q$$
$$M_k(x,\xi_1,\xi_2)=\sum_{\xi_1<q\le\xi_2}P_k(x,q)$$

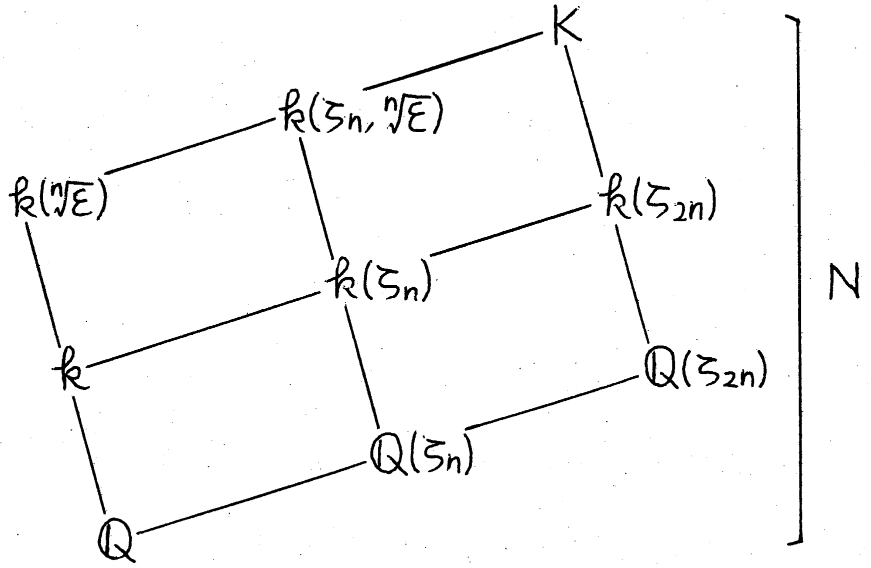
と表せる。よって、(1.1)は次のようになる。

$$N_k(x)=\sum_{n\mid Q(\xi_1)}\mu(n)P_k(x,n)+O\Big(\sum_{\xi_1<q\le\xi_2}P_k(x,q)\Big)$$
$$+O(x\log\log x(\log x)^{-2}) \qquad (1.2)$$

§2. $P_k(x,n)$とkの拡大体の関係について

次に、$P_k(x,n)$を評価するために、$P_k(x,n)$を別の関数を用いて表すことを考える。kの基本単数を、$\varepsilon=\frac{a+b\sqrt{m}}{2}$

$(\varepsilon>1)$とする。また、$K=k(\zeta_{2n},\sqrt[n]{\varepsilon})$, $N=[K:\mathbb{Q}]$,
$D=d(K)$（Kの判別式）とする。



このとき、

$$n \| p \Longleftrightarrow p \text{ が } K/\mathbb{Q} \text{ で完全分解}$$

がいえ、$K/\mathbb{Q}$で不分岐だが完全分解しないKのprime、および分岐するKのprimeの個数は、それぞれ、$Nx^{\frac{1}{2}}$, $N\omega(D)$（$\omega(D)$: Dの素因子の個数）で押さえられるので、

$$\begin{aligned}\pi_K(x) &:= \#\{\mathfrak{P} : K\text{ の prime} \mid N(\mathfrak{P}) \le x\} \\ &= N P_k(x,n) + O(Nx^{\frac{1}{2}}) + O(N\omega(D))\end{aligned}$$

すなわち次のようになる。

$$P_k(x,n) = \frac{1}{N}\pi_K(x) + O(x^{\frac{1}{2}}\omega(D)) \qquad (2.1)$$

Remark)　$N\varepsilon=-1$のときは、Kが、$k(\sqrt[n]{\varepsilon})/\mathbb{Q}$のGalois閉包となる。$N\varepsilon=1$のときは、$k(\sqrt[n]{\varepsilon})/\mathbb{Q}$のGalois閉包は、

$k(\zeta_n, \sqrt[n]{\varepsilon})$ であるが、このとき、

$$n \mid ((\mathcal{O}/\mathfrak{p})^\times : \langle\varepsilon\rangle) \Longleftrightarrow p \text{ が } k(\zeta_n, \sqrt[n]{\varepsilon})/\mathbb{Q} \text{ で完全分解}$$

が成り立ち、この $\langle\varepsilon\rangle$ を E に変えるためには、K まで拡大しなければならない。

ここで、$N=[K:\mathbb{Q}]$ の値を計算しておこう。まず明らかに、$N \mid 2n\varphi(2n)$。このとき、

$$\delta(n) := \frac{2n\varphi(2n)}{N} = [\mathbb{Q}(\zeta_{2n}) \cap k(\sqrt[n]{\varepsilon}) : \mathbb{Q}]$$

であるが、$\mathbb{Q}(\zeta_{2n}) \cap k(\sqrt[n]{\varepsilon})$ はabel体であり、$k(\sqrt[n]{\varepsilon})$ の部分体でabel体となるものは、$k(\sqrt{\varepsilon})$ の部分体しかあり得ない。

さらに、$k(\sqrt{\varepsilon})$ は、$N\varepsilon=-1$ のときabel体でないが、$N\varepsilon=1$ のときは、$k(\sqrt{\varepsilon}) = k\left(\frac{\sqrt{a+2}+\sqrt{a-2}}{2}\right) = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{a+2})$ となり、abel体である。これに注意して、$D_0 := d(k)$ とおき、$N\varepsilon=1$ のときはさらに、$D_1 := [4, d(\mathbb{Q}(\sqrt{a+2}))]$, $D_2 := [4, d(\mathbb{Q}(\sqrt{a-2}))]$ とおけば、次が成立する。

<u>Lemma 2.1</u>

$$N = [K:\mathbb{Q}] = \frac{2n\varphi(2n)}{\delta(n)}$$ ただし、

∘ $N\varepsilon=-1$ のとき

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & (D_0 \nmid 2n) \\ 2 & (D_0 \mid 2n) \end{cases}$$

∘ $N\varepsilon=1$ のとき

$$\delta(n) := \begin{cases} 1 & (\not\exists i ; D_i \mid 2n) \\ 2 & (\exists! i ; D_i \mid 2n) \\ 4 & (\forall i, D_i \mid 2n) \end{cases}$$

§3. $\pi_K(x)$ と $P_k(x,n)$ の評価

さて、ここですべての n に関する体 K で同時に $\pi_K(x)$ を評価したい。そのために、GRH を仮定し、次を使う。

Proposition 3.1 (Hooley)

GRH が成立する体 K で一様に、

$$\pi_K(x) = \mathrm{li}\, x + O(Nx^{\frac{1}{2}} \log \sqrt[N]{|D|}x) \qquad \left(\mathrm{li}\, x := \int_2^x \frac{dt}{\log t}\right)$$

が成り立つ。ただし、$N = [K:\mathbb{Q}]$, $D = d(K)$

Remark) Hooley は [2] で、$K = \mathbb{Q}(\zeta_n, \sqrt[n]{a})$ のとき、$D \mid (n^2|a|^{\omega(n)})^N$ に注意して、$\pi_K(x) = \mathrm{li}\, x + O(Nx^{\frac{1}{2}} \log nx)$ を示した。しかし、それと全く同じ議論により、Proposition 3.1 に到達する。

再び $K = k(\zeta_{2n}, \sqrt[n]{\varepsilon})$ とする。このとき、$d(\mathbb{Q}(\zeta_{2n})) \mid (2n)^{\varphi(2n)}$, $d(k(\sqrt[n]{\varepsilon})) \mid d^n n^{2n}$ に注意すれば、$D \mid (2n^3 D_0)^N$ が成り立つ。これにより Proposition 3.1 は、$\pi_K(x) = \mathrm{li}\, x + O(Nx^{\frac{1}{2}} \log nx)$ と変形され、(2.1) は、$\omega(n) = O(\log n)$ に注意をして、次のようになる。

Proposition 3.2

$k(\zeta_{2n}, \sqrt[n]{\varepsilon})$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ で GRH が成立

$$\Longrightarrow P_k(x,n) = \frac{1}{N} \mathrm{li}\, x + O(x^{\frac{1}{2}} \log nx)$$

がnについて一様に成り立つ。

§4. 定理

Lemma 2.1 とProposition 3.2 により、(1.2)を変形する。

まず、右辺第1項について、

$$\sum_{n|Q(\xi_1)}\mu(n)P_k(x,n)=\sum_{n|Q(\xi_1)}\left(\frac{\mu(n)\delta(n)}{2n\varphi(2n)}\operatorname{li}x+O\left(x^{\frac{1}{2}}\log nx\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\delta(n)}{n\varphi(2n)}\right)\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

ここで、$D_i^*:=\frac{D_i}{(2,D_i)}$ $(i=0,1,2)$ とおけば、$N\varepsilon=-1$ のとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\delta(n)}{n\varphi(2n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}+\sum_{\substack{n=1\\ D_0^*|n}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(nD_0^*)}{nD_0^*\varphi(2nD_0^*)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}+\frac{\mu(D_0^*)}{D_0^*\varphi(2D_0^*)}\sum_{\substack{n=1\\ (n,D_0^*)=1}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}$$

$$=\prod_{q}\left(1+\frac{\mu(q)}{q\varphi(2q)}\right)+\frac{\mu(D_0^*)}{D_0^*\varphi(2D_0^*)}\prod_{q\nmid D_0^*}\left(1+\frac{\mu(q)}{q\varphi(2q)}\right)$$

$$=\left(1+\frac{\mu(D_0^*)}{D_0^*\varphi(2D_0^*)}\prod_{q|D_0^*}\left(1-\frac{1}{q\varphi(2q)}\right)^{-1}\right)\prod_{q}\left(1-\frac{1}{q\varphi(2q)}\right)$$

Artin 定数Aを用いると、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\delta(n)}{n\varphi(2n)}=\frac{3}{2}\left(1+\mu(D_0^*)\prod_{q\mid D_0^*}\frac{1}{q\varphi(2q)-1}\right)A$$

$N\varepsilon=1$ のときも同様にして、

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\delta(n)}{n\varphi(2n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}+\sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ D_i^*\mid n}}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n\varphi(2n)}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\sum_{i=0}^{2}\mu(D_i^*)\prod_{q\mid D_i^*}\frac{1}{q\varphi(2q)-1}\right)A$$

よって、ここで、

$$r(D_i^*):=\mu(D_i^*)\prod_{q\mid D_i^*}\frac{1}{q\varphi(2q)-1}\quad(i=0,1,2)$$

$$R:=\begin{cases} r(D_0^*) & (N\varepsilon=-1)\\ \sum_{i=0}^{2}r(D_i^*) & (N\varepsilon=1)\end{cases}\tag{4.1}$$

とおくと、

$$\sum_{n\mid Q(\xi_1)}\mu(n)P_k(x,n)=\frac{3}{4}(1+R)A\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

が成り立つ。

次に、(1.2)の右辺第２項については、

$$\sum_{\xi_1<q\le\xi_2}P_k(x,q)=\sum_{\xi_1<q\le\xi_2}\left(\frac{\delta(q)}{2q(q-1)}\operatorname{li}x+O(x^{\frac{1}{2}}\log x)\right)$$

$$=O\left(\frac{x}{\xi_1\log x}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}\xi_2\log x}{\log\xi_2}\right)=O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

以上により、次の定理が証明される。

Theorem

$k(\zeta_{2n}, \sqrt[n]{\varepsilon})$, $^\forall n \in \mathbb{Z}^+$ でGRHが成立

$$\Longrightarrow N_k(x) = \frac{3}{4}(1+R)A\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x \log\log x}{(\log x)^2}\right)$$

§5. Rの値について

さて、(4.1)より、$N\varepsilon=-1$ のとき、R の値は m から簡単に求められ、$R \to 0\ (m \to \infty)$ が分かる。しかし、$N\varepsilon = 1$ のときはそのようにはならない。$N\varepsilon = 1$ のときのRを求めるためには、基本単数の計算をしなければならず、簡単ではないが、いくつかの特殊な m については簡単に求められるので、最後にそれをあげておく。

Proposition 5.1

次の(i), (ii)のいずれかが成り立っているとする。

(i) $m = q$ または $2q$, $q \equiv 3\ (4)$ (このとき常に $N\varepsilon = 1$)

(ii) $m = 2q$, $q \equiv 1\ (4)$ かつ $N\varepsilon = 1$

(このためには、$q \equiv 1\ (8)$ が必要条件)

このとき、$R = \dfrac{1}{3\{q(q-1)-1\}}$

Proof) $\{D_0, D_1, D_2\} = \{4q, 8q, 8\}$ となることに注意して、計算すればよい。 ■

Proposition 5.2

q_1, q_2を異なる素数とし、次の(iii), (iv)のいずれかが成り立っているとする。

(iii) $m=q_1q_2$, $q_1\equiv q_2\equiv 3(4)$　(このとき常に$N\varepsilon=1$)

(iv) $m=q_1q_2$, $q_1\equiv q_2\equiv 1(4)$ かつ $N\varepsilon=1$

(このためには、$\left(\frac{q_2}{q_1}\right)=\left(\frac{q_1}{q_2}\right)=1$ が必要条件)

このとき、$R=\dfrac{q_1(q_1-1)+q_2(q_2-1)+1}{3\{q_1(q_1-1)-1\}\{q_2(q_2-1)-1\}}$

Proof) $\{D_0, D_1, D_2\}=\{q_1q_2, 4q_1, 4q_2\}$ となることに注意すればよい。 ■

。なお、詳細については、只今準備中です。

参考文献

[1] M. Ishikawa and Y. Kitaoka, On the distribution of units modulo prime ideals in real quadratic fields, J. Reine Angew. Math. (to appear)

[2] C. Hooley, On Artin's Conjecture, J. Reine Angew. Math. 225 (1967), 209-220.