数理解析研究所講究録
1073 巻 1998 年 49-66

Berkovich space 入門

千葉大理学部　松田茂樹　(Shigeki MATSUDA)

1 Introduction

この報告集で、加藤文元氏が rigid space について分かりやすい解説をされている。Rigid space は非常に有用な空間ではあるが、トポロジカルな直観が効かないという欠点がある。例えば底空間は全不連結であるため、パスに沿った解析接続という言葉はまるで意味を持たない。

荒っぽく言うと、Berkovich space (以下では単に analytic space と呼ぶことにする) とは rigid space の底空間に generic point やパスが加わってトポロジーが分かりやすくなったものと言える。その結果、空間は局所的に弧状連結になり、smooth という仮定の下では局所的に可縮でさえある (定理 7.1 参照)。結果として昔ながらのパスを用いた基本群の定義が可能になり、またパスに沿った解析接続という言葉も意味を持つ。また、smooth であれば普遍被覆が存在する。

ただし、では analytic space のトポロジーが全ての目的に合うものであるかというと、実はそうではない。例えば

(i) $\mathbb{P}^1 \setminus \{$ 有限個の点 $\}$ は単連結である。Annulus も同様。
(ii) 同様に、good reduction を持つ曲線もまた単連結である。
(iii) パスに沿った解析接続がうまく働くのは totally degenerate reduction の時に限られるように見える。

といった問題がある。

2 Berkovich spectrum

ある意味 Berkovich による analytic space の構成は rigid space の構成に似ており、多少無理すれば maximal spectrum Spm(A) を Berkovich spectrum $\mathcal{M}(A)$ で取り換えれば analytic space が出来ると言えないこともない。そこでまずは Berkovich spectrum について説明する。

2.1 Terminology

最初に一般的な定義を復習しておく。A を単位元を持つ環とするとき、写像 $|\ |: A \to \mathbb{R}_{\geq}$ が seminorm であるとは、(i) $|0| = 0$、(ii) 任意の $f, g \in A$ に対し $|f-g| \leq |f|+|g|$、(iii) 任意の $f, g \in A$ に対し、$|fg| \leq |f||g|$、(iv) $|1| = 1$ の 4 つが満たされることとする。更に $|f| = 0$ となるのが $f = 0$ のときに限られる場合が通常の norm である。

(ii) が $|f-g| \leq \max\{|f|,|g|\}$ で置き換えられるときは non-Archimedean と呼ばれる。また、$|fg| = |f||g|$ を満たす場合、その seminorm は multiplicative であると言う。multiplicative な norm を (height 1 の) valuation と呼ぶ。この記事では valuation と言えばこのようなものしか考えない。

Banach 環とは、単位元を持つ環 A とその上のノルム $\| \ \|$ の組 $(A, \| \ \|)$ で、A が $\| \ \|$ で定まるトポロジーに対して完備であるものを言う。Banach 環 $(A, \| \ \|)$ の上の seminorm $| \ |$ が bounded であるとは、ある $C > 0$ が存在して、$|f| \leq C\|f\|$ が全ての $f \in A$ に対して成立することである。seminorm $| \ |$ が multiplicative であれば、この C は明らかに 1 に取れる。一般に、全ての (単位元を持つ) 環は、trivial な norm について Banach 環と見なせる。

以下では簡単のために、*non-Archimedean field* と言えば、non-Archimedean な valuation を持つ完備な体を表すことにする。ただし、必ずしも non-trivial な valuation とは限らない。

2.2 Spectrum

定義 2.1. A を可換な Banach 環とするとき、その Berkovich spectrum $\mathcal{M}(A)$ とは bounded multiplicative seminorm 全体のなす集合に、$| \ | \mapsto |f|$ が全ての $f \in A$ に対して連続になるような最弱になるようなトポロジーを入れたものである。

例 2.2. Banach 環 $A = K$ が体である場合、bounded multiplicative な seminorm は明らかに元々の norm に一致するしかないので、$\mathcal{M}(K)$ は一点からなる空間になる。

図 1: $\mathcal{M}(K)$

例 2.3. $A = \mathbb{Z}$ を通常の絶対値 $| \ |_\infty$ が入った Banach 環と見る。(ちゃんと完備になっていることに注意。) このとき、$\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ は次のような要素からなる。

(i) $| \ |_{\infty,\varepsilon} := | \ |_\infty^\varepsilon$, $(0 < \varepsilon \leq 1)$.
(ii) $| \ |_{p,\varepsilon}$, $(0 < \varepsilon < 1)$. ただし、$| \ |_{p,\varepsilon}$ は $|p|_{p,\varepsilon} = \varepsilon$ となる p 進ノルム。
(iii) $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上の trivial norm から誘導される seminorm $| \ |_p$. $| \ |_{p,0} = | \ |_p$ と考えれば、これは (ii) に含まれると見なせる。
(iv) trivial norm $| \ |_0$.

図示すると、次のようになる。

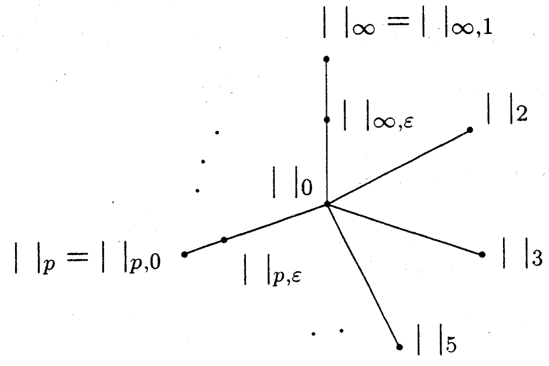

図 2: $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$

topology はどうなっているかというと、(i) の点からなる枝や、(ii)、(iii) の点からなる枝は、$(0,1]$ 区間と同型になり、また、trivial norm $|\ |_0$ の近傍は、有限個の枝からその枝の閉集合を取り去ったものになっている。

なお、$\mathbb{Z}$ に trivial norm を入れた場合は、Archimedean な枝を取っぱらったものになる。

例 2.4. 一般に、(trivial norm を入れた) Dedekind 環 A に対しては、$\mathcal{M}(A)$ の様子は上と似たようなものになる。より一般に A が一次元整域であれば、$\mathcal{M}(A)$ は A の integral closureA' の spectrum $\mathcal{M}(A')$ において、極大イデアルによる剰余体上の trivial norm から誘導される点で $\mathcal{M}(A)$ に行けば一致する点を同一視したものとなる。つまり、そのような点の数だけループができることになる。

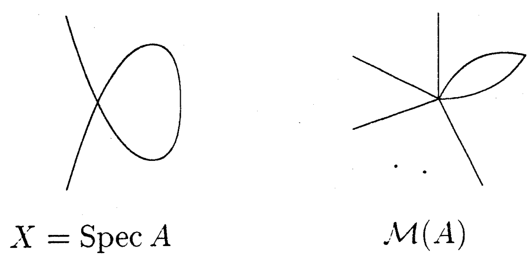

図 3: 特異点のある場合

non-Archimedean な例は次の節で述べる。

定理 2.5 ([Ber90, 1.2.1]). $\mathcal{M}(A)$ は空集合にはならず、また compact, Hausdorff である。

2.3 Spectral radius

A を単位元を持つ可換 Banach 環、x を $\mathcal{M}(A)$ の点とするとき、x に対応する seminorm を $|\ |$ として、$\mathrm{Ker}|\ |$ は A の素イデアルになり、$|f|$ は $A/\mathrm{Ker}|\ |$ での class

にしか寄らず、商体 F の valuation にまで延長できる。この valuation についての F の完備化を $\kappa(x)$ で表し、x での剰余体と呼ぶ。この時の自然な射 $\mathcal{M}(A) \to \kappa(x)$ を χ_x で表すことにする。χ_x による f の $\kappa(x)$ への像を $f(x)$ と書く。当然 $|f(x)|$ は $|f|$ と一致している。

$f \in A$ に対し、その *spectral radius* を

$$\rho(f) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|f^n\|} = \inf_n \sqrt[n]{\|f^n\|} \tag{2.3.1}$$

で定める。(これを、$\| \ \|$ に付随する *spectral norm* とも言う。) このとき、

$$\rho(f) = \max_{x \in \mathcal{M}(A)} |f(x)| \tag{2.3.2}$$

が成立する。([Ber90, 1.3.1]).

2.4 Reduction map

A を単位元を持つ non-Archimedean な可換 Banach 環とするとき、

$$A^\circ = \{f \in A \mid \rho(f) \leq 1\}$$
$$A^{\circ\circ} = \{f \in A \mid \rho(f) < 1\}$$

と定義すると、A° は可換環、$A^{\circ\circ}$ はそのイデアルになる。この剰余環 $A^\circ/A^{\circ\circ}$ を $\widetilde{A}$ で表す。可換 Banach 環の射 $\varphi : A \to B$ があれば、自然に $\widetilde{\varphi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B}$ が誘導される。

特に、$x \in \mathcal{M}(A)$ にして $\widetilde{\chi}_x : \widetilde{A} \to \widetilde{\kappa(x)}$ が定まるが、この Kernel は $\widetilde{A}$ の素イデアルになる。これにより、

$$\pi : \mathcal{M}(A) \to \mathrm{Spec}(\widetilde{A}) : x \to \mathrm{Ker}(\widetilde{\chi}_x)$$

が定まる。これを reduction map という。

3 Affinoid

この節では、K は常に non-Archimedean field を表すことにする。

3.1 Affinoid algebra

加藤文元氏の rigid space の所で出てきた Tate algebra を少し一般化して、実数 $r_1, r_2, \ldots, r_n > 0$ に対して、

$$K\{r_1^{-1}T_1, \ldots, r_n^{-1}T_n\} = \left\{ f = \sum_{\underline{\nu}=0}^{\infty} a_{\underline{\nu}} \underline{T}^{\underline{\nu}} \;\middle|\; a_{\underline{\nu}} \in K, |a_{\underline{\nu}}| \underline{r}^{\underline{\nu}} \to 0, \text{ as } |\underline{\nu}| \to \infty \right\}$$

と表記することにする。ただし、$\underline{T}$, $\underline{r}$, $\underline{\nu}$ などは multiindex を表す。

定義 3.1. Banach K-algebra A が *K-affinoid algebra* であるとは、

$$K\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\} \to A$$

という admissible な全射があることである。ただし一般に Banach 環の間の射 $\varphi: B \to C$ が admissible であるとは、$\mathrm{Im}(\varphi)$ と $B/\mathrm{Ker}(\varphi)$ が (それぞれに部分空間及び商空間としてのノルム入れたときに) topological ring として自然に同型になることを言う。

特に r_i を全て 1 に取れるとき、A は *strictly K-affinoid algebra* と呼ばれる。

補足 3.2. この号の加藤文元氏の記事での K-affinoid algebra は、この記事でいう strict K-affinoid algebra である。K-affinoid algebra が strictly K-affinoid algebra であることは、任意の $f \in A$ に対して、$\rho(f) \in \sqrt{|K^\times|} \cup \{0\}$ であることと同値である。ただし、$\sqrt{|K^\times|} = \{r \in \mathbb{R}_\geq \mid r^n \in |K^\times|\}$.

補足 3.3. 同様にして、一般の commutative Banach K-algebra A に対しても、*A-affinoid algebra* が定義できる。

命題 3.4. 全ての K-affinoid algebra は Noetherian であり、そのイデアルは closed になる。

例 3.5. $r > 0$ として、K の valuation が nontrivial な場合に $A = K\{r^{-1}T\}$ の Berkovich spectrum を見てみる。(これは、半径 r の閉円板と見なせる。) $\mathcal{M}(A)$ の点は次のように分類されることが分かる。ただし、簡単のため、K は代数閉体と仮定している。(一般の場合は、$\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(A\hat{\otimes}_K \hat{K}^{\mathrm{alg}})/\operatorname{Gal}(K^{\mathrm{alg}}/K)$ より分かる。)

type 1. t_a: $f \mapsto |f(a)|$, $a \in K$, $|a| \le r$.

type 2. $t_{a,\rho}$: $f \mapsto |f|_{D(a,\rho^+)} = \max |a_n|\rho^n$, $|a| \le r$, $0 < \rho \le r$, $\rho \in |K^\times|$. (ただし、$|K^\times|$ は $K^\times$ の value group を表す。)

type 3. 上と同様だが、$\rho \notin |K^\times|$

type 4. $\mathcal{E} = \{D^{(\rho)}\}$ を、closed disk のファミリーとする。ただし、ρ は $D^{(\rho)}$ の半径を表し、$\rho > \rho'$ なら、$D^{(\rho)} \supset D^{(\rho')}$ であるとする (このようなファミリーを *embedded disks* という)。このとき、$t_{\mathcal{E}}$ という seminorm を $|f|_{\mathcal{E}} = \inf |f|_{D^{(\rho)}}$ で定める。もし、$\bigcap D^{(\rho)} = \emptyset$ であれば、これは上のどの type とも異なる。

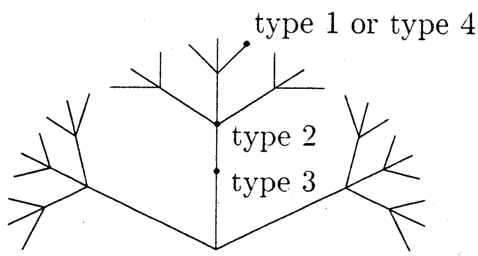

図 4: $\mathcal{M}(K\{r^{-1}T\})$

上の図は不正確を承知で描いたものだが、大体のイメージはつかめると思う。

また topology だが、絵が不正確なわけだから説明も不正確にならざるを得ないが、枝という言葉で「ある点から葉の方向にある全ての部分」を表すことにすると、大体「ある枝から、より細かい有限個の枝を取り去ったもの」が基本近傍系になっているような topology と言える。正確には、

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{M}(A) \mid |f_i(x)| < 1, |g_j(x)| > 1, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$(f_i, g_j \in A)$ の形の部分集合全体を基本近傍系に取れる。

補足 3.6. 上のことから分かるように、円板が単連結なのは勿論、annulus なんかも単連結になってしまう。

補足 3.7. embedded disks $\{D^{(\rho)}\}$ が必ず空でない共通部分を持つような付値体は、*maximally complete* とか、*spherically complete* などと呼ばれる。例えば完備離散付値体は、maximally complete である。この場合は、type 4 のケースは生じない。が、一般の付値体では、完備だからといって maximally complete とは限らない。剰余体と value group $(\subset \mathbb{R}_{\geq})$ を変えない拡大を immediate extension というが、maximally complete であることは、nontrivial な immediate extension が存在しないことと同値である。

A を strictly K-affinoid algebra とするとき、maximal spectrum の点 $x \in \mathrm{Spm}(A)$ に対して、A/x は K 上 finite であるから、K の valuation が一意的に伸びる。従って標準的に $\mathrm{Spm}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$ という単射が存在する。特に K の valuation が nontrivial なら、これは到る所稠密な部分集合への同相写像になる。

3.2 Affinoid domain

A を K-affinoid algebra、$X = \mathcal{M}(A)$ とする。X の閉部分集合 V が *affinoid domain* であるとは、ある K-affinoid algebra の bounded homomorphism $\varphi : A \to A_V$ で、任意の K-affinoid algebra の bounded homomorphism $A \to B$ で、$\mathcal{M}(B)$ の X への像が V に含まれるようなものに対し、次の diagram を可換にするような bounded homomorphism $A_V \to B$ が一意的に存在する、という普遍性を持つものがあることである。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & A_V \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

このとき、実は A_V は一意的に存在し、更に $V = \mathcal{M}(A_V)$ となることが証明される。また、A_V は A 上 flat になる。

3.3 Affinoid space

$X = \mathcal{M}(A)$ に対して admissible open set は affinoid domain に、admissible covering は affinoid domain による有限被覆とすることで Grothendieck topology を定める。(Grothendieck topology についてはこの号の加藤文元氏の記事を参照。) これは、weak Grothendieck topology と呼ばれる。(以後、この位相を単に弱位相と呼ぶ。) $V \mapsto A_V$ はこの topology に対する sheaf になる。

affinoid domain の有限個の族 $\{V_i\}$ の合併 V を *special set* と呼ぶが、これに対して、A_V を

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Ker}\Big(\prod_i A_{V_i} \rightrightarrows \prod_{i,j} A_{V_i \cap V_j}\Big)$$

で定める。そして、一般の開集合 $U \subset X$ に対して、

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \varprojlim_{V \subset U:\text{special}} A_V$$

と定めると、実は $\mathcal{O}_X$ は X 上の (2.2 節 で定めた位相に関する) sheaf になることが分かる。このようにして K-affinoid algebra の圏から局所環付空間への反変関手ができるわけだが、この関手は faithful ではあっても fully faithful ではない。そこで K-affinoid space の圏を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}: &\ (X, \mathcal{O}_X),\ X = \mathcal{M}(A)\ (A \text{ は } K\text{-affinoid algebra}). \\ \mathrm{Morph}: &\ X = \mathcal{M}(A),\ Y = \mathcal{M}(B) \text{ として、} \mathrm{Hom}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) \text{ は} \\ &\ \text{bounded homomorphism } B \to A \text{ から来るもの} \end{aligned}$$

K' を K 上の non-Archimedean field とすると、$X \hat{\otimes} K' = \mathcal{M}(A \hat{\otimes} K')$ により、K'-affinoid space が出来る。

定義 3.8. K 上の affinoid space とは、K 上の non-Archimedean field K' に対する K'-affinoid space のことと定義する。また、二つの affinoid space X, Y 間の射は、対応する K 上の affinoid algebra 間の bounded homomorphism から来るものとして定義する。

Strictly K-affinoid algebra に対する K-affinoid space を *strictly K-affinoid space* という。

以降ではしばしば $X = \mathcal{M}(A)$ で、対応する affinoid space そのものを表す。その場合は、底空間を $|X|$ と書いて区別する。

3.4 Relative interior

A を K-affinoid algebra, B を A-affinoid algebra, D を Banach A-algebra とする (補足 3.3 参照)。A-homomorphism $\varphi : B \to D$ が A について *inner* とは、admissible

(定義 3.1 参照) な全射

$$\pi : A\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\} \to B$$

で、任意の $1 \le i \le n$ に対して $\rho(\varphi(\pi(T_i))) < r_i$ となるものがあることを言う。A と B が strictly K-affinoid である場合、これは、$\tilde{\phi}(\widetilde{B})$ が $\tilde{\phi}(\widetilde{A})$ 上 integral であることと同値である。

定義 3.9. $\varphi : Y = \mathcal{M}(B) \to X = \mathcal{M}(A)$ を K-affinoid space の間の射とするとき、φ の *relative interior* $\mathrm{Int}(Y/X)$ を

$$\mathrm{Int}(Y/X) = \{y \in Y \mid B \to \kappa(y) \text{ が } A \text{ について inner}\}$$

として定義する。$\mathrm{Int}(Y/X)$ が開集合であることは簡単に分かる。$\mathrm{Int}(Y)$ の点を Y の内点という。また、$Y \setminus \mathrm{Int}(Y/X)$ を $\partial(Y/X)$ と書き、*relative boundary* と呼ぶ。特に、$A = K$ の場合は、単に $\mathrm{Int}(Y), \partial(Y)$ と書き、Y の内点とか boundary と呼ぶ。

例 3.10. 例えば、$A = \mathbb{Q}_p\{T\}$, $X = \mathcal{M}(A)$ なら、$\mathrm{Int}(X) = X \setminus \{t_{0,1}\}$ である。ただし、$t_{0,1}$ は、例 3.5 にあるように $|\ |_{D(0,1)}$ という seminorm を表す。

例 3.11. $Y = D(0, r^+) \subset X = D(0, s^+)$, $r < s$ の時は、$\mathrm{Int}(Y/X) = Y \setminus \{t_{0,r}\}$ となる。一般に $\varphi : Y \to X$ を affinoid domain 間の射とするとき、$\mathrm{Int}(Y/X) = Y$ となるのは、φ が finite のときに限り、また Y が X の affinoid domain であれば、$\mathrm{Int}(Y/X)$ は Y の X 内でのトポロジカルな内点の集合に一致する。

4 Analytic space

4.1 定義

講演では時間の都合で定義をに省略してしまったのと、不正確なことも言ってしまったので、訂正の意味も込めてここできちんと書いておく。

K は前節の通り non-Archimedean field とする。*K-quasiaffinoid space* とは、局所環付空間 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}$ のある K-affinoid space X への埋め込み $\varphi : \mathcal{U} \to X$ の組 $(\mathcal{U}, \varphi)$ のことを言う。また、$\mathcal{U}$ の閉部分集合 U が K-affinoid domain であるとは、$\varphi(V)$ が X の中で K-affinoid domain であることを言う。

K-quasiaffinoid domain の間の射 $(\mathcal{U}, \varphi) \to (\mathcal{V}, \psi)$ とは、局所環付空間の射 $\theta : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ であって、任意の affinoid domain の組 $U \subset \mathcal{U}$, $V \subset \mathcal{V}$ で $\theta(U) \subset \mathrm{Int}(V/\mathcal{V})$ となるものに対して、対応する K-affinoid algebra の射 $\mathcal{B}_V \to \mathcal{A}_U$ が bounded であるようなものを言う。

さて、一般に $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ を局所環付空間とするとき、X の K-analytic atlas とは、次を満たす pair の族 $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ である。

(i) 各 $\mathcal{U}_i$ は X の開集合で、$\{\mathcal{U}_i\}_i$ は X の被覆。

(ii) φ_i は $\mathcal{U}_i$ からある K-affinoid space への open immersion.

(iii) 各 $i, j \in I$ に対し局所環付空間の射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \to \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ は K-quasiaffinoid space の同型になる。

各 $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$ はこの atlas の chart と呼ばれる。更に $\mathcal{U} \subset X$ を X の開集合、φ を $\mathcal{U}$ からある K-affinoid space への open immersion とするとき、$\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ が K-affinoid space の同型を定めるなら、$(\mathcal{U}, \varphi)$ は $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ と compatible であるという。また、二つの atlas が compatible とは、一方の atlas の各 chart が、もう一方の atlas と同値であると言うことにする。

定義 4.1. K-analytic space を、局所環付空間 $(|X|, \mathcal{O}_X)$ とその atlas の同値類の組として定義する。

X, Y を共に K-analytic space とするとき、その間の射 $f : X \to Y$ を、局所環付空間の射であって、更に、X の atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ と Y の atlas $\{(\mathcal{V}_j, \psi_j)\}$ で、各 i, j に対して $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(\mathcal{U}_i) \to \psi_j(\mathcal{V}_j)$ が K-quasiaffinoid の射になっているようなものが取れることを言う。このようにして定まる K-analytic space の圏を $(K\text{-}\mathcal{A}n)$ と書くことにする。また、non-Archimedean field の拡大 K'/K に対して K'-analytic space になっているような空間を K 上の analytic space という。K 上の analytic space のなす圏を、$(\mathcal{A}n_K)$ と書く。$(K\text{-}\mathcal{A}n)$ ではファイバー積が存在するが、$(\mathcal{A}n_K)$ では特別な場合を除いては存在しない。

定義 4.2. K-analytic space の射 $\varphi : Y \to X$ が *analytic domain* であるとは、φ が Y と $\varphi(Y)$ の同相写像を引き起こし、かつ任意の K 上の analytic space の射 $\psi : Z \to X$ で $\psi(Z) \subset \varphi(Y)$ となるものに対して、一意的に $\psi = \varphi \circ \sigma$ となる $\sigma : Z \to Y$ が存在するという性質を持つことをいう。この場合 Y と $\varphi(Y)$ は同一視することにする。特に Y が (strictly) K-affinoid (resp. (strictly) K-quasiaffinoid) space である場合には、Y を *(strictly) affinoid (resp. (strictly) quasiaffinoid) domain* ということにする。

$x \in X$ の affinoid domain の近傍全体は、x の基本近傍系をなす。

定義 4.3. K-analytic space X が *strictly K-analytic space* であるとは、全ての compact subset が、有限個の strictly quasiaffinoid domain で覆われることをいう。

X が K-affinoid space の場合、これが strictly K-analytic space ということと K-affinoid space ということは同じことである。(ただし、strictly K-analytic な quasi-affinoid space は、一般には strictly quasiaffinoid space とは限らない。) 更に K の valuation が nontrivial な場合には次が成立する。

命題 4.4. K の valuation が nontrivial であるとする。X を strictly K-analytic space とすると、任意の compact subset は有限個の strictly affinoid domain で覆われる。

K-analytic space の射 $\varphi : Y \to X$ は、Y と X の開部分集合 (に自然に誘導される K-analytic structure を入れたもの) と同型を定めるとき *open immersion* という。また、Y と X の 閉部分集合との同相写像を誘導し、かつ $\varphi_*(\mathcal{O}_Y)$ が coherent $\mathcal{O}_X$-module になり、更に $\mathcal{O}_X \to \varphi_*(\mathcal{O}_Y)$ が全射になるとき *closed immersion* という。

X への closed immersion と $\mathcal{O}_X$ の coherent subsheaf of ideals とは一対一に対応している。$\varphi : Y \to X$ を closed immersion とするとき、$\varphi(Y)$ を X の *closed K-analytic subset* と呼ぶ。X が *irreducible* とは、二つの異なる closed k-analytic subset の和にかけないことをいう。

K-analytic space の射 $\varphi : Y \to X$ は、対角写像 $Y \to Y \times_X Y$ が closed immersion であるときに、*separated* であるという。特に $X = \mathcal{M}(K)$ の時は、Y は separated であるという。実は、$Y \to X$ が separated であることと、$|Y| \to |X|$ が separated になることは同値である。特に、Y が separated であることは、その底空間 $|Y|$ が Hausdorff であることと同じになる。

命題 4.5. K-analytic space X が separated であれば、affinoid domain は X の中で closed であり、二つの affinoid domain の共通部分もまた affinoid domain になる。

定義 4.6. 定義 3.9 で定義した (relative な) 内点や boundary の概念は自然に K-analytic space にも拡張される。これらも $\mathrm{Int}(Y/X)$, $\partial(Y/X)$ や $\mathrm{Int}(X)$, $\partial(X)$ などの記号で表す。$\partial(X) = \emptyset$ となるような K-analytic space は *closed* であるという。

4.2 いくつかの性質

ここでは、重要と思われる性質を二つだけ挙げる。

定理 4.7 ([Ber90, 3.2.1]). 全ての連結な K-analytic space は、弧状連結である。

さて、一般に位相空間 X の次元とは、次のようなものであった。まず、X の部分空間の族 F の *order* とは、$n+1$ 個の空でない共通部分を持つ部分集合が存在するような最大の整数 n のことである。このとき、$\dim(X)$ は、任意の有限開被覆が、order $\leq n$ であるような細分を持つような n として定義される。次元について、次が成立する。

定理 4.8 ([Ber90, 3.2.6]). $X = \mathcal{M}(A)$ を strictly K-affinoid space とするとき、$\dim |X|$ は A の Krull 次元 $\dim A$ と一致する。また、$\dim(\partial(X)) = \dim A - 1$ も成立する。

5 Rigid analytic space との関係

この節では、K は前節の通り non-Archimedean field とし、更に valuation は常に nontrivial であるとする。最初に、rigid K-analytic space の Grothendieck topology を復習しておく。A を strict K-affinoid algebra として、$\mathcal{X} = \mathrm{Spm}(A)$ の strong Grothendieck topology (以下、強位相) を次のように定義する。(affinoid domain などの用語については加藤氏の記事を参照。)

(i) $U \subset \mathcal{X}$ が admissible open とは、affinoid subdomain による被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ で、任意の affinoid の射 $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ で $\varphi(\mathcal{Y}) \subset U$ なるものに対して、$\{(U_i)\}_{i\in I}$ の有限個の部分被覆で $h(\mathcal{Y})$ の被覆になるものが取れるようなものとする。

(ii) $\{U_i\}_{i\in I}$ を X の admissible open set U の admissible open による被覆とするとき、これが admissible covering とは、任意の affinoid の射 $\varphi: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ で $\varphi(\mathcal{Y}) \subset U$ なるものに対して、Y の affinoid subdomain による有限被覆で、$\{\varphi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ の細分になっているようなものが取れるものとする。

このような Grothendieck 位相の入った K-affinoid を貼り合わせて、rigid K-analytic space を構成したのだった。

補足 5.1. 例えば [Ber96, (0.1.2)] では、affinoid subdomain の代わりに special domain ([BGR84] では rational domain) を使って定義しているが、Gerritzen-Grauert の定理 [BGR84, 7.3.5] により affinoid domain は special domain の有限個の合併の形に書けるので、両者の定める Grothendieck topology は一致する。

X を separated, strictly K-analytic space とする。ここで

$$X_0 = \{x \in X \mid [\kappa(x) : K] < \infty\}$$

とおくと、3.1 節 で見たように、これは到る所稠密な部分集合になる。X_0 に次のようにして Grothendieck topology を定める。

(i) $U \subset X_0$ が admissible open とは、任意の strictly affinoid domain $Y \subset X$ に対して $Y_0 \cap U$ が Y_0 の中で admissible open であることとする。
(ii) $\{U_i\}_{i\in I}$ を X_0 の admissible open U の admissible open による被覆として、これが admissible covering とは、任意の strictly affinoid domain $Y \subset X$ に対して $\{U_i \cap Y_0\}$ が $U \cap Y_0$ の admissible covering であることとする。

さて、命題 4.5 より、strictly affinoid domain を admissible open に、有限個の strictly affinoid domain による被覆を admissible covering に取ることで、X には Grothendieck topology が定まる。これを weak Grothendieck topology (以下、単に弱位相) と呼ぶ。これは、3.3 節 での弱位相と整合性が取れている。このとき strictly affinoid domain V に $\mathcal{O}_X(V)$ を対応させる関手はこの弱位相に対して strictly K-affinoid algebra の層を定める。更にこの弱位相弱位相を X_0 に制限してやると、X_0 の上の weak Grothendieck topology が得られる。(これも以下では弱位相という。)

命題 4.4 より X は strictly affinoid domain $\{V_i\}$ で覆えて、これは X_0 の admissible affinoid covering $\{V_{i,0}\}$ を定める。$\mathcal{O}_X$ は $V_{i,0}$ の弱位相についての層を定めるが、一般に弱位相についての層は上に述べた強位相の層に延長され、また、弱位相についての層の間の射も延長された強位相についての層の射に一意的に伸びる。このことから、$\mathcal{O}_X$ が $V_{i,0}$ に定める層は貼り合わさって、$\mathcal{O}_{X_0}$ という X_0 の上の強位相についての層を定める。このようにして、X から rigid K-analytic space を対応させることができる。

定理 5.2.

$$(\text{separated strictly } K\text{-analytic space}) \to (\text{rigid } K\text{-analytic space})$$
$$X \mapsto X_0$$

は fully faithful な関手であり、ファイバー積や ground field の base change を保つ。

補足 5.3. 上の関手は、paracompact separated strictly K-analytic space の圏と有限型の admissible affinoid による被覆を持つような quasiseparated K-rigid space の圏の同値を誘導する。

6 GAGA

K は前節の通り nontrivial な valuation を持つ non-Archimedean field とする。(なお、この記事では述べないが、trivial valuation の場合にも GAGA はある。)

X を K 上局所有限型な scheme とする。Φ を $\mathcal{X} \in \mathcal{A}n_K$ に K- 環付空間の射全体 $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{X}, X)$ を対応させるような $\mathcal{A}n_K$ から集合の圏への関手とする。このとき、次が成立する。

定理 6.1 ([Ber90, 3.4.1]). Φ はある closed な (定義 4.6 参照) K-analytic space X^{an} と射 $\pi : X^{\mathrm{an}} \to X$ によって表現可能である。更に、次が成立する。

(i) 任意の K 上の non-Archimedean field K' に対し、$X^{\mathrm{an}}(K) \simeq X(K)$. 更に π は全射であり、全単射 $X_0^{\mathrm{an}} \simeq X_0$ を引き起こす。(ただし、X_0 は X の閉点全体。)

(ii) 任意の点 $x \in X^{\mathrm{an}}$ に対して準同形 $\pi_x : \mathcal{O}_{X,\pi(x)} \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}},x}$ は局所準同形で、かつ平坦である。更に $x \in X_0^{\mathrm{an}}$ の時は、完備化の間で同型 $\hat{\pi}_x : \hat{\mathcal{O}}_{X,\pi(x)} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X^{\mathrm{an}},x}$ を引き起こす。

X についての多くの性質は、X^{an} で考えることができる。例えば (ここでは定義は述べないが)、reduced, normal, Cohen-Macaulay, regular, smooth 等といった性質が X で成立することは X^{an} で成立することと同値である。また射についても、scheme 間の射 $\varphi : Y \to X$ が flat, unramified, etale, smooth, separated, injective, surjective, open immersion, isomorphism, monomorphism といった性質を持つことは、$\varphi^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ について同じ性質が成立することと同値である。また、更に φ が有限型である場合には、dominant, closed immersion, proper, finite といった性質についても同様である。

また、いくつかの X の性質は、$|X^{\mathrm{an}}|$ のトポロジカルな性質に置き換えられる。例えば、

定理 6.2 ([Ber90, 3.4.8]). (i) X が separated $\Leftrightarrow$ $|X^{\mathrm{an}}|$ が Hausdorff.
(ii) X が proper $\Leftrightarrow$ $|X^{\mathrm{an}}|$ が Hausdorff, compact.
(iii) X が連結 $\Leftrightarrow$ $|X^{\mathrm{an}}|$ が弧状連結。arcwise connected.
(iv) X の次元は $|X^{\mathrm{an}}|$ のトポロジカルな次元に一致。

といったことが成立する。

最後に cohomological な性質について。$\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-module とするとき、逆像 $\pi^*(\mathcal{F})$ は $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-module の層になるが、これを $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ と書く。定理 6.1 (ii) より、$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ は忠実な完全関手になり、coherent な層を coherent な層に写す。

命題 6.3 ([Ber90, 3.4.9, 3.4.10]). $\varphi : Y \to X$ を K 上局所有限型な scheme の proper morphism とする。このとき、任意の coherent $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{F}$ に対して、標準的な同型

$$(R^p\varphi_*\mathcal{F})^{\mathrm{an}} \to R^p\varphi_*^{\mathrm{an}}(\mathcal{F}^{\mathrm{an}}), \quad (p \geq 0)$$

が存在する。結果として特に X を proper K-scheme, $\mathcal{F}$ を coherent な $\mathcal{O}_X$-module とするとき、任意の $p \geq 0$ に対し、標準的な同型

$$H^p(X, \mathcal{F}) \simeq H^p(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$$

が存在する。

命題 6.4. X を proper K-scheme とするとき、

$$(\text{coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}) \to (\text{coherent } \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}\text{-module}); \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$$

は圏同値である。

系 6.5. 次の関手は fully faithful になる。

$$(\text{proper } K\text{-scheme}) \to (K\text{-analytic space}); X \mapsto X^{\mathrm{an}}$$

系 6.6. 全ての reduced proper K-analytic space X で次元が 1 のものは projective である。即ち K 上の射影的代数曲線 Y で $X \simeq Y^{\mathrm{an}}$ となるものが存在する。

実際は、次のことも言える。

定理 6.7 ([dJ95, Prop. 3.2]). 任意の compact irreducible separated な K-analytic space X で次元 1 のものは、affinoid か projective かいずれかである。

証明は [FM86] における rigid space についての同様の定理と、補足 5.3 から簡単に導かれる。

7 普遍被覆

X を K-analytic space とするとき、X の $x \in X$ での次元 $\dim_x X$ を V が x の affinoid 近傍を動くときの $\dim A_V$ の最小値として定める。X が *pure dimensional* とは、任意の $x \in X$ に対して $\dim_x X = \dim X$ となることと定める。

K-analytic space X が点 x で smooth とは、ある K 上の non-Archimedean field K' に対して $X' = X\hat{\otimes}K$ が任意の x 上の点 $x' \in X'$ で *regular*, 即ち x' での局所環が regular であることをいう。また、X が *smooth* であるとは、pure dimensional でかつ各点で smooth であることとする。以上の言葉の準備のもと、次が成立する。

定理 7.1 ([Ber98]). K は nontrivial な valuation を持つ non-Archimedean field とする。X が局所的に smooth な K-analytic space の strictly K-analytic domain に同型であるとき (これを *locally embeddable in a smooth space* という)、X は局所的に可縮である。特に、このような空間は普遍被覆を持つ！

実際の普遍被覆の例は、この後の analytic curves の所で述べることにする。

8 Analytic curves

8.1 射影直線

射影直線 $\mathbb{P}^1_K$ は、rigid space の場合と同様、二つの closed disk を貼り合わせて作る。良いことかどうかは別として、次のような感じでイメージできる。rigid space の場合と同様、実際にはのりしろはずっと広い。

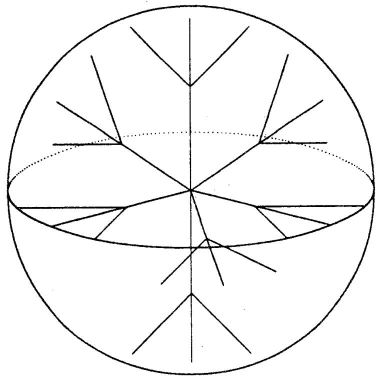

図 5: $\mathbb{P}^1_K$

この図から想像できるように、$\mathbb{P}^1_K$ が単連結なのは勿論、$\mathbb{P}^1_K$ から有限個の点を抜いてもやはり単連結のままである。例えば、$\mathbb{G}_m$ が単連結だったりする。(これは、上から北極と南極の二点を除いたものである。) 従って、例えば $n > 1$ の時は $\mathbb{G}_m$ から $\mathbb{G}_m$ への n 倍写像は局所同相にはなっていない。(Rigid space の点からなる部分集合では n 対 1 の写像になっているが、例えば上の図でいう地球の中心の点に写るのは、やはり地球の中心しかないので、n 対 1 の写像にはならない。つまり etale な射であっても局所同相にはならないわけである (10 節 参照)。

また、$\mathbb{A}^1_K$ は $\mathbb{P}^1_K$ から南極の点を抜いたものになるが、これが

$$\mathbb{A}^1_K = \bigcup_{r>0} D(0, r^+)$$

と書けることも納得できると思う。

補足 8.1. 一般に、n 次元 affine space $\mathbb{A}^n_K$ は $K[T_1, \ldots, T_n]$ 上の multiplicative seminorm χ で $\chi|_K$ が bounded になるようなもの全体として定義される。(topology の入れ方は Berkovich spectrum の時と同様。) このようにして定義した場合、$\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{C}^n$ と同型になり、$\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{C}^n$ の複素共役による商空間になる。

8.2 種数が 1 以上の曲線

この節では、全ての analytic space や affinoid subdomain は strict であると仮定する。2.4 節 で non-Archimedean な 可換 Banach 環の reduction を定義したが、ここか

ら K-affinoid の reduction はすぐに定義できる。しかし、K-affinoid space を affinoid で覆ってもそれぞれの reduction は必ずしもうまく貼り合わないので、次のような言葉を用意する。(この辺りの事情は rigid space と同様である。)

定義 8.2. K-affinoid space X の affinoid domain V はそこから誘導される reduction map $\widetilde{V} \to \widetilde{X}$ が open immersion であるとき *formal* という。また、separated K-analytic space の affinoid による被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ が formal とは、任意の $i, j \in I$ に対して $U_i \cap U_j$ が U_i の formal subdomain になることとする。更に二つの formal covering $\{U_i\}_{i\in I}, \{V_j\}_{j\in J}$ が equivalent であるとは、任意の $i \in I$, $j \in J$ に対して $U_i \cap V_j$ が U_i と V_j の両方の formal subdomain になっていることを言う。

Formal な被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ が与えられれば、reduction $\widetilde{X}$ を作ることができる。これを $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$ と書く。これは formal covering の equivalence class だけで決まる。誤解が生じないときは、単に $\widetilde{X}$ と書く。(rigid space の formal model にも admissible blowing up の分だけ不定性があったことに注意。加藤氏の記事を参照。)

K-affinoid algebra A が *distinguished* とは、A の spectral norm がある全射 $f : K\{T_1, \dots, T_n\} \to A$ の residue norm (即ち $K\{T_1, \dots, T_n\}$ の norm を $|\ |'$ とするなら $|f| = \inf_{f' \to f} |f|'$ という norm) になっていることを言う。例えば K が離散付値環や代数閉体なら、A が distinguished であることは A が reduced でかつ A の spectral norm の値が $|K|$ 内にあることと同値にある。Separated K-analytic space の formal covering $\mathcal{U} = \{U_i\}$ は U_i が全て distinguished であるとき *distinguished* という。

さて、X を K 上の smooth geometrically connected projective な種数 1 以上の曲線とする。更に、X^{an} が distinguished formal covering $\mathcal{U}$ で $\widetilde{X}_{\mathcal{U}}$ が $\widetilde{K}$-split semistable reduction を持つものと仮定する。ただし、体 k 上の代数曲線 C が *k-split* とは、

(i) 全ての二重点は k 値点。
(ii) 二重点 x でたった一つの成分にしか属していないものは、全て k-split, 即ち $\kappa(x)$ は k のその成分の関数体の中での代数閉包に一致する。
(iii) $H^0(C, \mathcal{O}_C) = k$.

の 3 つが成立することとする。このとき、$\mathcal{U}$ が $\mathcal{V}$ の細分になっているような distinguished formal covering で $\widetilde{X}_{\mathcal{V}}$ が $\widetilde{K}$-split stable reduction を持つようなものが取れる。

$\widetilde{X} = \bigcup_i \widetilde{X}_i$ を reduction の既約成分への分解とし、一般に $g(Y)$ で代数曲線 Y の種数を表すことにする。$b_1(\triangle(\widetilde{X}))$ を $\widetilde{X}$ の incident graph (ないしは dual graph) $\triangle(\widetilde{X})$ (つまり、既約成分が点で、互いに交わる時にそれらを結んだグラフ。ただし、その交点が一つの成分にしか含まれない場合は、その点が $\widetilde{K}$-split の時はループを加え、そうでない時は閉区間を加える) の 1st Betti number とすると、

$$g(X) = b_1(\triangle(\widetilde{X})) + \sum_i g(\widetilde{X}_i)$$

が成立する。

一般に、X を K 上の smooth geometrically connected projective な種数 1 以上の曲線とするとき、K の有限次 Galois 拡大 K' で $X^{\mathrm{an}} \otimes K'$ が distinguished formal covering を持ち、それに関する reduction が $\widetilde{K'}$-split stable reduction になるものが取れる。X^{an} と $\triangle(\widetilde{X})$ を比べることで次の定理が証明される。

定理 8.3. X を smooth geometrically connected projective な種数 g が 1 以上の曲線とするとき、X^{an} の 1st Betti number $b_1(X^{\mathrm{an}})$ は g 以下である。更に両者が一致するのは X が Tate curve 上の torsor か Mumford curve になっているときに限る。逆に X が good reduction を持つときは、$b_1(X^{\mathrm{an}}) = 0$ となる。

また、Mumford curve は次のように特徴付けされる。(Mumford curve の正確な定義は次の節で復習する。)

定理 8.4. X を上の通り smooth geometrically connected projective な種数 g が 1 以上の曲線とする。このとき次は同値。

(i) X は Mumford curve.
(ii) X^{an} の普遍被覆 U は $\mathbb{P}^1_K$ の開部分集合で、その補集合は $\mathbb{P}^1(K)$ に含まれる。
(iii) X^{an} は $\widetilde{K}$-split totally degenerate reduction.

ここで *$\widetilde{K}$-split totally degenerate reduction* とは、reduction が $\widetilde{K}$-split で全ての成分が rational であることである。

8.3 普遍被覆の例

例 8.5. (**Tate curve**). X が周期 $q \in K^*$, $|q| < 1$ の Tate curve E_q の torsor であるとき、適当な K の巡回拡大体 L で、$q \in N_{L/K}(L^*)$ となるものが取れる。このとき、X^{an} の普遍被覆は $\mathbb{G}_{m,L}$ である。従って、$|X|$ の基本群を $\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ で表すと、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X^{\mathrm{an}}) \simeq \mathbb{Z}$ である。また、標準的な射 $(X \otimes L)^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ は局所同型になっている。

例 8.6. (**一般の Mumford curve**). 最初に Mumford curve の復習をしておく。(ここでは analytic space を用いて定義するが、rigid space を用いても同じである。[GvdP80] 参照。) $\Gamma \subset PGL_2(K)$ を部分群とする。$x \in \mathbb{P}^1(\widehat{K^{alg}})$ が Γ の *limit point* であるとは、ある点 $y \in \mathbb{P}^1(\widehat{K^{alg}})$ と無限列 $\{\gamma_n\}_{n\geq 0} \subset \Gamma$ ($m \neq n$ なら $\gamma_m \neq \gamma_n$) で $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(y) = x$ となるものがあることを言う。Γ の limit point 全体を Σ_Γ で表す。Γ が *discontinuous* であるとは、$\Sigma_\Gamma \neq \mathbb{P}^1(\widehat{K^{\mathrm{alg}}})$ かつ任意の $x \in \mathbb{P}^1(\widehat{K^{\mathrm{alg}}})$ に対して x の orbit の閉包 $\overline{\Gamma x}$ が compact であることである。

定義 8.7. $\Gamma \subset PGL_2(K)$ は、有限生成で、有限位数の nontrivial な元を持たず、かつ discontinuous であるとき *Schottky group* という。

Γ が Schottky group なら、全ての $\gamma \neq 1 \in \Gamma$ は hyperbolic (i.e. ある $q \in K$ で $0 < |q| < 1$ なる元に対する相似拡大 $x \mapsto qx$ と共役) であり、また Γ は自由群になる。更に Σ_Γ は $\mathbb{P}^1(K)$ に含まれる。特に Γ の rank が 1 なら、Σ_Γ は二点からなる。

Γ を rank $g \geq 1$ の Schottky group とするとき、上のことから Γ は $\Omega_\Sigma := \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma_\Gamma$ に自由に作用するから、Ω_Γ/Γ は compact になる。従って Ω_Γ/Γ には自然に proper な K-analytic space の構造が入り、proper K-analytic curve になる。系 6.6 より、これはある K 上の smooth geometrically connected な射影曲線 X_Γ に付随する K-analytic space になっているが、このようにして得られる X_Γ を *Mumford curve* というのだった。特に $g = 1$ の場合が Tate curve である。

この時は、$\Omega_\Sigma \to X_\Gamma^{\mathrm{an}}$ が普遍被覆になっている。従って $\pi_1^{\mathrm{top}}(X_\Gamma^{\mathrm{an}}) \simeq \Gamma$ である。

9 Path に沿った解析接続と Monodromy

この節でも、K は nontrivial な valuation を持つ non-Archimedean field とする。

Introduction の所で述べたように、パスによる解析接続がいつでもうまく行くわけではない。これは、Berkovich space では微分方程式の解がいつでも locally constant になるわけではないことによる。

例 9.1. $X = D(0, 1^+) = \mathcal{M}(K\{T\})$, $X^* = X \setminus \{0\}$ とする。ここで、$\mathcal{O}_{X^*}$-module としては $\mathcal{O}_{X^*}$ である M に接続 ∇ を

$$\nabla(1) = -1 \odot \frac{dT}{T}$$

で接続を入れた接続付き加群を考えると、これは X^* では特異点を持たない。実際 $x \in X^* \cap \mathrm{Spm}(K\{T\})$ における局所環では $\nabla = 0$ は $\log T$ という解を持つ。しかし、例 3.5 における type 2, type 3 の点では解は存在しない。例えば $t_{0,1} = |\ |_{D(0,1^+)}$ における局所環は、$D(0, 1^+)$ から有限個の disk を除いた所で解析的な関数全体であるが、この中には当然 $\log T$ は含まれない。つまり、解析接続は存在しても Cauchy の定理が成立しないためにうまく行かないわけである。

しかし、totally degenerate な場合にはうまく行く。

例 9.2. $q \in K^\times$, $|q| < 1$ として、周期 q の Tate curve $E_q =$“$K^\times/q^{\mathbb{Z}}$” を考える。ここで ω を canonical differential として、$M = \mathcal{O}_{E_q^{\mathrm{an}}}$ に $\nabla(1) = \omega$ で接続を入れる。普遍被覆 $\mathbb{G}_m \to E_q^{\mathrm{an}}$ の標準パラメータ t を取れば、これは $\nabla = 0$ の解になり、M の horizontal section は locally constant になる。つまり Cauchy の定理が成立している。同様のことは一般の Mumford curve についても成立する。

10 基本群についての補足

8.1 節で述べたように Berkovich space のトポロジーでは etale な射であっても局所同相ではない。そのため単純に基本群を取ると小さすぎるものしか得られない。そこで [Ber93] では Berkovich space に対する etale 位相が定義され、それに対するコホモロジー理論が展開されている。また、同じくその基本群が [dJ95] で考察されている。

これは、finite etale 被覆を使った代数的な基本群とも、Berkovich space の底空間に対して定義されるトポロジカルな基本群 π_1^{top} とも異なる。その違いを示す典型的な例が、次の log 写像による被覆である。($\mathbb{C}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の完備化を表す。)

$$\log : \{z \in \mathbb{C}_p; |z-1| < 1\} \to \mathbb{C}_p$$

$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ は代数的な基本群もトポロジカルな基本群も trivial になるが、上の etale 被覆は対応する群が $\bigcup_n \mu_{p^n}(\mathbb{C}_p)$ であるガロア被覆である。このような被覆を考えることが可能になるという点も、analytic space を導入する大きな利点の一つと言える。

参考文献

[Ber90] V. G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Mathematical surveys and monographs, no. 33, AMS, 1990.

[Ber93] V. G. Berkovich, *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. **78** (1993), 5–161.

[Ber96] P. Berthelot, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, preprint (1996).

[Ber98] V. G. Berkovich, *Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible*, preprint, 1998.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis*, Springer-Verlag, 1984.

[dJ95] A. J. de Jong, *Étale fundamental groups of non-archimedean analytic spaces*, Compositio Math. **97** (1995), 89–118.

[FM86] J. Fresnel and M. Matignon, *Sur les espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué complet ultramétrique*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **145** (1986), 159–210.

[GvdP80] L. Gerritzen and M. van der Put, *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Math., vol. 817, Springer-Verlag, 1980.