

# 非線形放物型発展方程式で支配される系の 最適制御問題

神戸大学自然科学研究科 王 全芳 (Quanfang Wang)

神戸大学工学部 中桐信一 (Shin-ichi Nakagiri)

## 1 非線形発展方程式の弱解

まず、我々は Hilbert 空間  $H$  における次のような非線形一階発展方程式の初期値問題  $(P_0)$  を考える。

$$(P_0) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + A(t)y = f(t, y) + g(t) & \text{in } (0, T) \\ y(0) = y_0 \in H \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで、 $A(t)$  は  $t$  に関する  $H$  上の作用素、 $f(t, y)$  は非線形外力関数、 $g(t)$  は  $t$  のみに関係する外力項とする。 $y_0$  は初期値とする。初期値問題  $(P_0)$  を適切に定義するために、我々は必要な空間とその双対性を次のように定義する。 $H$  は可分な実 Hilbert 空間、即ち  $H = H'$  (共役空間) とする。 $V$  を作用素  $A(t)$  を定義するための可分な実 Hilbert 空間とする。一般の Hilbert 空間  $X$  に対して、 $X'$  を  $X$  の共役空間とし、 $X$  と  $X'$  との間のスカラー積を  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X', X}$  であらわす。 $(\cdot, \cdot)_X$  は空間  $X$  における内積をあらわす。特に  $H$  の内積は  $(\cdot, \cdot)_H$  又は単に  $(\cdot, \cdot)$ 、そのノルムは  $|\cdot|_H$  又は単に  $|\cdot|$ 、また  $V$  の内積は  $((\cdot, \cdot))$ 、そのノルムは  $\|\cdot\|_V$  又は単に  $\|\cdot\|$  であらわす。さらに、 $V$  は  $H$  において稠密とする、同一視  $H' = H$  により、Gelfand triple space  $(V, H)$

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V' \quad (1.2)$$

が得られる。ここで記号  $\hookrightarrow$  は埋め込み写像が連続かつ稠密なることを示す。

まず微分作用素  $A(t)$  の変分法的定式化を行うため、 $\forall t \in [0, T]$  に対して、次の双線形形式  $a(t, \phi, \psi)$  を導入しよう。

**定義 1.1**  $a(t, \phi, \psi)$  は  $V \times V$  上の対称かつ連続な双形式で、 $t$  について可測であり、 $M > 0$  が存在して、 $|a(t, \phi, \psi)| \leq M \|\phi\| \|\psi\|$  を満たし、さらに coercive 条件

$$a(t, \phi, \phi) \geq \alpha \|\phi\|^2 + \lambda |\phi|^2, \quad \forall \phi \in V \quad (1.3)$$

を満たしていると仮定する。ここで  $\alpha > 0$ 、 $\lambda$  は実数とする。作用素  $A(t)$  は、関係式

$$a(t, \phi, \varphi) = \langle A(t)\phi, \varphi \rangle_{V', V}, \quad \forall \phi, \varphi \in V \quad (1.4)$$

により定義される。

この作用素  $A(t)$  を用いて、われわれは  $(V, H)$  上の初期値問題  $(P_0)$  を考える、初期値  $y_0 \in H$ ,  $g(t) \in L^2(0, T; V')$  と仮定する。

非線形項  $f(t, y)$  については次の三つの場合を考える。

$$(1) \quad f : [0, T] \times H \rightarrow H;$$

$\forall y \in H, f(\cdot, y) : [0, T] \rightarrow H$  は可測関数。

$$\exists \beta \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+), \quad |f(t, y) - f(t, z)|_H \leq \beta(t)|y - z|_H, \quad a.e. \text{ in } [0, T], \forall y, z \in H.$$

$$\exists \gamma \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+), \quad |f(t, 0)|_H \leq \gamma(t), \quad a.e. \text{ in } [0, T].$$

$$(2) \quad f : [0, T] \times V \rightarrow H;$$

$\forall y \in H, f(\cdot, y) : [0, T] \rightarrow H$  は可測関数。

$$\exists \beta \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+), \quad |f(t, y) - f(t, z)|_H \leq \beta(t)\|y - z\|_V, \quad a.e. \text{ in } [0, T], \forall y, z \in V.$$

$$\exists \gamma \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+), \quad |f(t, 0)|_H \leq \gamma(t), \quad a.e. \text{ in } [0, T].$$

$$(3) \quad f : [0, T] \times V \rightarrow V';$$

$\forall y \in H, f(\cdot, y) : [0, T] \rightarrow H$  は可測関数。

$$\exists \beta \in L^\infty(0, T; \mathbf{R}^+), \quad \|f(t, y) - f(t, z)\|_{V'} \leq \beta(t)\|y - z\|_V, \quad a.e. \text{ in } [0, T], \forall y, z \in V.$$

$$\exists \gamma \in L^2(0, T; \mathbf{R}^+), \quad |f(t, 0)|_{V'} \leq \gamma(t), \quad a.e. \text{ in } [0, T],$$

ただし、 $\|\beta(t)\|_{L^\infty(0, T; \mathbf{R}^+)} < \alpha$ .

それぞれの場合に  $f(t, y)$  は  $y$  についての Lipschitz 連続性を満たしている。

問題  $(P_0)$  の弱解の定義を与える前に、弱解の属すべき空間を導入しよう。簡単のため  $g' = \frac{dg}{dt}$  と書く。解空間  $W(0, T)$  を

$$W(0, T) = \{g | g \in L^2(0, T; V), g' \in L^2(0, T; V')\}$$

により定義する。Dautray and Lions [1] に従って、次の  $(P_0)$  の弱解の定義を与えよう。

**定義 1.2**  $y \in W(0, T)$  であり、 $y$  が方程式

$$\begin{cases} \langle y'(\cdot), v \rangle_{V', V} + a(\cdot; y(\cdot), v) = [f(\cdot, y(\cdot)), v] + \langle g(t), v \rangle_{V', V} & \forall v \in V, \mathcal{D}'(0, T) \text{ の意味で,} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

を満たすとき、 $y$  は  $(P_0)$  の弱解と呼ばれる。

ここで、記号  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$  は  $V$  と  $V'$  の間の共役対を表わし、 $\mathcal{D}'(0, T)$  は  $(0, T)$  上の超関数の空間を表わす。 $[f(\cdot, y(\cdot)), v]$  の  $[\cdot, \cdot]$  は  $f$  の属する空間により異なる内積又は共役対を取る。例えば、(1) の場合は  $[f(\cdot, y(\cdot)), v] = (f(\cdot, y(\cdot)), v)$  となる。

ガレルキン近似を用いることにより、次の定理 1.1 を証明できる。

**定理 1.1 (弱解の存在と一意性)** 作用素  $A(t)$  は (1.4) により定義され、 $a(t, \phi, \psi)$  は (1.3) を満足するとする。さらに、 $y_0 \in H$ ,  $g \in L^2(0, T; V')$ 、かつ非線形項  $f(t, y)$  は 3 つの場合 (1) ~ (3) の

Lipschitz 条件を満たすとする。このとき、初期値問題  $(P_0)$  は  $W(0, T)$  において一意な弱解  $y$  をもつ。

**証明** 弱解の一意性は Gronwall 不等式を用いて証明できる。

弱解の存在証明を、次の 4 Step にわけて行う。まず、 $(P_0)$  に対応する  $m$  次元近似問題の解  $y_m$  (近似解) の存在性を証明する。つぎに、この近似解に対するアプリアリ評価を導く。これにより近似解の弱極限  $z$  の存在がわかる。最後に、この極限  $z$  は、近似解の強極限になっていることを示す。これにより  $z$  は方程式  $(P_0)$  の弱解になることが証明される。(1) ~ (3) の3つの場合に証明を与えることができるが、紙数の関係により (1) の場合の証明のみを与える。

### STEP 1 : 近似解

$V$  は可分な Hilbert 空間なので、 $V$  の基底関数族  $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$  が存在して、次の (a), (b) がいえる。

(a)  $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$  は  $H$  において完全直交系である。

(b) 有限線形結合

$$\left\{ \sum_{j=1}^m \xi_j w_j \mid \xi_j \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{N} \right\}$$

の全体からなる集合は  $V$  において稠密である。

$\forall m \in \mathbf{N}$  に対して、 $(P_0)$  の近似解  $y_m(t)$  は次のように定義される：

$$y_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j \quad (1.5)$$

の形で与えられ、その係数  $g_{jm}(t)$  は近似問題

$$(P_m) \quad \begin{cases} \left\langle \frac{dy_m(t)}{dt}, w_j \right\rangle_{V', V} + a(t, y_m(t), w_j) = (f(t, y_m(t)), w_j)_H + (g(t), w_j)_{V', V}, \\ t \in [0, T], \quad 1 \leq j \leq m \\ y_m(0) = y_{0m} \in H \end{cases} \quad (1.6)$$

を満たすように構成する。ここで初期条件  $y_{0m}$  は次のように作られる。

(a), (b) により、実数  $\xi_{im}^0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $m \in \mathbf{N}$  が存在して

$$y_{0m} = \sum_{i=1}^m \xi_{im}^0 w_i \rightarrow y_0 \quad \text{in } V \quad (m \rightarrow \infty).$$

この  $\xi_{im}^0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) を用いて、 $(P_m)$  は次の  $m$  次元ベクトル微分方程式に書き直される：

$$\begin{cases} \frac{d\vec{g}_m}{dt} + A(t)\vec{g}_m = \vec{F}(t, \vec{g}_m) + \vec{G}(t) \\ \vec{g}_m(0) = [\xi_{1m}^0, \xi_{2m}^0, \dots, \xi_{mm}^0]^T. \end{cases} \quad (1.7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \vec{g}_m(t) &= [g_{1m}(t), g_{2m}(t), \dots, g_{mm}(t)]^T \\ A(t) &= (a(t; w_i, w_j) : i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

$$\vec{F}(t, \vec{g}_m) = \begin{bmatrix} (f(t, \sum_{j=1}^m g_{jm} w_j), w_1)_H \\ (f(t, \sum_{j=1}^m g_{jm} w_j), w_2)_H \\ \vdots \\ (f(t, \sum_{j=1}^m g_{jm} w_j), w_m)_H \end{bmatrix}$$

$$\vec{G}(t) = [\langle g(t), w_1 \rangle_{V', V}, \langle g(t), w_2 \rangle_{V', V}, \dots, \langle g(t), w_m \rangle_{V', V}]^T$$

[...]<sup>T</sup>は[...]の転置をあらわす。外力関数ベクトル  $\vec{F}(t, \vec{g}_m) + \vec{G}(t)$  は  $\vec{g}_m$  に関して Lipschitz 連続であることを証明できる。これによって、Caratheodory type の存在定理を利用して、このベクトル微分方程式 (1.7) は一意な解  $\vec{g}_{jm}(t)$  を  $[0, T]$  上で持つ。これと (1.5) により、近似問題  $(P_m)$  の解は  $y_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) w_j$  により与えられる。

### STEP 2 : アプリオリ評価

近似方程式  $(P_m)$  から、条件 (1.3) を用いて、不等式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |y_m(t)|_H^2 + \alpha \int_0^t \|y_m(t)\|_V^2 dt \\ & \leq \frac{1}{2} |y_m(0)|_H^2 + \int_0^t (f(t, y_m(t), y_m(t)))_H dt + \int_0^t \langle g(t), y_m(t) \rangle_{V', V} dt \end{aligned}$$

が導かれ、 $f$  に関する仮定と Gronwall の不等式を使うことにより、

$$y_m \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \text{ の一つ有界集合} \quad (1.8)$$

がわかる。

### STEP 3 : 近似解の弱収束性

(1) 弱収束 STEP 2 により (1.8) がわかり、このことから、さらに

$$A(\cdot) y_m \in L^2(0, T; V') \text{ の一つ有界集合} \quad (1.9)$$

$$f(\cdot, y_m) \in L^2(0, T; H) \text{ の一つ有界集合} \quad (1.10)$$

がわかる。これから、各空間  $L^2(0, T; V)$ ,  $L^\infty(0, T; H)$ ,  $L^2(0, T; V')$ ,  $L^2(0, T; H)$  の単位球の弱(弱\*)コンパクト性の性質 (Rellich's extraction Theorem) を利用して、次の Lemma 1.1 を得る。

**Lemma 1.1** ある部分列  $\{y_{mk}\} \subset \{y_m\}$  と、ある  $z \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; V)$ 、およびある  $Y \in L^2(0, T; H)$  が存在して、次の (i) ~ (iv) の弱収束性が成立する。

$$(i) \quad y_{mk} \rightarrow z \quad (\text{weakly } * \text{ in } L^\infty(0, T; H)).$$

$$(ii) \quad y_{mk} \rightarrow z \quad (\text{weakly in } L^2(0, T; V)).$$

$$(iii) \quad f(\cdot, y_{mk}) \rightarrow Y \quad (\text{weakly in } L^2(0, T; H)).$$

$$(iv) \quad A(\cdot) y_{mk} \rightarrow A(\cdot) z \quad (\text{weakly in } L^2(0, T; V')).$$

が得られる。

(2)  $z(t)$  は線形方程式  $\begin{cases} \frac{dz}{dt} + A(t)z = Y(t) + g(t) & \text{in } (0, T) \\ z(0) = y_0 \in H \end{cases}$  の弱解

近似方程式との関係を用いて、Lemma 1.1により  $z(t)$  は超関数の意味で、つぎの方程式を満たすことがわかる。

$$\begin{cases} \langle \frac{dz(t)}{dt}, v \rangle_{V', V} + a(t, z(t), v) = (Y(t), v)_H + \langle g(t), v \rangle_{V', V} \\ z(0) = y_0, \quad \forall v \in V \end{cases} \quad (1.11)$$

すなわち、 $z(t)$  は上の線形方程式の弱解になる。

#### STEP 4 : 近似解の強収束

$Y(t) = f(t, z(t))$  を証明すれば存在証明は終わる。このために、 $\forall t \in [0, T]$  に対して、 $H$  において、 $y_m(t) \rightarrow z(t)$  (強収束) を証明しよう。 $y_m(t)$  に対するエネルギー等式は次のようになる：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |y_m(t)|_H^2 + \int_0^t a(s, y_m(s), y_m(s)) ds \\ &= \frac{1}{2} |y_m(0)|_H^2 + \int_0^t (f(s, y_m(s)), y_m(s))_H ds + \int_0^t \langle g(s), y_m(s) \rangle_{V', V} ds. \end{aligned} \quad (1.12)$$

$z(t)$  は方程式

$$\begin{cases} \frac{dz(t)}{dt} + A(t)z(t) = Y(t) + g(t) \\ z(0) = y_0 \end{cases}$$

の弱解なので、

$$\langle \frac{dz(t)}{dt}, z(t) \rangle_{V', V} + (A(t)z(t), z(t)) = (Y(t), z(t)) + \langle g(t), z(t) \rangle_{V', V}$$

を満たし、従って、そのエネルギー等式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |z(t)|_H^2 + \int_0^t a(s, z(s), z(s)) ds \\ &= \frac{1}{2} |y_0|_H^2 + \int_0^t (Y(s), z(s))_H ds + \int_0^t \langle g(s), z(s) \rangle_{V', V} ds. \end{aligned} \quad (1.13)$$

これらの差を考えよう。任意の  $t \in (0, T)$  に対して、次の関数  $X_m(t)$  を定義する：

$$\begin{aligned} X_m(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} |y_m(t) - z(t)|^2 + \int_0^t a(s, y_m - z, y_m - z) ds \\ &\quad - \int_0^t (f(s, y_m) - f(s, z), y_m - z) ds \end{aligned} \quad (1.14)$$

弱収束から強収束を導く、線形の場合の Dautary-Lions の方法と  $f$  の Lipschitz 連続性を用いると、 $X_m(t) \rightarrow 0$  を示すことができる。この証明が最も難しい部分である。このことから、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |y_m(t) - z(t)|_H = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.15)$$

がわかる。つぎに  $Y(t) = f(t, z(t))$  を証明しよう。Lipschitz 条件により、明らかに  $L^2(0, T; H)$  において、 $f(t, y_m) \rightarrow f(t, z)$  (強収束) がいえる。よって、 $L^2(0, T; H)$  空間で収束の一意性により

$Y(t) = f(t, z(t))$  がわかる。これにより、 $z \in W(0, T)$  もわかる。すなわち、 $z(t)$  は方程式  $(P_0)$  の弱解である。

(2)  $f: [0, T] \times V \rightarrow H$ 、および (3)  $f: [0, T] \times V \rightarrow V'$  の場合にも、弱解の存在と一意性の定理を証明することができる。

## 2 非線形放物型最適制御問題

この節では、非線形放物型発展方程式により記述される系の、最適制御問題を議論する。我々の考える制御系は、次の方程式により記述されているとする。

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} + A(t)y = f(t, y) + Bv & \text{in } (0, T) \\ y(0) = y_0 \in H. \end{cases} \quad (2.16)$$

ここで、作用素  $A(t)$  に対する仮定は第1節と同じとする。制御項  $Bv$  に関しては次の仮定をおく。 $U$  は制御変数  $v$  の作る Hilbert 空間とし、 $B$  は制限作用素であり、 $\mathcal{L}(U, L^2(0, T; V'))$  の元とする。このとき  $Bv \in L^2(0, T; V')$ 、 $v \in U$  となる。非線形外力関数  $f(t, y)$  については第1節での述べた、3つの場合を考える。制御系  $(P)$  の弱解  $y = y(v)$  は制御システムの状態と呼ばれる。 $\mathcal{M}$  を観測変数  $z$  の作る Hilbert 空間とする。状態  $y(v)$  の観測  $z(v)$  は次で与える：

$$z(v) = Cy(v), \quad C \in \mathcal{L}(W(0, T), \mathcal{M}). \quad (2.17)$$

ここで、 $C$  は観測作用素と呼ばれる。制御系  $(P)$  のコスト関数は次で定義される：

$$J(v) = \|Cy(v) - z_d\|_{\mathcal{M}}^2 + (Nv, v), \quad v \in U. \quad (2.18)$$

ここで、 $z_d \in \mathcal{M}$  は  $z(v)$  の目標値、 $N \in \mathcal{L}(U)$  は対称正值作用素、すなわち

$$\gamma \geq 0 \text{ が存在して, } (Nv, v) = (v, Nv) \geq \gamma \|v\|_U^2 \quad (2.19)$$

がなりたつとする。 $U_{ad}$  を  $U$  の閉凸部分集合とする。 $U_{ad}$  は”許容制御集合”と呼ばれる。

最適制御問題というのは、 $U_{ad}$  において、コスト関数  $J(v)$  が最小となる  $u$  を求め、その  $u$  の特徴を見出すことである。すなわち、次の2つの問題に分けることができる。

(i)  $\inf_{v \in U_{ad}} J(v) = J(u)$  となる  $u \in U_{ad}$  を求める。

(ii)  $u$  の特徴づけを見い出す。

このような  $u$  は制御系  $(P)$  のコスト関数 (2.18) に対する”最適制御”と呼ばれる。

(i) において重要なことは、このような  $u$  が存在するかという問題である。ここでは空間に関する適切な条件のもとで最適制御  $u$  の存在性を証明する。

(ii) を求めるためには、最適性の条件

$$J'(u)(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad} \quad (2.20)$$

および、随伴状態システムの詳しい解析が必要となる。ここで、 $J'(u)(v - u)$  はコスト  $J(v)$  の  $(v = u)$  における  $(v - u)$  の方向導関数である。

## 2.1 最適制御の存在定理

**定理 2.1** 定理 1.1 の仮定はすべて満たされているとする、さらに  $U_{ad}$  は  $U$  の閉凸部分集合とする。このとき、制御系 (P) のコスト関数 (2.18) に関する最適制御問題は、少なくとも一つの最適制御  $u$  を持つ。

### 証明のスケッチ

$v_n$  を  $\inf_{v \in U_{ad}} J(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) = J$  となる  $\{v_n\}$  をとる。 $\{v_n\}$  が有界なることは、 $N$  の仮定 (2.19) よりわかる。定理 (1.1) のアプリアリ評価を導くのとほぼ同様の手法により、 $y(v_n)$  も  $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$  の一つ有界集合を示すことができる。同時に  $\{y'(t, v_n)\} \in L^2(0, T; V')$  の一つ有界集合に含まれることもわかる。すなわち  $\{y(t, v_n)\}$  は  $W(0, T)$  で有界である。このことから、 $\{y(v_n)\}$  の部分列  $\{y(v_m)\}$  が存在して、

$$y(v_m) \rightarrow z \in L^2(0, T; V) \text{ (弱収束)} \quad (m \rightarrow \infty) \quad (2.21)$$

とできる。同時に  $v_m \rightarrow u$  (弱収束) とできる。 $u$  が最適制御になるために、 $z = y(u)$  を証明したい。このためには、 $f(t, y(v_m)) \rightarrow f(t, z) \in L^2(0, T; H)$  (強収束) が必要なので、 $y(v_m) \rightarrow z \in L^2(0, T; H)$  (強収束) を証明したい。しかし、(2.21) から弱収束性しか得られていない、この困難を乗り越えるために、 $V$  から  $H$  への埋め込みのコンパクト性条件をつける。これにより Temam のコンパクト性定理 Temam [7, p.276] が使うことができ、 $y(v_m)$  の強収束性がいえて、 $z = y(u)$  すなわち、最適制御が少なくとも一つ存在することがわかる。

その他の (2)  $f : [0, T] \times V \rightarrow H$  および (3)  $f : [0, T] \times V \rightarrow V'$  の場合にも、ほぼ同様の手法により最適制御の存在定理を証明することができる。

## 2.2 最適解の必要条件

問題 (ii) を解決するには、最適解  $\inf_{v \in U_{ad}} J(v) = J(u)$  の必要条件:

$$J'(u)(v - u) \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$$

を適当な随伴系の言葉で書き変える必要がある。またこの Gateaux 微分可能性を検証するには、非線型写像  $u \rightarrow y(v) : U \rightarrow \mathbf{W}(0, T)$  の弱 Gateaux 微分可能性を確かめなければならない。このためには、非線型項  $f(t, y)$  の Fréchet 微分可能性を示さねばならない。 $f(t, y)$  の  $y$  に関する Fréchet 微分可能性の定義を与えよう。これは、解の弱微分可能性を検証するために必要となる。以下 (1) の場合のみ考える。(2), (3) の場合も同様に解析できる。

**定義 2.1 (Fréchet 微分可能性)** 任意の  $t \in [0, T]$  に対し、 $f(t, y)$  が変数  $y$  に関して  $y = \phi \in H$  において Fréchet 微分可能であるとは、作用素  $f_y(t, \phi) \in \mathcal{L}(H)$  が存在して

$$|h|_H \rightarrow 0 \text{ のとき、} \frac{|f(t, \phi + h) - f(t, \phi) - f_y(t, \phi)h|_H}{|h|_H} \rightarrow 0$$

が成り立つときをいう。

$f_y(t, \phi)$  を  $f(t, y)$  の変数  $y$  に関する  $y = \phi$  における Fréchet 導関数という。

最適解の特徴づけの問題 (ii) において、我々が考えねばならない問題は、どのような条件のもとで、制御空間  $U$  から  $W(0, T)$  への写像  $v \rightarrow y(v)$  が  $u$  における方向導関数をもつかということである。

**定義 2.2 (弱方向導関数)** 非線形写像  $v \rightarrow y(v) : U \rightarrow W(0, T)$  が  $v = u$  において弱方向微分可能であるとは、作用素  $Dy(u) \in \mathcal{L}(U, W(0, T))$  が存在して、任意の  $w \in U$  に対し

$$\lambda \rightarrow 0 \text{ のとき } \left\langle \frac{1}{\lambda}(y(u + \lambda w) - y(u)) - Dy(u)w, \phi \right\rangle_{W(0, T), W(0, T)'} \rightarrow 0$$

が任意の  $\forall \phi \in W(0, T)'$  に対して成り立つときをいう。

作用素  $Dy(u)$  は  $v = u$  における  $y(u)$  の方向導関数と呼ばれる。  $w \in U$  として、関数  $Dy(u)w \in W(0, T)$  は  $w \in U$  方向の  $y(u)$  の導関数と呼ばれる。

**定理 2.2** 定理 1.1 の仮定がすべてみたされているとする。さらに  $f(t, y)$  は任意の  $t \in [0, T]$  に対し  $y = y(u, t)$  において Fréchet 微分可能であり、積分条件

$$\|f_y(\cdot, y(u, \cdot))\|_{L^2(0, T; \mathcal{L}(H))} = \left( \int_0^T \|f_y(t, y(u, t))\|_{\mathcal{L}(H)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \quad (2.22)$$

が満たされているとする。このとき、非線形写像  $v \rightarrow y(v) : U \rightarrow W(0, T)$  は  $v = u$  において弱微分可能であり、  $v - u \in U$  方向の導関数

$$z = Dy(u)(v - u)$$

は次の方程式の一意的な弱解として与えられる。

$$\begin{cases} z' + (A(t) - f_y(t, y(u, t)))z = B(v - u) & \text{in } (0, T) \\ z(0) = 0 \in H. \end{cases} \quad (2.23)$$

詳しい証明は略すが、非線形項  $f(t, y(t, u))$  に注意して、  $y(v)$  の  $v = u$  でのガトー微分を計算する、これにより、定理 2.2 を証明できる。

この定理によって、コスト関数  $J(u)$  は  $u$  において  $v - u$  方向に微分可能、そして、最適性の必要条件は次のように書き直すことができる。

$$\langle C^* \Lambda_M(Cy(u) - z_d), Dy(u)(v - u) \rangle_{W(0, T), W(0, T)'} + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (2.24)$$

ここで、  $\Lambda_M$  は  $M$  から  $M'$  への標準同型写像とする。

### 異なるタイプの観測空間

先の結論を利用して (2.22) の仮定のもとで、異なるタイプの観測空間における最適性の必要条件を与える。線形の場合には Lions [3] により完全に解決されている。しかし、一般の非線形項  $f(t, y)$



を持つ場合には新しい結果だといえる。ここでは、次の2つの場合の観測に対し随伴系を適切に導入し、最適性の必要条件をこれらの系の解を用いて記述する。

**1.  $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V), \mathcal{M})$ 、観測は  $z(v) = Cy(v)$  (分布観測)**

$C$  の共役作用素  $C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{M}', L^2(0, T; V'))$  だから、 $C^* \Lambda_{\mathcal{M}}(Cy(u) - z_d) \in L^2(0, T; V')$  となる。今の場合、(2.24) の第1項  $W(0, T)'$  と  $W(0, T)$  の共役対は今  $L^2(0, T, V')$  と  $L^2(0, T; V)$  の共役対になる。さらに積分で表示すると、最適条件は次になる。

$$\int_0^T \langle C^* \Lambda_{\mathcal{M}}(Cy(u) - z_d), z(t) \rangle_{V', V} dt + (Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \quad (2.25)$$

随伴系との関係も考えると、次の定理にまとめることができる。

**定理 2.3** 定理 2.2 の仮定はすべて成り立っているとし、 $C \in \mathcal{L}(L^2(0, T; V), \mathcal{M})$  と仮定する。このとき、最適制御  $u$  は次の制御系、随伴系および不等式によって特徴づけられる。

$$\begin{cases} \frac{dy(u)}{dt} + A(t)y(u) = f(t, y(u)) + Bu & \text{in } (0, T) \\ y(0, u) = y_0 \in H \\ -\frac{dp}{dt} + A^*(t)p(u) = f_y(t, y(u))^* p(u) + C^* \Lambda_{\mathcal{M}}(Cy(u) - z_d) \\ p(T, u) = 0 \\ (\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u)_U \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\ y(u), p(u) \in L^2(0, T; V). \end{cases}$$

**2.  $C \in \mathcal{L}(H, \mathcal{M})$ 、観測は  $z(v) = Cy(T, v)$  (最終観測)**

観測  $C$  は  $H$  から  $\mathcal{M}$  への作用素である。随伴系との関係を考えると、次の定理が得られる。

**定理 2.4** 定理 2.2 のすべての条件が成り立つとする、 $C \in \mathcal{L}(H, \mathcal{M})$  を最終観測作用素とする。このとき最適制御  $u$  は次の系および不等式条件で特徴づけられる。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(u) + A(t)y(u) = f(t, y(u)) + Bu \\ y(0, u) = y_0 \\ -\frac{d}{dt}p(u) + A^*(t)p(u) = f_y(t, y(u, t))^* p(u) \\ p(T, u) = C^* \Lambda_H(Cy(T, u) - z_d) \in H \\ (\Lambda_U^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \\ y(u), p(u) \in W(0, T). \end{cases}$$

### 3 具体的な非線形制御系の応用の例

以下  $\Omega$  は  $R^n$  の充分なめらかな境界  $\Gamma = \partial\Omega$  を持つ有界開集合とする。 $Q = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma = (0, T) \times \Gamma$  とおく。この節では、具体的な非線形方程式を含む制御系への応用例を与える。

例 1 : 次の非線形放物型制御系を考える。制御は分布制御とする。

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - d\Delta y + \beta \sin y = v & \text{in } Q \\ y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.26)$$

ここで、 $\Delta$  はラプラシアン、 $d, \beta > 0$  とする。 $y_0 \in L^2(\Omega), v \in \mathcal{U} \subset L^2(Q)$  とする。境界条件が Dirichlet 型なので、 $V = H_0^1(\Omega), H = L^2(\Omega)$  を取れば、 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  となり、前の節の仮定はすべて満たされている。この場合、 $z_d \in L^2(\Omega)$  として、制御系に対するコスト関数を

$$J(v) = \int_Q (y(v, t, x) - z_d(t, x))^2 dx dt + (Nv, v)_U \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U} \quad (3.27)$$

により定義する。ここで  $N$  は  $\mathcal{U}$  上の正値対称な作用素とする。

$f(t, y) = \sin y$  は Lipschitz 条件を満たしているから、定理 2.2 により、最適制御問題は少なくとも 1 つの最適解  $u$  が存在することがわかっている。 $f$  は Fréchet 微分可能であり、 $f_y(y(u, t)) = \beta \cos y(u)$  は (2.22) を満たす。随伴状態は次の方程式で与えられる：

$$\begin{cases} -\frac{\partial p(u)}{\partial t} - d\Delta p(u) + \beta \cos y(u) \cdot p(u) = y(u) - z_d & \text{in } Q \\ p(u) = 0 & \text{on } \Sigma \\ p(u; T, x) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.28)$$

この式において  $y(u) - z_d \in L^2(Q)$  なので、定理 2.2 により、唯一つの弱解  $p(u)$  を持つことがわかる。最適条件を計算するにより、(3.27) のコストに対する最適制御はつぎの変分不等式により特徴づけられる。

$$\int_Q (p(u) + Nu)(v - u) dx dt \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \subset L^2(Q) \quad (3.29)$$

例 2 : 多項式  $g(s) = \sum_{j=0}^{2p-1} b_j s^j$ ,  $b_{2p-1} \geq 0$  として、非線形制御系は次のように与えられるとする。

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} - d\Delta y + \beta g(y) = v & \text{in } Q \\ y = 0 & \text{on } \Sigma \\ y(x, 0) = y_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (3.30)$$

ここで、 $d > 0, y_0 \in L^2(\Omega), v \in L^2(Q)$  とする。制御は同じく簡単のため分布制御とする。

この系の解の一意と存在性は、自明ではない。すなわち、 $g$  は局所 Lipschitz 条件を満たすが、大域的には成り立たない。従って、定理 1.1 の解の一意存在定理は適用できない。しかし、アプリアオリ評価を導くことにより、Temam [6] とほぼ同様の方法により解の一意存在性を証明することができる。一方、随伴方程式、最適性の必要条件は 2 節の結果をそのまま適用できる。

特に、 $\mathcal{U} = L^2(Q), \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid \xi_1 \leq v \leq \xi_2, \text{ a.e. in } Q, \xi_1, \xi_2 \in L^\infty(Q)\} \subset L^2(Q)$  とし、対応するコスト関数を

$$J(v) = \|y(T, v) - z_d\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall v \in L^2(Q)$$

で与える。これは (2.18) において、 $N = 0$  の場合であり、 $U_{ad}$  が有界なることから、定理 2.1 の方法により最適制御  $u$  の存在が確かめられる。このとき、最適制御条件から次のことが導ける。

$$p(u; t, x) > 0, \quad \xi(t, x) - u(t, x) \geq 0 \quad \text{のとき、} \quad u(t, x) = \xi_1(t, x)$$

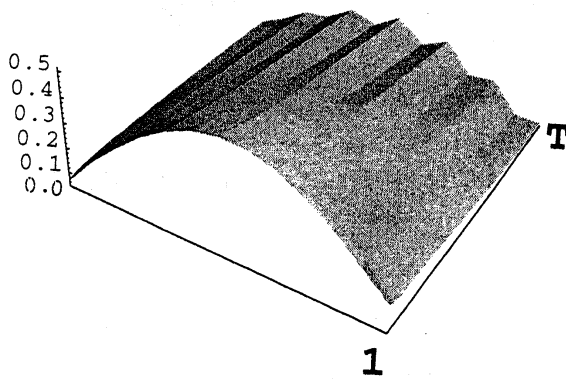
$$p(u; t, x) < 0, \quad \xi(t, x) - u(t, x) \leq 0 \quad \text{のとき、} \quad u(t, x) = \xi_2(t, x).$$

これは最適制御が許容集合の境界の値をとることをいっており、線形の場合と同じような最適解の Bang-Bang の性質である。

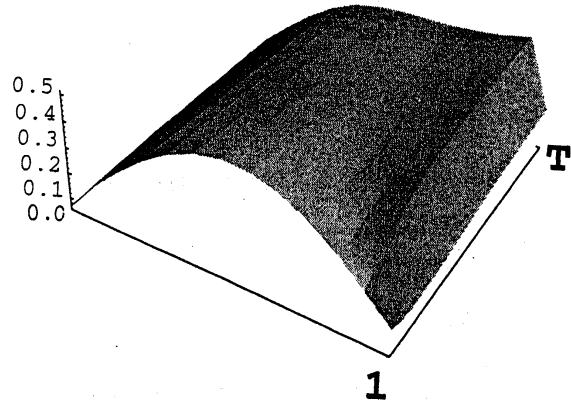
#### 4 有限要素法による数値解析

本節では、3節で与えた具体的な方程式の有限要素法による数値解析を行う。基底関数を用いた弱解のスキームを構成し、その数値シミュレーションを実行した。これにより、異なる初期値、外力関数、および物理パラメータに対して、解がどのような振る舞いを示すかを、数値的および図式的（数式処理ソフト Mathematica を利用して）に検証した。以下ではそのいくつかのシミュレーション結果を与える。 $\Omega = (0, 1)$ ,  $Q = (0, 1) \times [1, T]$ ,  $T = 2$  とする。

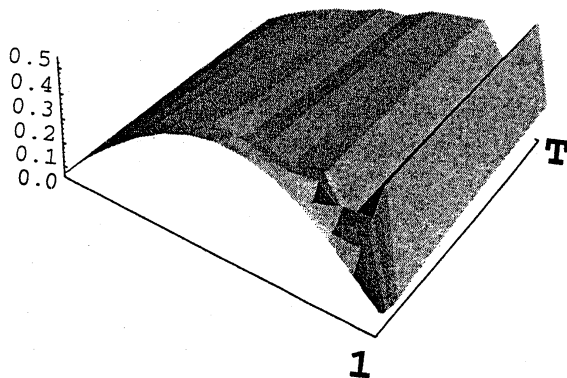
例 1: 非線形項  $f(t, y) = \beta \sin y$ 、初期値  $y(0) = \sin(\pi x)$  の場合



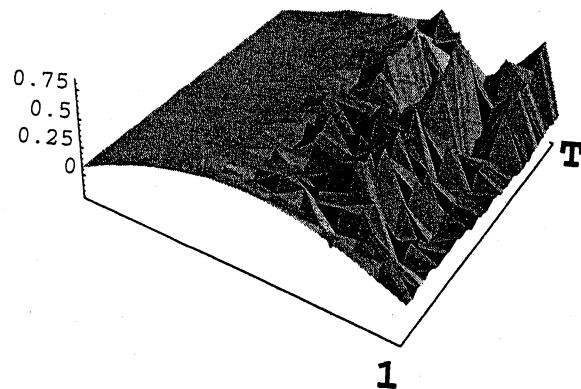
$d = 0.0105, \beta = 0.01$



$d = 0.001, \beta = 0.01$

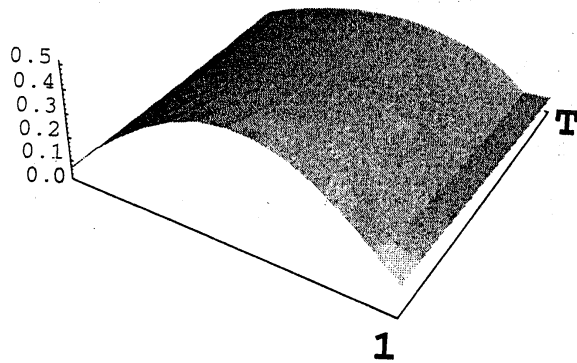


$d = 0.001, \beta = 0.05$

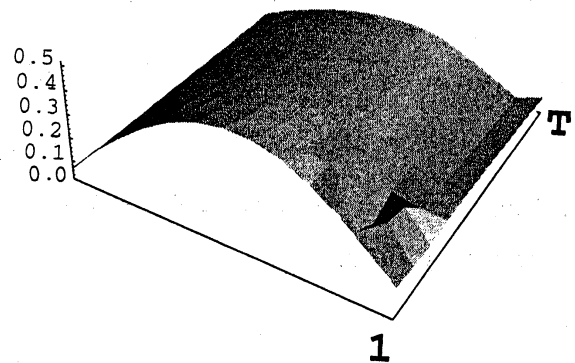


$d = 0.001, \beta = 0.1$

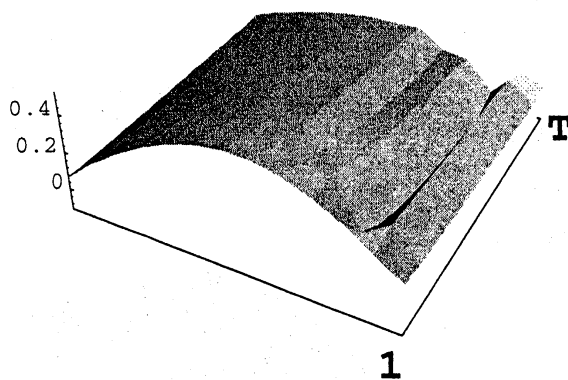
例 2: 非線形項  $f(t, y) = \beta y^3$ 、初期値  $y(0) = \sin(\pi x)$  の場合



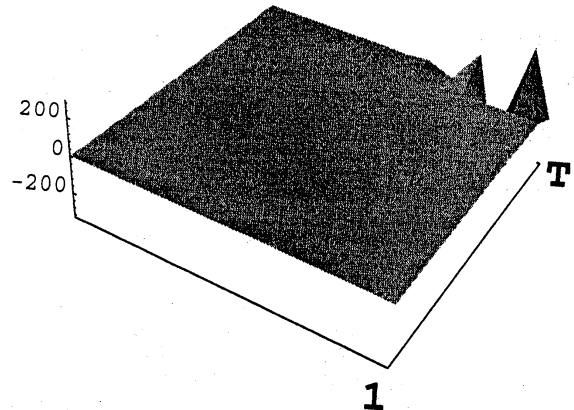
$$d = 0.001, \beta = 0.001$$



$$d = 0.001, \beta = 0.0029$$



$$d = 0.001, \beta = 0.00290781349875$$



$$d = 0.001, \beta = 0.00290781349877$$

## 参考文献

- [1] R. Dautary and J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, Vol. 5, Evolution Problems I*, Springer-Verlag, 1992.
- [2] J. L. Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1971.
- [3] J. L. Lions, 偏微分方程式と最適制御 1, 2, 黒田義輝、牧野 昭 訳, 東京図書株式会社、1973.
- [4] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [5] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Math. Sci. 68, Springer-Verlag, 1988.
- [6] R. Temam, *Navier Stokes Equation*, North -Holland , 1984.