数理解析研究所講究録
1138巻 2000年 43-55

誤差項をもつ実多項式の「近似実根」の計算とその応用

筑波大学数学系　照井　章(Akira Terui) *

概　要

与えられた1変数実多項式が係数に誤差をもつ場合、根の存在領域の計算と、実根の個数の計算は、近似的代数計算における重要な計算の一つである。筆者らはこれまでに、係数に誤差を含む多項式、すなわち誤差項をもつ1変数多項式の根の存在領域を、近似計算を用いて精度よく計算する方法を提案した。また、誤差項をもつ実多項式の実根の個数が確定するための十分条件を示すとともに、Sturm法を用いて実根の個数を計算する場合に遭遇しうる微小主項の問題を考察し、微小主項を除去できるための十分条件を導いた。本稿では、これまでに提案した根の存在領域の計算法の有効性を調べるために行った実験結果を示し、Sturm列の計算における微小主項の問題に対しては、微小主項を除去できるための十分条件について再び議論する。

1　はじめに

本稿では、係数が計算機イプシロン ε_M よりもはるかに大きな相対誤差をもつ1変数実多項式（誤差項をもつ多項式）の、根の存在領域の計算と実根の個数の計算について考察する。

多項式が係数に誤差を含めば、多項式の根も係数の誤差に応じて変動しうるが、係数の変動が与えられた範囲内で起こる場合は、根の変動も限られた領域内で起こると考えられる。誤差項をもつ多項式の根の存在領域を計算する方法として、筆者らは、これまでに1変数多項式の根の誤差上界に関するSmithの定理 [3] を用いた方法 [6] を提案した。本稿では、提案した方法をいくつかの例に適用させて実験を行った結果について述べる。

誤差項をもつ実多項式の実根の個数は、多項式が重根や近接根をもつ場合には、誤差項の変動によって実根の個数が変化しうるが、多項式の実根どうしが互いに十分離れていれば、実根の個数は誤差項の変動によっても変化せず、実根の個数が確定すると考えられる。筆者らはこれまでに、誤差項をもつ実多項式の実根の個数が確定するための十分条件を導いた [4]。次に、筆者らは、よく知られたSturm法と浮動小数演算（高木 [8] 等を参照）を用いて実根の個数を計算するときに遭遇しうる微小主項の問題を取り上げ、微小主項を除

*terui@math.tsukuba.ac.jp

去できるための十分条件について議論した [4]。本稿では、この微小主項の問題について再び考察し、より明解な議論を行った上で、微小主項を除去できるための十分条件をあらためて導く。

以下では、次の内容を述べる。**2** では、本稿で考察の対象にする「誤差項をもつ多項式」を導入する。**3** では、誤差項をもつ多項式の根の存在範囲の計算法を再掲し、ついでその実験結果を述べる。**4** では、誤差項をもつ多項式の実根の個数が確定するための十分条件を再掲し、ついで Sturm 列の計算における微小主項の問題について考察する。

2 誤差項をもつ多項式

本章では、以下で用いる誤差項をもつ多項式を導入する。

既知の多項式 $P(x)$ を一般に複素係数 1 変数多項式とし、次のように与えられているとする。

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 x^0, \quad a_n \neq 0. \tag{1}$$

これに対し、未知の 1 変数多項式 $\tilde{P}(x)$ が次のように与えられるとする。

$$\tilde{P}(x) = P(x) + \Delta(x). \tag{2}$$

ここに、$\Delta(x)$ は誤差項を表す多項式で未知だが、

$$\Delta(x) = \delta_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \delta_0 x^0 \tag{3}$$

と表すとき、既知の微小正数 $\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_0$ に対して

$$|\delta_i| < \varepsilon_i, \quad i = n-1, n-2, \ldots, 0 \tag{4}$$

であることはわかっているとする。このとき、$\tilde{P}(x)$ を誤差項をもつ多項式という。

3 誤差項をもつ多項式の根の存在領域の計算

本章のうち、**3.1** および **3.2** は筆者らがこれまでに提案した方法 [6] の概略、すなわち、式 (1), (2) でそれぞれ与えられている多項式 $P(x)$ と $\tilde{P}(x)$ に対して、$P(x)$ の根の近似値が与えられているものと仮定し、$P(x)$ の係数を用いて $\tilde{P}(x)$ の根の存在領域を効率的に、精度よく計算する方法を述べる。**3.3** では、いくつかの例に対して本稿に述べられている方法を適用し、根の存在領域の計算を行った実験の結果を述べる。

まず、多項式の根の存在領域の見積もり方法の基になる Smith の定理を述べる（証明は Smith [3] を参照)。

定理 1 (Smith [3]) $P(x)$ を n 次 1 変数多項式 (1) とする。複素平面上の n 個の異なる点を $x_1, \ldots, x_n$ とし、実数 $r_1, \ldots, r_n$ を

$$r_j = \left| \frac{nP(x_j)}{a_n \prod_{k=1,\neq j}^{n}(x_j - x_k)} \right|, \quad j = 1, \ldots, n \tag{5}$$

で定義する。D_j を複素平面上の中心 x_j, 半径 r_j の閉円盤とする。このとき、$P(x)$ のすべての零点は $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ の内部または周上に存在する。$D_1 \cup \cdots \cup D_m$ $(m \leq n)$ が連結で、かつ他の $D_{m+1}, \ldots, D_n$ と交わりをもたなければ、$D_1 \cup \cdots \cup D_m$ の内部または周上にちょうど m 個の $P(x)$ の零点が存在する。∎

3.1 単根の場合

簡単のため、$P(x)$ と $\tilde{P}(x)$ はともにモニックとし、$P(x) = 0$ と $\tilde{P}(x) = 0$ の根をそれぞれ $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ および $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_n$ とする。

$$P(x) = (x - \zeta_1)(x - \zeta_2) \cdots (x - \zeta_n), \tag{6}$$

$$\tilde{P}(x) = (x - \tilde{\zeta}_1)(x - \tilde{\zeta}_2) \cdots (x - \tilde{\zeta}_n). \tag{7}$$

本章では一般性を失うことなく、根 ζ_1 が単根でその近傍に他の根はないものとする。さらに $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ の近似値として $z_1, \ldots, z_n$ が得られているものとする。($z_1, \ldots, z_n$ は方程式 $P(x) = 0$ を数値解法で解いて得られる近似解とすればよい。) このとき、R_1 の上界は次式のように計算できる。(詳細は照井・佐々木 [6] を参照。)

$$R_1 \leq n \cdot \frac{|P(z_1)| + \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j |z_1|^j}{\left| \prod_{j=2}^{n}(z_1 - z_j) \right|}. \tag{8}$$

3.2 重根・近接根の場合

一般性を失うことなく $\zeta_1 \simeq \cdots \simeq \zeta_m$ $(m \leq n)$ とし、$P(x)$ の $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ 以外の根はこれらから十分に離れているものとする。

前章の議論によると、$P(x) = 0$ を数値的に解いて $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ の近似値 $z_1, \ldots, z_n$ を求め、これらを Smith の定理に代入して、式 (8) により $\tilde{\zeta}_1, \ldots, \tilde{\zeta}_n$ の存在範囲を決定すればよさそうに思える。しかし、近似根 $z_1, \ldots, z_n$ は精度限界まで計算するとき $P(z_i) = O(\varepsilon_M)$ (ε_M は計算機イプシロン) となるように決定されるので、$|\Delta_P(z_i)| \gg \varepsilon_M$ のとき、式 (8) に基づく存在範囲は広くなりすぎて実用には適さないことが多いと考えられる。

そこで、

$$P(x) = (x - \zeta_1) \cdots (x - \zeta_m) \cdot Q(x), \quad C = |\Delta(z_1)/Q(z_1)| \tag{9}$$

とおき、R_1 の上界を下記の方法で計算する。(この方法は、伊理 [7] によるものと基本的に同様である。詳細は照井・佐々木 [6] を参照。)

1. 実数 r を次式により計算する。

$$r = \sqrt[m]{(m-1)C}. \tag{10}$$

2. 近似値の中心を

$$\beta = (z_1 + \cdots + z_m)/m \tag{11}$$

とし、

$$z_j = \beta + r\exp(2\pi ji/m), \quad j = 1, \ldots, m \tag{12}$$

で z_j $(j = 1, \ldots, m)$ を再定義する。根の近似値 $z_1, \ldots, z_m$ は、複素平面上の中心 β、半径 r の円上に均等に配置される。

3. $z_1, \ldots, z_m$ を (8) に代入し、R_1 の厳密な上界を得る。

3.3 実験

上述の根の存在領域の計算のうち、特に重根や近接根の存在領域を計算する実験として、本稿では 1) 誤差項が比較的小さい 1 変数多項式において、近接根の多重度を変化させた例と、2) 2 変数多項式の零点で定義される代数関数の実平面上の特異点の計算の例を取り上げた。本稿の実験には、システムとして SPARC Station 5 (microSPARC II 70MHz, RAM 32MB), SunOS 4.1.4 を用い、ソフトウェアには NS-LISP (Nara Standard LISP) 上で数式処理システム GAL (General Algebraic Language/Laboratory) を用いた。(数値計算はすべて NS-LISP および GAL の数値計算の機能を用いて行った。)

3.3.1 誤差項が比較的小さい 1 変数多項式の近接根

まず、誤差項の相対誤差が ε_M 程度で、近接根をもつような 1 変数多項式に対して、近接根の多重度を変化させながら近接根の存在領域の計算を行った。実験には次式で定義される多項式 $P_i(x)$ と誤差項 $\Delta_i(x)$ を用いて、誤差項をもつ多項式 $\tilde{P}_i(x) = P_i(x) + \Delta_i(x)$ の近接根の誤差上界を計算した。

$$\begin{aligned} P_i(x) &= (x^2-5)^i, \\ \Delta_i(x) &= 1.0 \times 10^{-16} \cdot |P_i(x) - \mathrm{lt}(P_i)|, \quad i = 2, \ldots, 6. \end{aligned} \tag{13}$$

ここに、$\mathrm{lt}(P_i)$ は $P_i(x)$ の主項を表し、$|P_i(x)-\mathrm{lt}(P_i)|$ は $P_i(x)-\mathrm{lt}(P_i)$ の各項の係数をその絶対値に置き換えた多項式を表す。

方程式 $P_i(x)=0$ は i 重根 $x=\sqrt{5}$ をもつので、本実験ではまず、$P_i(x)=0$ の根の近似値を Durand-Kerner 法 [1], [2] で計算し、根 $x=\sqrt{5}$ に対応する近似値を $z_{i,j}$ $(j=1.\dots,i)$ とした。次に、$z_{i,j}$ に対して $\bar{z}_{i,j}$, $\hat{z}_{i,j}$ をそれぞれ次のように定義した。

$$\bar{z}_{i,j}=\beta+(z_{i,j}-\beta)\cdot\frac{r}{|z_{i,j}-\beta|}, \tag{14}$$

$$\hat{z}_{i,j}=\beta+\frac{r(z_{i,1}-\beta)}{|z_{i,1}-\beta|}\cdot\exp\left(2\pi\frac{j-1}{i}i\right). \tag{15}$$

ここに、r および β はそれぞれ式 (10), (11) に基づいて計算される値である。そして、近似値 $z_{i,j}$, $\bar{z}_{i,j}$, $\hat{z}_{i,j}$ の、方程式 $\tilde{P}_i(x)=0$ の真の根からの誤差上界 (8) を計算した。

i	$z_{i,j}$ の誤差上界	$\bar{z}_{i,j}$ の誤差上界	$\hat{z}_{i,j}$ の誤差上界
2	$8.8430013840566\times10^{-8}$	$7.9476036239780\times10^{-8}$	$7.5112142067918\times10^{-8}$
3	$4.8136716265044\times10^{-5}$	$3.8264340406208\times10^{-5}$	$4.0987515028808\times10^{-5}$
4	$7.9479228538200\times10^{-4}$	$7.8846246599637\times10^{-4}$	$7.9887194125375\times10^{-4}$
5	$5.2652072238001\times10^{-3}$	$4.7823356826977\times10^{-3}$	$4.7707669801030\times10^{-3}$
6	$1.8432136137678\times10^{-2}$	$1.5383777442493\times10^{-2}$	$1.5533949369695\times10^{-2}$

表 1: 方程式 $\tilde{P}(x)=0$ の真の根に対する近似値の誤差上界の最大値

表 1 は、近似値 $z_{i,j}$, $\bar{z}_{i,j}$, $\hat{z}_{i,j}$ それぞれの誤差上界の最大値を上位 14 桁まで表したものである。$\bar{z}_{i,j}$, $\hat{z}_{i,j}$ の誤差上界を $z_{i,j}$ のそれと比較すると、ほとんどの場合において $\bar{z}_{i,j}$, $\hat{z}_{i,j}$ の誤差上界の方が $z_{i,j}$ のそれよりも小さくなっていることがわかる。

3.3.2 代数関数の特異点を検出する例

次に、2 変数の実多項式 $F(x,y)$ の零点で定義される代数関数の、実平面上の特異点を検出することを試みた。$F(x,y)$ を次式で定める。(この例[1]は齋藤・近藤・三好・竹島 [9] による。)

$$\begin{aligned}F(x,y)=\ &93392896/15625x^6\\&+(94359552/625y^2+91521024/625y-249088/125)x^4\\&+(1032192/25y^4-36864y^3-7732224/25y^2-207360y+770048/25)x^2\\&+(65536y^6+49152y^5-135168y^4-72704y^3+101376y^2+27648y-27648).\end{aligned} \tag{16}$$

[1] 原著では Heart(x,y).

方程式 $F(x,y)=0$ の根として定義される代数関数は、

$$(x,y)=\begin{cases}(\pm 35\sqrt{17}/351,-386/351)\\(\pm 35\sqrt{14}/76,-41/76)\end{cases} \tag{17}$$

に実孤立特異点をもつことに注意する。本稿では、これらの実孤立特異点のうち、

$$(x,y)=(35\sqrt{14}/76,-41/76)\simeq(1.7231316912775,-0.53947368421053) \tag{18}$$

の検出を試みた。

本稿では、次の方法で特異点の計算を行った。

1. 終結式 $R(y)=\mathrm{res}_x(F,dF/dx)$ を計算する。
2. 方程式 $R(y)=0$ の根を計算し、該当する根を y_0 とおく。
3. 方程式 $G(x)=F(x,y_0)=0$ の根を計算し、該当する根を x_0 とおく。このとき、点 (x_0,y_0) が求める特異点である。

本稿では、$R(y)/\mathrm{lc}(R(y))$ の係数を浮動小数に変換した多項式 $\bar{R}(y)$ と誤差項 $\Delta_R(y)$ を次式のように定め、誤差項をもつ多項式 $\tilde{R}(y)=\bar{R}(y)+\Delta_R(y)$ に対して、方程式 $\tilde{R}(y)=0$ の根の誤差上界を計算した。(ここに、$\mathrm{lc}(R)$ は $R(y)$ の主係数を表す。)

$$\begin{aligned}\bar{R}(y)=y^{30}&+8.6539053947699y^{29}+28.393489080999y^{28}+31.631089993073y^{27}\\&-53.416176996449y^{26}-215.09122862275y^{25}-236.3021941649y^{24}\\&+69.623690834345y^{23}+472.13450806035y^{22}+508.40838430993y^{21}\\&+114.29312305448y^{20}-288.1593998278y^{19}-361.51835529448y^{18}\\&-179.90550069336y^{17}+10.8298712064367y^{16}+86.629765984785y^{15}\\&+71.309018567935y^{14}+30.798374864832y^{13}+3.6121767833846y^{12}\\&-5.4505240969034y^{11}-5.1210124258626y^{10}-2.7153793568042y^{9}\\&-1.0305939988665y^{8}-0.29167994717063y^{7}-0.059251321933162y^{6}\\&-0.0068691959595367y^{5}+0.00025414873676876y^{4}\\&+0.00027791134539076y^{3}+0.000053327758396734y^{2}\\&+0.0000015061526035172y-0.00000096910070483708,\\\Delta_R(y)=1.0\times 10^{16}&\cdot|\bar{R}(y)-\mathrm{lt}(\bar{R}(y))|.\end{aligned} \tag{19}$$

方程式 $R(y)=0$ の根 $y=-41/76$ に対応する、方程式 $\bar{R}(y)=0$ の根の近似値 y_j

$(j=1,\ldots,4)$ は次式の値になった。

$$\begin{aligned} y_1 &= -0.53936388401352 + 0.00041339261608175i, \\ y_2 &= -0.53930400981135 + 0.00016606668217728i, \\ y_3 &= -0.53947629821667 - 0.00035104589639913i, \\ y_4 &= -0.53977014394232 - 0.000029796612211464i. \end{aligned} \tag{20}$$

上の $y_1,\ldots,y_4$ の誤差上界 (8) を計算し、根の存在領域が実軸と交わる区間を計算すると、方程式 $\tilde{R}(y)=0$ の $y=-41/76$ 付近の実根の存在範囲は

$$[-0.64759306835504, -0.4310149512676] \tag{21}$$

と計算された。

次に、$y_1,\ldots,y_4$ に対し、$\hat{y}_1,\ldots,\hat{y}_4$ を次式で定義した。

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \beta + (y_1-\beta)\cdot\frac{r}{|y_1-\beta|}, \\ \hat{y}_j &= \beta + \frac{r(y_1-\beta)}{|y_1-\beta|}\cdot\exp\left(\frac{(j-1)\pi i}{2}\right), \quad j=2,3,4. \end{aligned} \tag{22}$$

ここに、r および β はそれぞれ式 (10), (11) で計算される値である。そして、y_j に代えて $\hat{y}_j$ を用いた場合の、方程式 $\tilde{R}(y)=0$ の $y=-41/76$ 付近の実根の存在範囲は

$$[-0.56148199250542, -0.51819396313273] \tag{23}$$

と計算された。式 (21) と比較して、区間幅が約 1/4 に改善されていることに注意されたい。

次に、特異点の y の値の範囲 (23) から、特異点の x の値の範囲を求めるために、多項式 $\bar{G}(x)$ と誤差項 $\Delta_G(x)$ を次式のようにおき、誤差項をもつ多項式 $\tilde{G}(x)=\bar{G}(x)+\Delta_G(x)$ の根の誤差上界を計算した。

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &= x^6 - 6.1859694600308x^4 + 10.3445893325468x^2 - 2.293443508931, \\ \Delta_G(x) &= 0.06000480537992x^4 + 0.24732908238747x^2 + 0.20782243753902. \end{aligned} \tag{24}$$

方程式 $G(x)=0$ の根 $x=35\sqrt{14}/76$ に対応する、方程式 $\bar{G}(x)=0$ の根の近似値 x_1,x_2 は次式の値になった。

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.7218054702393 + 0.043962671727311i, \\ x_2 &= 1.7218054702393 - 0.043962671727310i. \end{aligned} \tag{25}$$

上の x_1,x_2 の誤差上界 (8) の値は 3.1238439256542 となり、到底実用に適さない。そこで、x_1,x_2 に対し、$\hat{x}_1,\hat{x}_2$ を次式で定義した。

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \beta + (x_1-\beta)\cdot\frac{r}{|x_1-\beta|} = 1.7218054702393 + 0.21389360049576i, \\ \hat{x}_2 &= \beta - (\hat{x}_1-\beta) = 1.7218054702393 - 0.21389360049576i. \end{aligned} \tag{26}$$

ここに、r および β はそれぞれ式 (10), (11) に基づいて計算される値である。そして、x_j に代えて $\hat{x}_j$ を用いた場合の、方程式 $\tilde{G}(x)=0$ の $x=35\sqrt{14}/76$ 付近の実根の存在範囲は

$$[1.5988250278133, 1.8447859126652] \tag{27}$$

と計算された。

以上の計算より、関数 $F(x,y)$ の実特異点が

$$\begin{cases} x \in [1.5988250278133, 1.8447859126652] \\ y \in [-0.56148199250542, -0.51819396313273] \end{cases} \tag{28}$$

の範囲内に存在する可能性があることがわかった。

4 誤差項をもつ実多項式の実根の個数の計算

本章では誤差項をもつ多項式の係数がすべて実数であるとし、誤差項をもつ実多項式の実根の個数の計算について考察する。本章の内容のうち、**4.1** は、誤差項をもつ多項式の実根の個数が確定するための十分条件として、これまでに筆者らが導いた条件 [4] の再掲である。**4.2** は、Sturm 列を用いて誤差項をもつ多項式の実根の個数を計算する時に起こりうる微小主項の問題についての議論であり、筆者らは以前にもこの問題の考察を行ったが [4]、本稿では議論をより明解にし、微小主項を除去できるための十分条件を導く。

4.1 誤差項をもつ多項式の実根の個数の確定

誤差項をもつ多項式が重根や近接根をもつ場合は、誤差項の変化が微小であっても、ある実根が複素根に変化したり、実根の個数が変化したりする場合が考えられる。一方、多項式の各々の根が十分離れていれば、誤差項が変化しても実根の個数は変化することはなく、この場合には、実根の個数が確定しているといえる。

誤差項をもつ多項式の実根の個数が確定するための十分条件は、次の定理によって示される。

定理 2 [5, Theorem 4] $P(x)$, $\tilde{P}(x)$ をそれぞれ (1), (2) で定義する。$\tilde{P}(x)$ の誤差項の係数 $\delta_{n-1},\ldots,\delta_0$ を条件 (4) を満たすよう連続的に変化させたときに、$\tilde{P}(x)$ の判別式 $\mathrm{res}_x(\tilde{P}, d\tilde{P}/dx)$ の値が 0 に等しくならなければ、$\tilde{P}(x)$ の実根の個数は $P(x)$ のそれに等しい。

証明 Terui and Sasaki [5] を参照。 ∎

4.2 Sturm 列の計算と微小主項の問題

次に、与えられた誤差項をもつ実多項式が定理 2 の条件を満たす場合に、Sturm 法を用いて実根の個数を計算することにし、このときに生ずる問題について考察する。以下では、多項式 $P(x)$ の次数を $\deg(P)$ で表し、方程式 $P(x)=0$ の根の絶対値の最大値を $\zeta_{\max}$ とおく。

Sturm 法の基になる Sturm の定理は次の定理である（証明は高木 [8] 等を参照)。

定理 3 (Sturm) $P(x)$ を無平方な 1 変数実多項式とし、多項式の列

$$(P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)) \tag{29}$$

を次式で定義される多項式の列（Sturm 列）とする。

$$\begin{cases} P_0 = P(x), \quad P_1 = \dfrac{d}{dx}P(x), \\ P_i = -\mathrm{rem}(P_{i-2}, P_{i-1}), \quad i = 2, \dots, m. \end{cases} \tag{30}$$

ここに、$\mathrm{rem}(P_{i-2}, P_{i-1})$ は P_{i-2} を P_{i-1} で割った多項式剰余を表す。実数 x に対し、多項式の列 (29) のうち、0 を除く要素の符号変化を左から数えた個数を $N(x)$ とし、s, t を $s<t$ を満たすような実数とする。このとき、方程式 $P(x)=0$ の区間 $[s,t]$ 内の実根の個数は $N(s)-N(t)$ に等しい。∎

定理 3 で、$s=-\infty, t=\infty$ とおくことにより、$P(x)$ のすべての実根の個数を計算できる。

本稿では、誤差項をもつ実多項式の Sturm 列を浮動小数演算を用いて計算することを考える。この中で、Sturm 列の第 k 要素 P_k $(k>1)$ の主係数の大きさが P_k の他の係数の大きさに比べて著しく小さくなることがある。この場合、次の問題（**微小主項の問題**）が起こり得る。

1. P_k の主係数が 0 か否かを判定することが極めて困難である。
2. P_k をそのまま $P_{k+1}, \dots$ の計算に用いると、微小な主係数によって $P_{k+1}, \dots$ の係数に多大な桁落ち誤差が発生する可能性が高い。

以下の考察にあたり、定理 3 の $P(x)$ とその Sturm 列 $(P_0(x), \dots, P_n(x))$ が次の性質を満たすことに注意する（詳細は伊理 [7] 等を参照)。

[性質 1] 任意の実数 x に対し、相続く 2 つの多項式 $P_{i-1}(x)$ と $P_i(x)$ の値が同時に 0 になることはない。

[性質 2] ある実数 x とある j $(1 \le j)$ に対して $P_j(x)=0$ ならば、$P_{j-1}(x)P_{j+1}(x)<0$ である。

[性質 3] $P_n(x)$ は定符号である。

さらに、$P(x)$ の Sturm 列について次の性質が成り立つ。

定理 4 [5, Theorem 7] 多項式 $P(x)$, $P_0, \ldots, P_n$ を定理 3 で定義されるものとし、P_k $(1 < k < n)$ が、絶対値が $\zeta_{\max}$ より大きな零点 $x_{k,1}, \ldots, x_{k,l_k}$ $(l_k < \deg(P_k))$ をもつと仮定する。このとき、多項式の列

$$(P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x), P''_k(x), \ldots, P''_{n''}(x)) \tag{31}$$

を次のように定義する。

$$\begin{cases} P''_k = P_k(x)/\{(x - x_{k,1}) \cdots (x - x_{k,l_k})\}, \\ P''_{k+1} = -\mathrm{rem}(P_{k-1}, P''_k), \\ P''_i = -\mathrm{rem}(P''_{i-2}, P''_{i-1}) \quad \text{for } i = k+2, \ldots, n'', \end{cases} \tag{32}$$

ここに、$\deg(P''_{n''}) = 0$ である。実数 x に対し、多項式の列 (31) の符号変化の個数を $N''(x)$ とおき、s, t を $s < t$ を満たすような実数とする。このとき、方程式 $P(x) = 0$ の区間 $[s, t]$ 内の実根の個数は $N''(s) - N''(t)$ に等しい。

証明 Terui and Sasaki [5] を参照。 ∎

定理 4 によると、$P_k(x)$ に絶対値が（$P(x)$ のどんな零点の絶対値よりも）大きな零点が存在する場合は、その零点を「除去」して Sturm 列を計算しても $P(x)$ の実零点の個数を計算できる。しかし、定理 4 を適用させるためには $P_k(x)$ の零点を厳密に計算する必要があるが、これは実際的ではない。

ところが、微小主項をもつ多項式は、絶対値が大きな零点をもつことが次の補題により示される。

補題 5 [5, Lemma 8] $\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-s+1}$ を $0 < |\varepsilon_j| \ll 1$ なる実数とする。多項式 $Q(x)$ が次式で与えられるとする。

$$Q(x) = \varepsilon_n x^n + \cdots + \varepsilon_{n-s+1} x^{n-s+1} + b_{n-s} x^{n-s} + \cdots + b_0 x^0. \tag{33}$$

ここに、 0 でない b_i $(i = n-s, \ldots, 0)$ は $|b_i| \geq 1$ を満たすとする。$x_1, \ldots, x_n$ を $Q(x)$ の零点（ただし $|x_1| < \cdots < |x_n|$）とするとき、次式が成り立つ。

$$\lim_{(\varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_{n-s+1}) \to (0, \ldots, 0)} |x_j| = \infty, \quad j = n-s+1, \ldots, n. \tag{34}$$

証明 Terui and Sasaki [5] を参照。 ∎

定理 4 と補題 5 から、P_k の微小主項を「除去」して $P_{k+1}, \ldots$ を計算することを考える。微小主項を除去することにより、P_k のすべての零点の値が変化するが、$P(x)$ の Sturm 列の性質を保つためには、微小主項の除去によって移動する P_k の零点と、P_0, P_{k-1} の零点との大小関係を保つ必要があることに注意する。微小主項を除去して $P(x)$ の実根の個数を計算できるための十分条件は、次の定理により示される。

定理 6 [5, Theorem 9] $P(x)$, $\tilde{P}(x)$ をそれぞれ (1), (2) で定義する。$P(x)$ の Sturm 列を $(P_0 = P(x), P_1 = dP/dx, P_2, \ldots, P_i, \ldots)$ とし、$P_k(x)$ $(k > 1)$ が次式のような微小主項をもつとする。

$$P_k(x) = \varepsilon_{k,n_k} x^{n_k} + \cdots + \varepsilon_{k,n_k-s+1} x^{n_k-s+1} + b_{k,n_k-s} x^{n_k-s} + \cdots + b_{k,0} x^0. \tag{35}$$

ここに、$\max\{|\varepsilon_{k,n_k}|, \ldots, |\varepsilon_{k,n_k-s+1}|\} \ll \min_{b_{k,j} \neq 0}\{|b_{k,n_k-s}|, \ldots, |b_{k,0}|\}$ である。このとき、多項式の列

$$(P_0(x), \ldots, P_{k-1}(x), P'_k(x), \ldots, P'_{n'}(x)) \tag{36}$$

を次式で定義する。

$$\begin{cases} P'_k = b_{k,n_k-s} x^{n_k-s} + \cdots + b_{k,0} x^0, \\ P'_{k+1} = -\mathrm{rem}(P_{k-1}, P'_k), \\ P'_i = -\mathrm{rem}(P'_{i-2}, P'_{i-1}) \quad \text{for } i = k+2, \ldots, n', \end{cases} \tag{37}$$

ここに $\deg(P'_{n'}) = 0$ である。実数 x に対し、多項式の列 (36) の符号変化の個数を $N'(x)$ とし、s, t を $s < -\zeta_{\max}$, $\zeta_{\max} < t$ を満たすような実数とする。このとき、$\tilde{P}(x)$, $P_{k-1}(x)$, $P_k(x)$ が次の条件を満たすならば、方程式 $\tilde{P}(x) = 0$ の実根の個数は $N'(s) - N'(t)$ に等しい。

1. $\tilde{P}(x)$ の誤差項の係数 $\delta_{n-1}, \ldots, \delta_0$ を条件 (4) を満たすよう連続的に変化させ、かつ微小な係数 $\varepsilon_{k,n_k}, \ldots, \varepsilon_{k,n_{k-s+1}}$ を連続的に 0 に変化させた時に、終結式 $\mathrm{res}(\tilde{P}, P_k)$ の値が 0 になることがない。

2. 微小な係数 $\varepsilon_{k,n_k}, \ldots, \varepsilon_{k,n_{k-s+1}}$ を連続的に 0 に変化させた時に、終結式 $\mathrm{res}(P_{k-1}, P_k)$ の値が 0 になることがない。

証明 Terui and Sasaki [5] を参照。 ∎

厳密演算を用いた定理 6 の例を以下に示す。

例 1 多項式 $P(x)$, $\tilde{P}(x)$ を次式で定義する。

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^5 + 4x^4 + \frac{6401}{1000}x^3 - 20x^2 + 5x + 1, \\
\tilde{P}(x) &= P(x) + \delta_{0,4}x^4 + \delta_{0,3}x^3 + \cdots + \delta_{0,0}x^0.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

ここに、誤差項の係数 $\delta_{0,4}, \ldots, \delta_{0,0}$ は未知であるがその大きさの上界は次式で与えられているものとする。

$$
|\delta_{0,j}| \leq \varepsilon = 1/10000. \tag{39}
$$

$P(x)$ の Sturm 列 $(P_0(x), \ldots, P_5(x))$ は次式のようになる。

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= P(x), \\
P_1(x) &= \frac{d}{dx}P(x) = 5x^4 + 16x^3 + \frac{19203}{1000}x^2 - 40x + 5, \\
P_2(x) &= -\frac{1}{2500}x^3 + \frac{94203}{6250}x^2 - \frac{52}{5}x - \frac{1}{5}, \\
P_3(x) &= -\frac{7099837085603}{1000}x^2 + 4898974540x + 94210995, \\
P_4(x) &= -\frac{1838986143841703970}{504076866421037007498736609}x + \frac{581470528239934409}{504076866421037007498736609}, \\
P_5(x) &= -\frac{315665085676672865258299576944147240879251970855 7}{33818700372417803243846409931137609000000}.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

ゆえに、$N(-\infty) - N(\infty) = 3$ を得る。

式 (40) の $P_2(x)$ は微小主項をもつ（微小主項に対応して、$P_2(x)$ は実零点を $x \simeq 37680.5$ にもつ）。$P(x)$, $\tilde{P}(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ に定理 6 の条件を適用させると、次のようになる。条件 1 は、$\tilde{P}(x)$ の誤差項を条件 (39) の下で変化させたときの実根の値と、$P_2(x)$ の微小主項を 0 に変化させたときの実根の値が常に異なることにより成り立つ。条件 2 は、$P_2(x)$ の主項を εx^3 で置き換えた多項式を $\tilde{P}_2$ とおくと、$\mathrm{res}_x(P_1, \tilde{P}_2)$ は ε の多項式となり、$\varepsilon \in [-1/2500, 0]$ に対して $\mathrm{res}_x(P_1, \tilde{P}_2) < 0$ により成り立つ。よって、式 (37) にしたがって $P'_2(x), \ldots, P'_4(x)$ を次式のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
P'_2(x) &= \frac{94203}{6250}x^2 - \frac{52}{5}x - \frac{1}{5}, \\
P'_3(x) &= \frac{14367059719609325}{835976753303427}x - \frac{18170016322960675}{3343907013213708}, \\
P'_4(x) &= \frac{6544015983161815588348053010678521 3}{33025984797891324206068900312900000}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

このとき、$N'(-\infty) - N'(\infty) = 3 = N(-\infty) - N(\infty)$ を得る。 ∎

参　考　文　献

[1] E. Durand. *Solutions Numériques des Équations Algébriques,* Tome I. Masson, Paris, 1960.

[2] I. O. Kerner. Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen. *Numer. Math.*, Vol. 8, pp. 290–294, 1966.

[3] B. T. Smith. Error Bounds for Zeros of a Polynomial Based Upon Gerschgorin's Theorems. *Journal of the ACM*, Vol. 17, No. 4, pp. 661–674, 1971.

[4] A. Terui and T. Sasaki. "Approximate zero-points" of univariate polynomial with large error terms. 数式処理における理論と応用の研究, 数理解析研究所講究録, No. 1085, pp. 111–119. 京都大学数理解析研究所, March 1999.

[5] A. Terui and T. Sasaki. "Approximate zero-points" of real univariate polynomial with large error terms. *Preprint of University of Tsukuba*, submitted. 20 pages.

[6] 照井章, 佐々木建昭. 誤差項を含む 1 変数多項式の根の誤差上界. 数式処理における理論と応用の研究, 数理解析研究所講究録, No. 1038, pp. 106–110. 京都大学数理解析研究所, April 1998.

[7] 伊理正夫. 数値計算, 理工系基礎の数学, 第 12 巻. 朝倉書店, 東京, 1981.

[8] 高木貞治. 代数学講義（改訂新版）. 共立出版, 東京, 1965.

[9] 齋藤友克, 近藤祐史, 三好善彦, 竹島卓. Displaying real solution of mathematical equations. 数式処理, Vol. 6, No. 2, pp. 2–21, January 1997.