

3次元直方体の intersection graph に対する 独立点集合問題の近似困難について

長島 弘幸 (Hiroyuki Nagashima),
山崎 浩一 (Koichi Yamazaki)

群馬大学 工学部 情報工学科
群馬県 桐生市 天神町 1-5-1

{hiroyuki,koichi}@comp.cs.gunma-u.ac.jp

キーワード: 近似困難, PTAS, 独立点集合問題, intersection graph

1 はじめに

n 次元直方体における intersection graph は, その応用上の興味から古くから研究されている [1, 7]. 特に2または3次元における独立点集合問題に関する研究は盛んで [2, 3, 4, 5, 8, 10], VLSI チップや生物学上への応用が良く知られている (例えば, [5] 9.3.3 節). 2次元直方体における intersection graph の最大独立点集合問題に対し, 何も制限がつかない場合は NP 困難で $O(\log n)$ 近似可能, 弱非包含 (詳しくは定義を参照) の制限がつくと定数近似可能, サイズが全て等しいという制限の下では, PTAS を持つことが知られている. 弱非包含の制限の下で, PTAS を持つか否かはまだ知られていない. 我々の研究の目的は, 2次元で弱非包含の制限の下で, PTAS を持つか否かの判定である. 今回, 3次元において弱非包含の制限の下でも PTAS を持たないことを示した.

2 諸定義

本稿では, 自己ループと多重辺を含まない, 無向で連結なグラフのみを扱う. グラフ G に対して, その頂点集合を $V(G)$ で, 辺集合を $E(G)$ で表す. グラフ G に対して, ある頂点集合 $I \subseteq V(G)$ が $\forall u, v \in I$ について $\{u, v\} \notin E(G)$ を満たすとき, I を G の独立点集合と呼ぶ. G の最大の独立点集合を, 最大独立点集合と呼び, $\alpha(G)$ で表す.

$\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_k\}$ を, ある集合 S の空でない部分集合の族とする. ここでは, 集合 S を *host*, 部分集合 S_i を *object* という. (\mathcal{F}, S) を *表現* と呼び, 文脈から明らかな場合は *host* S を省略し単に \mathcal{F} と略記する. $V(G) = \mathcal{F}$ かつ, 任意の $S_i, S_j (i \neq j)$, $\{S_i, S_j\} \in E(G)$ iff $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ を満たすとき, グラフ G を (\mathcal{F}, S) により表現される *intersection graph* と呼び, $G(\mathcal{F}, S)$ または単に $G(\mathcal{F})$ と表す.

特に本稿では, \mathbb{R}^n 上の n 次元直方体 (主に $n = 3$) の intersection graph を扱う. $R = \{(x_1, \dots, x_n) \mid$

$a_i \leq x_i \leq b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq n)\}$ を n 次元直方体と呼ぶ. $\{R \mid R \text{ は } n \text{次元直方体}\}$ を P_n で表す. \mathcal{R} は P_n のある有限部分集合とする. $R \in \mathcal{R}$ から, ある座標軸 l への射影を $I_l(R)$ で表す. 任意の $R_i, R_j (i \neq j) \in \mathcal{R}$ と任意の座標軸 l に対し, $I_l(R_i) \not\subseteq I_l(R_j)$ となるとき, \mathcal{R} を *弱非包含* と呼ぶ.

3DWNP-MIS とは, $G(\mathcal{R})$ の独立点集合に関する最適化問題のことで, ここで \mathcal{R} は3次元の弱非包含の有限集合 $\mathcal{R} \subset P_3$ である.

3DWNP-MIS

インスタンス : P_3 の弱非包含な有限部分集合 \mathcal{R} ,
実行可能解 : $G(\mathcal{R})$ の独立点集合 I ,
評価 : I のサイズ.

本稿では, \mathcal{R} の変数も高々5つの節にしか現れない n 変数, m 節の3SAT を考える. この特別な形をした3SAT を *3SAT-5* と呼ぶ.

3 結果

変換グラフの構成法

まず, ある3SAT-5のインスタンスから変換グラフ G の構成方法を述べる. 節 C_i に対応するグラフ T_i (図1左)と変数 x_j に対応するグラフ W_j (図1右), そしてそれらをいくつかの辺で結ぶことにより構成される.

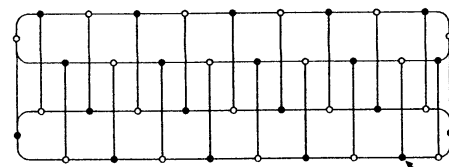


図1: グラフ T_i と W_j

すなわち, 各 $C_i (1 \leq i \leq m)$ に対応するグラフ T_i を $V(T_i) = \{p_i^1, p_i^2, p_i^3, q_i^1, q_i^2, q_i^3, r_i^1, r_i^2, r_i^3\}$, $E(T_i) = \{\{x_i^1, x_i^2\}, \{x_i^2, x_i^3\} \mid x \in \{p, q, r\}\} \cup$

$\{\{p_i^3, q_i^3\}, \{q_i^3, r_i^3\}, \{r_i^3, p_i^3\}\}$. とする. $l = 22$ とする. あるサイクル W_{jtop} を, $V(W_{jtop}) = \{w^{j1}, \dots, w^{jl}\}$, $E(W_{jtop}) = \{\{w^{ji}, w^{ji+1}\} \mid \forall 1 \leq i \leq l-1\} \cup \{\{w^{jl}, w^{j1}\}\}$ とし, 同様にあるサイクル $W_{jbottom}$ を, $V(W_{jbottom}) = \{w_{j1}, \dots, w_{jl}\}$, $E(W_{jbottom}) = \{\{w_{ji}, w_{ji+1}\} \mid \forall 1 \leq i \leq l-1\} \cup \{\{w_{jl}, w_{j1}\}\}$ とする. 各変数 $x_j (1 \leq j \leq n)$ に対応するグラフ W_j を $V(W_j) = V(W_{jtop}) \cup V(W_{jbottom})$, $E(W_j) = E(W_{jtop}) \cup E(W_{jbottom}) \cup \{\{w^{ji}, w_{ji}\} \mid \forall 1 \leq i \leq l\}$. とする.

$$\text{グラフ } V(\tilde{G}) = \bigcup_{i=1}^m V(T_i) \cup \bigcup_{j=1}^n V(W_j),$$

$$E(\tilde{G}) = \bigcup_{i=1}^m E(T_i) \cup \bigcup_{j=1}^n E(W_j)$$

を (変換グラフ G の一歩手前の) 中間グラフ \tilde{G} と呼ぶ. 中間グラフ \tilde{G} から変換グラフ G を以下のように構成する: $\{w_{jk} \mid k \text{ は偶数 (奇数)}\}$ を $W_{jbottom}^{even}$ ($W_{jbottom}^{odd}$) で表す. 以下を満たすとき v は フリー という.

$$\begin{cases} \bigcup_{1 \leq i \leq m} \{p_i^1, q_i^1, r_i^1\} \cap N(v) = \emptyset & v \in W_{jbottom} \\ W_{jbottom} \cap N(v) = \emptyset & v \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{p_i^1, q_i^1, r_i^1\} \end{cases}$$

各 $C_i, x_j (x_j \in C_i)$ に対し, 以下の操作を繰り返す.

操作 節 C_i が変数 x_j を肯 (否) 定の形でもつとき, $W_{jbottom}^{even}$ ($W_{jbottom}^{odd}$) のあるフリーな頂点と $\{p_i^1, q_i^1, r_i^1\}$ のあるフリーな頂点とを辺で結ぶ.

この操作の繰り返しにより最終的に得られるグラフを変換グラフ G とする. □

G を変換グラフとし I を G の独立点集合とする. 全ての $i (1 \leq i \leq n)$ において $|V(W_i) \cap I| = \frac{|V(W_i)|}{2}$ であるとき, I は fixed form という. □

補題 3.1 変換グラフは 3次元直方体の *intersection representation* をもつ.

証明 具体例を示し証明は省く. 例えば図 2 に示される変換グラフ G は, 図 4 に示すように, 立方体でかつ弱非包含で構成することができる.

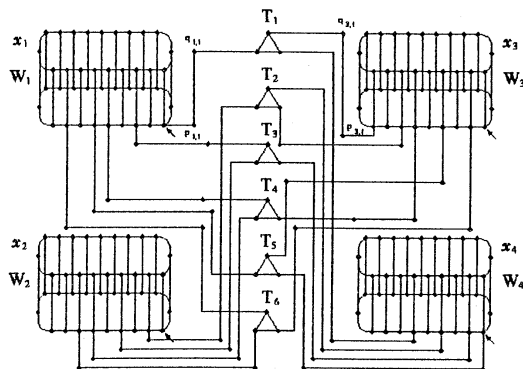


図 2: 変換グラフ G

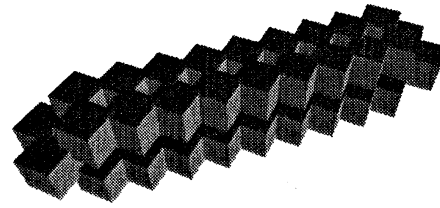


図 3: 変換グラフの中の W_j の立方体でかつ弱非包含での表現

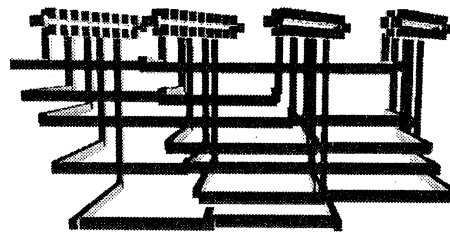


図 4: 変換グラフ G の立方体でかつ弱非包含での表現

補題 3.2 G を変換グラフとし I を G の独立点集合とする. このとき, $|I'| \geq |I|$ かつ I' は fixed form となるような G の独立点集合 I' が存在する.

補題 3.3 G を 3SAT-5 のあるインスタンスの変換グラフとし, I を G の fixed form な独立点集合とする. このとき, $|\{T_i \mid V(T_i) \cap I = 4\}| = \max_{\text{all assignments}} |\{C_i \mid \text{節 } C_i \text{ は真}\}|$.

証明 各 $W_j (1 \leq j \leq n)$ に対し, I は fixed form なので $W_{jbottom}^{odd} \subset I$ または $W_{jbottom}^{even} \subset I$ のどちらか一方が必ず成り立つ. 各 W_j に対し, $W_{jbottom}^{odd}$ ($W_{jbottom}^{even}$) が独立点として選択されているとき W_j に対応する変数 x_j に true(false) を割り当てることにより, 変数への true, false のある割当が得られる. この割当を A で表す.

$C_i = (l_a, l_b, l_c)$ (l_a, l_b, l_c はリテラル) をある節とし, 節 C_i に対応するグラフを T_i , リテラル l_a, l_b, l_c に対応する変数をそれぞれ W_a, W_b, W_c とする. T_i の頂点と隣接している $W_x (x \in \{a, b, c\})$ の頂点を w_x で表す.

このとき, $w_a, w_b, w_c \in I$ iff $V(T_i) \cap I = 3$,
 $\neg(w_a, w_b, w_c \in I)$ iff $V(T_i) \cap I = 4$ が成り立つ。
 すなわちこれは, A において, 節 C_i が真になる必要十分条件が $V(T_i) \cap I = 4$ であることを意味する。 □

例 次にあげる 3SAT-5 のインスタンス S_1 に対し,
 図 5 の変換グラフを得る。

$$S_1 = (x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$$

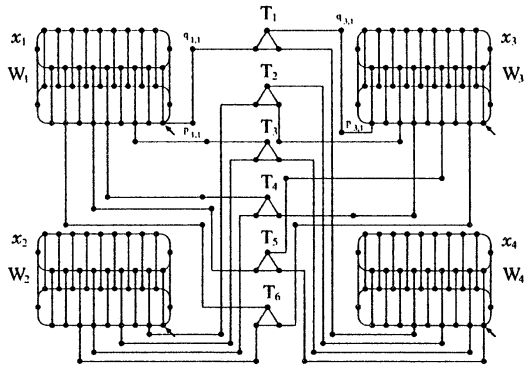


図 5: S_1 に対する変換グラフ

T_1, \dots, T_6 と S_1 の節が左から順に対応している。
 W_1, \dots, W_4 は 4 個の変数 x_1, \dots, x_4 に対応している。
 図 6 での最大独立点集合は, 割当 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$ が⁵⁾, 図 7 での最大独立点集合は, 割当 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$ が, 対応している。

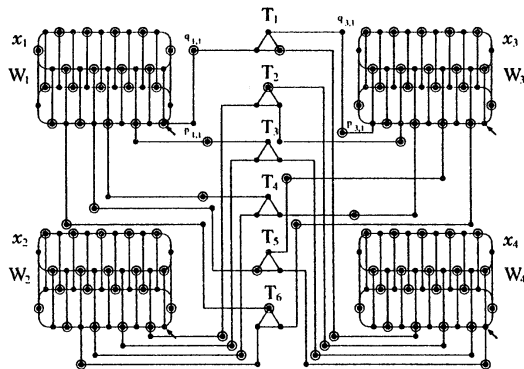


図 6: 割当 $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$

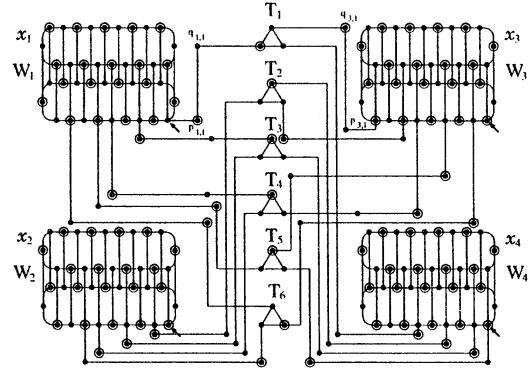


図 7: 割当 $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1$

定理 3.4 3DWNP-MIS は ($P \neq NP$ の仮定のもとで) PTAS を持たない。

証明 まず, 3DWNP-MIS を $\frac{1}{1+\varepsilon}$ 近似する近似アルゴリズム A が存在すると仮定する。

次に, ある 3SAT-5 (n 変数 m 節) のインスタンス S から変換グラフ G を作る。補題 3.2 より変換 G について fixed form である独立点集合 I が存在する。 $\frac{|V(W_i)|}{2} = c$, $|\{T_i \mid V(T_i) \cap I = 4\}| = t$ とする。アルゴリズム A を利用して $\alpha(G)$ を近似し, その近似解を d で表す。このとき, $d \geq \frac{1}{1+\varepsilon}(nc + 3m + t)$ であるから,

$$\begin{aligned} t &= \alpha(G) - (nc + 3m) \\ &\geq d - nc - 3m \\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon}(nc + 3m + t) - (nc + 3m) \\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon}t - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(nc + 3m)\right). \end{aligned}$$

3SAT-5 であるから, リテラルの数は m 以上であり変数は高々 5 回現われるので $5n$ 以下であるから $m \leq$ リテラルの数 $\leq 5n$ である。変換グラフ G において, 節に対応するグラフ T_1, \dots, T_m のそれぞれから変数に対応するグラフ W_1, \dots, W_n へ高々 3 本しか辺がでないので $3m \geq n$ である。少なくとも $\frac{m}{2}$ 節が真になることが知られているので $t \geq \frac{m}{2} \geq \frac{n}{6}$ となり,

$$\begin{aligned} t &\geq \frac{1}{1+\varepsilon}t - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}(c+15)n\right) \\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon}t - \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}c'6\right)t \\ &= \left(\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}c'6\right)t. \end{aligned}$$

$\varepsilon' > 0$ とすると $\frac{1}{1+\varepsilon'} < 1$ であり,

一方 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}c'6\right) = 1$ である。従って, 十分小さい任意の ε' に対し, $\left(\frac{1}{1+\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}c'6\right) \geq \frac{1}{1+\varepsilon'}$ であるような ε が存在する。つまり, 十分小

い任意の ϵ' に対し, 任意の 3SAT-5 のインスタンス S について $A'(S) \geq \frac{1}{1+\epsilon'} OPT(S)$ が成り立つ近似アルゴリズム A' が存在する. しかしこれは 3SAT-5 は PTAS を持つことを意味するが, 3SAT-5 は PTAS を ($P \neq NP$ の仮定のもとで) 持たないことが知られている [6] ので矛盾. よって 3DWNP-MIS は ($P \neq NP$ の仮定のもとで) PTAS を持たない. \square

参考文献

- [1] E.Asplund and B.Grünbaum, On a coloring problem, *Math. Scand.* 8 (1960) 181-188.
- [2] V.Bafna, B.Narayanan, and R.Ravi, Nonoverlapping local alignments (Weighted independent sets of axis parallel rectangles), *Discrete Applied Math.* 71 (1996) 41-53.
- [3] D.S.Hochbaum, Efficient bounds for the stable set, vertex cover and set packing problems, *Discrete Appl. Math.* 6 (1983) 243-254.
- [4] D.S.Hochbaum and W.Maass, Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI, *JACM* 32 (1985) 130-136.
- [5] D.S.Hochbaum, Various notions of approximations: good, better, best, and more, in: D.S.Hochbaum, ed., *Approximation Algorithms for NP-HARD PROBLEMS* PWS Publishing Company (1997) 339-446.
- [6] S. Arora and C. Lund, Hardness of Approximations in: D.S.Hochbaum, ed., *Approximation Algorithms for NP-HARD PROBLEMS* PWS Publishing Company (1997) 339-446.
- [7] H.Imai and T.Asano, Finding the connected components and a maximum clique of an intersection graphs of rectangles in the plane, *J. Algorithms*, 4 (1983) 310-323.
- [8] S.Khanna, S.Muthukrishnan and M.Paterson, On approximating rectangle tiling and packing, *Proceedings of the Ninth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1998) 384-393.
- [9] G.J.Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 28 (1980) 284-304.
- [10] D.T.Lee, and J.Y-T.Leung, On the 2-dimensional channel assignment problem, *IEEE Trans. Comput.* c-33 (1984) 2-6.