

誘導型MHD発電チャンネル内の
2次元液体金属流れの理論的研究

1993年

上野和之

目次

第1章	序論	4
第2章	問題の定式化	10
2.1	移動座標系へのローレンツ変換	10
2.2	2次元問題と電場	13
2.3	規格化と無次元パラメータ	16
第3章	節領域のある流れ	19
3.1	局所ハルトマン流れ	19
3.2	節領域での力の釣り合い	23
3.3	粘性型節領域流れ	28
3.4	慣性型節領域流れ	29
3.5	対称ノズル型節領域流れ	33
3.6	非対称ノズル型節領域流れ	43
第4章	慣性が支配的な流れ	50
4.1	周期変動成分と非周期成分の分離	50

4.2	漸近解	52
第5章	エネルギーの損失	60
5.1	エネルギー保存	60
5.2	固定子	61
5.3	慣性が支配的な流れ	64
5.4	節領域のある流れ	66
5.5	議論	68
5.5.1	導体側壁境界層	68
5.5.2	流れの安定性および乱流	72
第6章	結び	76
付録A	節領域と主流領域の接続	79
A.1	主流領域の解	79
A.2	粘性型節領域の解	80
A.3	接続	80
付録B	数値実験の計算方法	82
B.1	磁気レイノルズ数および無次元波長が有限値の場合	82
B.2	磁気レイノルズ数が極めて小さい場合	85
B.3	磁気レイノルズ数が極めて小さく無次元波長が極めて大きい場合	86
付録C	慣性が支配的な流れの漸近解の計算	89

目次	3
C.1 中心領域の解	89
C.2 MHD 境界層の補正	91
C.3 Sublayer の補正	94
付録D 電力 P'_{gen} を求める式の式変形	97

第 1 章

序論

水銀やナトリウムなどの液体金属を使った直接発電システム^{[1]-[3]}は回転する機械部品が無く高温高圧下での信頼性・耐久性に優れており、実用化が期待されている。特に、誘導型の Magnetohydrodynamic (MHD) 発電機^{[4]-[14]}は電極が不要であることや実用に適した高電圧の交流電力が得られることなどの利点を有する。

平行平板型発電ダクト[†]の形状および磁場の概略を図 1.1 に示す。流れに交差する正弦波磁場が外部から印加される。磁場は波形を保ったまま x^* 方向に等速度 U_s で移動する。 $y^* = \pm h$ にある絶縁体壁の上・下には固定子が設置されるが、図では省略されている。誘導型の発電機の固定子は外部印加磁場を発生させるだけでなく、同時に電力を取り出す役目も果たす。流体中では z^* 方向の移動正弦波交流電流が誘起され、 $z^* = \pm b$ にある導体側壁に流れ込む (あるいは導体側壁から流れ出る)。導体側壁中で x^* 方向に電流が流れることにより電荷が保存される。

誘導型 MHD 発電機の発電原理は固体金属の回転子を使った誘導型発電機と同じである。移動正弦波磁場の位相速度 U_s を上回る流速で作動流体である液体金属が運動するとき、固定子巻線の交流電圧と交流電流との位相差が 90° 以上になり、電力が発生する。

誘導型 MHD 発電機の入力エネルギーは、圧力が流体を駆動することによっ

[†]この他に 2 重同心円筒型や螺旋ダクト型などがある。

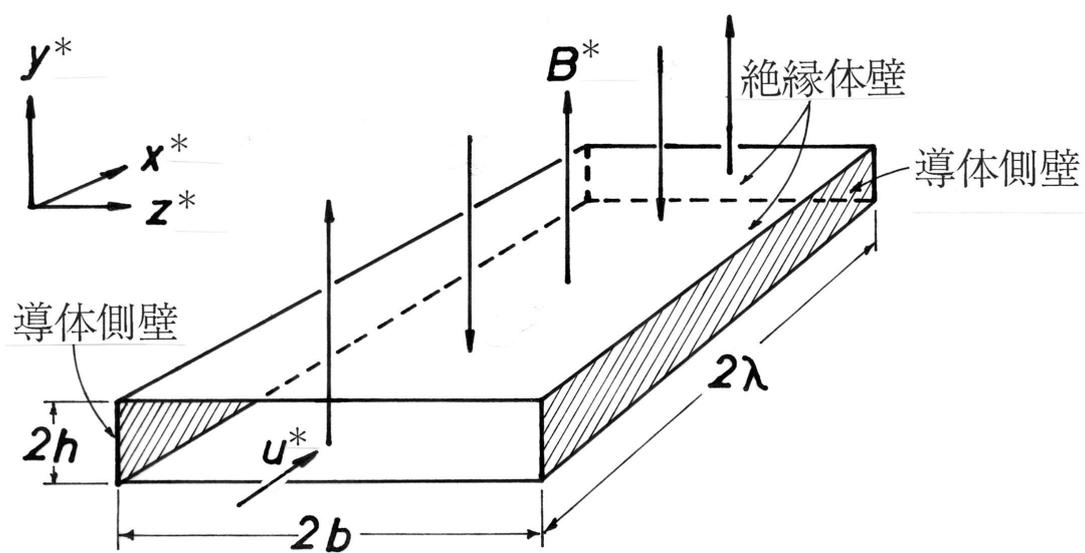


図 1.1: 平行平面型発電ダクトの形状および磁場の概略.

てなされる仕事である。これを電力に変換し外部に取り出す際には

- 作動流体中でのジュール熱による損失,
- 固定子巻線内でのジュール熱による損失,
- 絶縁体壁境界層 (磁場に垂直, $y^* = \pm h$ 付近に存在) での損失,
- 導体側壁境界層 (磁場に平行, $z^* = \pm b$ 付近に存在) での損失,
- 発電区間の流入・流出口付近での損失,

によりエネルギーの一部が失われる。誘導型 MHD 発電システムを設計する際には、気液 2 相式駆動系^{[1]-[3]}(作動流体に運動エネルギーを与える) や高電圧電気系 (自励発振^{[10]-[14]}により移動正弦波磁場を維持するのに必要とされる) などを含めたシステム全体の安全性や耐久性などの要求を満足しつつ、上述の損失をできるだけ小さく抑えなければならない。

これらの損失のうち、固定子巻線内の損失および流入・流出口付近での損失についてはこれまでも理論的および実験的に研究されている。^{[7]-[14]} それらの理論的研究は発電ダクト内の流れが一樣流, すなわち剛体運動という大胆な仮定 (電気力学的近似) のもとで展開されたが、解析結果は発電性能の改善に一定の役割を果たした。しかし、これらの理論的研究では流速の分布を考慮していないので、境界層での損失や作動流体中でのジュール熱による損失を正しく評価することはできない。これらの損失を正しく評価し、より損失の小さい発電機を設計するためには、発電ダクト内の流速分布を正確に把握する必要がある。

誘導型 MHD 発電機と同じ原理で作動する誘導型 MHD ポンプ^{[15]-[17]}に関連した研究のいくつかでは、平行流の仮定のもとでナビエ・ストークス方程式を解き、壁面上の境界層を考慮した流速分布を求めている。^{[18]-[25]} しかし、平行流の仮定の根拠や適用限界については言及されていない。

そこで、この論文では作動流体中でのエネルギー損失を正しく評価するために、誘導型 MHD 発電機の内部の流れを詳しく調べる。

この論文では、作動流体として单相の（気泡が混入していない）液体金属*を使った発電機を考える。発電機の内部の温度変化は小さいと仮定し、作動流体の導電率、密度、粘性率を定数として取り扱う。

誘導型 MHD 発電機の実験機については流れ場の乱れに関する詳細なデータが見あたらず、流れが層流であるか乱流であるか明らかでない。安定性や乱れに関する議論はまだ充分でなく、信頼できる臨界レイノルズ数は得られていない[†]。しかしながら、磁場には流れを安定化させる作用があることはよく知られており、近年の超伝導技術の発達でより強い磁場を発生させることが可能になったことを考慮すると、将来の開発される実用機は層流状態で稼働することが期待できる。そこで、この論文では誘導型 MHD 発電機が層流の状態で運転されることを仮定し、流れ場を調べる。

この論文では、正弦波磁場の波長に比べ十分に長い発電区間をもつ発電機を考える。そして、発電区間の流入・流出口の影響はその周辺部にとどまり、発電区間の大部分では流れ場および電磁場が x^* および時間 t^* に関して周期的であると仮定する。このとき、移動磁場とともに移動する座標系では定常な流れ場および電磁場が観測できるので、問題の取扱いは著しく簡単化する。

また、この論文で考える発電機はダクト断面の縦横比 b/h が十分に大きく、導体側壁の導電率が十分に高く、外部印加磁場が十分に強いものとする。そして、導体側壁境界層は非常に薄く、それが主流にあたえる影響は無視できると仮定する。このとき、導体側壁境界層を除いた大部分の領域では 2 次元的な流れ場および電磁場が実現されるので、問題の取扱いは著しく簡単化する。

上述のように、流入・流出口付近および導体側壁境界層を無視すると、磁場とともに移動する座標系では問題の取扱いが簡単化し 2 次元定常問題となる。それでもなお、以下のような理由で誘導型 MHD 発電機内部の流れは複雑である：

(i) 粘性の効果により絶縁体壁境界層が形成される、

*作動流体として気泡が混入した（分離されていない）液体金属を使う発電システムも提案されている。この場合、発電機自体の性能は落ちるが、発電区間以外での流体の粘性による損失は改善される。

[†]直流型 MHD 機器（一様磁場）の場合も未解決である。

- (ii) 流れは平行流ではありえないので、慣性力が力の釣合にかかわる,
- (iii) 誘導磁場は流速分布に影響を与える,
- (iv) 外部印加磁場は 2 次的に分布する (調和関数).

上の (i) はハルトマン流れ (流れを横切る一様な磁場のもとでの平行 2 平板の間の MHD 流れ^{[26],[27]}) にも現れるが、(ii)-(iv) はこの問題に特有の性質である[‡]。

この問題の特徴づけ、力学的相似解を特定する無次元パラメータは 5 つである: ハルトマン数 H_a , 相互作用パラメータ N , 磁気レイノルズ数 R_m , 無次元波長 Λ , スリップ S . H_a , N , R_m , Λ はそれぞれ上述の粘性の効果, 慣性の効果, 誘導磁場の効果, 外部印加磁場の効果の特徴づける。また、 S はハルトマン流れでの電圧負荷率に対応し、電磁エネルギーの出入りに関係するパラメータである。

この論文では十分に長い発電区間をもつ誘導型 MHD 発電機の通常の作動状態を想定し、議論の対象を次のような場合に限定する:

- 流れを駆動するのは上流-下流間の圧力差である,
- 強い横断磁場によって生じるローレンツ力が圧力勾配に対抗するので、粘性力が流れ場全域を支配することはない,
- チャネル内の電流によって生じる誘導磁場は、外部から印加される磁場に比べて小さい。

これらの条件を上述の無次元パラメータで表すと

$$H_a \gtrsim 5, \quad R_m \lesssim 1, \quad \Lambda^2 \gtrsim 10. \quad (1.1)$$

このような場合についての研究結果は誘導型 MHD 発電機のみならず誘導型 MHD ポンプや MHD 冶金システム^[28] などにも有益な知識を与える。

[‡]ハルトマン流れでは、誘導磁場は圧力分布にのみ影響をあたえる。

この論文では、主流で慣性の効果が無視できる場合と慣性が流れ場全域を支配する場合とで流れ場の様子が大きく異なることを示す。第3章では前者について議論し、“節領域”と呼ばれる速度勾配が非常に大きい領域が現れることを示す。解析的な考察により節領域の流れを4つのタイプに分類し、それぞれのタイプについて詳しく調べ、それらを数値実験で検証する。一方、慣性が支配的な場合は平行流に近い流れが現れることを明らかにする。第4章ではこのような流れについて議論する。漸近展開により従来 of 解析結果(あらかじめ平行流を仮定)に詳細な補正を与えるとともに、多重構造の境界層が存在することを示す。

第5章では、エネルギーの損失について議論する。第3章および第4章の結果を使ってエネルギーの損失を評価し、発電機の設計の際に要求される条件を明らかにする。さらに、この論文の解析で取り扱っていない導体側壁境界層および流速の乱れについて議論する。

第6章ではこれまでの章の主な結果を要約する。

第 2 章

問題の定式化

この章では、壁面での磁場の法線成分が既知であると考え、発電機内部の流れ場および電磁場を支配する方程式系を導く。発電チャンネルの上下に設置される固定子については第 5 章で議論する。

2.1 移動座標系へのローレンツ変換

絶縁体壁 $y^* = \pm h$ で、移動正弦波磁束密度の法線成分

$$B_y^* = B_0 \sin[2\pi(x^* - U_s t^*)/\lambda] \quad (2.1)$$

を与える。ここで B_0 , λ , U_s はそれぞれ磁束密度の振幅, 波長および位相速度を表し, t^* , $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$ は静止座標系での時刻および空間座標を表す。通常の電磁気学の問題であれば支配方程式が線形なので、解を $B_y^*(t^*, \mathbf{x}^*) = f^*(\mathbf{x}^*) \cdot \exp(2\pi i U_s t^*/\lambda)$ と置いて変数分離することが可能であり、問題は \mathbf{x}^* のみを独立変数とする境界値問題に帰着する。しかし、MHD の問題は支配方程式が非線形であり高調波成分が発生するので、この手法は有効でない。したがって、静止座標系では t^* に関して周期的であるにもかかわらず、通常の初期値境界値問題を取り扱わなければならないので、解析には大きな労力を要する。

この困難を避けるために、磁場の位相速度 U_s で x^* 方向に移動する座標系から流れ場および電磁場を観測する。

誘導型 MHD 発電機内部の流れについては十分に良い精度で MHD 近似^[29] が成り立つので、両座標系の変数は、以下のように簡単化されたローレンツ変換^[30] で関係づけられる:

$$\begin{aligned} t' &= t^*, & \mathbf{x}' &= \mathbf{x}^* - U_s \mathbf{e}_x^* t^*, \\ \mathbf{u}' &= \mathbf{u}^* - U_s \mathbf{e}_x^*, & p' &= p^*, \\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}^*, & \mathbf{j}' &= \mathbf{j}^*, \\ \mathbf{E}' &= \mathbf{E}^* + U_s \mathbf{e}_x^* \times \mathbf{B}^*. \end{aligned} \quad (2.2)$$

ここで \mathbf{u}^* , p^* , \mathbf{B}^* , \mathbf{j}^* , \mathbf{E}^* はそれぞれ静止座標系での流速, 圧力, 磁束密度, 電流密度, 電場を表し、 \mathbf{e}_x^* は x^* 方向の単位ベクトルを表す。また、移動座標系での各変数をプライム記号 “'” を付けて表す。MHD の座標変換では電場が座標系に依存することに注意を要する。

境界条件 (2.1) を移動座標系の変数で表すと、絶縁体壁 $y' = \pm h$ での磁束密度は時刻 t' に依らない形

$$B'_y = B_0 \sin(2\pi x'/\lambda) \quad (2.3)$$

で与えられる。したがって、流れが層流で発電区間の流入・流出口の影響が無視できるならば、流れ場および電磁場には x' 方向に周期的な定常状態が存在する。この論文ではそのような流れ場および電磁場が安定に存在することを仮定し、議論を展開する。

流れ場および電磁場は以下の方程式系に支配される:

$$\nabla' \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.4)$$

$$\rho_L (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' = -\nabla' p' + \eta_L \nabla'^2 \mathbf{u}' + \mathbf{j}' \times \mathbf{B}', \quad (2.5)$$

$$\mathbf{j}' = \sigma_L(\mathbf{E}' + \mathbf{u}' \times \mathbf{B}'), \quad (2.6)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0, \quad (2.7)$$

$$\nabla' \times \frac{\mathbf{B}'}{\mu_L} = \mathbf{j}', \quad (2.8)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = 0. \quad (2.9)$$

ここで $\rho_L, \eta_L, \sigma_L, \mu_L$ はそれぞれ液体の密度, 粘性率, 導電率, 透磁率を表し、いずれも定数とする。

磁束密度を、流速分布に依存しない外部印加成分とダクト内部の電流によって発生する誘導成分とに分けて考える:

$$\mathbf{B}' = \nabla' \phi' + \nabla' \times \mathbf{A}'. \quad (2.10)$$

ここで ϕ' は外部印加磁束密度のスカラー・ポテンシャルを表し、 \mathbf{A}' は誘導磁束密度のベクトル・ポテンシャルを表す。これらを使うと、アンペールの法則 (2.8) より電流密度は

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{\mu_L} [\nabla'(\nabla' \cdot \mathbf{A}') - \nabla'^2 \mathbf{A}'] \quad (2.11)$$

で表される。また、 \mathbf{A}' のゲージを適当に選ぶことにより、電場を

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{\sigma_L \mu_L} \nabla'(\nabla' \cdot \mathbf{A}') \quad (2.12)$$

で表すことができる。さらに、式 (2.10)-(2.12) をオームの法則 (2.6) に代入すると、誘導方程式

$$-\sigma_L \mathbf{u}' \times (\nabla' \times \mathbf{A}') = \frac{1}{\mu_L} \nabla'^2 \mathbf{A}' + \sigma_L \mathbf{u}' \times (\nabla' \phi') \quad (2.13)$$

を得る。また、式 (2.10) を磁束密度に対するガウスの法則 (2.7) に代入すると

$$\nabla'^2 \phi' = 0 \quad (2.14)$$

を得る。式 (2.4), (2.5), (2.13), (2.14) は u', p', A', ϕ' に対する閉じた方程式系であり、式 (2.10), (2.11) が補助変数 B' および j' を与える。

2.2 2次元問題と電場

流れ場および電磁場が2次元的事であること、すなわちすべての変数に対して $\partial/\partial z' = 0$ を仮定する。さらに、矛盾の無い2次元問題を構成するために

$$w' = 0, \quad B'_z = 0, \quad E'_x = 0, \quad E'_y = 0 \quad (2.15)$$

を仮定する。

これらの仮定のもとでは、ファラデーの法則 (2.9) よりただちに $E'_z = \text{const.}$ が得られる。ハルトマン流れなどでは外部から電場を加えない場合でも導体側壁が帯電し E'_z が現れる。しかし、この問題では外部印加磁場が x' 方向に周期的で、 y' に関して対称なので導体側壁は帯電しない。したがって、定常状態では電場が消失する:

$$E'_z = 0. \quad (2.16)$$

このことは、磁場とともに移動する座標系を採用した利点の1つである。

2次元流れ場および2次元磁場を支配する方程式系を書き下すと:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0, \quad (2.17)$$

$$\rho_L \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \eta_L \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) - j'_z B'_y, \quad (2.18)$$

$$\rho_L \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{\partial p'}{\partial y'} + \eta_L \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) + j'_z B'_x, \quad (2.19)$$

$$\sigma_L \left(u' \frac{\partial A'_z}{\partial x'} + v' \frac{\partial A'_z}{\partial y'} \right) = \frac{1}{\mu_L} \left(\frac{\partial^2 A'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A'_z}{\partial y'^2} \right) + \sigma_L \left(u' \frac{\partial \phi'}{\partial y'} - v' \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y'^2} = 0. \quad (2.21)$$

ここで

$$B'_x = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} + \frac{\partial A'_z}{\partial y'}, \quad B'_y = \frac{\partial \phi'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'}, \quad (2.22)$$

$$j'_z = -\frac{1}{\mu_L} \left(\frac{\partial^2 A'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A'_z}{\partial y'^2} \right). \quad (2.23)$$

境界条件

$$u' = -U_s, \quad v' = 0, \quad A'_z = 0, \quad \partial \phi' / \partial y' = B_0 \sin(2\pi x' / \lambda) \quad (2.24)$$

が絶縁体壁 $y' = \pm h$ で要求される。磁束密度の法線方向成分 B'_y の境界条件 (2.3) を ϕ に負わせた。磁束密度の接線方向成分 B'_x は拘束されない。また、移動座標系では、絶縁体壁が x' 軸に沿って負の方向に等速度 U_s でスライドする。移動座標系から見た 2 次元的な流れ場および磁場の概略を図 2.1 に示す。各変数は x' に関する周期関数で、 $u', v', \partial p' / \partial x'$ の周期は $\frac{1}{2}\lambda$ 、また $A'_z, \phi', B'_x, B'_y, j'_z$ の周期は λ である。ただし、圧力には平均圧力勾配

$$\langle \partial p' / \partial x' \rangle_{\text{av}} = -p_0 / \lambda \quad (2.25)$$

が存在し、これが流体を駆動する。ここで、 p_0 は 1 波長あたりの圧力降下を表す定数で、外部から与えられる。

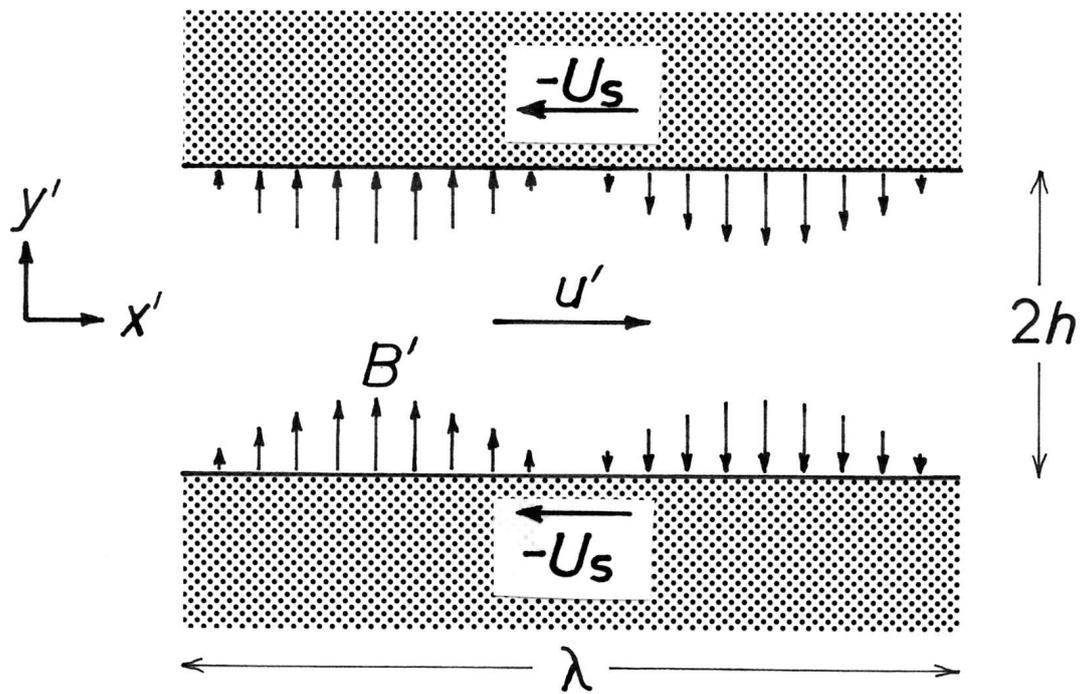


図 2.1: 磁場とともに移動する座標系から見た2次元的な流れ場および磁場の概略.

2.3 規格化と無次元パラメータ

この論文では、主流で圧力勾配とローレンツ力とが釣り合う場合を考えているので、運動方程式 (2.18) の主要項は $-\partial p'/\partial x'$ と $-j'_z B'_y$ である。また、誘導方程式 (2.20) では湧き出し項 $\sigma_L u' \partial \phi'/\partial y'$ と拡散項 $\mu_L^{-1} \partial^2 A'_z/\partial y'^2$ とが主要項である。したがって、流速 u' の代表量 U_0 および誘導磁束密度ポテンシャル A'_z の代表量 A_0 は次のように評価できる:

$$U_0 = 2p_0/(\sigma_L \lambda B_0^2), \quad A_0 = \sigma_L \mu_L h^2 U_0 B_0. \quad (2.26)$$

主流で各変数が 1 程度の値になるように配慮し、以下のような規格・無次元化を行う:

$$\begin{aligned} x' &= (\lambda/2\pi) x, & y' &= h y, \\ u' &= U_0 u, & v' &= (2\pi h U_0/\lambda) v, & p' &= (p_0/2\pi) p, \\ A'_z &= \sigma_L \mu_L h^2 U_0 B_0 A_z, & \phi' &= h B_0 \phi, \\ B'_x &= (\lambda B_0/2\pi h) B_x, & B'_y &= B_0 B_y, \\ j'_z &= \sigma_L U_0 B_0 j_z. \end{aligned} \quad (2.27)$$

式 (2.17)-(2.23) を無次元変数で表すと、支配方程式系は以下ようになる:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{N} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{H_a^2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2j_z B_y, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{N\Lambda^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{H_a^2 \Lambda^2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2j_z B_x, \quad (2.30)$$

$$R_m \left(u \frac{\partial A_z}{\partial x} + v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + \left(u \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{\Lambda^2} v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.32)$$

ここで

$$B_x = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} + R_m \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - R_m \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (2.33)$$

$$j_z = - \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right). \quad (2.34)$$

境界条件

$$u = -S, \quad v = 0, \quad A_z = 0, \quad \partial \phi / \partial y = \sin x \quad (2.35)$$

が絶縁体壁 $y = \pm 1$ で要求される。 $u, v, \partial p / \partial x$ の周期は π で、 A_z, ϕ, B_x, B_y, j_z の周期は 2π である。 また、平均圧力勾配を無次元形で表すと

$$\langle \partial p / \partial x \rangle_{\text{av}} = -1 \quad (2.36)$$

となる。

式 (2.28)-(2.35) に現れる 5 つの無次元パラメータは次のように定義される:

$$H_a = \left(\frac{\sigma_L}{2\eta_L} \right)^{1/2} h B_0, \quad N = \frac{\sigma_L \lambda B_0^2}{4\pi \rho_L U_0}, \quad (2.37)$$

$$R_m = \frac{2\pi \sigma_L \mu_L h^2 U_0}{\lambda}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{2\pi h}, \quad S = \frac{U_s}{U_0}.$$

ハルトマン数の 2 乗 H_a^2 は主流でのローレンツ力と粘性力との比を評価した値で、粘性の効果を特徴づけるパラメータである。相互作用パラメータ N は主流でのローレンツ力と慣性力との比を評価した値で、慣性の効果を特徴づけるパラメータである。磁気レイノルズ数 R_m は誘導方程式の対流項と拡散項との比を評価

した値である。これは誘導磁場と外部印加磁場との比を評価した値に一致しており、誘導磁場の効果を特徴づけるパラメータである。無次元波長 Λ は波長とチャンネル高さの比で、外部印加磁場の 2 次元性を特徴づけるパラメータである。また、スリップ S は磁場の位相速度と流体の代表速度との比で、電磁エネルギーの出入りを特徴づけるパラメータである。

この問題の力学的相似解は 5 つの独立な無次元パラメータで特定できるが、それらの選び方は一通りではない。従来の研究では、上述の定義と異なり、波長 λ かあるいはチャンネル高さ $2h$ かのいずれか一方を代表長さを選び、代表速度には磁場の位相速度を使って形式的に (一様磁場の場合をまねて) 無次元パラメータが定義されていた。しかし、そのようにして定義された無次元パラメータはそれぞれの役目が不明確であり、好ましくない。一方、この論文の無次元パラメータの定義式 (2.37) の中には 2 種類の代表長さ, すなわち波長 λ とチャンネル高さ $2h$ が混在している。また、流体の代表速度 U_0 は式 (2.26) で定義されており、磁場の位相速度 U_s と独立である。これらのことは、有次元形の支配方程式 (2.17)-(2.21) の各項の大きさを評価する過程で必然的に生じたことである。誘導型 MHD 発電機の 2 次元問題を整理するには、式 (2.37) で定義された 5 つの無次元パラメータが最適であると確信する。

この論文では誘導型 MHD 発電機の通常の作動状態を想定し、議論の対象を式 (1.1) のような場合限定する。そして、第 3 章では $N \gtrsim 1$ の場合について、また第 4 章では $N \ll 1$ の場合*について議論する。

*発電区間の長さが正弦波磁場の波長と同程度の発電機は議論の対象外である。なぜなら、そのような発電機を $N \ll 1$ の条件で稼働させた場合、流れ場を x の周期関数とする取り扱いが不適当になると予想できるからである。この場合、流入口での流速分布が発電区間全域に強く影響すると予想できる。

第 3 章

節領域のある流れ

この章では、 $N \gtrsim 1$ の場合について議論する。^{[31]-[33]}

3.1 局所ハルトマン流れ

まず最初に解析が一番簡単な $N \rightarrow \infty$, $R_m \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$ の場合、すなわち慣性の効果, 誘導磁場の効果, および外部印加磁場の 2 次元性の効果が流れ場全域で十分に小さく、無視できる場合を考える。

この場合、外部印加磁束密度のスカラー・ポテンシャルの式 (2.32) の解は容易に求めることができ、

$$\phi = y \sin x. \quad (3.1)$$

磁束密度の誘導成分は無視できるので、式 (2.33) より以下のような磁束密度を得る:

$$B_x = 0, \quad B_y = \sin x. \quad (3.2)$$

このとき、連続の式 (2.28) および運動方程式 (2.29), (2.30) は簡単になり

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.3)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{H_a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2u \sin^2 x, \quad (3.4)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.5)$$

$u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$ で定義される流れ関数 ψ を使うと、式 (3.3) は自動的に満足される。式 (3.4), (3.5) から p を消去すると渦度方程式

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - H_l^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.6)$$

を得る。ここで

$$H_l(x) = \sqrt{2}H_a \sin x. \quad (3.7)$$

式 (3.6) は形式的にハルトマン流れに対する渦度方程式に似ており、 $H_l(x)$ を H_a と置き換えると両者は一致する。このことより、ここでは $H_l(x)$ を“局所ハルトマン数”と呼ぶ。式 (3.6) は $H_l(x)$ をパラメータとして含む y に関する常微分方程式とみなして取り扱うことが可能である。すなわち、流れ関数は上流や下流の影響を受けず、 $x = \text{const.}$ の断面内でローカルに決定される。ただし、絶縁体壁 $y = \pm 1$ での境界条件

$$\psi = \pm Q, \quad \partial\psi/\partial y = -S \quad (3.8)$$

はいずれの断面でも満足されなければならない。ここで $2Q$ は無次元流量を表す。式 (3.6) には解析的な厳密解が存在し

$$\psi = Qy - (Q + S) \frac{\sinh(H_l y) - y \sinh H_l}{H_l \cosh H_l - \sinh H_l}. \quad (3.9)$$

流れ関数の定義式に代入すると、以下のように流速 u の分布を得る:

$$u = Q - (Q + S) \frac{H_l \cosh(H_l y) - \sinh H_l}{H_l \cosh H_l - \sinh H_l}. \quad (3.10)$$

この流れを“局所ハルトマン流れ”と呼ぶ。

無次元流量 $2Q$ を決めるために、運動方程式 (3.4) を $x = -\pi$ から $x = \pi$ まで、 $y = 0$ から $y = 1$ までの矩形領域で積分する。平均圧力勾配が $\langle \partial p / \partial x \rangle_{av} = -1$ であることを考慮すると

$$0 = 1 + \frac{1}{2\pi H_a^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \right]_{y=1} - Q. \quad (3.11)$$

流速分布 (3.10) を代入し、整理すると、以下のように Q が求められる:

$$Q = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (1 + S) \frac{q}{H_a + (2\sqrt{2}/\pi)q}. \quad (3.12)$$

ここで、

$$q = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H_l^2 \tanh H_l}{H_l - \tanh H_l} \sin x dx. \quad (3.13)$$

もし $H_a \gg 1$ ならば、 $q = 1 + O(H_a^{-1})$ と評価できるので、

$$Q = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (1 + S) H_a^{-1} + O(H_a^{-2}). \quad (3.14)$$

局所ハルトマン流れの一例として $H_a = 31.6$ の場合の流速 u の分布を図 3.1 に示す。各断面内の流速 u の分布はハルトマン流れと同様に双曲線関数で表される。ただし、境界層の厚さはハルトマン流れの場合には H_a^{-1} 程度であったが、局所ハルトマン流れでは $[H_l(x)]^{-1}$ 程度であり、流れ方向に周期的に変化する。局所ハルトマン数が小さい $|H_l(x)| < 5$ の区間では境界層がチャンネル断面全域を覆う。特に、 $H_l = 0$ 断面にはポアズイユ流れと同様の 2 次関数の流速分布が現れる。

局所ハルトマン流れは一様流はおろか平行流ともかけ離れている。したがって、従来の理論的研究のように予め一様流あるいは平行流の仮定を置くことは運動量保存則に反する。このことより、従来の理論的研究は、条件によっては誤った結果を与えることが明らかになった。

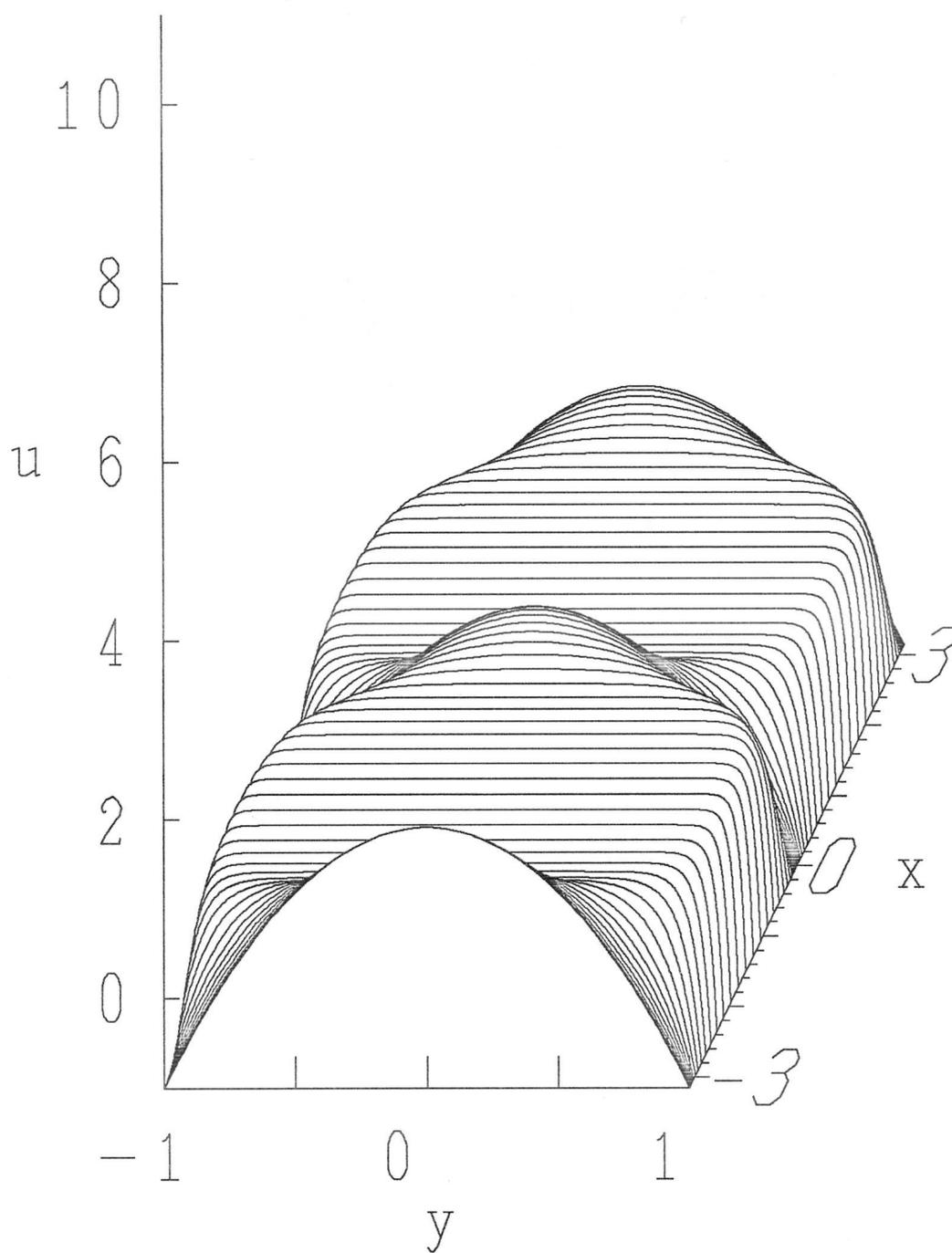


図 3.1: 局所ハルトマン流れの流速 u の分布 (解析解): $H_a = 31.6$.

3.2 節領域での力の釣り合い

$H_a \gg 1, N \gg 1, R_m \ll 1, \Lambda \gg 1$ であるが、いずれのパラメータも有限値の場合を考える。

$N^{-1}, R_m, \Lambda^{-1}$ のいずれかで単純な漸近展開を試みると、その初項は局所ハルトマン流れに一致する。ところが、局所ハルトマン流れは磁場の向きが変わる $x = n\pi$ (n は整数) の断面付近で速度勾配が $O(H_a)$ の大きな値になるので、これが高次の項に極めて大きな影響を与える。実際の誘導型 MHD 発電機を考えると、このような漸近展開はほとんど利用価値がない。したがって、 $H_a \gg 1, N \gg 1, R_m \ll 1, \Lambda \gg 1$ の場合の流れを考えるときには、(a) 流れ場の大部分を占める速度勾配が穏やかな領域と、(b) $x = n\pi$ の断面を含む速度勾配が極めて大きい領域とに分けて解析する必要がある。この論文では、前者を“主流領域”、後者を“節領域”と呼ぶ(図 3.2)。

主流領域では局所ハルトマン流れに微小な補正を加えた流速分布が実現される。特に、漸近展開の初項は $H_a, N, R_m^{-1}, \Lambda$ の大小関係にかかわらず、局所ハルトマン流れで x を固定して $H_a \rightarrow \infty$ の極限をとったものに一致する(付録 A を参照)。

一方、節領域では $H_a, N, R_m^{-1}, \Lambda$ の大小関係に依り流れが大きく様変わりする。

節領域を解析するのに適した方程式系を得るために

$$x = \epsilon \tilde{x}, \quad y = \tilde{y} \quad (3.15)$$

で座標を引き伸ばす。ここで ϵ は節領域の厚さ (x 方向) を表し、 $\epsilon \ll 1$ を仮定する。座標の引き伸ばしに伴って各変数を

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}, & v &= \epsilon^{-1} \tilde{v}, & p &= \epsilon^3 \tilde{p}, \\ A_z &= \epsilon \tilde{A}_z, & \phi &= \epsilon \tilde{\phi}, \\ B_x &= \Lambda^{-2} \tilde{B}_x, & B_y &= \epsilon \tilde{B}_y, & j_z &= \epsilon \tilde{j}_z. \end{aligned} \quad (3.16)$$

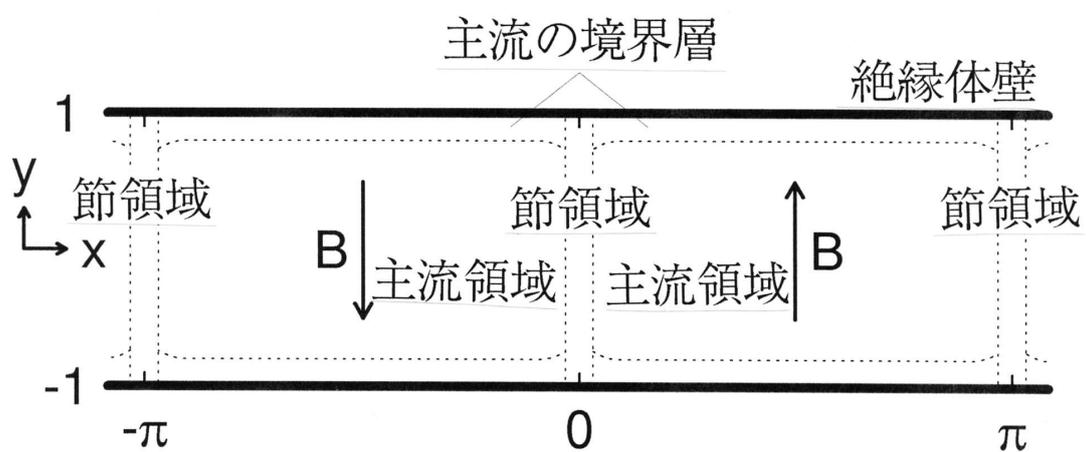


図 3.2: 節領域のある流れ.

で置き換える。各変数 $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{A}_z, \tilde{\phi}, \tilde{B}_x, \tilde{B}_y$ は \tilde{x} と \tilde{y} に関する $O(1)$ の関数と期待する。さらに、各パラメータを

$$H_a = \epsilon^{-m}, \quad N = \epsilon^{-n}, \quad R_m = \epsilon^k, \quad \Lambda = \epsilon^{-l}. \quad (3.17)$$

で置き換え、微小量 ϵ を使って表現する。式 (3.15)-(3.17) を支配方程式 (2.28)-(2.34) に代入すると、次のように節領域に対する方程式を得る:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.18)$$

$$\epsilon^{n-3} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \epsilon^{2m-2} \left(\epsilon^{2l-2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) - 2\tilde{j}_z \tilde{B}_y, \quad (3.19)$$

$$\epsilon^{2l+n-5} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right) = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \epsilon^{2l+2m-4} \left(\epsilon^{2l-2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right) + 2\tilde{j}_z \tilde{B}_x, \quad (3.20)$$

$$\epsilon^{k-1} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}} \right) = \left(\epsilon^{2l-2} \frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right) + \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} - \epsilon^{2l-2} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right), \quad (3.21)$$

$$\epsilon^{2l-2} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} = 0. \quad (3.22)$$

ここで

$$\tilde{B}_x = \epsilon^{2l-2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} + \epsilon^{k-1} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{B}_y = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} - \epsilon^{k-1} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{x}}, \quad (3.23)$$

$$\tilde{j}_z = - \left(\epsilon^{2l-2} \frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}^2} \right). \quad (3.24)$$

境界条件

$$\tilde{u} = -S, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{A}_z = 0, \quad \partial \tilde{\phi} / \partial \tilde{y} = \tilde{x} - \frac{1}{6} \epsilon^2 \tilde{x}^3 + \dots \quad (3.25)$$

が壁面 $\tilde{y} = \pm 1$ で要求される。節領域の流れには境界条件の他に $\tilde{x} \rightarrow \pm\infty$ での主流との接続条件^{[36]-[37]} が課せられる (付録 A を参照)。

各変数が矛盾なく接続された場合、主流の $x \rightarrow \pm 0$ での力の釣り合いと節領域の $\tilde{x} \rightarrow \pm\infty$ での力の釣り合いは一致する。主流領域 (境界層を除く) では圧力勾配の x 成分とローレンツ力の x 成分が運動方程式の主要項であることより、節領域の運動方程式 (3.19) においても、圧力勾配の x 成分とローレンツ力の x 成分を微小項として無視することは許されない。したがって、 $m, n/3, k, l$ はいずれも 1 以上の値でなければならない。

上述の制限の範囲内で、節領域の式 (3.18)-(3.24) 中のいずれの項が主要項となるかによって、節領域の流れを以下の 4 つのタイプに分類できる*: (i) $m = 1, n > 3, l > 1, k > 1$, (ii) $n = 3, m > 1, l > 1, k > 1$, (iii) $l = 1, m > 1, n > 3, k > 1$, (iv) $k = 1, m > 1, n > 3, l > 1$. 粘性力が流れを支配する (i) の場合を粘性型節領域流れ、また慣性力が流れを支配する (ii) の場合を慣性型節領域流れと呼ぶ。(iii) および (iv) の場合は、節領域の反転磁束線 (チャンネルを横切らずに反転し、同じ側の絶縁体壁に戻ってくる磁束線) が流れに大きな影響を与える。後に示す流線の形状より (iii) の場合を対称ノズル型節領域流れ、また (iv) の場合を非対称ノズル型節領域流れと呼ぶ。

上述の分類をもとのパラメータで表すことにより、各タイプの節領域流れが現れる条件および節領域の厚み ϵ を表 3.1 のように予想できる。後に示す数値実験の計算結果について詳細に調べたところ、表 3.1 の予想に反する計算例は一つも無く、それぞれの流れタイプで無視した項が残した項に比べ微小であることが確認された。

以下の節でそれぞれのタイプの節領域流れについて論じ、対応する条件の数値実験の計算結果を示す。

* $m, n/3, k, l$ のうちの複数が 1 の場合も存在する。しかし、そのような場合の節領域流れは上述の 4 つの基本タイプの中間的な流れであるので、詳しい議論は省略する。

表 3.1: 各タイプの節領域流れが現れる条件および節領域の厚さ ϵ (解析的な評価).

タイプ	条件			ϵ
粘性型	$1 \ll H_a \ll N^{1/3}$,	$1 \ll H_a \ll R_m^{-1}$,	$1 \ll H_a \ll \Lambda$	$O(H_a^{-1})$
慣性型	$1 \ll N^{1/3} \ll H_a$,	$1 \ll N^{1/3} \ll R_m^{-1}$,	$1 \ll N^{1/3} \ll \Lambda$	$O(N^{-1/3})$
対称ノズル型	$1 \ll \Lambda \ll H_a$,	$1 \ll \Lambda \ll N^{1/3}$,	$1 \ll \Lambda \ll R_m^{-1}$	$O(\Lambda^{-1})$
非対称ノズル型	$1 \ll R_m^{-1} \ll H_a$,	$1 \ll R_m^{-1} \ll N^{1/3}$,	$1 \ll R_m^{-1} \ll \Lambda$	$O(R_m)$

3.3 粘性型節領域流れ

式 (3.18)-(3.24) で $m = 1$, すなわち $\epsilon = H_a^{-1}$ とすると粘性型節領域流れに対する方程式系を得る。議論の複雑化を避けるために、表 3.1 に記された粘性型の条件を考慮して、これらの式中の微小項を無視する。

この場合、外部印加磁束密度のポテンシャル $\tilde{\phi}$ の解は容易に求められ

$$\tilde{\phi} = \tilde{x}\tilde{y}. \quad (3.26)$$

磁束密度の誘導成分は無視できるので、磁束密度は次のように得られる:

$$\tilde{B}_x = 0, \quad \tilde{B}_y = \tilde{x}. \quad (3.27)$$

このとき、連続の式 (3.18) および運動方程式 (3.19), (3.20) は

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.28)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - 2\tilde{u}\tilde{x}^2, \quad (3.29)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \quad (3.30)$$

のように簡単になる。境界条件および接続条件を考慮すると、以下のような解を得る (付録 A を参照):

$$\tilde{u} = 1 - (1 + S) \frac{\sqrt{2}\tilde{x} \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}\tilde{y}) - \sinh(\sqrt{2}\tilde{x})}{\sqrt{2}\tilde{x} \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}) - \sinh(\sqrt{2}\tilde{x})}. \quad (3.31)$$

この流速分布は、局所ハルトマン流れ (3.10) で $H_a x$ と y を固定して $H_a \rightarrow \infty$ の極限をとったものに一致する。したがって、節領域が粘性型の場合には、主流領域だけでなく節領域でも局所ハルトマン流れにわずかな補正を加えた流れが実現する。

上述の考察を検証するために数値実験をおこなった。解析的に流れ場を調べる場合にはあらかじめ主流領域と節領域に分けたが、数値実験では両者を区別することなく式 (2.28)-(2.34) の解を求め、その計算結果として節領域 (流れ方向の速度勾配が非常に大きい領域) を捕えた。その際には、 x に関する周期性および y に関する対称性を考慮して $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq 1$ の範囲で解を求めた[†]。数値実験の方法については付録 B で詳しく述べる。

計算結果の一例として $H_a = 31.6, N = 5.03 \times 10^4, R_m = 0, \Lambda \rightarrow \infty, S = 1$ の場合の流速 u の分布を図 3.3 に示す。表 3.1 に記した粘性型節領域の条件を満足する全ての計算例について、流れ場全域で流速分布が局所ハルトマン流れに良く一致することが確かめられた。

3.4 慣性型節領域流れ

式 (3.18)-(3.24) で $n = 3$, すなわち $\epsilon = N^{-1/3}$ とすると慣性型節領域流れに対する方程式系を得る。議論の複雑化を避けるために、表 3.1 に記された慣性型の条件を考慮して、これらの式中の微小項を無視する。

この場合、外部印加磁束密度のポテンシャル $\tilde{\phi}$ の解は容易に求められ

$$\tilde{\phi} = \tilde{x}\tilde{y}. \quad (3.32)$$

磁束密度の誘導成分は無視できるので、磁束密度は次のように得られる:

$$\tilde{B}_x = 0, \quad \tilde{B}_y = \tilde{x}. \quad (3.33)$$

このとき、連続の式 (3.18) および運動方程式 (3.19), (3.20) は

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.34)$$

[†]直観的な流れの把握を助けるために、作図時には周期条件および対称条件を考慮して描画範囲を広くとった。

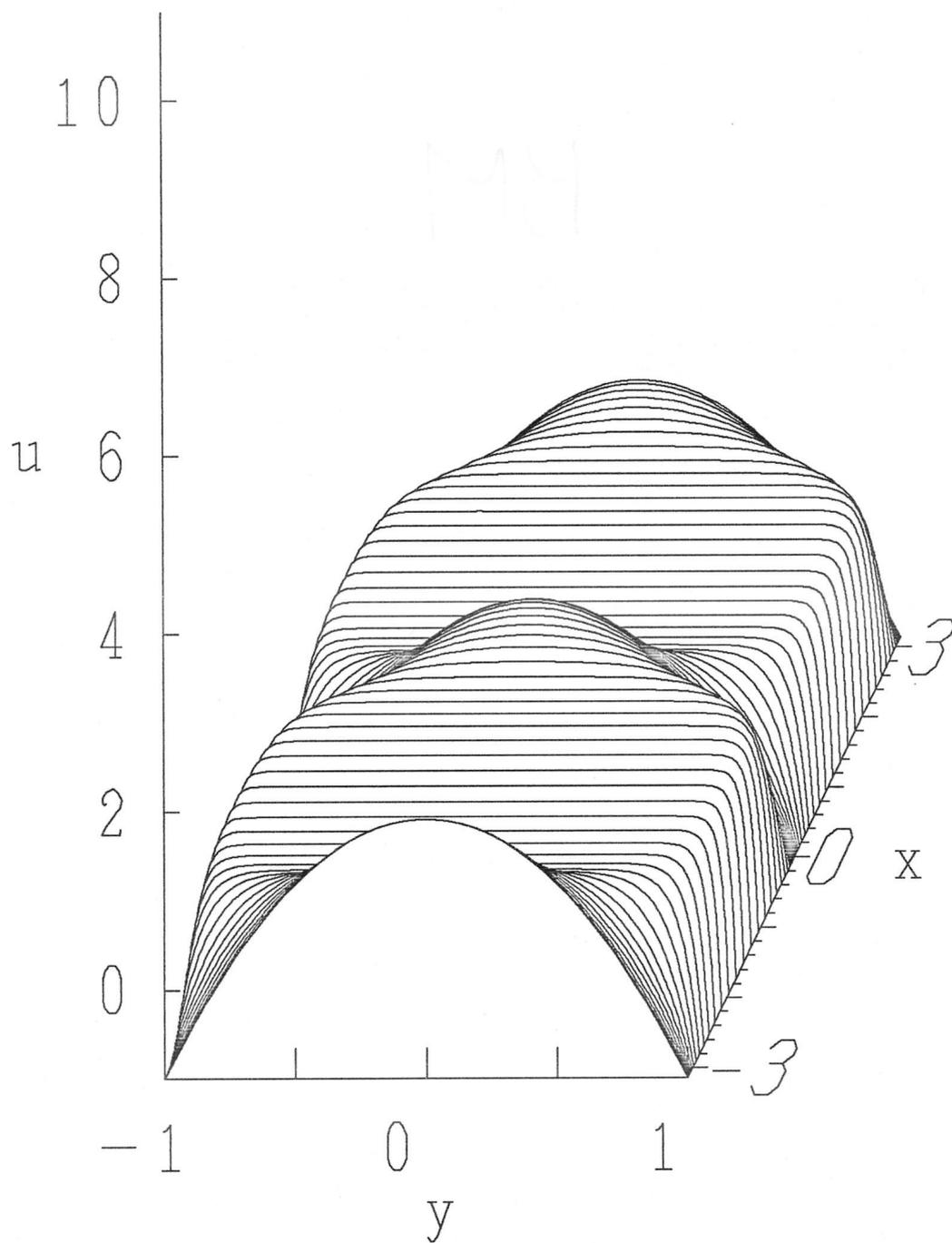


図 3.3: 粘性型節領域のある流れの流速 u の分布 (数値解): $H_a = 31.6$, $N = 5.03 \times 10^4$, $R_m = 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$, $S = 1$.

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - 2\tilde{u}\tilde{x}^2, \quad (3.35)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \quad (3.36)$$

のように簡単になる。ところが、上式は境界条件 (3.25) を満足する自由度が無い。なぜなら、運動方程式で粘性項を微小と評価して無視したことにより、方程式の階数が下がったからである。このことは、慣性型節領域内に境界層が存在し、そこでは式 (3.34)-(3.36) の単純化が不適當になることを示唆する。壁面付近では $N^{2/3} H_a^{-2} \partial^2 u / \partial y^2$ で表される粘性力が x 方向の運動方程式の主要項と同程度となり境界層が形成されると予想できる。この予想にしたがえば、慣性型節領域流れの境界層の厚さ δ は次のように評価できる：

$$\delta = O(H_a^{-1} N^{1/3}). \quad (3.37)$$

この評価は、慣性型節領域の境界層は主流領域の境界層 (H_a^{-1} 程度) より厚いが、局所ハルトマン流れのようにチャンネル断面全域が境界層に覆われはしないということを示している。また、慣性型節領域の境界層の構造は主流領域の境界層の構造と異なり、むしろ通常 (MHD でない) の粘性流体の境界層の構造に近いと予想できる。なぜなら、ローレンツ力が \tilde{x}^2 に依存しているので、 $\tilde{x} = 0$ に近づくにつれてローレンツ力が影響力を失うと考えられるからである。

数値実験の計算結果を使い上述の考察を検証する。

数値実験の計算結果の一例として $H_a = 31.6$, $N = 50.3$, $R_m = 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$, $S = 1$ の場合の流速 u の分布を図 3.4 に示す。表 3.1 に記した慣性型節領域の条件を満足する全ての計算例について、主流領域では良い近似で局所ハルトマン流れに一致した。また、節領域流れには主流領域の境界層よりも厚い境界層が存在するが、チャンネル断面全域が境界層に覆いつくされはしないことが確かめられた。

数値実験の計算結果を使い境界層の厚みを定量的に評価するために、 $x = 0$

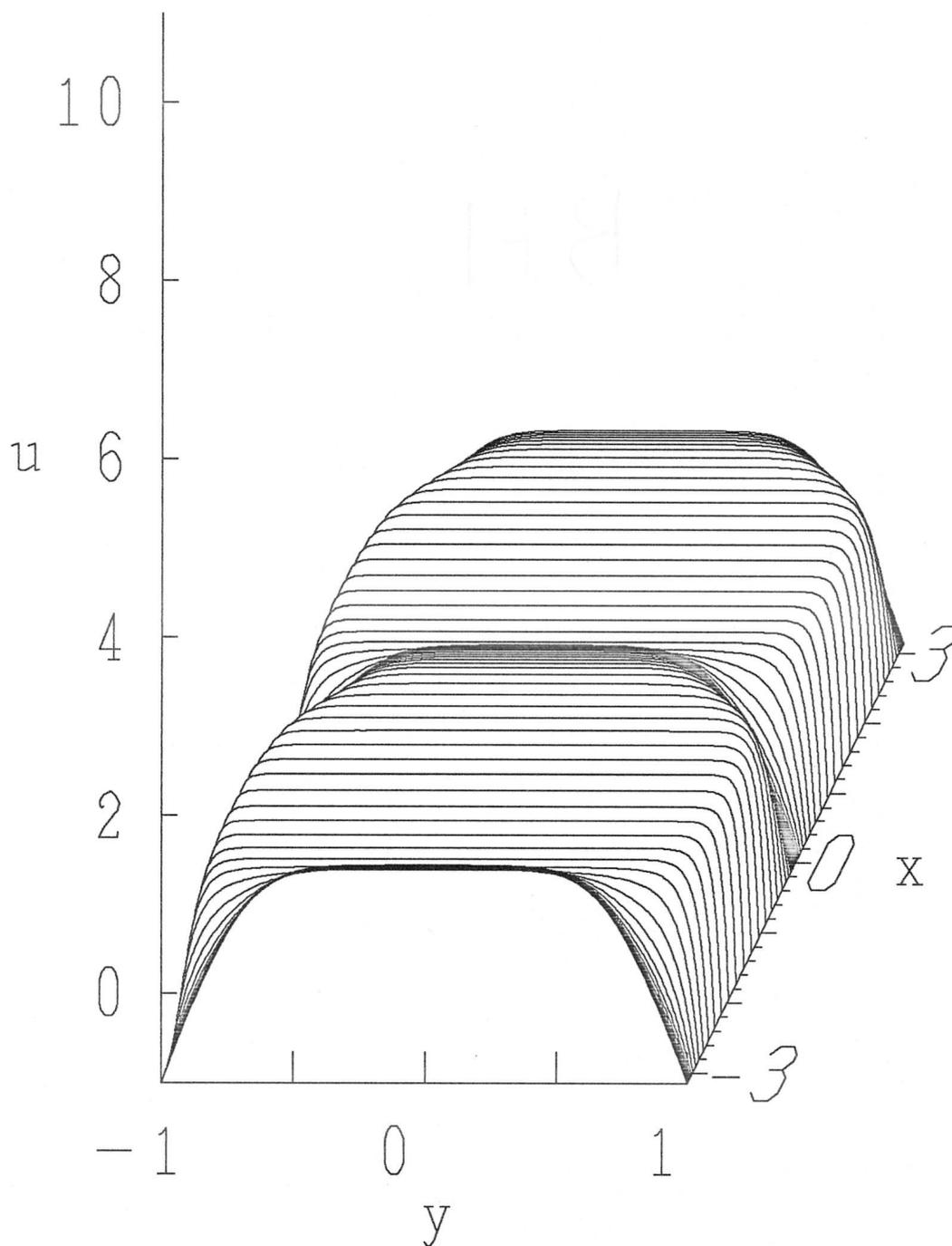


図 3.4: 慣性型節領域のある流れの流速 u の分布 (数値解): $H_a = 31.6$, $N = 50.3$, $R_m = 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$, $S = 1$.

断面での境界層の厚さ δ を

$$\delta = \int_0^1 \frac{u(0,0) - u(0,y)}{u(0,0) + S} dy, \quad (3.38)$$

で定義する。 $H_a^{-1}N^{1/3}$ に対する δ の変動を図 3.5 に示す。図より慣性型節領域の境界層の厚さ δ が $2H_a^{-1}N^{1/3}$ にほぼ等しいことが確かめられた。

図 3.5 には慣性型節領域の条件からはずれた計算例についても δ の値をプロットしてある。節領域が粘性型の場合、 $x = 0$ 断面の流速分布は 2 次関数なので $\delta = \frac{1}{3}$ となる。このことは、 $H_a^{-1}N^{1/3} > 1$ の計算例で確認された。また、図中の $0.1 < H_a^{-1}N^{1/3} < 1$ の各点は、粘性型に対応する直線 $\delta = 1/3$ と慣性型に対応する直線 $\delta = 2H_a^{-1}N^{1/3}$ とを滑らかに接続する曲線上に存在する。したがって、これらの点に対応する計算例の節領域流れは、慣性型と粘性型の間接的な流れであると解釈できる。

一方、 $N \lesssim 1$ の場合、境界層の厚さ δ は H_a^{-1} にほぼ等しい(図 3.5 の左側で水平な破線と重なっている計算例)。この場合、流れの性質は慣性型節領域のそれと本質的に異なっている。このことをより明確に把握するために、種々の N の場合について、中心面 $y = 0$ 上の流速 u の分布を図 3.6 に示す。 N が小さくなるにつれて慣性の効果で節領域の厚さ (x 方向) が増し、流速の周期変動が小さくなる。特に、 $N \lesssim 1$ の場合の流れでは節領域と主流領域の区別がなくなっている。したがって、この章で展開してきた“節領域のある流れ”に関する議論を $N \lesssim 1$ の場合の流れに適用することはできない。このような流れを“慣性が支配的な流れ”と呼び、第 4 章で詳しく議論する。

3.5 対称ノズル型節領域流れ

式 (3.18)-(3.24) で $l = 1$, すなわち $\epsilon = \Lambda^{-1}$ とすると対称ノズル型節領域流れに対する方程式系を得る。議論の複雑化を避けるために、表 3.1 に記された対称ノズル型の条件を考慮して、これらの式中の微小項を無視する。

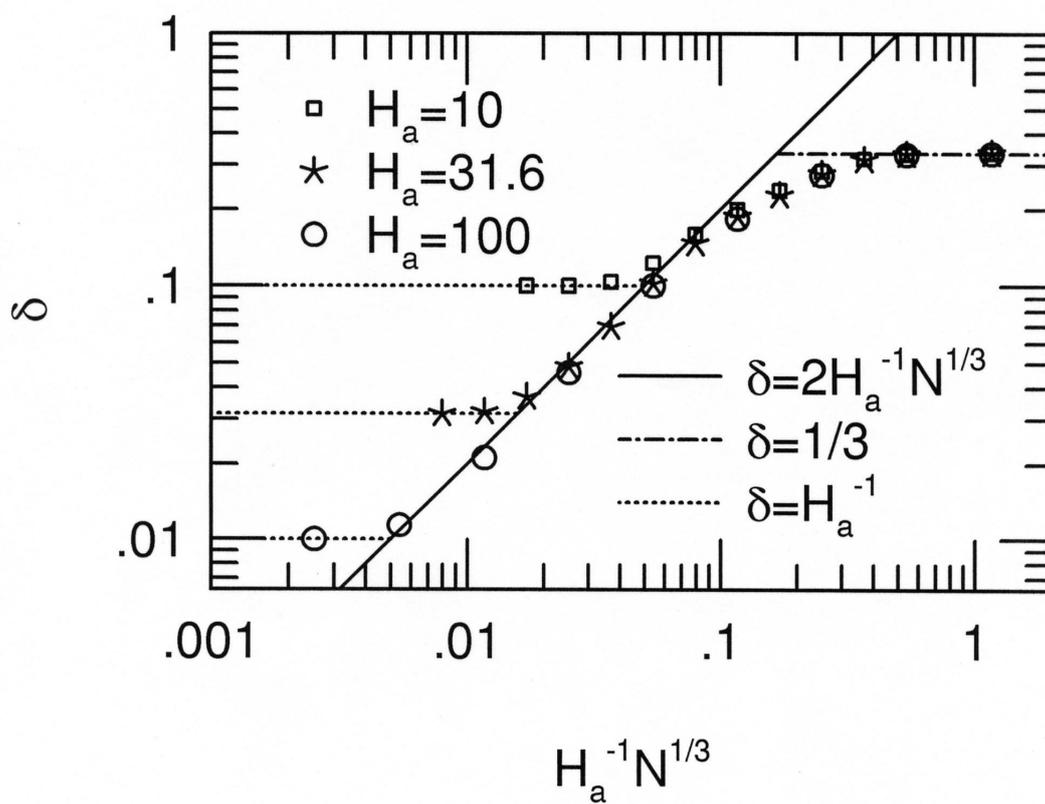


図 3.5: $x = 0$ 断面の境界層の厚さ δ (数値解): $R_m = 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$, $S = 1$.

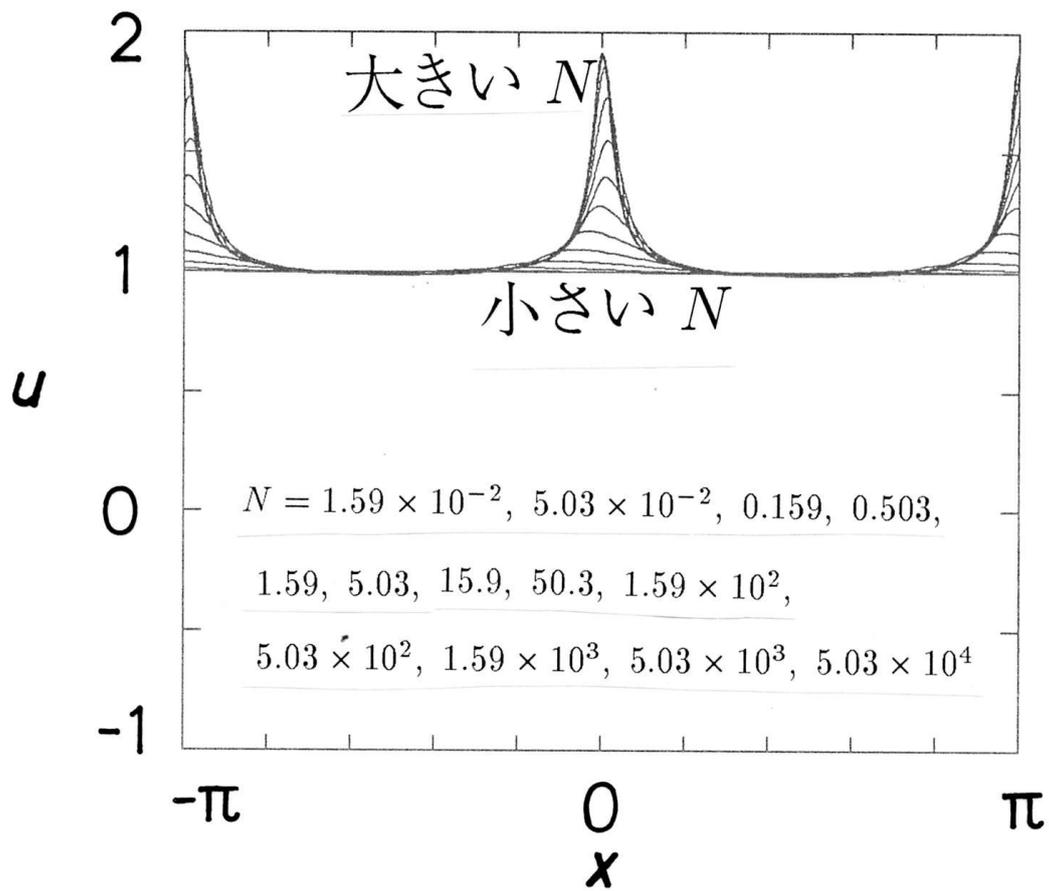


図 3.6: 種々の N の場合についての中心面 $y = 0$ 上の流速 u の分布 (数値解): $H_a = 31.6$, $R_m = 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$, $S = 1$.

この場合、外部印加磁束密度のポテンシャル $\tilde{\phi}$ の解は容易に求められ

$$\tilde{\phi} = \tilde{x}\tilde{y}. \quad (3.39)$$

磁束密度の誘導成分は無視できるので、磁束密度は次のように得られる:

$$\tilde{B}_x = \tilde{y}, \quad \tilde{B}_y = \tilde{x}. \quad (3.40)$$

このとき、連続の式 (3.18) および運動方程式 (3.19), (3.20) は

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.41)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - 2(\tilde{u}\tilde{x} - \tilde{v}\tilde{y})\tilde{x}, \quad (3.42)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + 2(\tilde{u}\tilde{x} - \tilde{v}\tilde{y})\tilde{y} \quad (3.43)$$

のように簡単になる。流れは圧力勾配とローレンツ力の釣り合いで決定されるが、主流領域と異なり、力の釣り合いは 2 次元的である。 $\tilde{u} = \partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{y}$, $\tilde{v} = -\partial\tilde{\psi}/\partial\tilde{x}$ で定義される流れ関数 $\tilde{\psi}$ を使うと、式 (3.41) は自動的に満足される。式 (3.42), (3.43) から \tilde{p} を消去すると

$$\left(\tilde{y} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \tilde{\psi} = 0 \quad (3.44)$$

を得る。運動方程式 (3.42), (3.43) で粘性項を微小と評価して無視したために、方程式の階数が下がっているため、上式は境界条件を満足する自由度が無い。このことは、対称ノズル型節領域内に境界層が存在するを示唆するが、ここでは深く立ち入らない。ここでは無次元流量 $2Q$ が一定であること、すなわち壁面 $\tilde{y} = \pm 1$ での境界条件

$$\tilde{\psi} = \pm Q \quad (3.45)$$

だけを要求し、壁面上での流速の滑りを許す。このとき、式 (3.44) には以下のような弱解が存在する:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi} &= Q \cdot \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) && \text{for } \tilde{x} > |\tilde{y}|, \\
 \tilde{\psi} &= -Q \cdot \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) && \text{for } \tilde{x} < -|\tilde{y}|, \\
 \tilde{\psi} &= Q && \text{for } \tilde{y} \geq |\tilde{x}|, \\
 \tilde{\psi} &= -Q && \text{for } \tilde{y} \leq -|\tilde{x}|.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

ここで

$$\tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\log |\tilde{x} + \tilde{y}| - \log |\tilde{x} - \tilde{y}|}{2 \log \left(1 + \sqrt{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1} \right) - \log(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)}. \tag{3.47}$$

解析解 (3.46), (3.40) の流線および磁束線を図 3.7 に示す。 $\tilde{y}^2 > \tilde{x}^2$ の領域には反転磁束線が存在し、そこでは流体が静止 (死水領域) する。このため、上下一組の死水領域に挟まれてノズル流れに似た加速流れが発生する。この加速流れの流線の形状は $x = 0$ 断面に対して対称である。このことより、このタイプの節領域を対称ノズル型と呼んでいる。

数値実験の結果を使い、解析解 (3.46) の妥当性を検証する。

数値実験の計算結果の一例として $H_a = 3.16 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{10}$, $R_m = 0$, $\Lambda = 3.16$, $S = 1$ の場合の流速 u の分布を図 3.8 に示す。表 3.1 に記した対称ノズル型節領域の条件を満足する全ての計算例について、主流領域では良い近似で局所ハルトマン流れに一致した。一方、節領域の流速分布は粘性型や慣性型の場合と著しく異なり、原点付近では流速が非常に大きな値になった。

数値解の節領域の流線および磁束線の一例として $H_a = 3.16 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{10}$, $R_m = 0$, $\Lambda = 3.16$, $S = 1$ の場合を図 3.9 に示す。上下一組の反転磁束線領域には再循環流れが生じた。このため、2つの再循環領域に挟まれてノズル流れに似た加速流れが発生した。流線の形状は $x = 0$ 断面に対してほぼ対称だった。このことより、簡単化された方程式に対する解析解 (3.46) が対称ノズル型節領域流れの基本的性質を捉えていることが確認された。

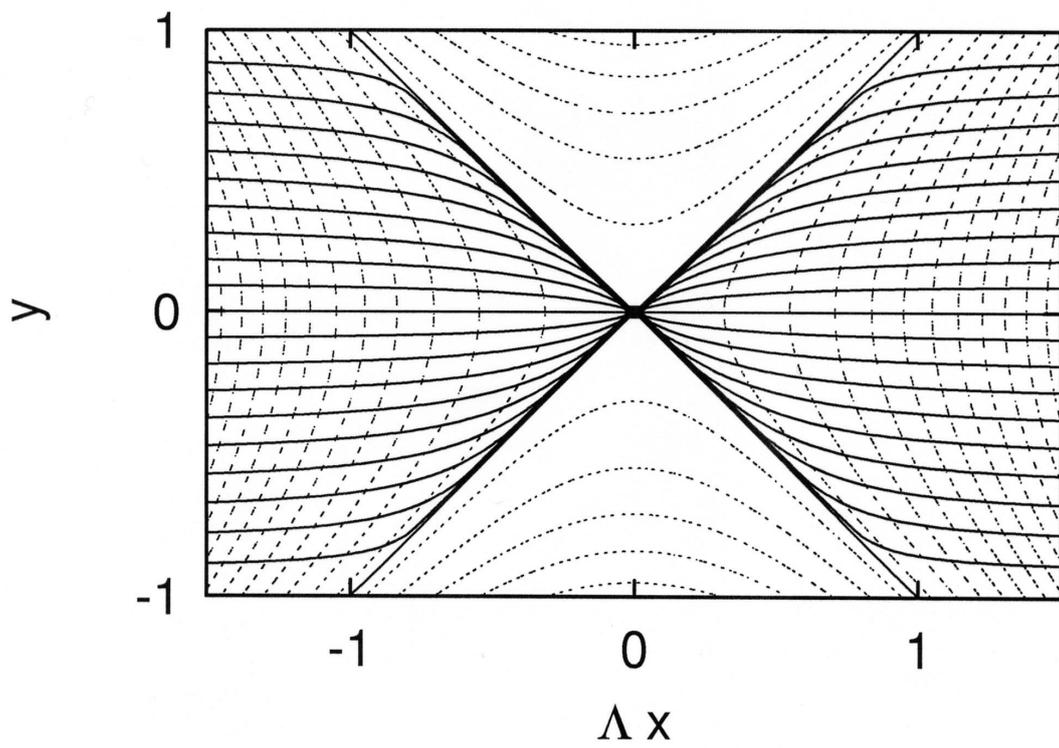


図 3.7: 対称ノズル型節領域の流線 (実線) および磁束線 (破線), 解析解.

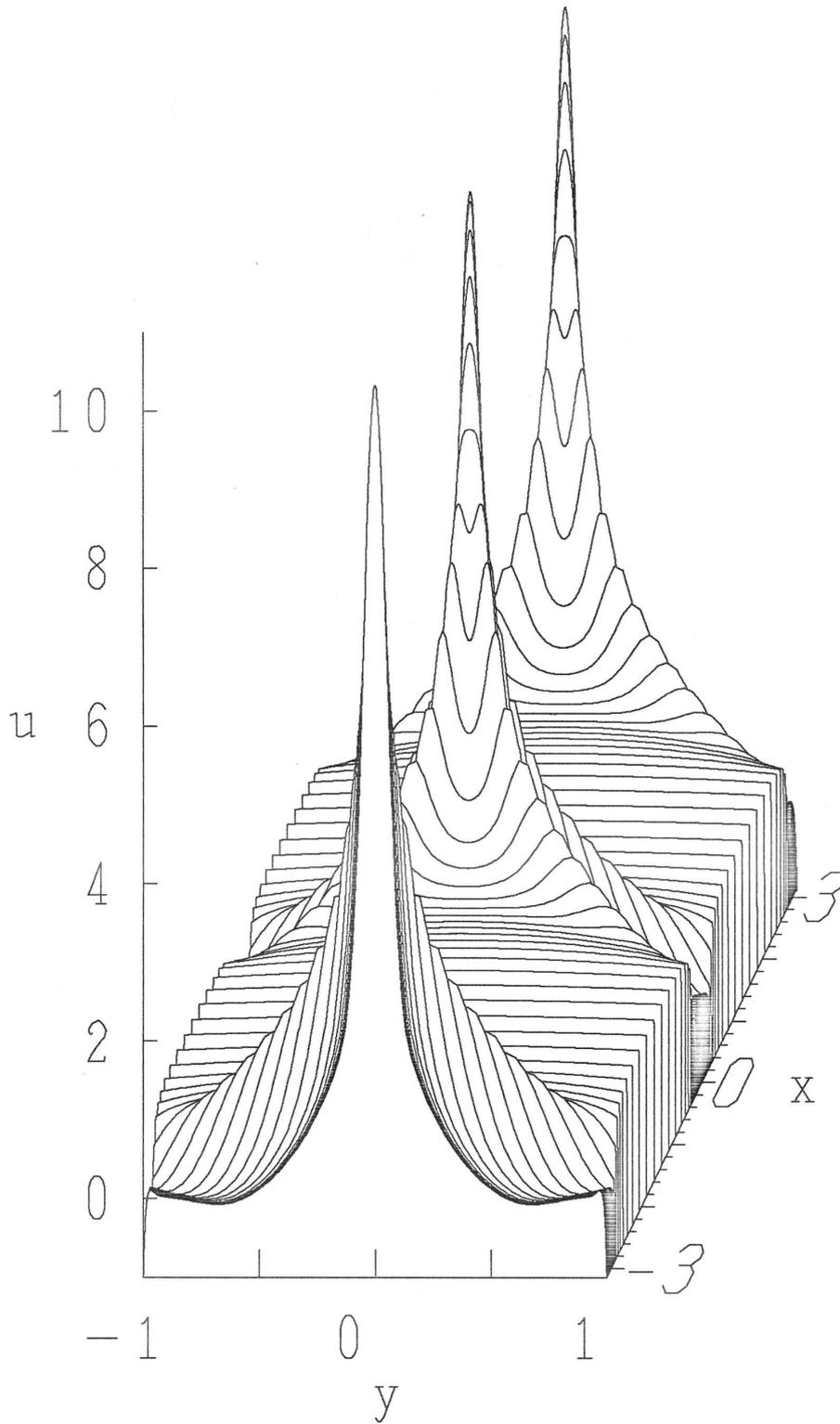


図 3.8: 対称ノズル型節領域のある流れの流速 u の分布 (数値解): $H_a = 3.16 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{10}$, $R_m = 0$, $\Lambda = 3.16$, $S = 1$.

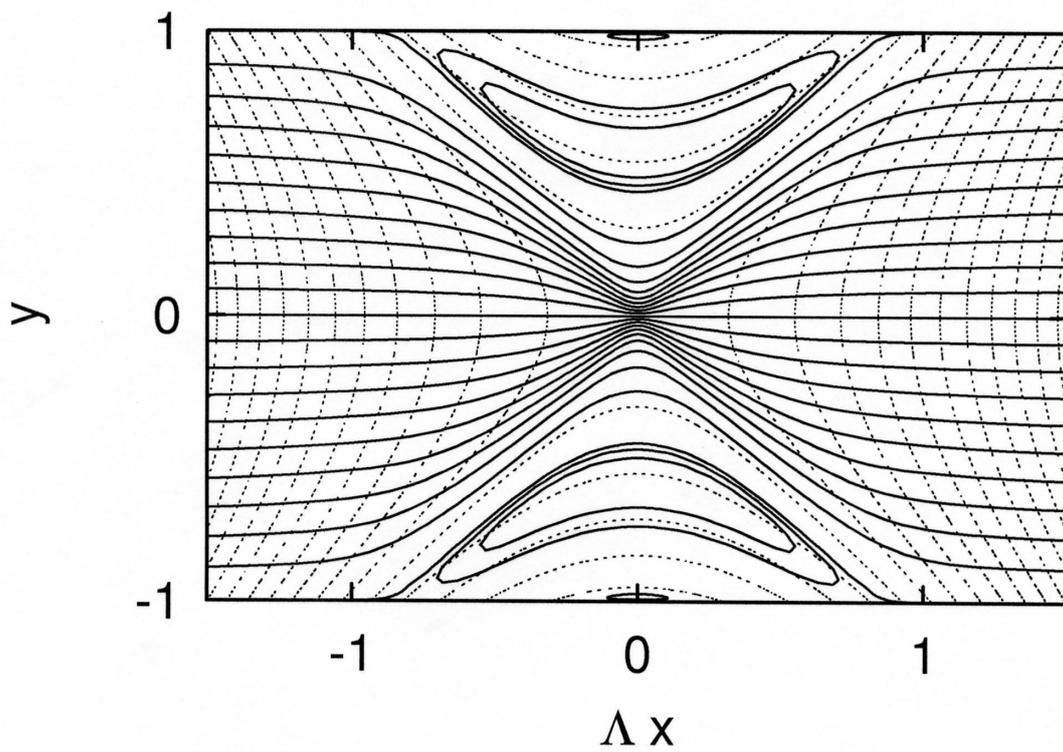


図 3.9: 対称ノズル型節領域の流線 (実線) および磁束線 (破線), 数値解: $H_a = 3.16 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{10}$, $R_m = 0$, $\Lambda = 3.16$, $S = 1$.

しかしながら、解析解 (3.46) は $\tilde{y} = \pm 1$, $\tilde{y} = \pm \tilde{x}$ および $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ で流速の不連続や発散を起こし破綻する。数値実験の計算結果ではこの付近に微細構造が現れた。計算データを詳細に調べた結果、それらの微細構造では運動方程式 (3.42), (3.43) の簡単化が不適当になっていることが確かめられた。 $\tilde{y} = \pm 1$ 付近には壁面境界層が、 $\tilde{y} = \pm \tilde{x}$ 付近には内部境界層が、また $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ 付近にはこの流れに特有の微細構造が現れた。これらの微細構造に取り囲まれた反転磁束線領域では、粘性剪断力により角運動量が持ち込まれたために再循環流れが生じたと解釈できる。

$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ 付近に現れた微細構造は他にあまり例の無いものである。流線の形状がノズル流れのスロート部分に似ているので、この微細構造を通常のノズル流れの場合にならって“スロート”と呼ぶ。ただし、ここで呼ぶ“スロート”は通常のノズル流れのように流管が最小面積になる断面だけを指すのではなく、運動方程式 (3.42), (3.43) の簡単化が不適当になる一定の領域を指す。以下ではスロートについて詳しく調べる。

スロートの y 方向の幅を $2d$ で表し $d \ll 1$ を仮定する。磁束線の形状より x 方向の長さは $\Lambda^{-1}d$ 程度と予想できる。そこで、スロートを調べるためにさらに引き伸ばした座標

$$x = \Lambda^{-1}d\hat{x}, \quad y = d\hat{y} \quad (3.48)$$

を導入する。これに伴い、各変数を

$$u = d^{-1}\hat{u}, \quad v = \Lambda d^{-1}\hat{v}, \quad p = \Lambda^{-3}d^2\hat{p}. \quad (3.49)$$

で置き換える。置き換え後の各変数 \hat{u} , \hat{v} , \hat{p} は \hat{x} と \hat{y} に関する $O(1)$ の関数と期待する。磁束密度および電流密度は対称ノズル型節領域内の他の部分と同様に

$$B_x = \Lambda^{-2}d\hat{y}, \quad B_y = \Lambda^{-1}d\hat{x}, \quad (3.50)$$

$$j_z = \Lambda^{-1}(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y}). \quad (3.51)$$

さらに、粘性項および慣性項の係数を d を使い

$$\frac{\Lambda^2}{H_a^2} = d^\alpha, \quad \frac{\Lambda^3}{N} = d^\beta. \quad (3.52)$$

で表す。式 (3.48)-(3.52) を (2.28)-(2.30) に代入すると、以下のようなスロートを調べるのに適した方程式系を得る：

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0, \quad (3.53)$$

$$d^{\beta-4} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + d^{\alpha-4} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right) - 2(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y})\hat{x}, \quad (3.54)$$

$$d^{\beta-4} \left(\hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + d^{\alpha-4} \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \right) + 2(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y})\hat{y}, \quad (3.55)$$

対称ノズル型節領域の流れ (3.46) の $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \rightarrow 0$ での力の釣り合いとスロート流れの $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 \rightarrow \infty$ での力の釣り合いは一致しなければならない。対称ノズル型節領域の流れ（内部境界層を除く）では圧力勾配とローレンツ力が運動方程式の主要項であることより、スロートの運動方程式 (3.54), (3.55) において圧力勾配とローレンツ力を微小項として無視することは許されない。したがって、 α および β は 4 以上の値でなければならない。

この制限の範囲内で、式 (3.53)-(3.55) で何れの項が主要項となるかによって、スロート流れを以下の 2 つのタイプに分類できる[‡]: (i) $\alpha = 4, \beta > 4$, (ii) $\beta = 4, \alpha > 4$. 前者の場合、運動方程式で微小項を無視すると

$$0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} \right) - 2(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y})\hat{x}, \quad (3.56)$$

$$0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + \left(\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2} \right) + 2(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y})\hat{y}. \quad (3.57)$$

[‡] α と β が同時に 4 である場合も存在する。しかし、この場合のスロート流れは上述の 2 つの基本タイプの中間的な流れであるので、詳しい議論は省略する。

粘性の効果によりスロートが有限の幅に押し広げられる。一方、後者の場合運動方程式で微小項を無視すると

$$\left(\hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - 2(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y})\hat{x}, \quad (3.58)$$

$$\left(\hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} + 2(\hat{u}\hat{x} - \hat{v}\hat{y})\hat{y}. \quad (3.59)$$

慣性力の効果によりスロートが有限の幅に押し広げられる。

上述の分類をもとのパラメータで表すことにより、2つのタイプのスロート流れが現れる条件およびスロートの半値幅 d を表 3.2 のように予想できる。

数値実験の計算結果を使い、表 3.2 の予想を検証する。

計算結果には、流速が最大になる点を含む $x = \text{const.}$ の断面内に、4つの変曲点 ($\partial^2 u / \partial y^2 = 0$) が存在した。外側の2つは再循環流れの内部に位置し、内側の2つはノズル状の流れの縁付近に位置した。スロートの幅 $2d$ を内側の2つの変曲点の間の距離で定義する。 $N^{-1/4} \Lambda^{3/4}$ に対する数値解の d の変化を図 3.10 に示す。スロートの半値幅 d は $N^{-1/4} \Lambda^{3/4}$ にほぼ等しいが、下限が存在し、それはほぼ $\frac{3}{2} H_a^{-1/2} \Lambda^{1/2}$ だった。これにより、表 3.2 の予想が正しいことが確認された。

3.6 非対称ノズル型節領域流れ

式 (3.18)-(3.24) で $k = 1$, すなわち $\epsilon = R_m$ とすると非対称ノズル型節領域流れに対する方程式系を得る。議論の複雑化を避けるために、表 3.1 に記された非対称ノズル型の条件を考慮してこれらの式中の微小項を無視すると、各式は以下のように簡単化される:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (3.60)$$

表 3.2: 各タイプのスロート流れが現れる条件およびスロートの半値幅 d (解析的な評価).

スロートの力	条件	d
粘性力	$1 \ll \Lambda^3 \ll H_a^2 \Lambda \ll N$	$O(H_a^{-1/2} \Lambda^{1/2})$
慣性力	$1 \ll \Lambda^3 \ll N \ll H_a^2 \Lambda$	$O(N^{-1/4} \Lambda^{3/4})$

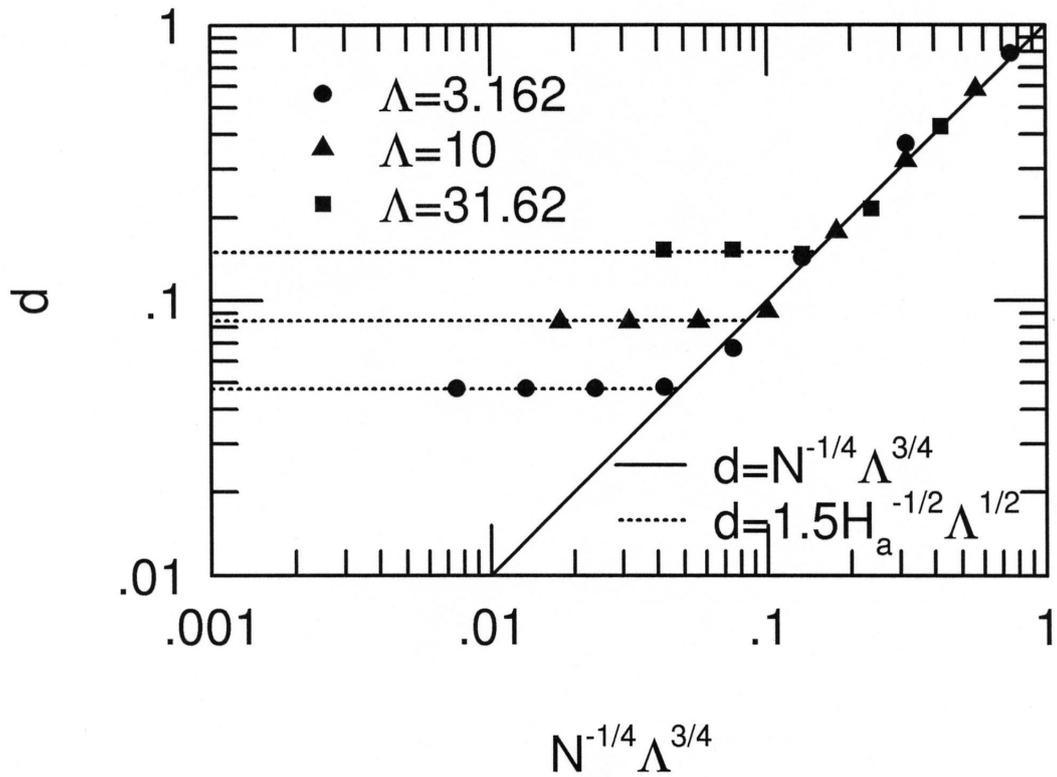


図 3.10: 対称ノズル型節領域のスロートの半値幅 d (数値解): $H_a = 3.16 \times 10^3$, $R_m = 0$, $S = 1$.

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} - 2\tilde{j}_z \tilde{B}_y, \quad (3.61)$$

$$0 = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + 2\tilde{j}_z \tilde{B}_x, \quad (3.62)$$

$$\left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}} \right) = \frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}^2} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}}, \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}^2} = 0, \quad (3.64)$$

ここで

$$\tilde{B}_x = \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}}, \quad \tilde{B}_y = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} - \frac{\partial \tilde{A}_z}{\partial \tilde{x}}, \quad (3.65)$$

$$\tilde{j}_z = -\frac{\partial^2 \tilde{A}_z}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (3.66)$$

対称ノズル型節領域と同様に圧力勾配とローレンツ力が 2 次元的に釣り合う。しかし、非対称ノズル型節領域では誘導磁束密度が外部印加磁束密度と同程度の大きさになるので、磁束密度の分布は対称ノズル型節領域のそれと異なる。

誘導磁束密度を決定する誘導方程式は非線形なので解析解を求めることは困難である。そこで、流れの様子を知るために数値実験を行った。

数値実験の計算結果の一例として $H_a = 1.0 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{12}$, $R_m = 0.1$, $\Lambda = 100$, $S = 1$ の場合の流速 u の分布を図 3.11 に示す。表 3.1 に記した非対称ノズル型節領域の条件を満足する全ての計算例について、主流領域では良い近似で局所ハルトマン流れに一致した。一方、節領域の流速分布は対称ノズル型のそれと似ているが、流れは $x = 0$ 断面に対して非対称であった。

節領域の流線および磁束線の一例として $H_a = 1.0 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{12}$, $R_m = 0.1$, $\Lambda = 100$, $S = 1$ の場合を図 3.12 に示す。流れの基本的性質は対称ノズル型節領域のそれと同様であった: 上下一組の反転磁束線領域の付近には再循

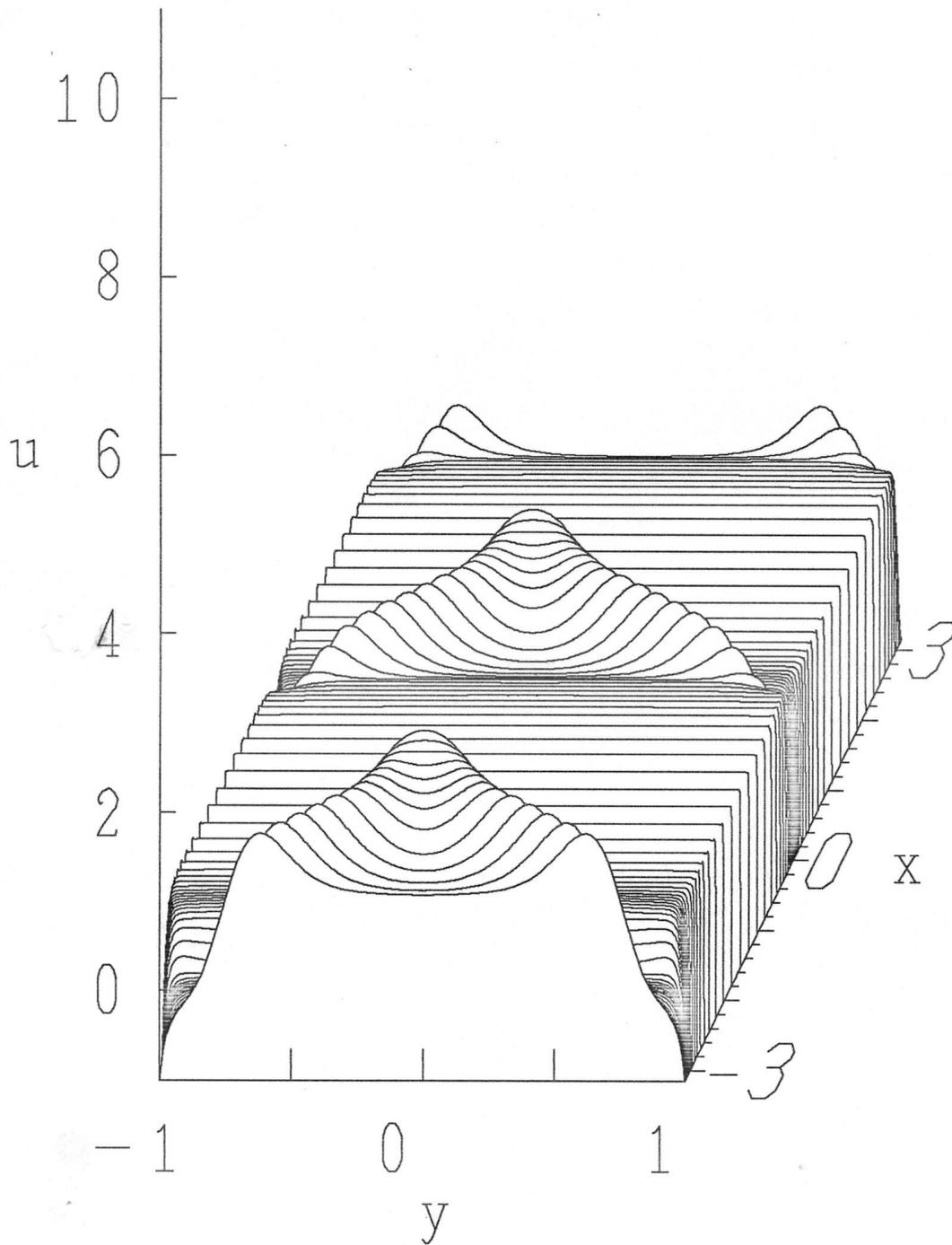


図 3.11: 非対称ノズル型節領域のある流れの流速 u の分布 (数値解): $H_a = 1.0 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{12}$, $R_m = 0.1$, $\Lambda = 100$, $S = 1$.

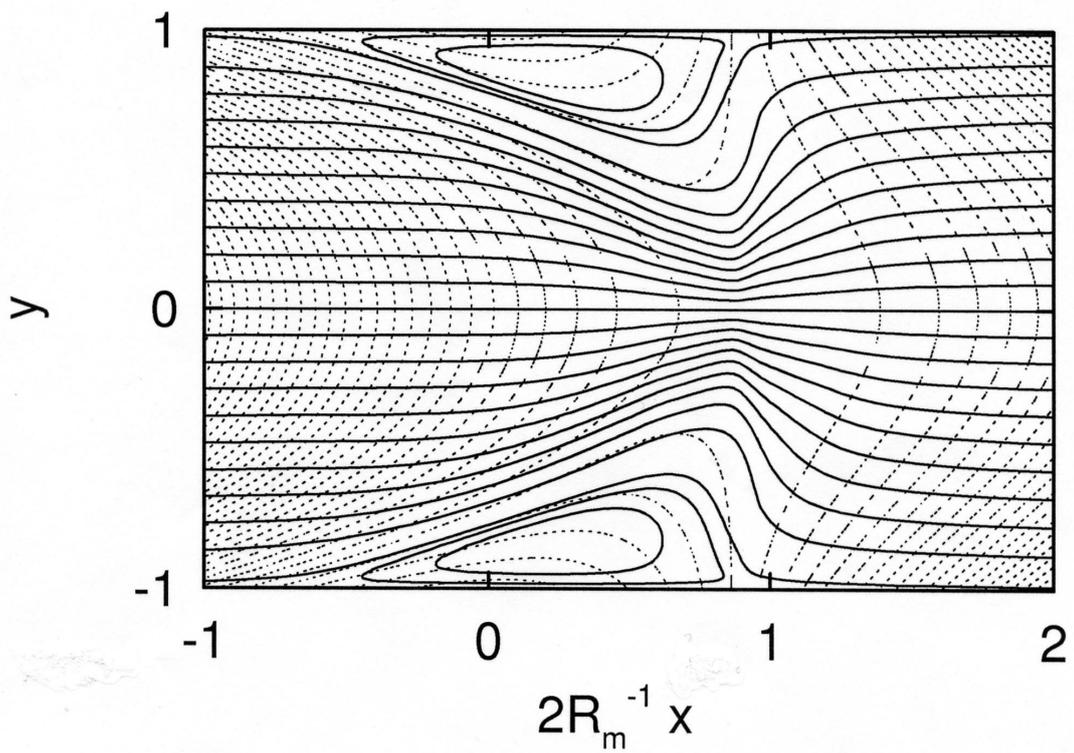


図 3.12: 非対称ノズル型節領域の流線 (実線) および磁束線 (破線), 数値解: $H_a = 1.0 \times 10^3$, $N = 1.0 \times 10^{12}$, $R_m = 0.1$, $\Lambda = 100$, $S = 1$.

環流れが生じ、2つの再循環領域に挟まれてノズル流れに似た加速流れが発生した。しかしながら、誘導磁束密度の効果によって反転磁束線は下流側にゆがみ $x = 0$ 断面に対する対称性を失った。これに対応して、流線も $x = 0$ 断面に対して非対称であった。このことより、このタイプの節領域を非対称ノズル型と呼んでいる。

第 4 章

慣性が支配的な流れ

$N \sim 1$ の場合、慣性の効果で流速の周期変動は抑制され、それに伴い主流領域と節領域の区別が無くなるのが、3.4 節の数値実験によって示された。この章では、さらに慣性が大きい $N \ll 1$ の場合について論じる。^{[31],[33]-[35]}

4.1 周期変動成分と非周期成分の分離

$N \ll 1$ の場合には、慣性による運動量流束は $O(N^{-1})$ の大きな値であるが、その勾配である慣性力は平均圧力勾配 (流体を駆動) と同様に $O(1)$ であると予想できる。この予想にしたがえば、流速 u は $O(1)$ であるが、慣性の効果により流速の周期変動は微小な値に抑制され

$$\partial u / \partial x = O(N), \quad v = O(N) \quad (4.1)$$

と評価できる。この評価が正しければ、流れは慣性に強く支配されているにもかかわらず、そのことは力の釣り合いに陽には現れない*。

*発電区間の流入・流出口付近やチャネルの断面積が流れ方向に変化する部分などがあれば $O(N^{-1})$ の強い慣性力が現れるので、慣性が支配的であることが容易に理解できる。

上述のような流速の周期変動が小さい流れを詳しく調べるには、流速および圧力を周期変動成分と非周期成分に分離して取り扱う必要がある:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U(y) + N\tilde{u}(x, y), & v(x, y) &= N\tilde{v}(x, y), \\ p(x, y) &= -x + P(y) + \tilde{p}(x, y), \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで、 \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{p} は周期が π の変動成分を表し、 x と y に関する $O(1)$ の関数と期待する; U および P は非周期成分を表し、 y に関する $O(1)$ の関数と期待する。式 (4.2) を式 (2.28)-(2.30) に代入し、非周期成分と周期変動成分に分離すると

$$N \left\langle \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right\rangle = 1 + \frac{1}{H_a^2} \frac{d^2 U}{dy^2} - 2 \langle j_z B_y \rangle, \quad (4.3)$$

$$\frac{N}{\Lambda^2} \left\langle \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right\rangle = -\frac{dP}{dy} + 2 \langle j_z B_x \rangle, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (4.5)$$

$$U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{dU}{dy} + N \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{N}{H_a^2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) - 2 \llbracket j_z B_y \rrbracket, \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\Lambda^2} U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{N}{\Lambda^2} \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{N}{H_a^2 \Lambda^2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + 2 \llbracket j_z B_x \rrbracket. \quad (4.7)$$

ここで、アングルは非周期成分、すなわち 1 波長にわたる平均値 $\langle f \rangle = (1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} f dx$ を表し、2 重の角括弧は周期変動成分 $\llbracket f \rrbracket = f - \langle f \rangle$ を表す。

一方、式 (2.31)-(2.34) の各項は周期 2π の周期関数であり、非周期成分は存在しない。特に、式 (2.32) は他の方程式から独立しており、解析的に厳密解を求めることができ

$$\phi = \sin x \frac{\Lambda \sinh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}}. \quad (4.8)$$

式 (4.2) および (4.8) を代入すると、式 (2.31), (2.33), (2.34) は以下のように表される:

$$R_m U \frac{\partial A_z}{\partial x} + N R_m \left(\tilde{u} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) + U \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} + N \left(\tilde{u} \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} - \tilde{v} \cos x \frac{\sinh(\Lambda^{-1}y)}{\Lambda \cosh \Lambda^{-1}} \right), \quad (4.9)$$

$$B_x = \cos x \frac{\sinh(\Lambda^{-1}y)}{\Lambda \cosh \Lambda^{-1}} + R_m \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} - R_m \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (4.10)$$

$$j_z = - \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right). \quad (4.11)$$

式 (4.3), (4.5)-(4.7), (4.9) は 5 つの変数 $U, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, A_z$ に対する閉じた方程式系であり、式 (4.10) および (4.11) が補助変数 B_x, B_y, j_z を与える。もし、 P の分布が必要ならば、これらの方程式の解を式 (4.4) に代入し y で積分すればよい。

非周期成分に対する式 (4.3) では、粘性項に微小係数 H_a^{-2} が掛かっている。このことは、流れに厚みが H_a^{-1} 程度の境界層が存在することを示唆する。一方、周期変動成分に対する式 (4.6) では、粘性項に微小係数 $H_a^{-2} N$ が掛かっている。このことは、流れに厚みが $H_a^{-1} N^{1/2}$ 程度の境界層が存在することを示唆する。したがって、流れ場は、粘性力が微小な“中心領域”, 非周期成分の粘性力が主要オーダーになる“MHD 境界層”, 周期変動成分の粘性力が主要オーダーになる“Sublayer”で構成される (図 4.1)。

4.2 漸近解

$H_a \gg 1, N \ll 1, R_m \ll 1, \Lambda \gg 1$ の場合について漸近解を求める。単一の微小パラメータ ϵ に対する通常の手法で漸近展開を得るために、 ϵ を以下のように定義する:

$$\epsilon = H_a^{-1} + N^{1/2} + R_m + \Lambda^{-1}. \quad (4.12)$$

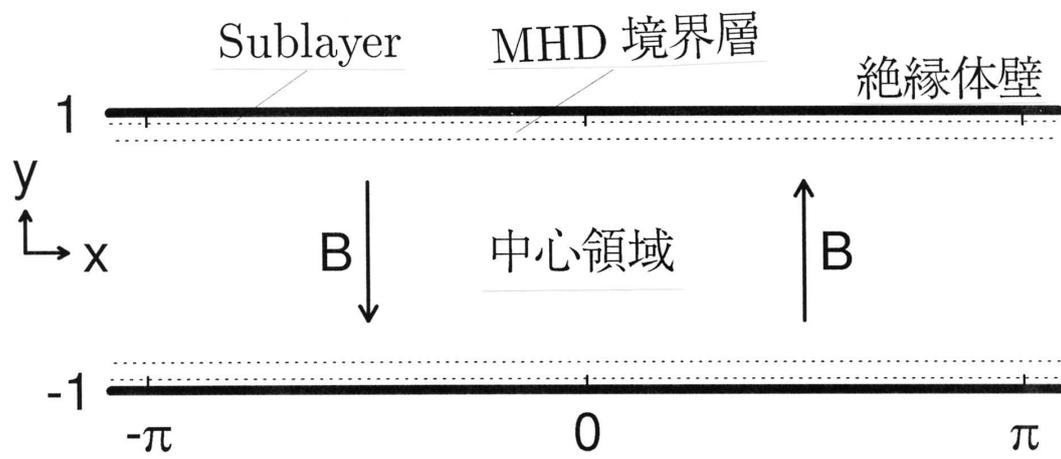


図 4.1: 慣性が支配的な流れ.

さらに、 $O(1)$ の定数

$$c_h = H_a^{-1}/\epsilon, \quad c_n = N^{1/2}/\epsilon, \quad c_r = R_m/\epsilon, \quad c_l = \Lambda^{-1}/\epsilon \quad (4.13)$$

を導入する。微小量 ϵ の定義より c_h, c_n, c_r , および c_l の和は 1 である。

$y = -1$ 付近に現れる MHD 境界層および Sublayer を考慮して、解を以下のような形に仮定する:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k U_k^{(c)}(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k U_k^{(b)}(\eta) + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k U_k^{(s)}(\zeta), \\ \tilde{u} &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k^{(c)}(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k^{(b)}(x, \eta) + \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k u_k^{(s)}(x, \zeta), \\ \tilde{v} &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k v_k^{(c)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k v_k^{(b)}(x, \eta) + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k v_k^{(s)}(x, \zeta), \\ \tilde{p} &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k p_k^{(c)}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k p_k^{(b)}(x, \eta) + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k p_k^{(s)}(x, \zeta), \\ A_z &= \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k A_k^{(c)}(x, y) + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k A_k^{(b)}(x, \eta) + \sum_{k=4}^{\infty} \epsilon^k A_k^{(s)}(x, \zeta). \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで、 η および ζ は引き伸ばされた座標で

$$\eta = c_h^{-1} \epsilon^{-1} (1 + y), \quad \zeta = c_h^{-1} c_n^{-1} \epsilon^{-2} S^{1/2} (1 + y) \quad (4.15)$$

で定義される。中心領域の解 $U_k^{(c)}$, MHD 境界層の補正 $U_k^{(b)}$, Sublayer の補正 $U_k^{(s)}$ はそれぞれ y, η, ζ に関する $O(1)$ の関数である。また、 $U_k^{(b)}$ および $U_k^{(s)}$ はそれぞれ $\eta \rightarrow \infty$ と $\zeta \rightarrow \infty$ のとき 0 の収束する。式 (4.14) で導入されたその他の変数も同様である。

式 (4.12)-(4.15) を (4.3), (4.5)-(4.7), (4.9)-(4.11) に代入し、初項から順番に解くと、以下のような漸近解を得る (付録 C を参照):

$$U = 1 - (1 + S)e^{-\eta} + \frac{1}{6} c_r^2 \epsilon^2 (1 - y^4) + c_l^2 \epsilon^2 (1 - y^2) + O(\epsilon^3), \quad (4.16)$$

$$\tilde{u} = \frac{1+S}{2S} [e^{-\eta} \sin(2x) - e^{-\zeta} \sin(2x + \zeta)] + O(\epsilon), \quad (4.17)$$

$$\tilde{v} = O(\epsilon), \quad (4.18)$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} \sin(2x) + O(\epsilon), \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} A_z = & \frac{1}{2}(1-y^2) \sin x - \frac{1}{24} c_r \epsilon (5-y^2)(1-y^2) \cos x \\ & - \frac{1}{144} c_r^2 \epsilon^2 (1-y^2)^3 \sin x - c_h^2 \epsilon^2 (1+S)(1-e^{-\eta}) \sin x + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.20)$$

もとのパラメータともとの座標 y を使うと、磁束密度の y 成分は次のように表される:

$$\begin{aligned} B_y = & \sin x - \frac{1}{2} R_m (1-y^2) \cos x \\ & - \left[\frac{1}{24} R_m^2 (5-y^2)(1-y^2) + \frac{1}{2} \Lambda^{-2} (1-y^2) \right] \sin x + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (4.21)$$

右辺の第2項は、誘導磁場の効果によりチャンネル内では正弦波磁場の位相が下流側にずれることを示す (図 4.2)。第3項は、誘導磁場の効果および外部印加磁場の2次元性の効果によりチャンネル内では正弦波磁場の振幅が負の補正を受けることを示す。この補正は、磁束線の一部が反転磁束線になることにより、横断磁束線の本数が減ることに対応している。

$y = -1$ 付近の境界層だけでなく $y = 1$ にも同様の境界層が存在することを考慮すると、流速 u は以下の式で表される:

$$\begin{aligned} u = & 1 + \left[\frac{1}{6} R_m^2 (1-y^4) + \Lambda^{-2} (1-y^2) \right] - (1+S) \frac{\cosh(H_a y)}{\cosh H_a} \\ & + \frac{N(1+S)}{2S} \frac{\cosh(H_a y)}{\cosh H_a} \sin(2x) \\ & + \frac{N(1+S)}{2S} \left[\frac{\sinh(R_e^{1/2} y)}{\sinh R_e^{1/2}} \sin(R_e^{1/2} y) \cos(2x + R_e^{1/2}) \right. \\ & \left. - \frac{\cosh(R_e^{1/2} y)}{\cosh R_e^{1/2}} \cos(R_e^{1/2} y) \sin(2x + R_e^{1/2}) \right] + O(\epsilon^3), \end{aligned} \quad (4.22)$$

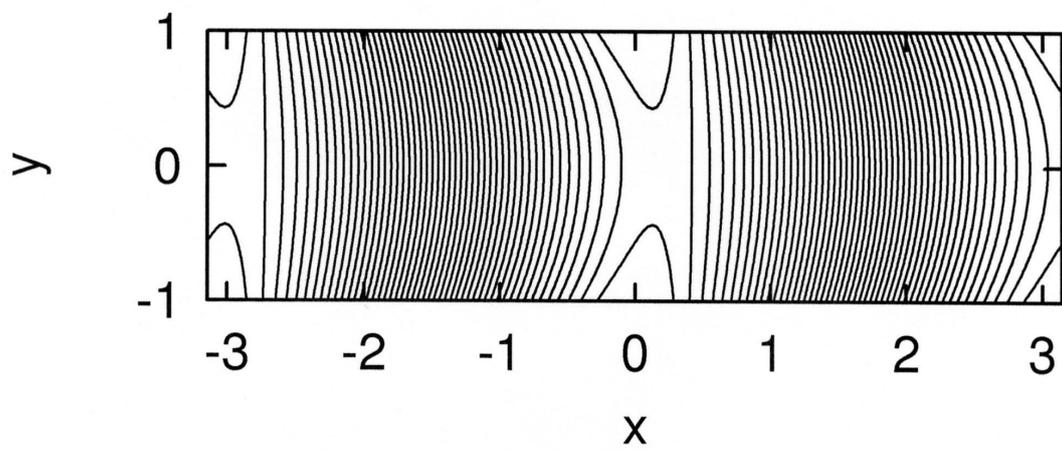


図 4.2: 慣性が支配的な場合の磁束線 (漸近解): $R_m = 0.3$, $\Lambda = 3.5$.

ここで、式中の R_e は

$$R_e = H_a^2 N^{-1} S \quad (4.23)$$

で定義されるパラメータで、Sublayer を特徴付けるレイノルズ数と解釈できる。

式 (4.22) より、流速の周期変動成分は $O(N)$ の微小な値という仮定に矛盾が無いことが確かめられた。特に、中心領域では流速の周期変動はさらに高次の微小量となる。

右辺の第 2 項は、誘導磁場の効果および外部印加磁場の 2 次元性の効果により流速の非周期成分が正の補正を受けることを示す (図 4.3)。これは、チャンネル内で正弦波磁場の振幅が負の補正を受けたことに対応している。流体を駆動する圧力勾配は R_m や Λ に依存しないので、これに対抗するローレンツ力を発生させるには上述の流速の補正が必要とされる。このような流速の補正は、正弦波磁場の場合に特有のもので、ハルトマン流れ (一様磁場の場合) には見られない。

一方、流速の周期変動成分に関しては、誘導磁場の効果や外部印加磁場の 2 次元性の効果は無視できる。また、境界層内部では、周期変動成分のみならず非周期成分についても誘導磁場の効果や外部印加磁場の 2 次元性の効果は無視できる。

境界層は多重構造である。右辺第 3 項は MHD 境界層の非周期成分を表す。この成分はローレンツ力と粘性力の釣り合いで分布が決定する。この成分の分布はハルトマン流れの境界層と同様で、境界層の厚さは H_a^{-1} 程度である。第 4 項は MHD 境界層の周期変動成分を表す。この成分も境界層の厚さは H_a^{-1} 程度であるが、分布はローレンツ力と慣性力の釣り合いで決定される。このような境界層は他に例が見あたらない。第 5 項は Sublayer を表し、周期変動成分のみが存在する。Sublayer の厚さは $R_e^{-1/2} = H_a^{-1} N^{1/2} S^{-1/2}$ 程度である。この成分の分布は、粘性力と慣性力の釣り合いで決定しており、ローレンツ力は関与しない。力学的には、振動平板上に発達する通常の (導電性でない) 粘性流体の境界層^[38] と相似である[†]。MHD 境界層の周期変動成分および Sublayer の存在はこ

[†]この問題の x 微分を時間微分に読みかえる必要がある。

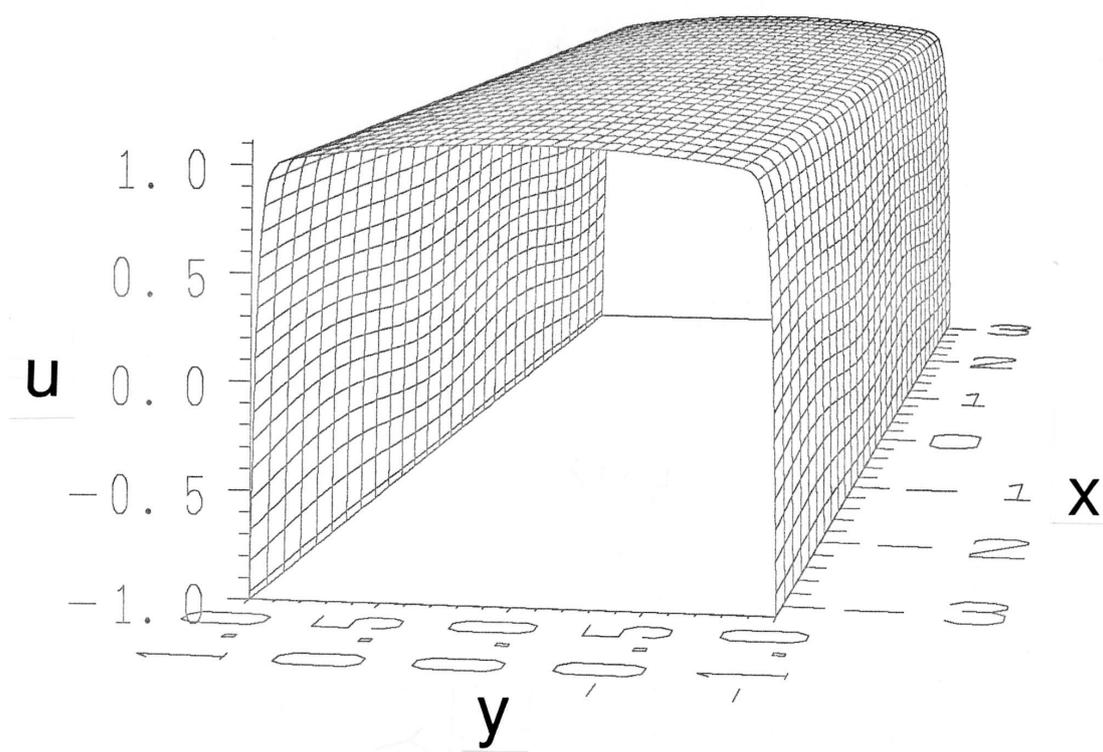


図 4.3: 慣性が支配的な流れの流速 u の分布 (漸近解): $H_a = 50$, $N = 0.1$, $R_m = 0.1$, $\Lambda = 3$, $S = 1$.

れまで知られていなかった。これらの流速成分は $O(N)$ の微小量であるが、これらによって発生する慣性力および粘性力は主要オーダーであり無視できない。

流速の非周期成分は、あらかじめ平行流を仮定して行われた解析結果^{[18]-[25]}と一致する。また、第5章で示すように、慣性が支配的な流れの場合には流速の周期変動成分はエネルギーの変換にほとんど寄与しない。したがって、あらかじめ平行流を仮定した従来の理論的研究の適用限界は以下のように与えられる：

$$N \ll 1. \tag{4.24}$$

上述の漸近解は、従来の解に高次の補正を与えたものと解釈できる。

第 5 章

エネルギーの損失

5.1 エネルギー保存

チャンネルの上流-下流間の圧力差によってなされる力学的仕事は固定子内で電気エネルギーに変換されるが、エネルギーの一部はチャンネル内で熱になり失われる:

$$P'_{in} = P'_{liq} + P'_{fric} + P'_{gen}. \quad (5.1)$$

ここで、 P'_{in} , P'_{liq} , P'_{fric} , P'_{gen} はそれぞれ体積平均の力学的入力, 流体中でのジュール熱, 流体の粘性散逸, 固定子内で発生する電力 (固定子の面積平均の発生電力を h で割った値) を表す (有次元形)。さらに、電力 P'_{gen} の一部は固定子巻線の内部抵抗によって熱になり失われる。固定子巻線損失を P'_{wind} , システム外部への電氣的出力を P'_{out} で表すと

$$P'_{gen} = P'_{wind} + P'_{out}. \quad (5.2)$$

チャンネル内の流れ場およびチャンネル内外の電磁場の正しい解が与えられている場合、等式 (5.1), (5.2) は自動的に満足される。

P'_{in} , P'_{liq} , P'_{fric} はそれぞれ次の式によって計算できる:

$$P'_{in} = \frac{1}{\lambda h} \int_0^h (u' + U_s) p_0 dy', \quad (5.3)$$

$$P'_{\text{liq}} = \frac{1}{\lambda h} \int_0^h \int_0^\lambda \frac{j_z'^2}{\sigma_L} dx' dy', \quad (5.4)$$

$$P'_{\text{fric}} = \frac{1}{\lambda h} \int_0^h \int_0^\lambda 2\eta_L \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'} \right)^2 \right] dx' dy'. \quad (5.5)$$

5.2 固定子

$P'_{\text{wind}}, P'_{\text{out}}$ を求めるためにはチャンネルの上下に置かれた固定子を含めたシステムで考える必要がある。図 5.1 に固定子の配置を示す。議論の複雑化を避けるために、固定子巻線を厚さが t_{cs} の電流シートで理想化する。電流シートは非等方で、 z' 方向の導電率は σ_{cs} , x' 方向の導電率は 0 と考える。絶縁体壁および電流シートは充分薄く、その外部には透磁率 μ が無限大の理想的な鉄心が置かれているものとする。

電流シート内では z' 方向に固定子電流が流れる。その電流密度 j'_{cs} を求めるために、図 5.1 のような経路に沿ってアンペールの法則を適用する：

$$\begin{aligned} \int t_{\text{cs}} j'_{\text{cs}} dx' &= \oint \frac{\mathbf{B}'}{\mu} \cdot d\mathbf{s}' \\ &= \left[\int \frac{B'_x}{\mu_L} dx' \right]_{y'=h-0}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

積分経路は任意に選ぶことができるので

$$\begin{aligned} t_{\text{cs}} j'_{\text{cs}} &= (B'_x / \mu_L)_{y'=h-0} \\ &= \frac{1}{\mu_L} \left[B_0 \tanh(2\pi h / \lambda) \cos(2\pi x' / \lambda) + \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} \right)_{y'=h-0} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

電流シート内の電場の z' 成分 E'_{cs} はオームの法則より以下のような 2 つの成分の和で表される：

$$E'_{\text{cs}} = E'_0 + E'_1. \quad (5.8)$$

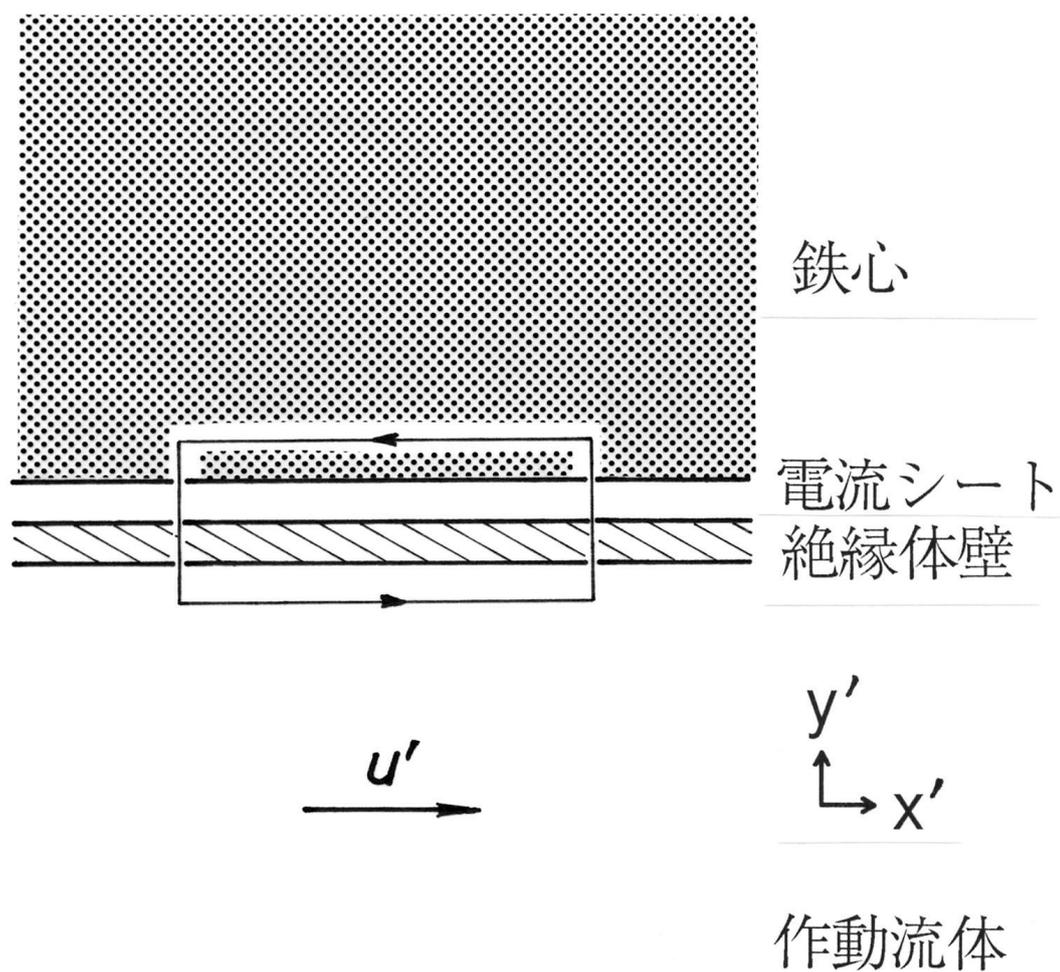


図 5.1: 固定子の配置.

ここで

$$\begin{aligned} E'_0 &= -(u' B'_y)_{y'=h} \\ &= U_s B_0 \sin(2\pi x'/\lambda), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} E'_1 &= j'_{cs}/\sigma_{cs} \\ &= \frac{1}{t_{cs}\sigma_{cs}\mu_L} \left[B_0 \tanh(2\pi h/\lambda) \cos(2\pi x'/\lambda) + \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} \right)_{y'=h-0} \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

j'_{cs} および E'_{cs} を使って P'_{wind} , P'_{out} , P'_{gen} を計算することができる。 P'_{wind} は

$$\begin{aligned} P'_{\text{wind}} &= \frac{1}{\lambda h} \int_0^\lambda \frac{(t_{cs} j'_{cs})^2}{t_{cs} \sigma_{cs}} dx' \\ &= \frac{B_0^2 \tanh^2(2\pi h/\lambda)}{t_{cs} \sigma_{cs} \mu_L^2 \lambda h} + \frac{1}{t_{cs} \sigma_{cs} \mu_L^2 \lambda h} \left[\int_0^\lambda \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} \right)^2 dx' \right]_{y'=h-0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

で計算できる。また、 P'_{out} は

$$\begin{aligned} P'_{\text{out}} &= \frac{1}{\lambda h} \int_0^\lambda (-t_{cs} j'_{cs} E'_{cs}) dx' \\ &= \frac{1}{\lambda h} \int_0^\lambda (-t_{cs} j'_{cs} E'_0) dx' - \frac{1}{\lambda h} \int_0^\lambda (t_{cs} j'_{cs} E'_1) dx' \end{aligned} \quad (5.12)$$

と表すことができる。右辺第2項は $-P'_{\text{wind}}$ と一致するので、式(5.2)より

$$\begin{aligned} P'_{\text{gen}} &= \frac{1}{\lambda h} \int_0^\lambda (-t_{cs} j'_{cs} E'_0) dx' \\ &= -\frac{U_s B_0}{\mu_L \lambda h} \left[\int_0^\lambda \left(\frac{\partial A'_z}{\partial y'} \right) \sin(2\pi x'/\lambda) dx' \right]_{y'=h-0}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

さらに、アンペールの法則を使って式変形を行うと、 P'_{gen} は次の式で計算できる(付録 D を参照):

$$P'_{\text{gen}} = \frac{U_s B_0}{\lambda h} \int_0^h \int_0^\lambda \left[j'_z \sin(2\pi x'/\lambda) \frac{\cosh(2\pi y'/\lambda)}{\cosh(2\pi h/\lambda)} \right] dx' dy'. \quad (5.14)$$

5.3 慣性が支配的な流れ

第 4 章で得られた慣性が支配的な流れに対する無次元形の解を使って誘導型 MHD 発電機の性能を評価するために、体積平均の力学的入力, 発生電力, 各種損失, 電気的出力を

$$P' = \sigma_L U_0^2 (B_0/\sqrt{2})^2 P = (U_0 p_0/\lambda) P. \quad (5.15)$$

で無次元化する。力学的入力, 発生電力, 各種損失, 電気的出力は無次元形で以下のように表される:

$$P_{\text{in}} = \int_0^1 (u + S) dy, \quad (5.16)$$

$$P_{\text{gen}} = \frac{S}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left[j_z \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} \right] dx dy, \quad (5.17)$$

$$P_{\text{liq}} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} j_z^2 dx dy, \quad (5.18)$$

$$P_{\text{fric}} = \frac{1}{H_a^2 \pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5.19)$$

$$P_{\text{wind}} = \frac{1}{C_{\text{cs}}} \left\{ \frac{\tanh^2 \Lambda^{-2}}{R_m^2 \Lambda^2} + \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 dx \right]_{y=1-0} \right\}, \quad (5.20)$$

$$P_{\text{out}} = P_{\text{gen}} - P_{\text{wind}}. \quad (5.21)$$

ここで、 $C_{\text{cs}} = \sigma_{\text{cs}} t_{\text{cs}} / (\sigma_L h)$ は新たに導入された無次元パラメータで、固定子巻線損失を特徴づける。この論文では壁面上の磁束密度の法線方向成分が既知であると考えたので、チャンネル内の磁場および流れ場は C_{cs} に依存しない*。

*固定子の電圧あるいは電流を制御して実験を行う場合、壁面上の磁束密度の法線成分を介してチャンネル内の流れ場も C_{cs} に依存することに注意を要する。

第4章の漸近解を式(5.16)-(5.21)に代入すると以下のように力学的入力, 発生電力, 各種損失, 電氣的出力を得る:

$$P_{\text{in}} = (1 + S) - (1 + S)H_a^{-1} + \frac{2}{15}R_m^2 + \frac{2}{3}\Lambda^{-2} + O(\epsilon^3), \quad (5.22)$$

$$P_{\text{gen}} = S - S(1 + S)H_a^{-1} + O(\epsilon^3), \quad (5.23)$$

$$P_{\text{liq}} = 1 - \frac{1}{2}(1 + S)(3 - S)H_a^{-1} + \frac{2}{15}R_m^2 + \frac{2}{3}\Lambda^{-2} + O(\epsilon^3), \quad (5.24)$$

$$P_{\text{fric}} = \frac{1}{2}(1 + S)^2H_a^{-1} + O(\epsilon^3), \quad (5.25)$$

$$P_{\text{wind}} = C_{\text{cs}}^{-1} \left[1 - 2(1 + S)H_a^{-1} + (1 + S)^2H_a^{-2} + \frac{1}{9}R_m^2 + R_m^{-2}\Lambda^{-4} \right] + O(\epsilon^3), \quad (5.26)$$

$$P_{\text{out}} = S - S(1 + S)H_a^{-1} - C_{\text{cs}}^{-1} \left[1 - 2(1 + S)H_a^{-1} + (1 + S)^2H_a^{-2} + \frac{1}{9}R_m^2 + R_m^{-2}\Lambda^{-4} \right] + O(\epsilon^3). \quad (5.27)$$

ここで、 $\epsilon = H_a^{-1} + N^{1/2} + R_m + \Lambda^{-1}$ 。

誘導磁場の効果あるいは外部印加磁場の2次元性の効果によって P_{in} は正の補正(式(5.22)の右辺第3項および第4項)を受ける。これは、一定圧力勾配のもとでの流量が、正の補正を受けることに対応する。しかし、この補正分は流体中でジュール熱となり浪費される(式(5.24)の右辺第3項および第4項)。この誘導磁場の効果あるいは外部印加磁場の2次元性の効果による損失については、第4章であらかじめ仮定した

$$R_m^2 \ll 1, \quad \Lambda^{-2} \ll 1 \quad (5.28)$$

が損失を十分に小さく抑えるための充分条件を与える。一方、式(5.24)の右辺第1項は、発電機を運転する上で避けることができない損失(流体中のジュール熱)を表す。

式 (5.22)-(5.27) 中で H_a^{-1} が現れる項は絶縁体壁境界層の影響を表す項である。また、 C_{cs}^{-1} が現れる項は固定子巻線内での損失を表す項である。したがって、境界層内および固定子巻線内での損失を十分に小さく抑えためには、以下の条件が満足されなければならない:

$$C_{cs}^{-1}(1 + R_m^{-2}\Lambda^{-4}) \ll S \ll H_a. \quad (5.29)$$

特に、 R_m が極端に小さい場合、固定子巻線損失 P_{wind} が電氣的出力 P_{out} に致命的な影響を与える可能性があるので注意を要する。

式 (5.28), (5.29) の条件が満足されているとき、システムは発電機として働き、その電氣効率は以下の式で与えられる:

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} \simeq \frac{S}{1+S}. \quad (5.30)$$

一方、 $S < -1$ として同様の考察を行えば、システムがポンプとして効率よく働くための条件および効率を求めることができる。

この節で得られた結果には、一様流を仮定した解析^{[4]-[14]} および平行流を仮定した解析^{[18]-[25]} の結果に反するものは含まれておらず、それらに詳しい補正項を付け加えた形で力学的入力, 発生電力, 各種損失, 電氣的出力が得られている。

5.4 節領域のある流れ

まず、3-1 節で論じた局所ハルトマン流れについて体積平均の力学的入力, 発生電力, 各種損失, 電氣的出力を求める。

3-1 節で求めた解析解を式 (5.16)-(5.21) に代入し、 $N \rightarrow \infty$, $R_m \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$ としていくつかの項を無視すると

$$P_{in} = Q + S, \quad (5.31)$$

$$P_{gen} = QS, \quad (5.32)$$

$$P_{\text{liq}} = Q^2 + \frac{1}{2}(Q + S)(1 - Q) - \frac{1}{2}(Q + S)^2 H_a^{-2} r, \quad (5.33)$$

$$P_{\text{fric}} = \frac{1}{2}(Q + S)(1 - Q) + \frac{1}{2}(Q + S)^2 H_a^{-2} r, \quad (5.34)$$

$$P_{\text{wind}} = C_{\text{cs}}[Q^2 + R_m^{-2} \Lambda^{-4}], \quad (5.35)$$

$$P_{\text{out}} = QS - C_{\text{cs}}[Q^2 + R_m^{-2} \Lambda^{-4}]. \quad (5.36)$$

ただし、 $R_m^{-2} \Lambda^{-4}$ は不定なのでそのまま式中に残した； r は

$$r = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H_l^2 \sinh^2 H_l - H_l^4}{(H_l \cosh H_l - \sinh H_l)^2} dx \quad (5.37)$$

で与えられる数である。 $H_a \gg 1$ の場合を考えると、 $Q = 1 - (2\sqrt{2}/\pi)(1 + S)H_a^{-1} + O(H_a^{-2})$ 、 $r = 1 + O(H_a^{-1})$ であることより、以下のように力学的入力、発生電力、各種損失、電氣的出力を得る：

$$P_{\text{in}} = 1 + S - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (1 + S)H_a^{-1}, \quad (5.38)$$

$$P_{\text{gen}} = S - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} S(1 + S)H_a^{-1}, \quad (5.39)$$

$$P_{\text{liq}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} (1 + S)(3 - S)H_a^{-1}, \quad (5.40)$$

$$P_{\text{fric}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} (1 + S)^2 H_a^{-1}, \quad (5.41)$$

$$P_{\text{wind}} = C_{\text{cs}} \left[1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} (1 + S)H_a^{-1} + R_m^{-2} \Lambda^{-4} \right], \quad (5.42)$$

$$P_{\text{out}} = S - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} S(1 + S)H_a^{-1} - C_{\text{cs}} \left[1 - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} (1 + S)H_a^{-1} + R_m^{-2} \Lambda^{-4} \right]. \quad (5.43)$$

ただし、上式では $O(H_a^{-2})$ の微小項を省略した。

局所ハルトマン流れは慣性が支配的な流れと流速分布や力の釣り合いが著しく異なるにもかかわらず、式 (5.38)-(5.43) は慣性が支配的な場合の式 (5.22)-(5.27) で $R_m \rightarrow 0$, $\Lambda \rightarrow \infty$ としたものと非常に近い値となる。境界層が関係する $O(H_a^{-1})$ の項の係数がわずかに違う (局所ハルトマン流れの方に $2\sqrt{2}/\pi \simeq 0.9$ が掛かる) が、定性的にはなんら差異が認められない。

上述の結果は、節領域はエネルギー変換にほとんど寄与しておらず、もっぱら主流領域と主流領域の境界層がエネルギーを変換していることを示す。何れのタイプの節領域が現れる場合でも、主流領域および主流領域の境界層は局所ハルトマン流れに良く一致したことを考慮すると、式 (5.38)-(5.43) は局所ハルトマン流れだけでなく、節領域のある流れ一般に適用できると考えられる。ただし、式 (5.22)-(5.27) と異なり式 (5.38)-(5.43) の誤差は $O(\epsilon^2)$ である。

5.5 議論

前節までの結果より、流体中でのジュール熱, 絶縁体壁境界層での損失, 固定子巻線内でのジュール熱を十分に小さくするための条件が明らかになった。これまでに作られた誘導型 MHD 発電機のほとんどはこれらの条件を満足している。そこで、この節ではこの論文で取り扱わなかった導体側壁境界層および流体中の乱れについて考察し、それらが引き起こす損失について議論する。

5.5.1 導体側壁境界層

まず、導体側壁が完全導体の場合について考える。

流体および導体側壁中の電流の様子を図 5.2 に示す。この場合には導体側壁は等電位面なので、流体中の電流密度の j'_x, j'_y は微小である。したがって、電荷の保存則より、電流は大きさや向きをほとんど変えずに導体側壁境界層横切り、導体側壁に垂直に流れ込む。オームの法則より、導体側壁境界層内では $u'B'_y$ の

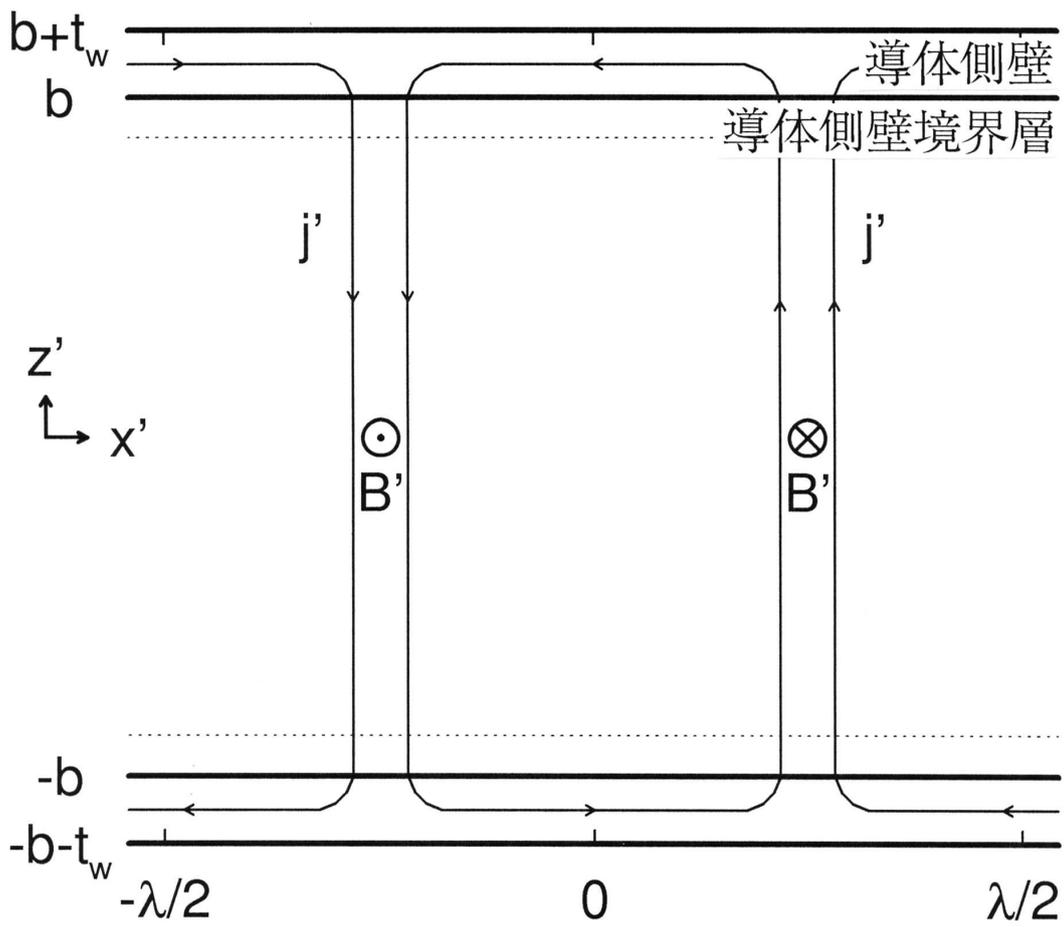


図 5.2: 導体側壁が完全導体の場合の電流の様子.

欠損を補うように電場 E'_z が発生すると予想できる。

このような電流および電場の分布は、同様のダクトに一様磁場を印加した場合のそれとよく似ている。磁場に平行な導体側壁 ($z' \pm b$) が完全導体で、磁場に垂直な壁面 ($y' \pm h$) が絶縁体のダクトに一様磁場を印加した場合の問題については、Hunt & Stewartson^[39] によって漸近解が求められている。彼らは、ハルトマン数 H_a が 1 より十分に大きい場合について (i) 主流の流速は導体側壁境界層と無関係に決定されること, (ii) 導体側壁境界層の厚さは $H_a^{-1/2}h$ 程度であること, (iii) 導体側壁境界層内の流速分布は変曲点を持たない単調増加関数で表されること, (iv) 流速分布は導体側壁に接続される外部電気回路の影響を受けないこと, などを示した。彼等の解析結果は、後に実験^[40] および数値実験^[41] によって検証されている。

正弦波磁場の場合に、Hunt 等の一様磁場に対する解析結果と全く異なった導体側壁境界層の流速分布が現れることは考えにくい[†]。もし、両者が同様であるなら、導体側壁境界層でのエネルギー損失が誘導型 MHD 発電機の性能に与える影響は小さい。また、このとき上述の (i) は 2 次元解析の有効性を保証する根拠を与える。

次に、導体側壁の導電率比 $C_{sw} = \sigma_{sw}t_{sw}/(\sigma_L h)$ が有限値の場合について考える。ここで、 σ_{sw} および t_{sw} はそれぞれ導体側壁の導電率と厚さを表す。

流体および導体側壁中の電流および電位の様子を図 5.3 に示す。この場合には導体側壁中でオームの法則にしたがう電位降下が発生するので、導体側壁は等電位面にはならない。この論文で調べた 2 次元領域 (導体側壁境界層以外の部分) が等電位であったことを考慮すると、導体側壁境界層内で非常に大きな電場 E'_z が発生する可能性がある。

このような電流および電場の分布は、全ての壁面が導体のダクトに一様磁場を印加した場合のそれと似ている。全ての壁面が導体のダクトに一様磁場を印加した場合については Hunt^[42] によって無限級数の形で解析解が求められており、

[†] 正弦波磁場の場合の導体側壁境界層の性質は無次元波長 Λ に依存すると予想されるので、定性的に一致していても定量的には修正が必要となる可能性がある。しかし、この節では議論の複雑化を避けるために、このことには深く立ち入らない。

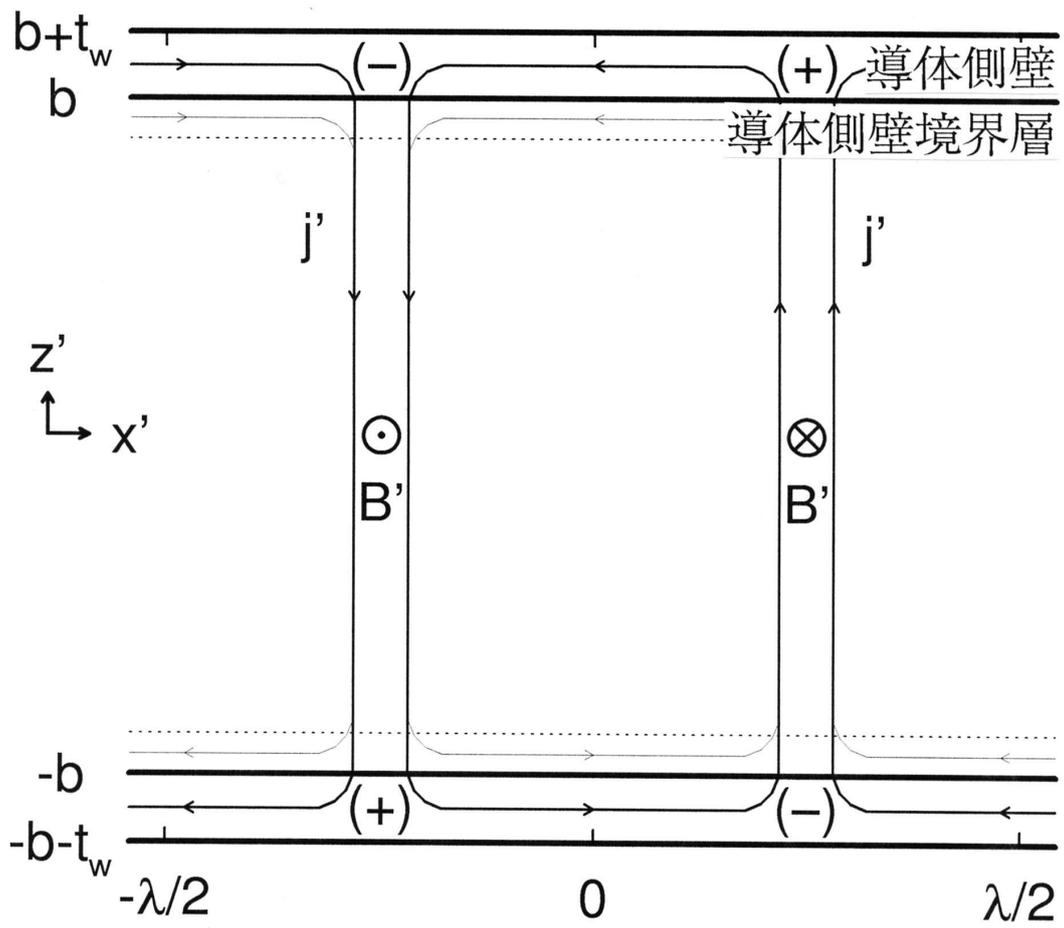


図 5.3: 導体側壁の導電率比 C_{sw} が有限値の場合の電流および電位の様子.

また、Reed & Picologlou^[43] によって見通しの良い考察が示されている。Reed 等は $H_a^{-1/2} \ll C_{sw} \ll H_a^{1/2}$ の場合について (i) 導体側壁境界層の厚さは $H_a^{-1/2}h$ 程度であること, (ii) 導体側壁境界層内の電場は j'_z/σ_L に比べ $C_{sw}^{-1}H_a^{1/2}$ 程度に大きいこと, (iii) 導体側壁境界層内の流速は主流の流速に比べ $C_{sw}^{-1}H_a^{1/2}$ 程度に大きいことなどを示した。

この論文で調べている正弦波磁場の場合の導体側壁境界層が、Reed 等が考察した一様磁場の場合と定性的に一致するならば、導体側壁境界層では 2 次元的な領域 (導体側壁境界層以外の部分) の流量に比べ $C_{sw}^{-1}b^{-1}h$ 程度の流量が流れる。この時、導体側壁境界層に投入される力学的エネルギーは発電には寄与せずに導体側壁で (境界層内ではないことに注意) ジュール熱になって失われる。したがって、誘導型 MHD 発電機の導体側壁および導体側壁境界層でのエネルギー損失を十分に小さく抑えるための条件は次のように予想できる:

$$C_{sw} \gg h/b. \quad (5.44)$$

ただし、上述の議論では無次元波長 Λ の影響を考慮していないので、上式は必要条件である。

5.5.2 流れの安定性および乱流

まず、第 4 章で調べた慣性が支配的な 2 次元流れの臨界レイノルズ数について考える。

慣性が支配的な流れについての線形安定性問題を考える場合には

- (i) 乱れの無い流れは指数的な流速分布の境界層をもつ,
- (ii) 乱れの無い流れは、厳密には平行流ではない,
- (iii) 乱れは磁場の影響を直接受ける,

の 3 つの特徴に注意する必要がある。

一様な吸い込みがある平板上の境界層 (MHD でない通常の粘性流体) は上述の (i) と (ii) の特徴を合わせもつ流れであり、詳しく調べられている。壁面に平行な流速成分 u' の分布は指数的になるが、吸い込み v' が存在するので、流れは厳密には平行流ではない。この流れの線形安定性は Hughes & Reid^[44] によって研究され、その後も様々な手法で臨界レイノルズ数が求められた。^{[45],[46]} これらの論文では、上述の (ii) の特徴は臨界レイノルズ数を決定する主要な要因ではないことが指摘されている。

一方、 $H_a \gg 1$ の場合のハルトマン流れは上述の (i) と (iii) の特徴を合わせもつ流れであり、これも詳しく調べられている。ハルトマン流れの線形安定性を調べた Lock^[47] の論文では、上述の (iii) の特徴は臨界レイノルズ数を決定する主要な要因ではないことが指摘されている。

これらの指摘より、この論文の第 4 章で調べた慣性が支配的な流れについても、上述の (ii) および (iii) の特徴は臨界レイノルズ数を決定する主要な要因ではなく、(i) の特徴だけが主要な要因であると類推できる。この予想にしたがえば、境界層の厚さ δ と遠方の流速 U_∞ を使って定義したレイノルズ数[‡] $R_e^* = \rho_L U_\infty \delta / \eta_L$ の臨界値は 3 つの問題 (この論文の慣性が支配的な流れ、一様吸い込みのある流れ、ハルトマン流れ) でほぼ同じ値になる。事実、Hughes & Reid および Lock の結果はほぼ一致しており、臨界レイノルズ数

$$R_{e \text{ crit}}^* \simeq 50\,000 \quad (5.45)$$

が得られている。以上のような考察から、第 4 章で調べた慣性が支配的な流れが線形安定であるための条件は以下のように予想できる:

$$R_e^* = \frac{H_a \Lambda (1 + S)}{N} < 50\,000. \quad (5.46)$$

この条件は多くの誘導型 MHD 発電機で満足されており、この論文でなされた層流の仮定の有効性を保証する根拠となる。

[‡] R_e^* は式 (4.23) のレイノルズ数 R_e とは定義が異なる。両者は $R_e^* = H_a^{-1} \Lambda (1 + S) S^{-1} R_e$ で関係づけられる。

誘導型 MHD 発電機については乱れを測定した実験が見あらず、流れの安定性は実験的に確かめられていない。一方、一様磁場のかかった矩形ダクト内の MHD 流れについては多くの実験が行われており、圧力、流速分布、流速の乱れなどの測定結果が得られている。^{[48]-[52]} これらの実験では層流の理論からのずれが $R_e^* \sim 250$ 程度の比較的低いレイノルズ数でも観測されており、実験の結果と線形安定性理論の結果との間には大きな隔たりがある。

一様磁場の場合の流速の乱れの原因に関する Gel'fgat 等^[51] の考察を表 5.1 に示す。この考察は多くの実験結果を矛盾無く説明する。

表 5.1 の内、 $R_e^* < 250$ の場合には、圧力係数などのマクロ量については、乱れが存在するにもかかわらず実験結果と層流を仮定した理論の結果とが良く一致することが知られている。^{[48]-[50]} また、Gel'fgat 等の考察との対応関係は明らかではないが、絶縁体壁と垂直に強い横断磁場が印加された場合、ある波数範囲の乱れが 2 次元的 (乱れの渦度が磁場に平行) になることが指摘されている。^[53] これらのことは、たとえ流速に乱れが存在しても、流速の時間平均は層流の場合の流速分布に一致する可能性があることを示唆する。

正弦波磁場の場合の状況が、上述のような一様磁場の場合の状況と全く異なっていることは考えにくい。しかし、仮に両者の状況が同じであったとしても、これまでの知識だけで乱れと誘導型 MHD 発電機のエネルギー損失との関係を定量的に評価するのは難しい。誘導型 MHD 発電機についても、乱れの測定などを含むより詳細な実験が期待される。

表 5.1: 一様磁場の場合の流速の乱れ原因に関する Gel'fgat, Kit, and Tsinober (Magnitnaya Gidrodinamika, 1971) の考察.

R_e^*	~ 125	$125 \sim 250$	$250 \sim 50\,000$	$50\,000 \sim$
乱れの原因	磁場印加部分 よりも上流	導体側壁境界層 の不安定	絶縁体壁境界層 の非線形不安定	絶縁体壁境界層 の線形不安定

第 6 章

結び

誘導型 MHD 発電機の内部の液体金属流れ (単相) を調べた。解析は移動正弦波磁場とともに移動する座標系で行った。正弦波磁場の波長に比べ十分に長い発電ダクトに関して、発電区間の流入・流出口付近の影響および導体側壁境界層の影響を無視し、2 次元的な磁場および流れ場の層流定常解を求めた。

流れの性質は、節領域のある流れと慣性が支配的な流れとで著しく異なることを見いだした。

節領域のある流れは相互作用パラメータが $N \gg 1$ のときに現れる。節領域は、半波長ごとの磁場の向きが変わる断面付近に存在し、そこでは速度勾配が極めて大きな値になる。節領域の流れは、この領域での力の釣り合いにより 4 種類に分類できる: 粘性型, 慣性型, 対称ノズル型, 非対称ノズル型。各型の節領域流れが現れる条件を、ハルトマン数 H_a , 相互作用パラメータ N , 磁気レイノルズ数 R_m , 無次元波長 Λ を使って示した (表 3.1)。一方、主流領域および主流領域の境界層は良い近似で局所ハルトマン流れ (3.10) に一致することを確認した。

慣性が支配的な流れは相互作用パラメータが $N \ll 1$ のときに現れる。この場合、流速の周期変動成分は N 程度の微量であり、流れは平行流に近い。しかし、流速の周期変動成分により生じる慣性力は主要オーダーなので無視できない。流速の非周期成分はハルトマン流れにほぼ一致するが、誘導磁場の効果および外部印加磁場の 2 次元性の効果によりわずかに補正される。境界層は多重構

造で、Sublayer が存在する。

流れ場および磁場の解析結果を使って誘導型 MHD 発電機のエネルギー損失について議論した。

節領域のある流れのエネルギー損失を考える場合には、主流領域および主流領域の境界層のみを考えれば充分である。節領域はエネルギー変換にほとんど寄与しない。

節領域のある流れおよび慣性が支配的な流れのいずれの場合も、発電電力および各種の損失は、一様流を仮定した解析の結果にわずかな補正を加えた形で得られた。流体中でのジュール熱, 絶縁体壁境界層での粘性散逸, 固定子巻線内でのジュール熱を十分に小さく抑えるための条件は式 (5.28), (5.29) で与えられる。これらの条件はほとんどの誘導型 MHD 発電機で満足されている。

謝辞

京都大学工学部航空工学教室の森岡茂樹教授には、この問題に取り組むきっかけを与えて頂き、その後も研究に対して終始ご指導を頂きました。この場を借りて深く感謝の意を表します。

京都大学工学部航空工学教室の石井隆次助教授からは、特に座標変換や数値解法について有益なご助言を頂きました。深く感謝の意を表します。また、森太君、村木裕賢君、坂上裕幸君とは有益な議論ができたことに感謝したいと思います。

付録 A

節領域と主流領域の接続

粘性型節領域の場合を例にとって、節領域の解と主流領域の解の接続の手順を示す。他の型の節領域では解析的に接続漸近解を得るのが難しい場合もあるが、原理的には同様の手順で接続できる。

A.1 主流領域の解

接続漸近展開の手法を用いて解を求める場合には、まず未知定数を含む形で主流領域および節領域の解を求め、その後に接続条件を満足するように両者の定数を決定する。通常は主流についても微分方程式を解いて未知定数を含む形の解を求めるが、 ϵ に関する漸近展開の初項のみについて考える場合には、局所ハルトマン流れを利用することができる。すなわち、主流の漸近展開の初項は、局所ハルトマン流れ (3.10) で x と y を固定して $H_a \rightarrow \infty$ の極限をとったものに一致する:

$$u = 1. \tag{A.1}$$

また、主流境界層の漸近展開の初項は、局所ハルトマン流れで x と $\eta_{\pm} = H_a(1 \pm y)$ を固定して $H_a \rightarrow \infty$ の極限をとったものに一致する:

$$u = 1 - (1 + S) \exp(-\sqrt{2}\eta_{\pm} \sin x). \tag{A.2}$$

A.2 粘性型節領域の解

粘性型節領域の解については、 ϵ に関する漸近展開の初項を解析的に求めることができる*。粘性型節領域の漸近展開の初項にたいする運動方程式 (3.29), (3.30) から圧力 \tilde{p} を消去すると

$$0 = \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^3} - 2\tilde{x}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \quad (\text{A.3})$$

一般解は

$$\tilde{u} = a(\tilde{x}) \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}\tilde{y}) + b(\tilde{x}) \sinh(\sqrt{2}\tilde{x}\tilde{y}) + c(\tilde{x}), \quad (\text{A.4})$$

境界条件 (3.25) より、壁面 $\tilde{y} = \pm 1$ 上で $\tilde{u} = -S$ を要求すると

$$b(\tilde{x}) = 0, \quad c(\tilde{x}) = -S - a(\tilde{x}) \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}). \quad (\text{A.5})$$

これらを連続の式 (3.28) に代入し、 \tilde{v} を求め、壁面 $\tilde{y} = \pm 1$ 上で境界条件 $\tilde{v} = 0$ を要求すると

$$a(\tilde{x}) = a_0 \left[\frac{1}{\sqrt{2}\tilde{x}} \sinh(\sqrt{2}\tilde{x}) - \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}) \right]^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

したがって、流速分布は未知定数 a_0 を含む以下の式で表される:

$$\tilde{u} = (a_0 - S) - a_0 \frac{\sqrt{2}\tilde{x} \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}\tilde{y}) - \sinh(\sqrt{2}\tilde{x})}{\sqrt{2}\tilde{x} \cosh(\sqrt{2}\tilde{x}) - \sinh(\sqrt{2}\tilde{x})} \quad (\text{A.7})$$

A.3 接続

Van Dyke の接続原理^{[36]-[37]} に従えば、(a) \tilde{x} と \tilde{y} を固定して ϵ で展開し直した主流領域の解と、(b) x と y を固定して ϵ で展開し直した節領域の解は、その初

*対称ノズル型節領域の解は 3.5 節で求められている。一方、慣性型および非対称ノズル型の節領域流れは、非線形方程式に支配されるので解析解を求めるのは難しい。

項が一致しなければならない。実際にそれぞれ展開をやり直し初項だけを残すと、式 (A.1) と (A.7) より

$$u = 1, \quad (\text{A.8})$$

$$\tilde{u} = a_0 - S \quad (\text{A.9})$$

が得られる。したがって、接続条件を満足するには

$$a_0 = 1 + S. \quad (\text{A.10})$$

このとき節領域の流速分布 (3.31) が得られる。

式 (A.10) を、主流領域の境界層と節領域との接続条件から求めることも可能である。

主流領域の境界層と節領域についても以下の接続条件が満足されなければならない[†]: (a) \tilde{x} と \tilde{y} を固定して ϵ で展開し直した主流領域の境界層の解と, (b) x と η_{\pm} を固定して ϵ で展開し直した節領域の解は、その初項が一致する。実際にそれぞれ展開をやり直し初項だけを残すと、式 (A.2) と (A.7) より

$$u = 1 - (1 + S) \exp[-\sqrt{2}\tilde{x}(1 \pm \tilde{y})], \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{u} = (a_0 - S) - a_0 \exp(-\sqrt{2}x\eta_{\pm}), \quad (\text{A.12})$$

が得られる。したがって、式 (A.10) の関係が成り立つとき、矛盾無く接続条件が満足される。

[†]慣性型, 対称ノズル型, 非対称ノズル型の場合は節領域にも境界層が存在する。それらの場合には、主流領域の境界層と節領域の境界層との間に接続条件が課せられる。

付録 B

数値実験の計算方法

B.1 磁気レイノルズ数および無次元波長が有限値の場合

支配方程式系 (2.28)-(2.31) は非線形方程式なので解析的に解を求めるのは難しい。そこで、Marker-and-Cell 法 (MAC 法; 有限差分法の一つで、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値解を得るための方法^[54]) による数値実験を行った。定常解は時間発展問題の収束解として得られる。MAC 法では、連続の式 (2.28) を陽には使わずに、次のような方程式系を解く:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \Lambda^2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{D}{\Delta t}, \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\Lambda^2 \frac{\partial p}{\partial y} + f_y, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial t} = g_z. \quad (\text{B.4})$$

ここで、

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (\text{B.5})$$

$$f_x = -\frac{1}{N} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{H_a^2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2j_z B_y, \quad (\text{B.6})$$

$$f_y = -\frac{1}{N} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{H_a^2} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2\Lambda^2 j_z B_x, \quad (\text{B.7})$$

$$g_z = -\frac{1}{N} \left(u \frac{\partial A_z}{\partial x} + v \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + \frac{1}{NR_m} \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.8})$$

$$+ \frac{1}{NR_m} \left[u \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} - v \cos x \frac{\sinh(\Lambda^{-1}y)}{\Lambda \cosh \Lambda^{-1}} \right], \quad (\text{B.9})$$

$$B_x = \cos x \frac{\sinh(\Lambda^{-1}y)}{\Lambda \cosh \Lambda^{-1}} + R_m \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} - R_m \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (\text{B.10})$$

$$j_z = - \left(\frac{1}{\Lambda^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} \right). \quad (\text{B.11})$$

ただし、外部印加磁束密度のスカラー・ポテンシャル ϕ については解析的厳密解 (4.8) が求められているので、これを使った； Δt は計算の時間刻み幅を表す。

式 (B.1) の右辺第 3 項は数値誤差の蓄積を防ぐための補正項である。この補正項の役割を理解するために、式 (B.1)-(B.3) から p を消去すると

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{D}{\Delta t} + (\text{数値誤差}) \quad (\text{B.12})$$

が得られる。ただし、実際の数値計算では各時間ステップごとに数値誤差 (打ち切り誤差とまるめ誤差の和) が発生することを考慮して、右辺第 2 項を付け加えた。もし、補正項 (右辺第 1 項) が無いならば、初期条件で連続の式 $D = 0$ が満足されていても、時間ステップが進むにつれて誤差が蓄積し数値実験が破綻する。一方、補正項が有る場合には、 D の値は過渡的に指数関数 $\exp(-t/\Delta t)$ で減少し、その後は数値誤差と Δt に依存する一定のオーダーに保たれると期待できる。したがって、 Δt を調節することによって D の値を要求される微小なオーダーにすることが可能である。

実際の計算は次のような手順で行った:

- (i) 時間 $t = n\Delta t$ の値 u^n, v^n, A_z^n を与える,
- (ii) それらを使って D^n, f_x^n, f_y^n, g_z^n を計算する,
- (iii) 式 (B.1) を解き p^n を求める,
- (iv) 式 (B.2)-(B.4) を時間積分し $u^{n+1}, v^{n+1}, A_z^{n+1}$ を求める,
- (v) 手順 (ii) に戻る.

手順 (iv) ではオイラーの陰解法を使った。その際、非線形項は

$$(\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \quad (\text{B.13})$$

で評価した。式 (B.1)-(B.11) 中に現れる空間微分の内、線形項は中心差分で近似した。一方、非線形項は 3 次精度の風上差分^[55]で近似した。式 (B.1)-(B.4) を離散化して得られる差分方程式を解くにはガウス・ザイデル法を使った。

計算には 100×100 あるいは 100×50 の不等間隔・矩形・スタガード格子系を採用した。境界層や節領域などの変化の激しい部分にも十分な格子が配置できるように、関数

$$\frac{i}{i_{\max}} = \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} + \frac{1}{8}[2F(\Gamma_1 x) + F(\Gamma_1 \Gamma_2 x)] - \frac{\gamma_1 x}{2\pi} + \frac{\gamma_2}{24\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} x - x^3 \right), \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{j}{j_{\max}} = & y + \frac{1}{4} \{ F(\Gamma_2 y) + F[\Gamma_3(y-1)] + F[\Gamma_3(y+1)] \\ & + F[\Gamma_4(y-1)] + F[\Gamma_4(y+1)] \} - \frac{\gamma_3 y}{4} + \frac{\gamma_4}{24} (y - y^3) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

を使いニュートン・ラフソン法で格子点を決定した。ここで、 i, j はそれぞれ x, y 方向の格子番号を表す；式中の関数 F は

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\xi}{4}\right) + \tanh\left(\frac{7\xi}{4}\right) \quad (\text{B.16})$$

で定義され、その2階微分を $F''(\xi) = d^2F/d\xi^2$ で表す；式中の定数は

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \max[1, \min(\frac{1}{4}H_a, N^{1/3}, R_m^{-1}, \Lambda)], \\ \Gamma_2 &= \max[1, \min(H_a^{1/2}R_m^{1/2}, N^{1/4}R_m^{3/4}), \min(H_a^{1/2}\Lambda^{-1/2}, N^{1/4}\Lambda^{-3/4})], \\ \Gamma_3 &= H_a, \\ \Gamma_4 &= \max[1, H_aN^{-1/2}, H_aN^{-1/3}, H_a^{1/3}R_m^{1/3}, H_a^{2/3}\Lambda^{-2/3}],\end{aligned}\tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 2F(\Gamma_1\pi/2) + F(\Gamma_1\Gamma_2\pi/2), \\ \gamma_2 &= 2\Gamma_1^2F''(\Gamma_1\pi/2) + \Gamma_1^2\Gamma_2^2F'''(\Gamma_1\Gamma_2\pi/2), \\ \gamma_3 &= F(\Gamma_2) + F(2\Gamma_3) + F(2\Gamma_4), \\ \gamma_4 &= \Gamma_2^2F''(\Gamma_2) + \Gamma_3^2F''(2\Gamma_3) + \Gamma_4^2F''(2\Gamma_4).\end{aligned}\tag{B.18}$$

B.2 磁気レイノルズ数が極めて小さい場合

$R_m \rightarrow 0$ の場合、誘導方程式を解かずに流れ場を求めることが可能であり、収束解を求めるのに必要とされる労力を著しく軽減できる。

この場合、磁束密度は解析解

$$B_x = \cos x \frac{\sinh(\Lambda^{-1}y)}{\Lambda \cosh \Lambda^{-1}}, \quad B_y = \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}},\tag{B.19}$$

で与えられる。また、誘導方程式 (2.31) を使って式 (2.34) 中に現れる A_z を消去すると、電流密度は

$$j_z = u \sin x \frac{\cosh(\Lambda^{-1}y)}{\cosh \Lambda^{-1}} - v \cos x \frac{\sinh(\Lambda^{-1}y)}{\Lambda \cosh \Lambda^{-1}}.\tag{B.20}$$

式 (B.5)-(B.7) および (B.19), (B.20) を使って D, f_x, f_y を求めると、式 (B.1)-(B.3) は u, v, p に関する閉じた方程式系となる。 R_m が有限の場合の手順の内、 g_z^n の計算と式 (B.4) の時間積分を省く。格子系は R_m が有限の場合と同じである。

B.3 磁気レイノルズ数が極めて小さく無次元波長が極めて大きい場合

$R_m \rightarrow 0$ かつ $\Lambda \rightarrow \infty$ の場合、誘導方程式を解かずに流れ場を求められることに加えて、圧力 p が x のみの関数となるので、収束解を求めるのに必要とされる労力をさらに軽減できる。

この場合、圧力方程式と y 方向の運動方程式が独立でなくなるので、特別な工夫が必要である。^[31] 通常の MAC 法では数値誤差を考慮して、連続の式 $D = 0$ を使わずに、 D を x と y の関数として取り扱った。 $\Lambda \rightarrow \infty$ の場合には、 y 方向の運動方程式が縮退したことによって生じた自由度を利用して、

$$\frac{\partial D}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.21})$$

を仮定する。この仮定のもとで、式 (B.5) を y で積分すると

$$v = -\frac{\partial}{\partial x}(\psi - Qy). \quad (\text{B.22})$$

ただし、積分の際には $y = 0, 1$ での境界条件 $v = 0$ を考慮した；流れ関数 ψ と流量の半値 Q は

$$\psi = \int_0^y u \, dy, \quad Q(x) = \int_0^1 u \, dy \quad (\text{B.23})$$

で計算される値である。

圧力 p および流速 u は次のような式で計算される：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \quad (\text{B.25})$$

ここで

$$\Omega = \int_0^1 f_x dx, \quad (\text{B.26})$$

$$f_x = -\frac{1}{N} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{H_a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2j_z B_y, \quad (\text{B.27})$$

$$B_x = 0, \quad B_y = \sin x, \quad (\text{B.28})$$

$$j_z = u \sin x. \quad (\text{B.29})$$

式 (B.24) の右辺第 2 項は数値誤差の蓄積を防ぐための補正項である。この補正項の役割を理解するために、式 (B.24), (B.25) から p を消去し、 $0 \leq y \leq 1$ で積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial Q}{\partial x} + (\text{数値誤差}) \quad (\text{B.30})$$

が得られる。ただし、実際の数値計算では各時間ステップごとに数値誤差 (打ち切り誤差とまるめ誤差の和) が発生することを考慮して、右辺第 2 項を付け加えた。もし、補正項 (右辺第 1 項) が無いならば、初期条件で流量一定 $\partial Q / \partial x = 0$ が満足されていても、時間ステップが進むにつれて誤差が蓄積し数値実験が破綻する。一方、補正項が有る場合には、 $\partial Q / \partial x$ の値は過渡的に指数関数 $\exp(-t/\Delta t)$ で減少し、その後は数値誤差と Δt に依存する一定のオーダーに保たれると期待できる。したがって、 Δt を調節することによって $\partial Q / \partial x$ の値を要求される微小なオーダーにすることが可能である。

実際の計算は次のような手順で行った:

- (i) 時間 $t = n\Delta t$ の値 u^n を与える,
- (ii) それを使って ψ^n, Q^n, v^n を計算する,
- (ii) f_x^n, Ω^n を計算する,

- (iii) 式 (B.24) を解き p^n を求める,
- (iv) 式 (B.25) を時間積分し u^{n+1} を求める,
- (v) 手順 (ii) に戻る.

ψ , Q , Ω の数値積分は台形則で計算した。その他の手順や格子系は R_m および Λ が有限の場合と同様である。

付録 C

慣性が支配的な流れの漸近解の計算

複合漸近展開^[37]の手順に従って解を求める。

C.1 中心領域の解

中心領域では MHD 境界層の補正項および Sublayer の補正項は無視できる。したがって、式 (4.12)-(4.14) を (4.3), (4.5)-(4.7), (4.9) に代入すると以下のような方程式を得る:

$$\left\langle \frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial y^2} \sin x \right\rangle = -\frac{1}{2}, \quad (\text{C.1})$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 A_1^{(c)}}{\partial y^2} \sin x \right\rangle = c_r \left\langle \frac{\partial A_0^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial y^2} \right\rangle, \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 A_2^{(c)}}{\partial y^2} \sin x \right\rangle &= c_r \left\langle \frac{\partial A_0^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial^2 A_1^{(c)}}{\partial y^2} + \frac{\partial A_1^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial y^2} \right\rangle \\ &\quad + \frac{c_l^2}{2} (1-y^2) \left\langle \frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial y^2} \sin x \right\rangle - c_l^2 \left\langle \frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial x^2} \sin x \right\rangle \\ &\quad - \frac{c_h^2}{2} \frac{d^2 U_0^{(c)}}{dy^2} + \frac{c_n^2}{2} \left\langle u_0^{(c)} \frac{\partial u_0^{(c)}}{\partial x} + v_0^{(c)} \frac{\partial u_0^{(c)}}{\partial y} \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial u_0^{(c)}}{\partial x} + \frac{\partial v_0^{(c)}}{\partial y} = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$U_0^{(c)} \frac{\partial u_0^{(c)}}{\partial x} + v_0^{(c)} \frac{dU_0^{(c)}}{dy} = -\frac{\partial p_0^{(c)}}{\partial x} + 2 \left[\frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial y^2} \sin x \right], \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial p_0^{(c)}}{\partial y} = 0, \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial y^2} = -U_0^{(c)} \sin x, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial^2 A_1^{(c)}}{\partial y^2} = -U_1^{(c)} \sin x + c_r U_0^{(c)} \frac{\partial A_0^{(c)}}{\partial x}, \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_2^{(c)}}{\partial y^2} = & -U_2^{(c)} \sin x + \frac{c_l^2}{2} U_0^{(c)} (1 - y^2) \sin x - c_n^2 u_0^{(c)} \sin x \\ & + c_r U_1^{(c)} \frac{\partial A_0^{(c)}}{\partial x} + c_r U_0^{(c)} \frac{\partial A_1^{(c)}}{\partial x} - c_l^2 \frac{\partial^2 A_0^{(c)}}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$A_0^{(c)}, A_1^{(c)}, v_0^{(c)}$ には境界層の補正が無いので、壁面 $y = -1$ での境界条件

$$A_0^{(c)} = 0, \quad A_1^{(c)} = 0, \quad v_0^{(c)} = 0 \quad (\text{C.10})$$

が要求される。また、対称条件

$$\partial A_k^{(c)} / \partial y = 0, \quad v_k^{(c)} = 0 \quad (\text{C.11})$$

が $y = 0$ で要求される。

これらの方程式を解くと以下のような解を得る:

$$U_0^{(c)} = 1, \quad U_1^{(c)} = 0, \quad U_2^{(c)} = \frac{1}{6} c_r^2 (1 - y^4) + c_l^2 (1 - y^2), \quad (\text{C.12})$$

$$u_0^{(c)} = 0, \quad v_0^{(c)} = 0, \quad p_0^{(c)} = \frac{1}{2} \sin(2x). \quad (\text{C.13})$$

$$A_0^{(c)} = \frac{1}{2}(1 - y^2) \sin x, \quad A_1^{(c)} = -\frac{1}{24}c_r(5 - y^2)(1 - y^2) \cos x, \quad (\text{C.14})$$

$$A_2^{(c)} = -\frac{1}{144}c_r^2(1 - y^2)^3 \sin x + a_2(x),$$

C.2 MHD 境界層の補正

MHD 境界層では、展開式 (4.14) は次のように表現できる:

$$U = 1 + U_0^{(b)}(\eta) + \epsilon U_1^{(b)}(\eta) + \epsilon^2 U_2^{(b)}(\eta) + O(\epsilon^3), \quad (\text{C.15})$$

$$\tilde{u} = u_0^{(b)}(x, \eta) + O(\epsilon), \quad (\text{C.16})$$

$$\tilde{v} = \epsilon \left[g_1(x) + v_1^{(b)}(x, \eta) \right] + O(\epsilon^2), \quad (\text{C.17})$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} \sin(2x) + O(\epsilon), \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} A_z &= c_h \epsilon \eta \sin x + \epsilon^2 \left[-\frac{1}{2}c_h^2 \eta^2 \sin x - \frac{1}{3}c_h c_r \eta \cos x + a_2(x) + A_2^{(b)}(x, \eta) \right] \\ &\quad + \epsilon^3 \left[a_3(x) + A_3^{(b)}(x, \eta) \right] \\ &\quad + \epsilon^4 \left[\frac{1}{6}c_h^3 c_r \eta^3 \cos x + a_4(x) + A_4^{(b)} \right] + O(\epsilon^5). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

中心領域の解は η を固定して展開された。また、Sublayer の補正項は無視できる。関数 $g_1(x)$, $a_3(x)$, $a_4(x)$ は中心領域の解の下壁での値 $v_1^{(c)}(x, -1)$, $A_3^{(c)}(x, -1)$, $A_4^{(c)}(x, -1)$ に等しい。

MHD 境界層を調べるために式 (4.3), (4.5), (4.6), (4.9)-(4.11) を引き伸ばされた座標 η で表すと次のような方程式系を得る:

$$c_n^2 \epsilon^2 \left\langle \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\tilde{v}}{c_h \epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right\rangle = 1 + \frac{d^2 U}{d\eta^2} - 2 \langle j_z B_y \rangle, \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{c_h \epsilon} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\tilde{v}}{c_h \epsilon} \frac{dU}{d\eta} + c_n^2 \epsilon^2 \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\tilde{v}}{c_h \epsilon} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} \right] \\ = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + c_n^2 \epsilon^2 \left(c_h^2 c_l^2 \epsilon^4 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \eta^2} \right) - 2 \llbracket j_z B_y \rrbracket, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\begin{aligned} c_r \epsilon U \frac{\partial A_z}{\partial x} + c_n^2 c_r \epsilon^3 \left(\tilde{u} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\tilde{v}}{c_h \epsilon} \frac{\partial A_z}{\partial \eta} \right) \\ = \left(c_l^2 \epsilon^2 \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{1}{c_h^2 \epsilon^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \eta^2} \right) + U \sin x [1 + O(\epsilon^4)] \\ + c_n^2 \epsilon^2 \{ \tilde{u} \sin x [1 + O(\epsilon^4)] + \tilde{v} \cos x [c_l^2 \epsilon^2 (1 - c_h \epsilon \eta) + O(\epsilon^4)] \}, \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

$$B_x = -\cos x [c_l^2 \epsilon^2 (1 - c_h \epsilon \eta) + O(\epsilon^4)] + \frac{c_r}{c_h} \frac{\partial A_z}{\partial \eta}, \quad (\text{C.24})$$

$$B_y = \sin x [1 + O(\epsilon^4)] - c_r \epsilon \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$j_z = - \left(c_l^2 \epsilon^2 \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{1}{c_h^2 \epsilon^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \eta^2} \right). \quad (\text{C.25})$$

展開式 (C.15)-(C.19) を式 (C.20)-(C.23) に代入すると以下のような方程式を得る:

$$\frac{d^2 U_0^{(b)}}{d\eta^2} + \frac{2}{c_h^2} \left\langle \frac{\partial^2 A_2^{(b)}}{\partial \eta^2} \sin x \right\rangle = 0, \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{d^2 U_1^{(b)}}{d\eta^2} + \frac{2}{c_h^2} \left\langle \frac{\partial^2 A_3^{(b)}}{\partial \eta^2} \sin x \right\rangle = 0, \quad (\text{C.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U_2^{(b)}}{d\eta^2} + \frac{2}{c_h^2} \left\langle \frac{\partial^2 A_4^{(b)}}{\partial \eta^2} \sin x \right\rangle \\ = \frac{2c_r \eta}{c_h} \left\langle \frac{\partial^2 A_2^{(b)}}{\partial \eta^2} \cos x \right\rangle + c_n^2 \left\langle u_0^{(b)} \frac{\partial u_0^{(b)}}{\partial x} + \frac{g_1 + v_1^{(b)}}{c_h} \frac{\partial u_0^{(b)}}{\partial \eta} \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

$$\frac{\partial u_0^{(b)}}{\partial x} + \frac{1}{c_h} \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial \eta} = 0, \quad (\text{C.29})$$

$$(1 + U_0^{(b)}) \frac{\partial u_0^{(b)}}{\partial x} + \frac{g_1 + v_1^{(b)}}{c_h} \frac{dU_0^{(b)}}{d\eta} = \frac{2}{c_h^2} \left[\left[\frac{\partial^2 A_2^{(b)}}{\partial \eta^2} \sin x \right] \right], \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{\partial^2 A_2^{(b)}}{\partial \eta^2} = -c_h^2 U_0^{(b)} \sin x, \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\partial^2 A_3^{(b)}}{\partial \eta^2} = -c_h^2 U_1^{(b)} \sin x, \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial^2 A_4^{(b)}}{\partial \eta^2} = -c_h^2 U_2^{(b)} \sin x + c_h^3 c_r U_0^{(b)} \eta \cos x - c_h^2 c_n^2 u_0^{(b)} \sin x. \quad (\text{C.33})$$

$U_0^{(b)}, U_1^{(b)}, v_1^{(b)}, A_2^{(b)}, A_3^{(b)}$ には Sublayer の補正項が存在しないので、下側の壁面 $\eta = 0$ で境界条件

$$1 + U_0^{(b)} = -S, \quad U_1^{(b)} = 0, \quad g_1 + v_1^{(b)} = 0, \quad a_2 + A_2^{(b)} = 0, \quad a_3 + A_3^{(b)} = 0, \quad (\text{C.34})$$

が要求される。また、MHD 境界層の補正項はすべて $\eta \rightarrow \infty$ で 0 になることを要求される。

これらの方程式を解くと以下のような解を得る：

$$U_0^{(b)} = -(1 + S)e^{-\eta}, \quad U_1^{(b)} = 0, \quad U_2^{(b)} = q_2 e^{-\eta}, \quad (\text{C.35})$$

$$u_0^{(b)} = \frac{1+S}{2S} e^{-\eta} \sin(2x), \quad (\text{C.36})$$

$$v_1^{(b)} = \frac{(1+S)c_h}{S} e^{-\eta} \cos(2x), \quad g_1 = -\frac{(1+S)c_h}{S} \cos(2x), \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} A_2^{(b)} &= c_h^2(1+S)e^{-\eta} \sin x, \quad a_2 = -c_h^2(1+S) \sin x, \quad A_3^{(b)} = 0, \\ a_3 &= 0, \quad A_4^{(b)} = -q_2 c_h^2 e^{-\eta} \sin x - c_h^3 c_r (1+S)(2+\eta) e^{-\eta} \cos x \\ &\quad - c_h^2 c_n^2 \frac{1+S}{S} e^{-\eta} \sin^2 x \cos x. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

C.3 Sublayer の補正

Sublayer では、展開式 (4.14) は次のように表現できる:

$$U = -S + \frac{c_n \epsilon (1+S)}{S^{1/2}} \zeta + \epsilon^2 \left[-\frac{c_n^2 (1+S)}{2S} \zeta^2 + q_2 + U_2^{(s)}(\zeta) \right] + O(\epsilon^3), \quad (\text{C.39})$$

$$\tilde{u} = \frac{1+S}{2S} \sin(2x) + u_0^{(s)}(x, \zeta) + O(\epsilon), \quad (\text{C.40})$$

$$\tilde{v} = O(\epsilon^2), \quad (\text{C.41})$$

$$\tilde{p} = \frac{1}{2} \sin(2x) + O(\epsilon), \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{c_h c_n \epsilon^2}{S^{1/2}} \zeta \sin x - \epsilon^3 \left[\frac{c_h c_n c_r}{3S^{1/2}} \zeta \cos x + \frac{c_h^2 c_n (1+S)}{S^{1/2}} \zeta \sin x \right] \\ &\quad + \epsilon^4 \left[\frac{c_h^2 c_n^2}{2} \zeta^2 \sin x - q_2 c_h^2 \sin x - 2c_h^3 c_r (1+S) \cos x \right. \\ &\quad \left. - c_h^2 c_n^2 \frac{1+S}{S} \sin^2 x \cos x + a_4(x) + A_4^{(s)}(x, \zeta) \right] + O(\epsilon^5), \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

中心領域の解および MHD 境界層の補正は ζ を固定して展開された。

Sublayer を調べるために式 (4.3), (4.6), (4.9)-(4.11) を引き伸ばされた座標 ζ で表すと次のような方程式系を得る:

$$c_n^2 \epsilon^2 \left\langle \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{S^{1/2} \tilde{v}}{c_h c_n \epsilon^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} \right\rangle = 1 + \frac{S}{c_n^2 \epsilon^2} \frac{d^2 U}{d\zeta^2} - 2 \langle j_z B_y \rangle, \quad (\text{C.44})$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{S^{1/2} \tilde{v}}{c_h c_n \epsilon^2} \frac{dU}{d\zeta} + c_n^2 \epsilon^2 \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{S^{1/2} \tilde{v}}{c_h c_n \epsilon^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} \right] \\ = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \left(c_h^2 c_l^2 c_n^2 \epsilon^6 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + S \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \zeta^2} \right) - 2 \llbracket j_z B_y \rrbracket, \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

$$\begin{aligned} c_r \epsilon U \frac{\partial A_z}{\partial x} + c_n^2 c_r \epsilon^3 \left(\tilde{u} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{S^{1/2} \tilde{v}}{c_h c_n \epsilon^2} \frac{\partial A_z}{\partial \zeta} \right) \\ = \left(c_l^2 \epsilon^2 \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{S}{c_h^2 c_n^2 \epsilon^4} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \zeta^2} \right) + U \sin x [1 + O(\epsilon^6)] \\ + c_n^2 \epsilon^2 \{ \tilde{u} \sin x [1 + O(\epsilon^6)] + \tilde{v} \cos x [c_l^2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4)] \}, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

$$B_x = -\cos x [c_l^2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4)] + \frac{c_r S^{1/2}}{c_h c_n \epsilon} \frac{\partial A_z}{\partial \zeta}, \quad (\text{C.47})$$

$$B_y = \sin x [1 + O(\epsilon^6)] - c_r \epsilon \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$j_z = - \left(c_l^2 \epsilon^2 \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{S}{c_h^2 c_n^2 \epsilon^4} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \zeta^2} \right). \quad (\text{C.48})$$

展開式 (C.39)-(C.43) を式 (C.44)-(C.46) に代入すると以下のような方程式を得る:

$$\frac{d^2 U_2^{(s)}}{d\zeta^2} = -\frac{2}{c_h^2} \left\langle \frac{\partial^2 A_4^{(s)}}{\partial \zeta^4} \sin x \right\rangle, \quad (\text{C.49})$$

$$\frac{\partial^2 u_0^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial x} = -\frac{2}{c_h^2 c_n^2} \left[\left[\frac{\partial^2 A_4^{(s)}}{\partial \zeta^4} \sin x \right] \right], \quad (\text{C.50})$$

$$\frac{\partial^2 A_4^{(s)}}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (\text{C.51})$$

下側の壁面 $\zeta = 0$ で境界条件

$$q_2 + U_2^{(s)} = 0, \quad \frac{1+S}{2S} \sin(2x) + u_0^{(s)} = 0, \quad (\text{C.52})$$

$$-q_2 c_h^2 \sin x - 2c_h^3 c_r (1+S) \cos x - c_h^2 c_n^2 \frac{1+S}{S} \sin^2 x \cos x + a_4 + A_4^{(s)} = 0$$

が要求される。また、Sublayer の補正項はすべて $\zeta \rightarrow \infty$ で 0 になることを要求される。

これらの方程式を解くと以下のような解を得る:

$$U_2^{(s)} = 0, \quad q_2 = 0, \quad (\text{C.53})$$

$$u_0^{(s)} = -\frac{1+S}{2S} e^{-\zeta} \sin(2x + \zeta). \quad (\text{C.54})$$

$$A_4^{(s)} = 0, \quad a_4 = q_2 c_h^2 \sin x + 2c_h^3 c_r (1+S) \cos x + c_h^2 c_n^2 \frac{1+S}{S} \sin^2 x \cos x. \quad (\text{C.55})$$

式 (C.12)-(C.14), (C.35)-(C.38), (C.53)-(C.55) を展開式 (4.14) に代入すると、漸近解 (4.16)-(4.20) を得る。

付録 D

電力 P'_{gen} を求める式の式変形

アンペールの法則 (2.23) に $\sin(2\pi x'/\lambda)$ を掛けて、 $0 \leq x' \leq \lambda$ で積分すると、 y' に関する常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy'^2} \left[\int_0^\lambda A'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) dx' \right] - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \left[\int_0^\lambda A'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) dx' \right] \\ = -\mu_L \int_0^\lambda j'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) dx' \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

を得る。 $y' = \pm(h-0)$ での境界条件 $A'_z = 0$ のもとで上式を解くと

$$\begin{aligned} & \int_0^\lambda A'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) dx' \\ &= \frac{\mu_L \lambda}{2\pi} \cosh\left(\frac{2\pi y'}{\lambda}\right) \int_h^{y'} \int_0^\lambda j'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) \sinh\left(\frac{2\pi y'}{\lambda}\right) dx' dy' \\ & - \frac{\mu_L \lambda}{2\pi} \sinh\left(\frac{2\pi y'}{\lambda}\right) \int_0^{y'} \int_0^\lambda j'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) \cosh\left(\frac{2\pi y'}{\lambda}\right) dx' dy' \\ & + \frac{\mu_L \lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cosh\left(\frac{2\pi y'}{\lambda}\right) \int_0^h \int_0^\lambda j'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) \cosh\left(\frac{2\pi y'}{\lambda}\right) dx' dy' \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^\lambda \frac{\partial A'_z}{\partial y'} \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) dx' \right]_{y'=h-0} \\ &= -\mu_L \int_0^h \int_0^\lambda j'_z \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) \frac{\cosh(2\pi y'/\lambda)}{\cosh(2\pi h/\lambda)} dx' dy'. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

これを式 (5.13) に代入すると式 (5.14) を得る。

参 考 文 献

- [1] D. G. Elliott, "Two-fluid Magnetohydrodynamic cycle for nuclear-electric power conversion," *ARS J.* **32**, 924-928 (1962).
- [2] D. G. Elliott, "Magnetohydrodynamic power systems," *J. Spacecraft* **4**, 842-846 (1967).
- [3] F. H. Morse, "Survey of liquid metal magnetohydrodynamic energy conversion cycles," *Energy Conversion* **10**, 155-176 (1970).
- [4] W. D. Jackson, E. S. Pierson, and R. P. Porter, "Design considerations for MHD induction generators," in *Proc. 2nd Int. Symp. MHD Elec. Power Gen.* (Paris, 1964), 2, pp. 939-951.
- [5] M. Petrick and K. Y. Lee, "Performance characteristics of a liquid metal MHD generator," in *Proc. 2nd Int. Symp. MHD Elec. Power Gen.* (Paris, 1964), 2, pp. 953-969.
- [6] T. C. Wang and S. J. Dudzinsky, "Theoretical and experimental study of a liquid metal MHD induction generator," *AIAA J.* **5**, 107-112 (1967).
- [7] R. N. Sudan, "Interaction of a conducting fluid stream with a traveling wave of magnetic field of finite extension," *J. Appl. Phys.* **34**, 641-650 (1963).
- [8] D. J. Cerini and D. G. Elliott, "Performance characteristics of a single-wavelength liquid-metal MHD induction generator with end-loss compensation," *AIAA J.* **6**, 503-510 (1968).

- [9] M. J. McCutcheon and A. W. Russo, "Impedance characteristics of the finite-length annular induction MHD generator," *J. Appl. Phys.* **43**, 1542-1546 (1972).
- [10] V. A. Glukhikh and I. P. Kirillov, *Magnitnaya Gidrodinamika* **2** (4), 107-114 (1966) ["Experimental investigation of an asynchronous self-excited liquid metal MHD generator," *Magnetohydrodynamics* **2** (4), 64-68 (1966)].
- [11] D. J. Cerini, "NaK-Nitrogen liquid metal MHD converter tests at 30 kw," *AIAA J.* **12**, 78-83 (1974).
- [12] F. Jousselein and Ph. Marty, "Self-excitation of an induction machine for LMMHD power generation," in *Proc. 9th Int. Conf. MHD Elec. Power Gen.* (Tsukuba, Japan, 1986), 2, pp. 774-783.
- [13] F. Jousselein, A. Alemany, F. Werkoff, and Ph. Marty, "MHD induction generator at weak magnetic Reynolds number. Part 1: self excitation criterion and efficiency," *Eur. J. Mech. B* **8**, 23-39 (1989).
- [14] F. Jousselein, Ph. Marty, A. Alemany, and F. Werkoff, "MHD induction generator at weak magnetic Reynolds number. Part II: numerical modelisation and experimental study," *Eur. J. Mech. B* **8**, 327-350 (1989).
- [15] N. M. Okhremenko, *Magnitnaya Gidrodinamika* **1** (4), 3-23 (1965) ["Traveling-field induction pumps," *Magnetohydrodynamics* **1** (4), 1-14 (1965)].
- [16] V. A. Glukhikh, B. G. Karasev, and I. R. Kirillov, *Magnitnaya Gidrodinamika* **11** (1), 102-110 (1975) ["Research and design results in MHD machines with liquid-metal working fluids," *Magnetohydrodynamics* **11**, 80-86 (1975)].
- [17] I. M. Tolmach, *Magnitnaya Gidrodinamika* **23** (1), 77-85 (1987) ["Liquid-metal MHD machines for power and industry," *Magnetohydrodynamics* **23**, 66-73 (1987)].

- [18] E. A. Tropp, *Magnitnaya Gidrodinamika* **4** (4), 75-82 (1968) [“Laminar flow of a viscous conducting fluid between parallel walls in a traveling magnetic field,” *Magnetohydrodynamics* **4** (4), 51-55 (1968)].
- [19] E. A. Tropp, *Magnitnaya Gidrodinamika* **5** (3), 47-51 (1969) [“Flow of a conducting fluid in a traveling magnetic field with matched and opposed inductors,” *Magnetohydrodynamics* **5** (3), 31-33 (1969)].
- [20] V. F. Tkachenko, *Magnitnaya Gidrodinamika* **6** (4), 65-70 (1970) [“Stationary flow of a conducting fluid in a traveling field,” *Magnetohydrodynamics* **6**, 503-508 (1970)].
- [21] T. H. Fawzi and P. E. Burke, “Laminar flow in circular pipes under the effect of a traveling magnetic field,” *Phys. Fluids* **14**, 2680-2686 (1971).
- [22] I. C. Rae, “On the flow induced in liquid metals by a linear induction motor,” *Appl. Sci. Res.* **39**, 71-81 (1982).
- [23] P. v. Grumbkow, “Laminare Geschwindigkeitsverteilung im Rechteckkanal eines induktiven Mehrphasen-MHD-Wandlers,” *Energy Conv.* **8**, 19-27 (1968).
- [24] S. Tado and S. Kamiyama, “Analysis of transverse edge effect of linear induction pump with electrically conducting side walls,” *J. Nucl. Sci. Tech.* **20**, 379-388 (1983).
- [25] A. F. Zibol'd, A. B. Kapusta, A. I. Likhacheva, and L. R. Reimal, *Magnitnaya Gidrodinamika* **22** (2), 121-124 (1986) [“Three-dimensional flow in a spiral channel in an induction pump,” *Magnetohydrodynamics* **22**, 221-225 (1986)].
- [26] J. Hartmann, “Hg-dynamics I – theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field,” *Det. Kgl. Dan. Vidensk. Selsk. Math. Fys. Medd.* **15**, 1 (1937).

- [27] G. W. Sutton and A. Sherman, *Engineering Magnetohydrodynamics* (McGraw-Hill, New York, 1965), pp. 340-351.
- [28] M. Garnier, "Metallurgical application of MHD," *Prog. Astronaut. Aeronaut.* **100**, 589 (1985).
- [29] 今井功, 桜井明, 「岩波講座 現代物理学 電磁流体力学」 (岩波書店, 1959), pp. 9-10.
- [30] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics II* (Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1965) [戸田盛和 訳, 「ファインマン物理学 IV」 (岩波書店, 1971), pp.64-79].
- [31] K. Ueno, "Inertia effect in two-dimensional MHD channel flow under a traveling sine wave magnetic field," *Phys. Fluids A* **3**, 3107-3116 (1991).
- [32] K. Ueno, "Effect of turnaround lines of magnetic flux in two-dimensional MHD channel flow under a traveling sine wave magnetic field," *Phys. Fluids A* **5**, 490-492 (1993).
- [33] K. Ueno, R. Ishii, and S. Morioka, "Boundary layer in MHD channel flow under progressing alternating magnetic field," in *Proceedings on the International Conference on Energy Transfer in Magnetohydrodynamic Flows* (Cadache, France, 1991), pp. 409-414.
- [34] K. Ueno, R. Ishii, and S. Morioka, "Two-dimensional channel flow of liquid metal in the presence of progressing alternating transverse magnetic field," *Fluid Dyn. Res.* **6**, 53-64 (1990).
- [35] K. Ueno and S. Morioka, "Effects of induced magnetic field and two-dimensionality of imposed magnetic field in MHD induction generator," *Fluid Dyn. Res.* (to be published).
- [36] M. Van Dyke, *Perturbation method in fluid mechanics* (Academic Press, New York, 1964), pp. 77-97.

- [37] A. H. Nayfeh, *Perturbation methods* (John Wiley & Sons, New York, 1973), pp. 144-154.
- [38] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967), pp. 191-193 [橋本英典 他訳, 「入門 流体力学」(東京電機大学出版局, 1972), pp. 192-194].
- [39] J. C. R. Hunt and K. Stewartson, "Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts. II," *J. Fluid Mech.* **23**, 563-581 (1965).
- [40] J. A. Baylis and J. C. R. Hunt, "MHD flow in an annular channel; theory and experiment," *J. Fluid Mech.* **48**, 423-428 (1971).
- [41] A. Sterl, "Numerical simulation of liquid-metal MHD flows in rectangular ducts," *J. Fluid Mech.* **216**, 161-191 (1990).
- [42] J. C. R. Hunt, "Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts," *J. Fluid Mech.* **21**, 577-590 (1965).
- [43] C. B. Reed and B. F. Picologlou, "Sidewall flow instability in liquid metal MHD slow under blanket relevant conditions," *Fusion Tech.* **15**, 705-715 (1989).
- [44] T. H. Hughes and W. H. Reid, "On the stability of the asymptotic suction boundary-layer profile," *J. Fluid Mech.* **23**, 715-735 (1965).
- [45] W. D. Lakin and W. H. Reid, "Asymptotic analysis of the Orr-Sommerfeld problem for boundary-layer flows," *Quarterly J. Mech. Appl. Math.* **35**, 69-89 (1982).
- [46] H. Herron, C. H. Von Kerczek, and J. Tozzi, "Instability characteristics of the asymptotic suction profile," *J. Appl. Mech.* **52**, 487 (1985).
- [47] R. C. Lock, "The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **233**, 105-125 (1956).

- [48] E. C. Brouillette and P. S. Lykoudis, "Magneto-fluid-mechanic channel flow. I. Experiment," *Phys. Fluids* **10**, 995-1001 (1967).
- [49] P. S. Lykoudis and E. C. Brouillette, "Magneto-fluid-mechanic channel flow. II. Theory," *Phys. Fluids* **10**, 1002-1007 (1967).
- [50] G. G. Branover, Yu. M. Gel'fgat, D. A. Peterson, and A. B. Tsinober, *Magnitnaya Gidrodinamika* **5** (1), 61-67 (1969) ["Turbulent Hartmann flow," *Magnetohydrodynamics* **5** (1), 39-43 (1969)].
- [51] Yu. M. Gel'fgat, L. G. Kit, D. A. Peterson, and A. B. Tsinober, *Magnitnaya Gidrodinamika* **7** (3), 35-42 (1971) ["Realization of the laminar regime in magnetohydrodynamic flow in an annular channel an high Reynolds numbers," *Magnetohydrodynamics* **7**, 319-325 (1971)].
- [52] C. B. Reed and P. S. Lykoudis, "The effect of a transverse magnetic field on shear turbulence," *J. Fluid Mech.* **89**, 147-171 (1978).
- [53] J. Sommeria and R. Moreau, "Why, how, and when, MHD turbulence becomes two-dimensional," *J. Fluid Mech.* **118**, 507-518 (1982).
- [54] F. H. Harlow and J. E. Welch, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface," *Phys. Fluids* **8**, 2182-2189 (1965).
- [55] T. Kawamura and K. Kuwahara, "Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness," AIAA Paper No.84-0340, 1984.