

河川堤防の浸透に関する研究

矢野勝正・山本順一

STUDY ON THE PERCOLATION OF THE RIVER EMBANKMENT

by Dr. Eng. Katsumasa YANO and Junichi YAMAMOTO

Synopsis : Being violent variation of flood water level, we must analyse the percolation phenomena of the river embankment as the problem of unsteady flow. So preliminarily, we have treated this study experimentally by the sand model levee, changing the water level as the real flood.

The analytical solution of the unsteady percolation through embankment, was tried as the vertical wall. But generally the front surface of the river embankment inclines, so we must treat as such condition, with the consideration of the effect of vertical pre-percolation due to rain fall, the effect of the revetment, and also the physical properties of embankment.

1. 研究の趣旨

1-1 従来の研究 堤防の破壊現象は大別して、溢流破壊・洗掘破壊・浸透破壊・滑動破壊・震動破壊などをあげることができる。このうち浸透破壊に関する研究は、貯水池のような大体において水位一定の静水圧の作用する場合の定常解の研究と、河川堤防や海岸堤防のような外水の時間的に変動する場合の非定常解の研究に分類することができる。

定常解の研究については、一次元問題として取扱つた Dupuit-Forchheimer¹⁾, Dachler²⁾, Schoklitsch³⁾, A. Casagrande⁴⁾などを初め多くの人々によつて行われている。また二次元問題として取扱つたものには、Muskat⁵⁾, Hamel⁶⁾, 前川章⁷⁾, 沢田敏男⁸⁾などの研究がある。一方外水位が洪水や潮汐のように変動する場合の非定常解としては、一次元問題として取扱つた物部長穂⁹⁾, 田中宏平¹⁰⁾, 高田京一¹¹⁾, 内田茂男¹²⁾, 前川章¹³⁾, 沢田敏男¹⁴⁾などの研究がある。しかし二次元非定常解の研究はホドグラフ変換による解析を試みた Davison¹⁵⁾, ヘルショウの流れを利用した実験的研究を試みた近坂百一¹⁶⁾などの試みがある程度で、まだ充分な研究が行われていない。

1-2 研究上の問題点 本研究は従つて、河川堤防の二次元非定常解の研究に目標をおいて実験的、理論的に、その実態を解明しようとするものであるが、この中間報告においては、一応まず次元の問題としての考察を予備的に行つたものを記述するものである。

河川堤防の浸透問題を研究するにあつて、従来よく究明されていなかった点として次の諸点が考えられるので、本研究においてはこれらの諸点を考えにいて、考察を進めるつもりである。すなわち、

(1) 前期降雨の縦浸透の影響 河川に洪水が流下する前には、その数時間または数日間以前から豪雨または連続雨が發生して、堤防に縦浸透が發生し、堤防が相当湿潤状態になつてはいるはずである。従つて河川堤防の浸透現象を研究するためには、堤体内の湿潤状態にある場合の解明を試みるべきである。

(2) 堤体の質的变化の影響 新堤と数年経過した堤防では、その空隙率、浸透係数などの物理的諸元には相当の変化を生じているはずである。従つてこれらの諸元が浸透に及ぼす影響を考察しておくべきであつて、比較的弱い状態にある新堤時代の設計方針や、維持管理が悪いための堤体の弱態化などに対する安全化

対策などを考えなければならない。

(3) 堤防断面の合理的決定法の研究 堤防断面を合理的に決定する方法は、浸透現象がよく究明されていないから、現在必ずしも合理的に行われているか否かはかなり問題がある。建設省統計年表¹⁷⁾によると、未改修堤防総延長は施行河川で3 500 km、準用河川で27 000 km、合計30 500 km(左右両岸併せて)に及んでいる。この数字は改修不要延長を除いた全河川堤防総延長40 000 kmの75.0%に及んでいるので、今後この未改修堤防の計画断面を合理的に決めることは、非常に慎重に対処しなければならないことを示唆している。もちろん堤防の断面は、浸透対策のみの面から決定されるべき性質のものではなく、広く溢流、洗掘、震動などの立場にたつて考察されるべきことは言うまでもない。

(4) 護岸工の浸透への影響 堤防の法面の護岸特に法覆工が堤防浸透に及ぼす効果については、従来余り検討されていない。浸透の見地から考えて、護岸の有無によつては、その漏水防止の効果が相当影響されるものとして、堤防断面の合理的決定を行うべきである。従つてはたしてどの程度の役割を、護岸が浸透防止にはたしているかを研究しておく必要がある。

以上のような観点にたつて、この研究を昭和32年4月から初めたのであるが、いずれも難解な問題なので、今回の中間報告はその基礎的な一部の実験及び若干の理論解を行つたものにすぎない。

2. 実験施設と方法

2-1 実験施設 実験施設としては、京大防災研究所宇治川水理実験所に設けた図-1に示すような、長さ4.00 m、巾0.25 m、高さ0.5

mの鋼製水槽を用い、その前面は厚さ6 mmのガラス張りとし、5 cm間隔ごとに縦横に網目を入れて、堤体内浸透現象の観察に便ならしめた。この水槽内に0.85 mm篩を通過する砂をもつて模型堤防を作つた。

2-2に述べる水位変動は注入流量をVenturi-meterで計測しつつ、バルブを調節し、減水にあつては水槽の端に設けた排水バルブにより水位を低下させた。

堤体内の浸透流線を測定するために、堤体作製時にUraninを各地点に埋めておき、浸透水によつてこれが溶解し流線を形造るのを写真撮影(写真-1)するとともに、10 cm間隔に内径6 mmのガラス管をたて、水槽底面よりこれに連結した。また6個の水圧

計に連結し、電子管式直流電位差計を用いて、いずれも盛土底面における間隙水圧の分布を測定した。

2-2 実験方法 模型堤防は実在の堤防を高さ8.0 m、天端巾5.5 m、表及び裏法とも1:2.5とした

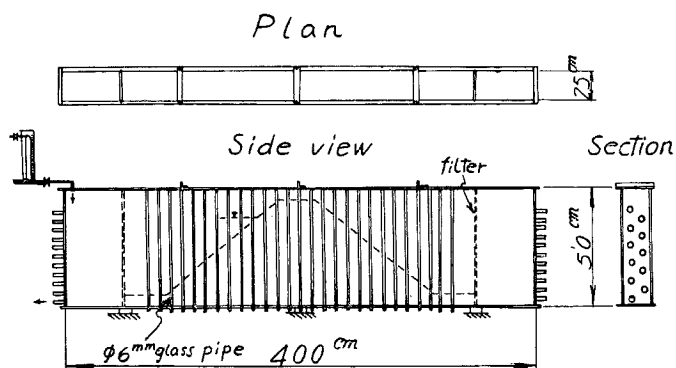


Fig. 1 Experimental apparatus

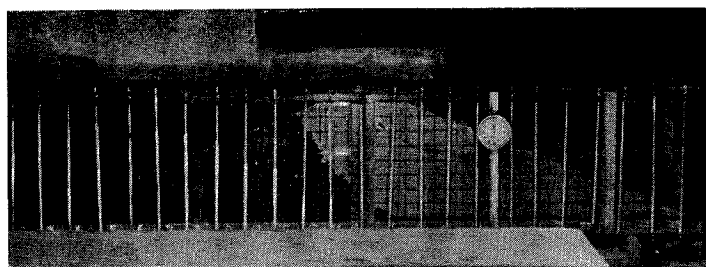


Photo. 1

ので、縦横の縮尺を1:20とし、高さ40cm、天端巾27.5cmとした。模型堤防の作製は2-1に述べた砂を2.5cmごとに十分突固め Uranin を埋めておいた。外水位の変化は洪水継続時間を60分、150分、300分の3種類とし、その peak の起る時刻を1:3、1:5の2種類とした。すなわち図-2に示すように、

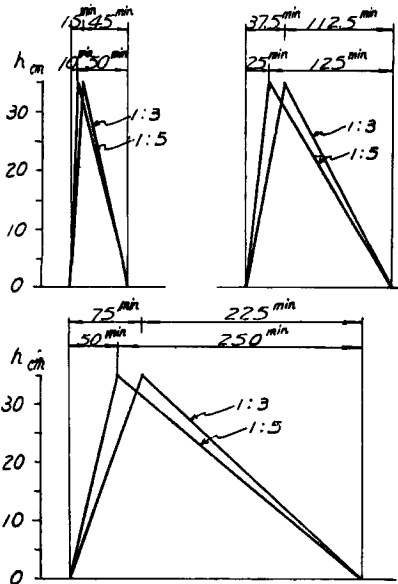


Fig. 2 Kinds of flood

洪水継続時間4及び6に対し1の割で、0から35cmまで水位を増水せしめ、3及び5の割で減水せしめた。堤防の乾湿の状態は浸透現象に大いに影響するので、完全に乾燥した砂を用いた乾堤と湿堤とに分けて行つた。これを表-1に示す。

Table 1

Flood duration time	Dry bank		Wet bank (after 24hr)		Wet bank (after 1hr)	
	1:3	1:5	1:3	1:5	1:3	1:5
60 min	E 12	E 15	E 1	E 3	E 2	E 8
150 min	E 11	E 14	E 4	E 5	E 9	E 10
300 min	E 13	E 16	E 6	E 7	—	—

ここに Wet bank (after 24hr), Wet bank (after 1hr) というのは前の実験終了24時間後、1時間後に行つたものであり、E 1, E 2, ……は実験番号である。実験に用いた砂の真比重は2.65, 単位重量は1.56 g/cm³, 三軸圧縮試験による水中での内部摩擦角は41°20', 透水係数は大体2.45×10⁻²cm/secであつた。

2-3 相似律¹⁸⁾ 浸透流の運動方程式は

$$\frac{1}{\lambda} \frac{Dv}{Dt} = -\text{grad} \left(gz + \frac{p}{\rho} \right) - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v + \frac{\mu}{\rho \lambda} \nabla^2 v \dots \dots \dots (2.1)$$

連続方程式は

$$\text{div } v = 0 \dots \dots \dots (2.2)$$

であるが、無次元方程式にするために

$$\left. \begin{aligned} \text{長さ} & ; s = s_0 L \\ \text{速度} & ; v = v_0 U \\ \text{時間} & ; t = t_0 L/v \\ \text{圧力} & ; p = p_0 \rho U^2 \\ \text{重力加速度} & ; g = g_0 U^2/L \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.3)$$

とする。そうすると grad ∇, div などは、その無次元微分演算子に対して suffix “0” をつけて表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \text{grad} & = \frac{1}{L} \text{grad}_0 \\ \nabla^2 & = \frac{1}{L^2} \nabla_0^2 \\ \text{div} & = \frac{1}{L} \text{div}_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.4)$$

そこでこれらを使つて (2.1) 式と (2.2) 式を無次元化すると、

$$\frac{1}{\lambda} \frac{U^2}{L} \frac{Dv_0}{Dt_0} = -\frac{U^2}{L} \text{grad}_0(g_0 z_0 + p_0) - \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{v_0}{k''} U - \frac{1}{\lambda} \frac{U}{L^2} \nabla_0^2 v_0 \right)$$

更にこの式を U^2/L で割つて、

$$\frac{1}{\lambda} \frac{Dv_0}{Dt_0} = -\text{grad}_0(g_0 z_0 + p_0) - \frac{gL}{kU} v_0 + \frac{1}{\lambda} \frac{\mu}{\rho UL} \nabla_0^2 v_0 \dots\dots\dots(2.5)$$

$$\text{div}_0 v_0 = 0 \dots\dots\dots(2.6)$$

相似律が成立するためには、proto type と model type のそれぞれの運動及び連続方程式が恒等的に等しくなければならないことから、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \text{const} \\ \frac{gL}{kU} &= \text{const} \\ \frac{1}{\lambda} \frac{\mu}{\rho UL} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

浸透現象は重力の場の粘性流と考えられるから、 F_r 数と R_0 数が共にいずれも定常であることが必要となつてくる。(2.5) 式の $gL/kU \cdot v_0$ は流動抵抗であり、 $1/\lambda \cdot \mu/\rho UL \cdot \nabla_0^2 v_0$ は粘性抵抗である。粘性抵抗は一般に流動抵抗より小さいと考えられるので、この場合流動抵抗を重視して相似を保たせることにする。

F_r 数は $F_r = U/\sqrt{gL}$ であるから suffix “m” を model type に、suffix “p” を proto type に付して、(2.7) 式の第 2 式は

$$\frac{gL_p}{k_p U_p} = \frac{gL_m}{k_m U_m}$$

となり、これに $U_p = F_r \sqrt{gL_p}$ 、 $U_m = F_r \sqrt{gL_m}$ を代入すると、

$$\frac{k_m}{k_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \dots\dots\dots(2.8)$$

すなわち浸透係数の比率は $\sqrt{L_m/L_p}$ となるように与えねばならない。

また時間のスケールをどうとるかという点については、 F_r 数を const にするために

$$F_r = \frac{U_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{U_p}{\sqrt{gL_p}}$$

従つて

$$\frac{L_m}{T_m} \frac{1}{\sqrt{L_m}} = \frac{L_p}{T_p} \frac{1}{\sqrt{L_p}}$$

$$\therefore \frac{T_m}{T_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \dots\dots\dots(2.9)$$

すなわち時間の縮尺は $\sqrt{L_m/L_p}$ にとる。

要するに (2.7) 式を成立させるために、空隙率 λ を一定にし、かつ浸透係数と時間の比率を $\sqrt{L_m/L_p}$ にとることによつて、相似を保たしめることとした。

2-4 実験結果と考察 実験結果の一例を図-3に示す。図-3に見られるような堤体底面沿いの浸透流速を6種類の洪水曲線(乾燥砂)について示せば、図-4のようになる。洪水継続時間が同じであつても、peakに達する時間によつて浸透距離の変ることは予想されるところであるが、図-4を見てわかるように、

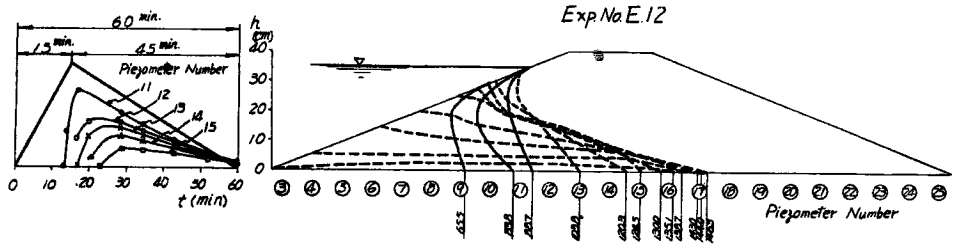


Fig. 3 Flood curve and stream line of seepage water (E 12)

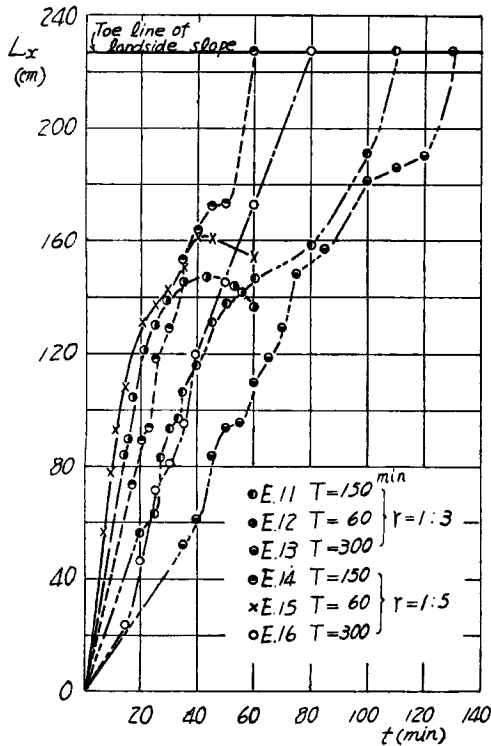


Fig. 4 Velocity of seepage water along the ground-surface

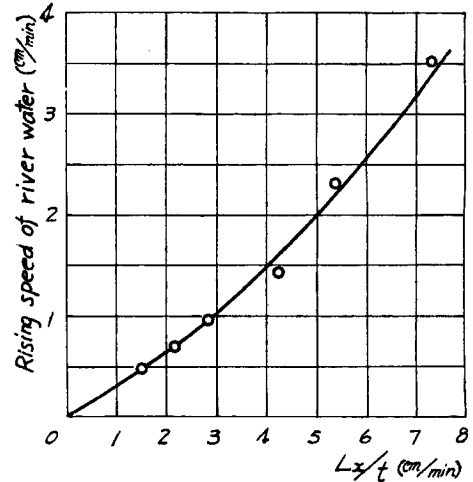


Fig. 5 Relation between the velocity of seepage water and the rising speed of river water

浸透水は増減水比が1:3のものより1:5の方が速く法尻に到達する。そのことは Darcy の法則 $v = k \cdot dh/dx$ において、水位上昇時間の短いほど dh/dx が大きくなり、 v が増大することに基因する。いま 図-4 を用いて縦軸に水位上昇速度、横軸に堤体底面沿いの浸透速度をとれば、図-5 のように下に凸の曲線となり、上

の事実が証明できる。すなわち 図-5 において、縦軸/横軸が動水勾配 dh/dx であり、これが水位上昇速度とともに大きくなることを示している。

また縦軸に $\max H$ 、横軸に表法先からの距離をとつて、 $\max H$ の減衰のようすを図示すれば 図-6 のようになる。図-6 から E12, E15 のように洪水継続時間が短かければ、浸透流が裏法尻に到達する前に洪水が終了するが、洪水継続時間がある程度以上に長くなれば、不透水性基礎の場合は必ず浸透流は裏法尻に現われる。そしてこの場合に、1:5の方が1:3より $\max H$ の減衰が緩やかなため、裏法面浸出点の位置が高くなり、間隙水圧による法面崩壊の危険も大きいことを意味する。このように洪水継続時間を一定とすれば、1:5の方が1:3より堤体安定上問題となる点が多い。

3. 非定常浸透に関する理論的考察

地下水浸透に関する Darcy の法則は

$$u_m = -\frac{k'g}{\nu} \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots(3.1)$$

連続方程式は

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_m)}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(3.2)$$

(3.1) 式を (3.2) 式に入れると

$$\lambda \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k'g}{\nu} \left\{ h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

いま $k = k'g/\nu$ とおいて、上式を書きかえると、

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \dots\dots\dots(3.3)$$

この微分方程式を解くために

$$h = H_m - H \dots\dots\dots(3.4)$$

とする。 H_m は外水位の最高水位を示し、直壁の場合を考える。

(3.4) 式によつて $h(x,t)$ を $H(x,t)$ に変換した微分方程式は

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (H_m - H) \frac{\partial H}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

この微分方程式の解を

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n^*(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A^n \cdot H_n(x,t) \dots\dots\dots(3.6) \end{aligned}$$

として (3.5) 式に入れると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{\partial H_n}{\partial t} &= \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(H_m - \sum_{n=1}^{\infty} A^n \cdot H_n \right) \sum_{n=1}^{\infty} A^n \frac{\partial H_n}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (H_m - AH_1 - A^2H_2 - A^3H_3 - \dots\dots\dots) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} A + \frac{\partial H_2}{\partial x} A^2 + \frac{\partial H_3}{\partial x} A^3 + \dots\dots\dots \right) \right\} \\ &= \frac{k}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ H_m \frac{\partial H_1}{\partial x} A + \left(H_m \frac{\partial H_2}{\partial x} - H_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) A^2 \right. \end{aligned}$$

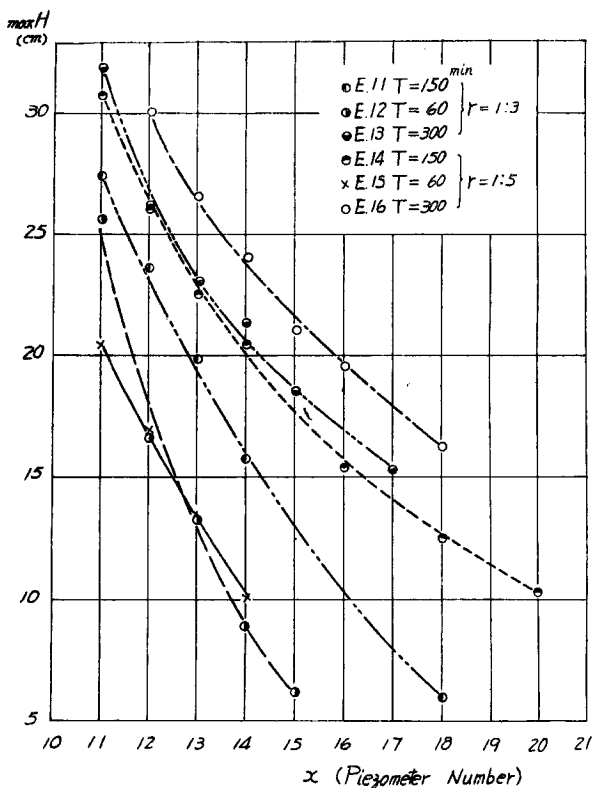


Fig. 6 Damping curve of maxH at each point in the levee

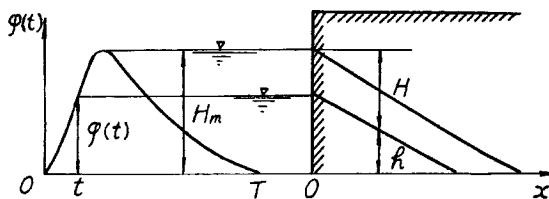


Fig. 7

$$+ \left(H_m \frac{\partial H_3}{\partial x} - H_1 \frac{\partial H_2}{\partial x} - H_2 \frac{\partial H_1}{\partial x} \right) A_3 + \dots \dots \dots \}$$

A^n の左右両辺の項を等しいとおくと,

$$A : \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{kH_m}{\lambda} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} \dots \dots \dots (3.7)$$

$$A^2 : \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{kH_m}{\lambda} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} - \frac{k}{2\lambda} \frac{\partial^2 H_1^2}{\partial x^2} \dots \dots \dots (3.8)$$

$$A^3 : \frac{\partial H_3}{\partial t} = \frac{kH_m}{\lambda} \frac{\partial^2 H_3}{\partial x^2} - \frac{k}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H_1 H_2) \dots \dots \dots (3.9)$$

これらの各微分方程式を、初期条件として

$$|H_1^*|_{t=0} = H_m \dots \dots \dots (3.10)$$

$$|H_2^*|_{t=0} = |H_3^*|_{t=0} = \dots \dots \dots = 0 \dots \dots \dots (3.11)$$

境界条件として

$$|H_1^*|_{x=0} = H_m - \varphi_1(t) = F_1(t) \dots \dots \dots (3.12)$$

$$|H_2^*|_{x=0} = -\varphi_2(t) \dots \dots \dots (3.13)$$

$$|H_3^*|_{x=0} = -\varphi_3(t) \dots \dots \dots (3.14)$$

として解く。

ただし外水位の変化は一般的に Fourier 級数で表わして,

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \int_0^T \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{T} d\lambda \right\} \sin \frac{n\pi t}{T}$$

計算の便のため

$$\Gamma_n = \frac{2}{T} \int_0^T \varphi(\lambda) \sin \frac{n\pi \lambda}{T} d\lambda \dots \dots \dots (3.15)$$

とすると,

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \sin \frac{n\pi t}{T} \dots \dots \dots (3.16)$$

従つて $\varphi_1(t) = \Gamma_1 \sin \frac{\pi}{T} t$, $\varphi_2(t) = \Gamma_2 \sin 2 \frac{\pi}{T} t$, $\dots \dots$ などを用意する。

(1) 第1近似解

微分方程式:(3.7)式

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{kH_m}{\lambda} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2}$$

に A をかけて,

$$a^2 = \frac{kH_m}{\lambda} \dots \dots \dots (3.17)$$

と書くと,

$$\frac{\partial H_1^*}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H_1^*}{\partial x^2} \dots \dots \dots (3.18)$$

これを

$$|H_1^*|_{t=0} = H_m$$

$$|H_1^*|_{x=0} = H_m - \varphi_1(t) = F(t)$$

の条件で解く。

そのためには、第1に

$$\left. \begin{aligned} |H_1^*|_{x=0} &= 0 \\ |H_1^*|_{t=0} &= H_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.19)$$

のもとに解いてみよう。

この解を次のように Fourier の積分型で表わすと、

$$H_1^*(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty H_1^*(\lambda, t) \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda \dots\dots\dots(3.20)$$

$$\frac{\partial H_1^*}{\partial t} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\partial H_1^*(\lambda, t)}{\partial t} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda$$

$$\frac{\partial^2 H_1^*}{\partial x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty (-\alpha^2) H_1^*(\lambda, t) \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda$$

となるから、(3.18)式に入れて

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial H_1^*(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \alpha^2 H_1^*(\lambda, t) \right\} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda = 0$$

従つて

$$\frac{\partial H_1^*(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \alpha^2 H_1^*(\lambda, t) = 0 \dots\dots\dots(3.21)$$

より $H_1^*(\lambda, t)$ を $|H_1^*|_{t=0} = H_m$ の条件で求めると、

$$H_1^*(\lambda, t) = H_m e^{-a^2 \alpha^2 t} \dots\dots\dots(3.22)$$

従つて(3.20)式は

$$\begin{aligned} H_1^*(x, t) &= \frac{2H_m}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 t} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda \\ &= \frac{H_m}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2 t}} \right\} d\lambda \dots\dots\dots(3.23) \end{aligned}$$

次に第2に

$$\left. \begin{aligned} |H_1^*|_{x=0} &= F(c) = \text{const} \\ |H_1^*|_{t=0} &= H_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.24)$$

の条件のもとに解くと、

$$H_1^*(x, t) = F(c) - \frac{H_m - F(c)}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2 t}} \right\} d\lambda \dots\dots\dots(3.25)$$

となるから、いま

$$\beta = \frac{\lambda - x}{2a\sqrt{t}} \dots\dots\dots(3.26)$$

とおくと、

$$H_1^*(x, t) = F(c) - \frac{H_m - F(c)}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ 2a\sqrt{t} \int_0^\infty e^{-\beta^2} d\beta - \int \frac{x}{2a\sqrt{t}} e^{-\beta^2} d\beta \right\}$$

$$=F(c) + \frac{2\{H_m - F(c)\}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2 d\beta} \dots\dots\dots(3.27)$$

この解は

$$\begin{cases} -\infty < t < 0, & |H_1^*|_{z=0} = 0 \\ 0 < t, & |H_1^*|_{z=0} = F(c) \end{cases}$$

の区域の解である。

従つて

$$\begin{cases} -\infty < t < \lambda, & |H_1^*|_{z=0} = 0 \\ \lambda < t, & |H_1^*|_{z=0} = F(c) \end{cases}$$

の解は、

$$H_1^*(x, t) = F(c) + \frac{2\{H_m - F(c)\}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\lambda}}} e^{-\beta^2 d\beta} \dots\dots\dots(3.28)$$

同じように

$$\begin{cases} -\infty < t < \lambda + \Delta\lambda, & |H_1^*|_{z=0} = 0 \\ \lambda + \Delta\lambda < t, & |H_1^*|_{z=0} = F(c) \end{cases}$$

の解は、

$$H_1^*(x, t) = F(c) + \frac{2\{H_m - F(c)\}}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-(\lambda+\Delta\lambda)}}} e^{-\beta^2 d\beta} \dots\dots\dots(3.29)$$

結局 $\lambda < t < \lambda + \Delta\lambda$ のみの区域の解は

$$H_1^*(x, t) = \left\{ F(c) + \frac{2\{H_m - F(c)\}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\lambda}}} e^{-\beta^2 d\beta} \right\} - \left\{ F(c) + \frac{2\{H_m - F(c)\}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-(\lambda+\Delta\lambda)}}} e^{-\beta^2 d\beta} \right\} \dots\dots\dots(3.30)$$

しかるに

$$H_m - F(c) = -F'(c) \text{ とおくと,}$$

$$F(c) = H_m + F'(c) \text{ となるから, 上式は}$$

$$H_1^*(x, t) = \left\{ H_m + F'(c) - \frac{2F'(c)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\lambda}}} e^{-\beta^2 d\beta} \right\}$$

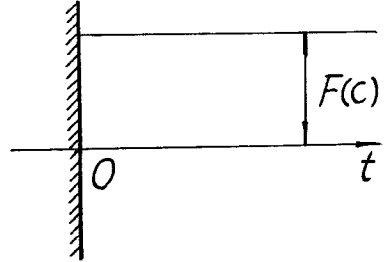


Fig. 8

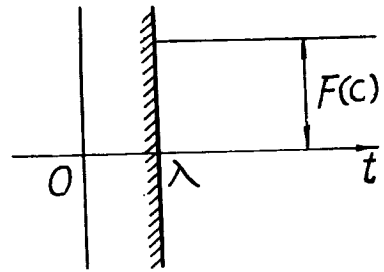


Fig. 9

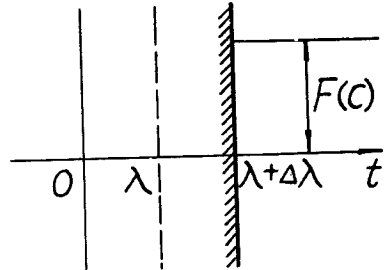


Fig. 10

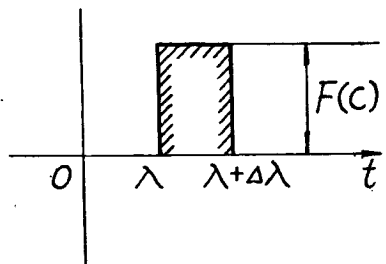


Fig. 11

$$\begin{aligned}
 & - \left\{ H_m + F'(c) - \frac{2F'(c)}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t-(\lambda+d\lambda)}}{e^{-\beta^2}} d\beta \right\} \\
 & = \left\{ F'(c) - \frac{2F'(c)}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t-\lambda}}{e^{-\beta^2}} d\beta \right\} - \left\{ F'(c) - \frac{2F'(c)}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t-(\lambda+d\lambda)}}{e^{-\beta^2}} d\beta \right\}
 \end{aligned}$$

いま

$$\phi(x, t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t}}{e^{-\beta^2}} d\beta \dots\dots\dots(3.31)$$

とおくと、Duhamel の原理によつて

$$H_m - H_1^*(x, t) = \int_0^t \phi_1(\lambda) \frac{\partial \phi(x, t-\lambda)}{\partial t} d\lambda \dots\dots\dots(3.32)$$

しかるに

$$\phi(x, t-\lambda) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t-\lambda}}{e^{-\beta^2}} d\beta$$

t で微分すると、

$$\frac{\partial \phi(x, t-\lambda)}{\partial t} = \frac{x e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}}}{2a\sqrt{\pi} (t-\lambda)^{3/2}}$$

(3.32) 式は

$$H_m - H_1^*(x, t) = \int_0^t \phi_1(\lambda) \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}}}{(t-\lambda)^{3/2}} d\lambda$$

いま

$$\beta = \frac{x}{2a\sqrt{t-\lambda}} \dots\dots\dots(3.33)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
 H_m - H_1^*(x, t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x}{2a\sqrt{t}} e^{-\beta^2} \Gamma_1 \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Gamma_1 \int_0^\infty e^{-\beta^2} \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta - \Gamma_1 \int_0^x \frac{2a\sqrt{t}}{e^{-\beta^2}} \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta \right\} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Gamma_1 \left\{ \sin \frac{\pi}{T} t \int_0^\infty e^{-\beta^2} \cos \frac{x^2}{4a^2\beta^2} d\beta - \cos \frac{\pi}{T} t \int_0^\infty e^{-\beta^2} \sin \frac{x^2}{4a^2\beta^2} d\beta \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \Gamma_1 \int_0^x \frac{2a\sqrt{t}}{e^{-\beta^2}} \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta \right\} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \Gamma_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2T}} \frac{x}{a}} \sin \left(\frac{\pi}{T} t - \sqrt{\frac{\pi}{2T}} \frac{x}{a} \right) \right.
 \end{aligned}$$

$$-\Gamma_1 \int_0^x 2a\sqrt{t} e^{-\beta^2} \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta \}$$

従つて第1近似解は

$$H_1^*(x, t) = H_m - \Gamma_1 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2T}} \frac{x}{a}} \sin \left(\frac{\pi}{T} t - \sqrt{\frac{\pi}{2T}} \frac{x}{a} \right) + \frac{2\Gamma_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x 2a\sqrt{t} e^{-\beta^2} \sin \frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta \dots\dots\dots(3.34)$$

となる。

(2) 第2近似解

微分方程式：(3.8)式

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{kH_m}{\lambda} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} - \frac{k}{2\lambda} \frac{\partial^2 H_1^2}{\partial x^2}$$

に A^2 をかけて $H_2^* = A^2 H_2$ とすれば、

$$\frac{\partial H_2^*}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H_2^*}{\partial x^2} - \frac{a^2}{2H_m} \frac{\partial^2 H_1^{*2}}{\partial x^2} \dots\dots\dots(3.35)$$

この式を

$$\left. \begin{aligned} |H_2^*(x, t)|_{x=0} &= -\Gamma_2 \sin 2 \frac{\pi}{T} t = F_2(t) \\ |H_2^*(x, t)|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

の条件のもとに解く。

このために $H_2^*(x, t)$ を2つの解 $H_2^{*'} & H_2^{*''}$ に分けて、

$$H_2^*(x, t) = H_2^{*'}(x, t) + H_2^{*''}(x, t) \dots\dots\dots(3.36)$$

以下 * を省いて $H_2^* = H_2$ として取扱う。

$H_2'(x, t)$ は

$$\frac{\partial H_2'}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H_2'}{\partial x^2} \dots\dots\dots(3.37)$$

$$\left. \begin{aligned} |H_2'|_{x=0} &= F_2(t) \\ |H_2'|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.38)$$

の条件で解き、 $H_2''(x, t)$ は

$$\frac{\partial H_2''}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H_2''}{\partial x^2} + Q(x, t) \dots\dots\dots(3.39)$$

$$\text{ただし } Q(x, t) = -\frac{a^2}{2H_m} \frac{\partial^2 H_1^{*2}}{\partial x^2} \dots\dots\dots(3.40)$$

$$\left. \begin{aligned} |H_2''|_{x=0} &= 0 \\ |H_2''|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.41)$$

の条件で解く。

まず $H_2'(x, t)$ の解は、第1近似解の $\bar{H}_m = 0$ とした特別の場合だから、(3.34)式から

$$\begin{aligned}
 H_2'(x, t) = & -\Gamma_2 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{a}} \sin\left(2\frac{\pi}{T}t - \sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{a}\right) \\
 & + \frac{2\Gamma_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t}}{a} e^{-\beta_2} \sin 2\frac{\pi}{T}\left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2}\right) d\beta \dots\dots\dots(3.42)
 \end{aligned}$$

として与えられる。

次に $H_2''(x, t)$ を求めるために、 $Q(x, t)$ 及び $H_2''(x, t)$ を Fourier 積分で表わして

$$Q(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty Q(\lambda, t) \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda \dots\dots\dots(3.43)$$

$$H_2''(x, t) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty H_2''(\lambda, t) \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda \dots\dots\dots(3.44)$$

とする。(3.39)式にこれらを代入すると、

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \left\{ \frac{\partial H_2''(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \alpha^2 H_2(\lambda, t) - \frac{2}{\pi} Q(\lambda, t) \right\} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda = 0$$

となるから、

$$\frac{\partial H_2''(\lambda, t)}{\partial t} + a^2 \alpha^2 H_2(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} Q(\lambda, t) \dots\dots\dots(3.45)$$

を $|H_2''(\lambda, t)|_{t=0} = 0$ の条件で解くと、

$$H_2''(\lambda, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-a^2 \alpha^2 (t-\mu)} Q(\lambda, \mu) d\mu \dots\dots\dots(3.46)$$

となるから、(3.44)式は

$$\begin{aligned}
 H_2''(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^t d\mu \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty Q(\lambda, \mu) e^{-a^2 \alpha^2 (t-\mu)} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\lambda \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^t d\mu \int_0^\infty Q(\lambda, \mu) d\lambda \int_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 (t-\mu)} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\alpha
 \end{aligned}$$

しかるに

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 (t-\mu)} \sin \alpha x \cdot \sin \alpha \lambda \cdot d\alpha &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-a^2 \alpha^2 (t-\mu)} \{ \cos \alpha(x-\lambda) - \cos \alpha(x+\lambda) \} d\alpha \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{t-\mu}} \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2(t-\mu)}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2(t-\mu)}} \right\}
 \end{aligned}$$

であるから、

$$H_2''(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\mu}{\sqrt{t-\mu}} \int_0^\infty Q(\lambda, \mu) \left\{ e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2(t-\mu)}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2(t-\mu)}} \right\} d\lambda$$

となる。いま $\phi(\lambda, \mu) = e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2(t-\mu)}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2(t-\mu)}}$ を Maclaurine 展開すると、

$$\phi(\lambda, \mu) \doteq \left\{ 1 + \frac{\lambda x}{2a^2 t} - \frac{x^2 \mu}{4a^2 t^2} \right\} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} - \left\{ 1 - \frac{\lambda x}{2a^2 t} - \frac{x^2 \mu}{4a^2 t^2} \right\} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{\lambda x}{a^2 t} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

となるから、

$$H_2''(x, t) = \frac{1}{4aH_m\sqrt{\pi}} \frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{t} \int_0^t \frac{d\mu}{\sqrt{t-\mu}} \int_0^\infty \lambda \frac{\partial^2 H_1^{*2}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2} d\lambda$$

しかるに

$$\int_0^\infty \lambda \frac{\partial^2 H_1^{*2}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2} d\lambda = \left| \lambda \frac{\partial H_1^{*2}}{\partial \lambda} \right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial H_1^{*2}}{\partial \lambda} d\lambda = \left| \frac{\partial H_1^{*2}}{\partial \lambda} \right|_0^\infty - \left| H_1^{*2} \right|_0^\infty$$

であつて、第1近似解から

$$\begin{aligned} \left| \lambda \frac{\partial H_1^{*2}}{\partial \lambda} \right|_0^\infty &= 0 \\ \left| H_1^{*2} \right|_0^\infty &= H_m^2 - \left(H_m - \Gamma_1 \sin \frac{\pi}{T} t \right)^2 = 2H_m\Gamma_1 \sin \frac{\pi}{T} t - \Gamma_1^2 \sin^2 \frac{\pi}{T} t \end{aligned}$$

従つて、

$$H_2''(x, t) = \frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{4aH_m\sqrt{\pi}t} \left\{ 2H_m\Gamma_1 \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi}{T} \mu}{\sqrt{t-\mu}} d\mu - \Gamma_1^2 \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{\pi}{T} \mu}{\sqrt{t-\mu}} d\mu \right\} \dots\dots\dots (3.47)$$

$I_1 = \int_0^t \frac{\sin \frac{\pi}{T} \mu}{\sqrt{t-\mu}} d\mu$ の計算 :

$t-\mu = \alpha^2$ とおいて

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \int_0^{\sqrt{t}} \sin \frac{\pi}{T} (t-\alpha^2) d\alpha \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{T} t \int_0^{\sqrt{t}} \cos \frac{\pi}{T} \alpha^2 d\alpha - 2 \cos \frac{\pi}{T} t \int_0^{\sqrt{t}} \sin \frac{\pi}{T} \alpha^2 d\alpha \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{T} t \int_0^{\sqrt{t}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n!} \left(\frac{\pi}{T} \alpha^2 \right)^{2n} \right\} d\alpha \\ &\quad - 2 \cos \frac{\pi}{T} t \int_0^{\sqrt{t}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{T} \alpha^2 \right)^{2n+1} \right\} d\alpha \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{T} t \left\{ \sqrt{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\frac{\pi}{T} \right)^{2n} \frac{(\sqrt{t})^{4n+1}}{4n+1} \right\} \\ &\quad - 2 \cos \frac{\pi}{T} t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{T} \right)^{2n+1} \frac{(\sqrt{t})^{4n+3}}{4n+3} \end{aligned}$$

$I_2 = \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{\pi}{T} \mu}{\sqrt{t-\mu}} d\mu$ の計算 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(1 - \cos 2 \frac{\pi}{T} \mu)}{\sqrt{t-\mu}} d\mu = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\mu}{\sqrt{t-\mu}} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\cos 2 \frac{\pi}{T} \mu}{\sqrt{t-\mu}} d\mu \\ &= \sqrt{t} - \cos 2 \frac{\pi}{T} t \left\{ \sqrt{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(2 \frac{\pi}{T} \right)^{2n} \frac{(\sqrt{t})^{4n+1}}{4n+1} \right\} \\ &\quad - \sin 2 \frac{\pi}{T} t \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{T} \right)^{2n+1} \frac{(\sqrt{t})^{4n+3}}{4n+3} \right\} \end{aligned}$$

以上の結果、

$$H_2''(x, t) = -\frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{4aH_m\sqrt{\pi t}} \{2H_m\Gamma_1 I_1 - \Gamma_1^2 I_2\} \dots\dots\dots(3.48)$$

として求めることができる。

第2近似解は*を再び用いて、

$$H_2^*(x, t) = H_2^{*'}(x, t) + H_2^{*''}(x, t) = -\Gamma_2^2 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{a}} \sin 2\frac{\pi}{T}t - \sqrt{\frac{\pi}{T}} \frac{x}{a} + \frac{2\Gamma_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{2a\sqrt{t}}{e^{-\beta^2}} \sin 2\frac{\pi}{T} \left(t - \frac{x^2}{4a^2\beta^2} \right) d\beta + \frac{xe^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{4aH_m\sqrt{\pi t}} (2H_m I_1 - \Gamma_1 I_2) \Gamma_1 \dots\dots(3.49)$$

この解は $|H_2^*(x, t)|_{x=0} = -\Gamma_2 \sin \frac{\pi}{T}t$ であり、 $|H_2^*(x, t)|_{t=0} = 0$ となつて初期条件及び境界条件をみたしていることがわかる。

この研究を行うにあつて所員赤井助教授、大同助手及び京大大学院学生陣内孝雄君らの多大な協力援助をうけたことを感謝するものである。

参 考 文 献

- 1) J. Dupuit : Études Théoretiques et Pratiques sur le Movement des Eaux dans les Canaux Decouverts et à Travers les Terrains Perméables, Dunod, Paris, 1863.
Forchheimer: Hydraulik, 1930:
- 2) Dachler: Grundwasserströmung, S. 62~111.
- 3) Schoklitsch: Der Wasserbau, Bd. I, S. 184~188.
- 4) A. Casagrande: Seepage through Dams, Jour. New Eng. Water Works Assoc. LI, 131, 1937.
- 5) Maskat: The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, McGraw-Hill, New York, 1937.
- 6) Hamel: Über Grundwasserströmung, Z.A.M.M., Bd. XIV, 1934.
- 7) 前川章：堤内滲透流に関する一解析，農土研，21-4，頁1~7。
- 8) 沢田敏男：滲透流の流動に関する研究，農土研，21-5，頁5~15，21-6，頁26~34。
- 9) 物部長穂：浸潤作用に対する土堤の安定について，土木学会誌，4-2，頁191-245。
- 10) 田中宏平：干拓堤防内の不定流について，農土研，24-2，頁7~10。
- 11) 高田京一：海面干拓堤防の非線型非定常流の解法，農土研，24-5。
- 12) 内田茂男：遷移点を越えた非線型滲透流，土木学会誌，38-6，頁36~40。
自由境界を有する非定常滲透流について，土木学会誌，37-2，頁10~14。
- 13) 前川章：干拓堤防内滲透に関する一解析，農土研，22-4，頁12~17。
- 14) 沢田敏男：非定常滲透流を解く一つの試み，農土研，23-1，頁20~23。
- 15) Davison : On the Steady Motion of Ground Water through a Wide Prismatic Dam, Phil. Mag. and Journal Science, 1936.
- 16) 近坂百一：地下水の2次元不定流に関する近似解（昭和24年5月），未発表論文。
- 17) 建設省編：建設省統計年表。
- 18) 中村充：浸透水運動の基礎理論（Ⅱ），農土研，24-4，頁32~36。