非定常ランダム応答の等価線形化解法

小 堀 鐸 二・南 井 良一郎

LINEARIZATION TECHNIQUE FOR EVALUATING THE ELASTO-PLASTIC RESPONSE OF A STRACTURAL SYSTEM TO NON-STATIONARY RANDOM EXCITATIONS

By *Takuji* KOBORI and *Ryoichiro* MINAI

Synopsis

In order to estimate the non-linear response of an elasto-plastic system subjected to Gaussian non-stationary random excitations, the linearization technique of a hysteresis loop, that is applicable in the non-stationary stochastic process, is discussed in this paper. From the expected number of crossing over the response level per unit time, the average frequency as well as the probability density distribution function of peak amplitude in the non-stationary Gaussian process are obtained. By using these quantities, the linearized dynamic parameters of a stable bi-linear hysteresis loop are determined according to the least mean squared error method. As a result, the step by step integration procedure based upon this linearization technique is presented for the numerical evaluation of the non-stationary random response of a multi-input and -output discrete system with the bi-linear hysteretic characteristics.

1. まえがき

建築構造物の耐震設計は地震発生頻度の小さい烈ないし激震外乱群に対しては，外乱安全率を大きく，応答安全率を小さく選んだ終局応答設計法，地震発生頻度の比較的大きい中ないし強震外乱群に対しては，外乱安全率を小さく，応答安全率を比較的大きく選んだ許容応答設計法を適用し，両者の設計法をともに満足させることが健全であると考えられるが，特に後者の設計法において外乱安全率を小さく選ぶことは地震外乱群をなるべく正確に想定することを要し，また応答安全率を比較的大きく採用することは地盤一構造物系各部の許容応答値を濾波特性の鋭い弾性域あるいは塑性挙動の小さい領域内に抑えることになり，従って構造物系の地震応答は入力外乱の波形の特性，特にスペクトル性状を鋭敏に反映することになるので，地震外乱群を構造物の建設地の地震活動性と地盤条件に応じて確率統計的な立場から妥当に想定し，確率統計的地震応答解析を適用するのが望ましいと言える[1]。この場合，地震外乱波は本来非定常的であり，その確率統計的性質が時間とともに変動するものと考えるのが普通であろう。また，たとえ地震外乱波が比較的継続時間の長い定常外乱の一部と見做し得たとしても，構造物系は静止の状態から挙動を始めるのであり，また比較的応答安全率を大きく選ぶ許容応答設計法を対象としては構造物系に大きな減衰性を期待することはできないので，過渡応答が問題となり，従って，いずれにしても非定常確率過程の問題として扱うのが正当であろう。また，一般に鋼や鉄筋コンクリート等の靱性材料からなる構造物や軟弱地盤上の構造物において，特に弾性限変形量の小さい靱性材料からなる壁，筋違等の耐震部材や，剛な地下構造物ないし基礎盤と基礎地

盤との間の境界層地盤は地震時に比較的塑性挙動を示し易いことを考えれば，中ないし強震外乱群に対する地盤―構造物系の確率統計的地震応答解析を非定常かつ非線形過程で実施する必要もあろう。

一方，地震応答解析においては，地盤―構造物系各部の耐震安全性の尺度によって出力地震応答を定義しなければならないが，かような耐震安全性の確率統計的尺度として，非定常過程を対象とした応答レベル超過期待回数や応答レベル超過確率等が考えられる[1]。前者については，正規性の前提のもとに，一般に零ならざる平均応答と平均応答速度をもつ非定常確率過程を対象として，単位時間当りの応答レベル超過期待回数の解析的表現が既に得られている[1),2]。また，後者についても既に非定常過程を対象として論議され，応答レベル超過期待回数が応答レベル超過確率の上界を与えることが明らかにされている[3]。

また，非定常確率過程に属するランダム入力を受ける動力学系の確率統計的出力応答の評価に関連して，少くとも正規性の前提のもとで先に述べた耐震安全性の確率統計的尺度の算定の基本量となり得る非定常過程における共分散ならびに対応する1次元および2次元スペクトル密度について論じ，一般に変数係数をもつ線形不連続動力学系を対象として，非定常過程の有界時間領域で定義された局所共分散マトリックス，ならびにそれとフーリェ変換の対をなす1次元および2次元局所スペクトル密度マトリックスの入，出力関係を明らかにしてきた[4]。本論文ではさらに，一般に零でない平均値をもつ正規非定常過程に属するランダム入力と弾塑性履歴特性をもつ非線形動力学系を対象として，応答レベル超過期待回数等の耐震安全性の確率統計的尺度を評価するための確率統計的基本量としての非定常ランダム出力応答ならびにその速度応答の平均ベクトルおよび共分散マトリックスの等価線形化手法に基づく step by step の数値解析法について論ずるものである。

一般に非線形特性を含む動力学系の等価線形化に関しては，非線形特性がその argument の1価関数で与えられる場合には，定常，非定常確率過程には無関係に R.C. Booton 氏の方法が通用できるし[5),6),7]，また定常確率過程を対象として，予め形状のパラメーターを定め得る履歴特性を含む非線形系の等価線形化手法に関しては既に，棚木，砂原，中溝，平川の諸氏によって得られている[8]。また，構造物系における履歴特性のように，履歴の形状を規定するすべてのパラメーターを入力と無関係に予め与え得ない場合に対しても，定常エルゴード過程の場合，bi-linear 形履歴特性を対象として，T.K. Caughey 氏の slowly varying を前提とする平均法と正規定常過程の極値振巾確率密度分布関数としての Rayleigh 形密度関数を用いた等価線形化法がある[9]。然し乍ら，非定常確率過程を対象とした弾塑性履歴特性の等価線形化に関しては未だ有力な方法は無いと言える。

本論文では安定な bi-linear 形履歴特性を含む弾塑性不連続動力学系各部の応答レベル超過期待回数を非定常状態において評価するため，先ず正規性の前提のもとに単位時間当りの応答レベル超過期待回数の解析的表現から非定常過程における平均周波数と極値振巾密度分布関数の解析的表現を導き，それらを用いて安定な bi-linear 形履歴特性を履歴入力とその1階導関数について線形，履歴振巾パラメーターについて quasi-linear な関数に slowly varying を前提とする局所的な意味での時間方向の履歴平均法[10]によって近似し，而る後，非定常過程において空間方向に平均することによって bi-linear 形履歴特性を時間の関数としての係数を含む等価線形化関数に置換する。次いで，この等価線形化関数を含む変数係数の不連続動力学系の等価線形化単位衝撃マトリックスを用いて，step by step に出力応答とその1階導関数に関する平均ベクトルならびに共分散マトリックスを非定常状態において評価する数値解析法が求められる。ここで論ずる bi-linear 形履歴特性の等価線形化の方法は定常確率過程における T.K. Caughey 氏の方法の非定常確率過程への拡張に相当するものであり，また step by step の確率統計的非定常非線形応答評価法は既に棚木，砂原，添田諸氏によって用いられている方法[11),12),13]に準じてそれに若干の修正を加えたものである。

2. 正規性非定常応答の応答レベル超過期待回数，平均周波数，および極値振巾確率密度分布関数

非定常ランダムな地震外乱群を受ける地盤―構造物系各部の地震応答が，ある応答値を非定常状態を通じ

て超過する期待回数は比較的高応力または大変形時の低周波数疲労破壊に関連して耐震安全性の一つの確率統計的尺度になり得る。すなわち，一方では瞬時的な大応力あるいは大変形に基づく破壊現象に対応して，全非定常過程を通じて系の応答が与えられた許容応答値を超過する確率が，系各部にわたって一様にある値以下になるように系の動力学特性が設計されねばならないとともに，非定常過程を通じて別に前者の許容応答値より一般には小さく選んだ応答値を超過する期待回数が，対応して定められた許容回数以下に系の各部にわたってなるべく一様に収まるよう設計することが望ましい。本節では先ず上に述べた意味で耐震安全性の確率統計的尺度として地震応答解析で直接構造物系の出力地震応答として評価されるべき応答レベル超過期待回数の表現を主として正規非定常過程の場合につき論じ，次いで単位時間当りの応答レベル超過期待回数から，安定な履歴を含む弾塑性動力学系の非定常過程における等価線形化に有用な平均周波数および極値振巾確率密度分布関数の解析的表現を正規性の前提のもとに誘導する。

2. 1. 応答レベル超過期待回数

零平均値の正規定常確率過程における応答レベル超過期待回数の解析的表現は既に S.O. Rice 氏によって得られ[14]，また A.C. Eringen 氏によって耐震問題に応用されている[15]。ここでは，一般に零平均値でない正規非定常入力を受ける一般に零ならざる初期条件をもつ動力学系を想定し，動力学系の非線形性は弱く，従って出力応答の正規性が近似的に成立すると仮定して，一般に，出力応答およびその速度応答が平均値の零でない正規非定常過程に属する場合の応答レベル超過期待回数の表現につき述べる。

一般に動力学系のある部分のある確率統計的応答が，応答レベル $|\eta|=\zeta$ を非定常状態を通じて，時間，τ の有限区間，${}_0R^1_\tau$ に超過する期待回数は S.O. Rice 氏の式[14]を拡張した次式によって評価される。

$$N(\zeta\,;\,{}_0R^1_\tau)=\int_{{}_0R^1_\tau} I(\zeta\,;\,\tau)d\tau \quad\cdots\cdots(1)$$

$$I(\zeta\,;\,\tau)=\int_0^\infty \dot{\eta}w(\zeta,\dot{\eta}\,;\,\tau)d\dot{\eta}+\int_0^\infty \dot{\eta}w(-\zeta,-\dot{\eta}\,;\,\tau)d\dot{\eta} \quad\cdots\cdots(2)$$

ここで，$I(\zeta\,;\,\tau)$ は τ における単位時間当りの応答レベル ζ の超過期待回数であり，(2)式の第1項は，正側レベルを正の速度で単位時間に超過する期待回数，第2項は負側レベルを負の速度で超過する期待回数である。また，$w(\eta,\dot{\eta}\,;\,\tau)$ は時間，τ における応答，η とその1階導関数，すなわち速度応答，$\eta^{(1)}_\tau(\tau)=\dot{\eta}$ に関する2次元同時確率密度分布関数であり，正規性を仮定すれば次式のように表わされる。

$$w(\eta,\dot{\eta}\,;\,\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)\,{}_0K_{\eta\eta}\,{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(\eta-E\eta)^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-2\rho\frac{(\eta-E\eta)(\dot{\eta}-E\dot{\eta})}{\sqrt{{}_0K_{\eta\eta}\,{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}+\frac{(\dot{\eta}-E\dot{\eta})^2}{{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right]\right) \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで，

$$\rho=\frac{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}{\sqrt{{}_0K_{\eta\eta}\,{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}} \quad\cdots\cdots(4)$$

(3)，(4)の ${}_0K_{\eta\eta}$，${}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}$ は非定常応答，η およびその1階導関数，$\dot{\eta}$ の時間，τ における分散，${}_0K_{\eta\dot{\eta}}={}_0K_{\dot{\eta}\eta}$ は η および $\dot{\eta}$ の τ における共分散であり，また，$E\eta$，$E\dot{\eta}$ は夫々，η および $\dot{\eta}$ の平均値を示す。E は空間平均を示す記号であり，従って，η および $\dot{\eta}$ の分散および共分散は，E を用いて次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}&{}_0K_{\eta\eta}=E(\eta-E\eta)^2,\quad {}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}=E(\dot{\eta}-E\dot{\eta})^2\\&{}_0K_{\eta\dot{\eta}}={}_0K_{\dot{\eta}\eta}=E(\eta-E\eta)(\dot{\eta}-E\dot{\eta})\end{aligned} \quad\cdots\cdots(5)$$

(5)式に示される出力の2次の平均量は，例えば不連続動力学系の出力ベクトル，$\{\eta(\tau)\}$ に関する，時間，(τ,τ) を含む任意の2次元有限時間領域，${}_0R^2_{\tau_1\tau_2}$ において定義された局所共分散マトリックス[4]，$[{}_0K(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_0R^2_{\tau_1\tau_2})]$ あるいは全2次元時間領域，${}_0R^2_{\tau_1\tau_2}=R^2_\infty$ における共分散マトリックス，$[{}_0K(\tau_1,\tau_2)]$ の対角要素，${}_0K^i_i(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_0R^2_{\tau_1\tau_2})$ あるいは ${}_0K^i_i(\tau_1,\tau_2)$ を用いて次式のように表わされる。

$${}_0K_{\eta\eta}={}_0K^i_i(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_1\tau_2})={}_0K^i_i(\tau,\tau)$$

$$
\begin{aligned}
{}_0K_{\eta\dot\eta} = {}_0K_{\dot\eta\eta} &= {}_0K^{i(1)}_{i\tau_2}(\tau_1, \tau_2 ;\ {}_0R^2_{\tau_1\tau_2})|_{\tau_1=\tau_2=\tau} = {}_0K^{i(1)}_{i\tau_2}(\tau_1, \tau_2)|_{\tau_1=\tau_2=\tau} \\
&= {}_0K^{i(1)}_{i\tau_1}(\tau_1, \tau_2 ;\ {}_0R^2_{\tau_1\tau_2})|_{\tau_1=\tau_2=\tau} = {}_0K^{i(1)}_{i\tau_1}(\tau_1, \tau_2)|_{\tau_1=\tau_2=\tau} \\
{}_0K_{\dot\eta\dot\eta} &= {}_0K^{i(1)(1)}_{i\tau_1\ \tau_2}(\tau_1, \tau_2 ;\ {}_0R^2_{\tau_1\tau_2})|_{\tau_1=\tau_2=\tau} = {}_0K^{i(1)(1)}_{i\tau_1\ \tau_2}(\tau_1, \tau_2)|_{\tau_1=\tau_2=\tau} \quad \cdots\cdots(6)
\end{aligned}
$$

ただし，　$(\tau, \tau)\epsilon_0R^2_{\tau_1\tau_2}$

例えば，任意の非定常確率過程の有限部分を入力として受け，零ならざる確率統計的な初期条件を有する実数変数係数をもつ不連続動力学系の出力応答ベクトル，$\{\eta(\tau)\}=\{\eta^{(0)}_{\ \tau}(\tau)\}$ およびその速度応答ベクトル，$\{\dot\eta(\tau)\}=\{\eta^{(1)}_{\ \tau}(\tau)\}$ は次式によって表わされる。

$$\{\eta^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}=\{\eta_d{}^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}+\{\eta_m{}^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\{\eta_d{}^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}=\int_{-\infty}^{\tau}[g^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau,\mu)]\,D(\mu ;\ {}_IR^1_\mu)\{f_d(\mu)\}d\mu+[i^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau,\mu_L)]\{i_d(\mu_L)\} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$\{\eta_m{}^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}=\int_{-\infty}^{\tau}[g^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau,\mu)]\,D(\mu ;\ {}_IR^1_\mu)\{f_m(\mu)\}d\mu+[i^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau,\mu_L)]\{i_m(\mu_L)\} \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\{f(\mu)\}=\{f_d(\mu)\}+\{f_m(\mu)\} \quad \cdots\cdots(10)$$

ここで，$\{\eta^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}$，$\{\eta_d{}^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}$，$\{\eta_m{}^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau)\}$ は $\lambda=0$，1 に対応して夫々，応答および応答速度に関する出力ベクトルと空間平均，Eに関する偏差および平均ベクトル，$\{f(\mu)\}$，$\{f_d(\mu)\}$，$\{f_m(\mu)\}$ は全１次元時間領域，${}_IR^1_\mu=R^1_\infty$ で定義された入力ベクトルおよびその偏差ならびに平均ベクトル，$D(\mu ;\ {}_IR^1_\mu)$ は動力学系が $\{f(\mu)\}$ を受ける有限時間閉領域，${}_IR^1_\mu=[\mu_L, \mu_U]$ の内部領域で１，その他で０，境界領域で 1/2 と定義された１次元の cutoff operator である。また，

$$\{i(\mu_L)\}=\left\{\begin{matrix}\{\eta(\mu_L)\}\\ \{\eta^{(1)}_{\ \tau}(\mu_L)\}\end{matrix}\right\}=\{i_d(\mu_L)\}+\{i_m(\mu_L)\} \quad \cdots\cdots(11)$$

は，${}_IR^1_\mu$ の下限，μ_L における初期条件ベクトルであり，$\{i_d(\mu_L)\}$，$\{i_m(\mu_L)\}$はその偏差および平均ベクトルを示す。なお，$[g^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau,\mu)]$，$[i^{(\lambda)}_{\ \tau}(\tau,\mu_L)]$ は $\lambda=0$ の場合，変数係数動力学系の出力応答，$\{\eta(\tau)\}$ に関する単位衝撃応答マトリックスおよび単位初期条件応答マトリックスを示し，$\lambda=1$ に対応して $[g(\tau,\tau)]=[0]$ の条件のもとに速度応答，$\{\eta^{(1)}_{\ \tau}(\tau)\}$ に関する単位衝撃応答マトリックならびに単位初期条件応答マトリックスを示す。通常，変位系統の出力応答を対象とすれば，$[g(\tau,\tau)]=[0]$ は成立つ。

従って，出力応答，$\{\eta(\tau)\}$ およびその１階導関数，$\{\eta^{(1)}_{\ \tau}(\tau)\}$ に関する長方形時間領域，${}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2}$ における局所共分散マトリックは夫々次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
[{}_0K_{\eta\eta}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] &= [{}_0K(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})]=D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})[{}_0K(\tau_1,\tau_2)] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})E(\{\eta_d(\tau_1)\}\{\eta_d(\tau_2)\}^T) \quad \cdots\cdots(12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[{}_0K_{\eta\dot\eta}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] &= [{}_0K^{(1)}_{\tau_2}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})[{}_0K^{(1)}_{\tau_2}(\tau_1,\tau_2)] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})E(\{\eta_d(\tau_1)\}\{\eta_d{}^{(1)}_{\tau_2}(\tau_2)\}^T) \quad \cdots\cdots(13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[{}_0K_{\dot\eta\eta}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] &= [{}_0K^{(1)}_{\tau_1}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})[{}_0K^{(1)}_{\tau_1}(\tau_1,\tau_2)] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})E(\{\eta_d{}^{(1)}_{\tau_1}(\tau_1)\}\{\eta_d(\tau_2)\}^T) \quad \cdots\cdots(14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] &= [{}_0K^{(1)(1)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})[{}_0K^{(1)(1)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)] \\
&= D(\tau_1,\tau_2 ;\ {}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})E(\{\eta_d{}^{(1)}_{\tau_1}(\tau_1)\}\{\eta_d{}^{(1)}_{\tau_2}(\tau_2)\}^T) \quad \cdots\cdots(15)
\end{aligned}
$$

ここで，λ_1, λ_2 を0あるいは1として，

$$[{}_0K^{(\lambda_1)(\lambda_2)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\tau_1}d\mu_1\int_{-\infty}^{\tau_2}d\mu_2[g^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_1)][{}_IK(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2})][g^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_2)]^T$$
$$+\int_{-\infty}^{\tau_1}d\mu_1[g^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_1)][{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L},{}_IR^1_{\mu_1})][i^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_{2L})]^T$$
$$+[i^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_{1L})]\int_{-\infty}^{\tau_2}d\mu_2[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2,{}_IR^1_{\mu_2})][g^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_2)]^T$$
$$+[i^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_{1L})][{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})][i^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_{2L})]^T \quad\cdots\cdots(16)$$

なお，

$$[{}_IK(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2})]=D(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2})[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]$$
$$=D(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2})E(\{f_d(\mu_1)\}\{f_d(\mu_2)\}^T) \quad\cdots\cdots(17)$$

$$[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L}\,;\,{}_IR^1_{\mu_1})]=D(\mu_1\,;\,{}_IR^1_{\mu_1})[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]$$
$$=D(\mu_1\,;\,{}_IR^1_{\mu_1})E(\{f_d(\mu_1)\}\{i_d(\mu_{2L})\}^T) \quad\cdots\cdots(18)$$

$$[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2\,;\,{}_IR^1_{\mu_2})]=D(\mu_2\,;\,{}_IR^1_{\mu_2})[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]$$
$$=D(\mu_2\,;\,{}_IR^1_{\mu_2})E(\{i_d(\mu_{1L})\}\{f_d(\mu_2)\}^T) \quad\cdots\cdots(19)$$

$$[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]=E(\{i_d(\mu_{1L})\}\{i_d(\mu_{2L})\}^T) \quad\cdots\cdots(20)$$

また，上の諸式で，添字，0, I は夫々出力および入力に関する量であることを示し，$\{\ \ \}^T$, $[\ \ ]^T$ は転置行列を示す。なお，$D(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})$ および $D(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2})$ は出力および入力に関する2次元長方形閉領域，${}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2}$, ${}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2}$ の内部領域で1，その他で0，境界領域で1/2と定義された2次元の cutoff operator である。なお，一般に実数過程の共局共分散マトリックスに関しては次式が成立する。

$$[{}_0K_{\eta\eta}(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})]^T=[{}_0K_{\eta\eta}(\tau_2,\tau_1\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_2\tau_1})] \quad\cdots\cdots(21)$$

$$[{}_0K_{\eta\dot\eta}(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})]^T=[{}_0K_{\dot\eta\eta}(\tau_2,\tau_1\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_2\tau_1})] \quad\cdots\cdots(22)$$

$$[{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_1\tau_2})]^T=[{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\tau_2,\tau_1\,;\,{}_{0r}R^2_{\tau_2\tau_1})] \quad\cdots\cdots(23)$$

従って，特に，正方形領域，${}_{0S}R^2_{\tau_1\tau_2}={}_{0S}R^2_{\tau_2\tau_1}={}_0R^2_{\tau_L\tau_U}$ を選び，かつ，$\tau_1=\tau_2=\tau$ とする場合には次式が成立つ。

$$[{}_0K_{\eta\eta}(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_L\tau_U})]^T=[{}_0K_{\eta\eta}(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_L\tau_U})] \quad\cdots\cdots(24)$$

$$[{}_0K_{\eta\dot\eta}(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_L\tau_U})]^T=[{}_0K_{\dot\eta\eta}(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_L\tau_U})] \quad\cdots\cdots(25)$$

$$[{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_L\tau_U})]^T=[{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\tau,\tau\,;\,{}_0R^2_{\tau_L\tau_U})] \quad\cdots\cdots(26)$$

すなわち，応答，$\{\eta\}$ およびその速度応答，$\{\dot\eta\}$ の正方形領域，${}_0R^2_{\tau_L\tau_U}$ で定義された局所共分散マトリックスの $\tau_1=\tau_2=\tau$ における値は対称であり，また，$\{\eta\}$ と $\{\dot\eta\}$ に関する τ における相互局所共分散マトリックスについては，順序を変更した2種の量は互に他の転置行列となる。また，実数値過程を対象として，(17)～(20)式に定義した入，出力に関する諸量について次式が成立する。

$$[{}_IK(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_1\mu_2})]^T=[{}_IK(\mu_2,\mu_1\,;\,{}_{Ir}R^2_{\mu_2\mu_1})] \quad\cdots\cdots(27)$$

$$[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L}\,;\,{}_IR^1_{\mu_1})]^T=[{}_{0I}K(\mu_{2L},\mu_1\,;\,{}_IR^1_{\mu_1})] \quad\cdots\cdots(28)$$

$$[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2\,;\,{}_IR^1_{\mu_2})]^T=[{}_{I0}K(\mu_2,\mu_{1L}\,;\,{}_IR^1_{\mu_2})] \quad\cdots\cdots(29)$$

$$[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]^T=[{}_0I(\mu_{2L},\mu_{1L})] \quad\cdots\cdots(30)$$

従って，特に，${}_IR^1_{\mu_1}={}_IR^1_{\mu_2}={}_IR^1_{\mu_L\mu_U}$ とし，正方形領域，${}_{IS}R^2_{\mu_1\mu_2}={}_{IS}R^2_{\mu_2\mu_1}={}_IR^2_{\mu_L\mu_U}$ を選べば次式を得る。

$$[{}_IK(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_IR^2_{\mu_L\mu_U})]^T=[{}_IK(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_IR^2_{\mu_L\mu_U})] \quad\cdots\cdots(31)$$

$$[{}_{I0}K(\mu_i,\mu_L\,;\,{}_IR^1_{\mu_L\mu_U})]^T=[{}_{0I}K(\mu_L,\mu_i\,;\,{}_IR^1_{\mu_L\mu_U})]\cdots\cdots i=1,\ 2 \quad\cdots\cdots(32)$$

$$[{}_0I(\mu_L,\mu_L)]^T=[{}_0I(\mu_L,\mu_L)] \quad\cdots\cdots(33)$$

以上のような手順によって，例えば実数変数係数をもつ線形不連続動力学系の場合，（3），（4）式の ${}_0K_{\eta\eta}$，${}_0K_{\dot\eta\dot\eta}$ および ${}_0K_{\eta\dot\eta}={}_0K_{\dot\eta\eta}$ が入力過程と動力学系に関する諸量によって定まる出力応答，$\{\eta(\tau)\}$ の共所共分散マトリックス，$[{}_0K(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_0R^2_{\tau_1\tau_2})]$ あるいは，${}_0R^2_{\tau_1\tau_2}\to R^2_\infty$ の場合の共分散マトリックス $[{}_0K(\tau_1,\tau_2)]$ から得られることになるが，勿論，これらの諸量は $[{}_0K(\tau_1,\tau_2\,;\,{}_0R^2_{\tau_1\tau_2})]$ あるいは $[{}_0K(\tau_1,\tau_2)]$ とフーリエ変換の対をなす1次元および2次元の局所あるいは全スペクトル密度マトリックスを用いて表現することもできる[4]。

次に（3）式を（2）式に代入すれば単位時間当りの応答レベル超過期待回数，$I(\zeta\,;\,\tau)$ は次式のように表わされる[2]。

$$\begin{aligned}I(\zeta\,;\,\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\Biggl[&\exp\Bigl(-\frac{(\zeta-E\eta)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\Bigr)\Bigl[\sqrt{1-\rho^2}\exp\Bigl\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\Bigl(\zeta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\Bigr)^2\Bigr\}\\&+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\Bigl\{\zeta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\Bigr\}\Bigl\{1+\mathrm{erf}\Bigl(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\Bigl(\zeta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\Bigr)\Bigr)\Bigr\}\Bigr]\\&+\exp\Bigl(-\frac{(\zeta+E\eta)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\Bigr)\Bigl[\sqrt{1-\rho^2}\exp\Bigl\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\Bigl(\zeta+E\eta-\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\Bigr)^2\Bigr\}\\&+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\Bigl\{\zeta+E\eta-\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\Bigr\}\Bigl\{1+\mathrm{erf}\Bigl(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\Bigl(\zeta+E\eta-\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\Bigr)\Bigr)\Bigr\}\Bigr]\Biggr]\end{aligned} \quad\cdots\cdots(34)$$

ただし，

$$\rho=\frac{{}_0K_{\eta\dot\eta}}{\sqrt{{}_0K_{\eta\eta}{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}}}\,,\quad \lambda=\sqrt{\frac{{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}}{{}_0K_{\eta\eta}}}\,,\quad \mathrm{erf}\,x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\nu^2}d\nu \quad\cdots\cdots(35)$$

(34)式の第1，2行および第3，4行は夫々（2）式の第1項および第2項に相当し，夫々正側レベル，ζ を正の速度で，および負側レベル，$-\zeta$ を負の速度で単位時間当りに超過する期待回数を示す。特に，$E\eta=E\dot\eta=0$ の場合には，両者は等しくなり，(34)式は次式に帰着する[1]。

$$\begin{aligned}I(\zeta\,;\,\tau)=\frac{\lambda}{\pi}\exp\Bigl(-\frac{\zeta^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\Bigr)\Bigl[&\sqrt{1-\rho^2}\exp\Bigl\{-\frac{\rho^2\zeta^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\Bigr\}\\&+\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\rho\zeta\Bigl\{1+\mathrm{erf}\Bigl(\frac{\rho\zeta}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\Bigr)\Bigr\}\Bigr]\end{aligned} \quad\cdots\cdots(36)$$

さらに，定常確率過程の場合には，出力応答，$\{\eta\}$ の相関マトリックス，$[{}_0R(\lambda)]$ を用いて，

$$\begin{aligned}&[{}_0K(\tau_1,\tau_2)]=[{}_0K(\tau_1-\tau_2)]=[{}_0R(\lambda)]\\&[{}_0K^{(1)}_{\tau_1}(\tau_1,\tau_2)]=[{}_0K^{(1)}_{\tau_1}(\tau_1-\tau_2)]=[{}_0R^{(1)}_{\lambda}(\lambda)]\\&[{}_0K^{(1)}_{\tau_2}(\tau_1,\tau_2)]=[{}_0K^{(1)}_{\tau_2}(\tau_1-\tau_2)]=-[{}_0R^{(1)}_{\lambda}(\lambda)]\\&[{}_0K^{(1)(1)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]=[{}_0K^{(1)(1)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1-\tau_2)]=-[{}_0R^{(2)}_{\lambda}(\lambda)]\\&\qquad\lambda=\tau_1-\tau_2\end{aligned} \quad\cdots\cdots(37)$$

のように表わせるから，（6）式において次の置換ができる。

$$\begin{aligned}&{}_0K_{\eta\eta}\to{}_0R_{\eta\eta}={}_0R_i^i(0)\\&{}_0K_{\eta\dot\eta}={}_0K_{\dot\eta\eta}\to{}_0R_{\eta\dot\eta}={}_0R_{\dot\eta\eta}={}_0R_i^{i(1)}{}_{\lambda}(0)=-{}_0R_i^{i(1)}{}_{\lambda}(0)=0\\&{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}\to{}_0R_{\dot\eta\dot\eta}=-{}_0R_i^{i(2)}{}_{\lambda}(0)\end{aligned} \quad\cdots\cdots(38)$$

従って，定常確率過程の場合には $\rho=0$ となり，(36)式は周知の S.O. Rice 氏の式に帰着する。

$$I(\zeta\,;\,\tau)\to I(\zeta)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{{}_0R_{\dot\eta\dot\eta}}{{}_0R_{\eta\eta}}}\exp\left(-\frac{\zeta^2}{2{}_0R_{\eta\eta}}\right) \quad \cdots\cdots(39)$$

(34)式あるいは(36)式を(1)式に代入して，非定常確率過程に属する入力を受ける動力学系の出力応答，$\eta(\tau)$が，時間変数，τ の有限領域，${}_0R^1_\tau$ において応答レベル，$|\eta|=\zeta$ を超過する期待回数が得られ，それが，ζ と ${}_0R^1_\tau$ に対応する許容回数，$m(\zeta,\,{}_0R^1_\tau)$ 以下である条件は次式で与えられる。

$$N(\zeta\,;\,{}_0R^1_\tau)=\int_{{}_0R^1_\tau}I(\zeta\,;\,\tau)d\tau\leqq m(\zeta,{}_0R^1_\tau) \quad \cdots\cdots(40)$$

勿論，入力が作用する時間の下限を μ_L とすれば，$\tau<\mu_L$ では $I(\zeta\,;\,\tau)=0$ であり，また，${}_0R^1_\tau=R^1_\infty$ に選べば，(40)式は次式のように表わされる。

$$N(\zeta\,;\,R^1_\infty)=\int_{R^1_\infty}I(\zeta\,;\,\tau)\,d\tau=\int_{\mu_L}^{\infty}I(\zeta\,;\,\tau)d\tau\leqq m(\zeta,R^1_\infty)=m(\zeta) \quad \cdots\cdots(41)$$

2. 2. 平均周波数および極値振巾確率密度分布関数

応答，η および応答速度，$\dot\eta$ の平均値，$E\eta$ と $E\dot\eta$ がともに零で，$w(\eta,\dot\eta\,;\,\tau)$ が $(\eta,\dot\eta)=(0,0)$ に対して対称な場合には，応答レベル，$\zeta=0$ を正方向および負方向に超える単位時間当りのレベル超過期待回数は等しく，従って，(36)式で与えられる $I(0\,;\,\tau)$ の π 倍は応答，η の平均周波数と考えられる。この場合，また，η の極値は $\eta=0$ を中心にして対称に発生し，その符号を含んだ極値振巾の確率密度分布関数は偶関数となり，任意の極値振巾の大きさ，$\zeta(\geqq0)$ の極大と極小の発生する確率は等しい。これに関連して，エルゴディックな正規定常確率過程の場合，S.O. Rice 氏によって単位時間当りの零の発生期待回数が(39)式を用いて，$I(0)$ と計算され，また，η およびその1階ならびに2階導関数，$\dot\eta$，$\ddot\eta$ に関する3次元同時確率密度関数を用いて極大（または極小）の振巾確率密度分布関数が論じられ，任意の振巾レベル以上の極大（または極小）の単位時間当りの発生期待回数は，レベル，ζ がある程度大きい場合，それを正（または負）の速度で超過する単位時間当りの超過期待回数に近似的に等しく，従って(39)式の 1/2 で与えられることが指摘されている[14]。ここでは，動力学系に含まれる安定な弾塑性履歴特性の等価線形化の問題に関連して，履歴特性への入力としての応答，η および応答速度 $\dot\eta$ が一般に零でない平均値を有する正規非定常過程に属するとして，任意の時間，τ における平均周波数および極値振巾確率密度分布関数の解析的表現を求める。

一般に，$\eta\epsilon R^1_\infty$ として，η を正の速度および負の速度で超過する単位時間当りの超過期待回数を夫々 $I^+(\eta\,;\,\tau)$ および $I^-(\eta\,;\,\tau)$ とすれば次式によって与えられる。

$$\begin{aligned}I^+(\eta\,;\,\tau)&=\int_0^\infty \dot\eta w(\eta,\dot\eta\,;\,\tau)d\dot\eta\\&=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{(\eta-E\eta)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right.\\&\quad\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left\{\eta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\right\}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right] \quad \cdots(42)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I^-(\eta\,;\,\tau)&=-\int_{-\infty}^0 \dot\eta w(\eta,\dot\eta\,;\,\tau)d\dot\eta\\&=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{(\eta-E\eta)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right.\\&\quad\left.-\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left\{\eta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\right\}\left\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta-E\eta+\frac{E\dot\eta}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right] \quad \cdots(43)\end{aligned}$$

(42)，(43)式で $\eta=E\eta$ と置けば次式を得る。

$$I^+(E\eta\,;\,\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\left[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot\eta)^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\dot\eta\dot\eta}}\right)\right.$$

$$+E\dot{\eta}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{E\dot{\eta}}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\right)\right\}\Bigg] \quad \cdots\cdots(44)$$

$$I^-(E\eta\ ;\ \tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\Bigg[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right)$$

$$-E\dot{\eta}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\left\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{E\dot{\eta}}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\right)\right\}\Bigg] \quad \cdots\cdots(45)$$

(44)，(45) 式から判るように，$I^+(E\eta\ ;\ \tau)$ と $I^-(E\eta\ ;\ \tau)$ は $E\dot{\eta}\fallingdotseq 0$ の場合は第2行の項の存在のために等しくない。このとき，次式が得られる。

$$I^+(E\eta\ ;\ \tau)-I^-(E\eta\ ;\ \tau)=\frac{E\dot{\eta}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{2_0K_{\eta\eta}}} \quad \cdots\cdots(46)$$

$$\frac{1}{2}(I^+(E\eta\ ;\ \tau)+I^-(E\eta\ ;\ \tau))=\frac{\lambda}{2\pi}\Bigg[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right)$$

$$+E\dot{\eta}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{E\dot{\eta}}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\right)\Bigg] \quad \cdots\cdots(47)$$

次に，(42)，(43) 式において，

$$\bar{\eta}=E\eta-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda} \quad \cdots\cdots(48)$$

と置けば，第2行が零となり，従って (42)，(43) 式は等しくなる。すなわち，

$$I^+(\bar{\eta}\ :\ \tau)=I^-(\bar{\eta}\ ;\ \tau)=\frac{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2\rho^2{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right) \quad \cdots\cdots(49)$$

(49)式は，正の速度および負の速度で超過する単位時間当りのレベル超過期待回数が等しい意味で(48)式で定義された $\bar{\eta}$ は応答，η の中立位置と見做され，従って，$E\eta$ および $E\dot{\eta}$ がともに零ならざる正規非定常確率過程における平均周波数，$\bar{\omega}(\tau)$ は次式で与えられる。

$$\bar{\omega}(\tau)=\lambda\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2\rho^2{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right) \quad \cdots\cdots(50)$$

然し乍ら，(48)，(50)式は $E\dot{\eta}\fallingdotseq 0$ なるとき，ρ の逆数を直接含むので一般に取扱い難いとも考えられる。この意味から，(46)式が小さい場合，すなわち，$E\dot{\eta}$ が応答 η の標準偏差，$\sqrt{{}_0K_{\eta\eta}}$ に比べて小さいと見做されるときには，$E\eta$ を中立位置と考えて，平均周波数，$\bar{\omega}(\tau)$ は (47) 式から次式によって表わされる。

$$\bar{\omega}(\tau)=\lambda\left[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right)+E\dot{\eta}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{E\dot{\eta}}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\right)\right] \quad \cdots\cdots(51)$$

特に，$E\dot{\eta}=0$ の場合には，(48) 式は $\bar{\eta}=E\eta$ となり，(50)，(51) 式は一致して平均周波数，$\bar{\omega}(\tau)$ は次式で与えられる。

$$\bar{\omega}(\tau)=\lambda\sqrt{1-\rho^2} \quad \cdots\cdots(52)$$

さらに，定常確率過程の場合には，当然 $E\dot{\eta}=0$ が成立し，かつ $\rho=0$ であるから，(52)式から次式を得る。

$$\bar{\omega}(\tau)=\lambda=\sqrt{\frac{{}_0R_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}{{}_0R_{\eta\eta}}} \quad \cdots\cdots(53)$$

(53)式は(39)式で $\zeta=0$ と置いた値の π 倍，すなわち，単位時間当りの零の発生回数の π 倍を平均周波数と見做すことを意味する。

次に，(48) 式で定義された $\bar{\eta}$ を原点として (42)，(43) 式を表わすと次式を得る。

$$I'^+(\eta'\ ;\ \tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2_0K_{\eta\eta}}\right)\Bigg[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{\rho^2\eta'^2}{2(1-\rho^2)_0K_{\eta\eta}}\right)$$

$$+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\eta'\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\eta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\Bigg] \cdots\cdots(54)$$

$$I'^{-}(\eta';\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\Bigg[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{\rho^2\eta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)$$
$$-\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\eta'\left\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\eta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\Bigg] \cdots\cdots(55)$$

ただし，

$$\eta'=\eta-\bar{\eta}=\eta-E\eta+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda} \cdots\cdots(56)$$

また，(54)～(56) 式に対して，$E\eta$ を原点として (42)，(43) 式を表わすと次式を得る。

$$I''^{+}(\eta'';\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\eta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\Bigg[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}$$
$$+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\Bigg] \cdots\cdots(57)$$

$$I''^{-}(\eta'';\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\eta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\Bigg[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}$$
$$-\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\left\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\Bigg] \cdots\cdots(58)$$

ただし，

$$\eta''=\eta-E\eta \cdots\cdots(59)$$

(42)，(54)，(57) 式から (43)，(55)，(58) 式を夫々差引くと夫々次式が得られる。

$$I^{+}(\eta;\tau)-I^{-}(\eta;\tau)=\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2\pi{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta-E\eta+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\exp\left(-\frac{(\eta-E\eta)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right) \cdots\cdots(60)$$

$$I'^{+}(\eta';\tau)-I'^{-}(\eta';\tau)=\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2\pi{}_0K_{\eta\eta}}}\eta'\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right) \cdots\cdots(61)$$

$$I''^{+}(\eta'';\tau)-I''^{-}(\eta'';\tau)=\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2\pi{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\exp\left(-\frac{\eta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right) \cdots\cdots(62)$$

(60)～(62) 式は，$\rho\lambda={}_0K_{\eta\dot{\eta}}/{}_0K_{\eta\eta}\fallingdotseq 0$ なる限り，$\eta'=0$ なる点を除いては一般には零ではない。$\lambda=\sqrt{{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}/{}_0K_{\eta\eta}}\geqq 0$ であるから，一般に次式が成立する。

$$\rho\eta'(I'^{+}(\eta';\tau)-I'^{-}(\eta';\tau))\geqq 0 \cdots\cdots(63)$$

非定常確率過程では一般には $\rho\fallingdotseq 0$ であるから，(63)式は $\rho\gtreqless 0$ に従って非定常過程がその時間で発散性，定常性，あるいは収束性であることを示す。

次に，一般に非定常確率過程を対象として，2次元変数，(η, τ) の近傍の微小領域，$d\eta d\tau$ において，極大および正の速度から速度零での滞留の発生の数から，極小および速度零から速度正での発散の発生の数を差引いた数の期待数を $n^{-}(\eta;\tau)d\eta d\tau$，極小および負の速度から速度零での滞留の発生の数から，極大および速度零から速度負での発散の発生の数を差引いた数の期待数を $n^{-}(\eta;\tau)d\eta d\tau$ と表わせば夫々次式が得られる。

$$n^{+}(\eta;\tau)=-I^{+(1)}_{\ \eta}(\eta;\tau) \cdots\cdots(64)$$

$$n^{-}(\eta;\tau)=\ \ I^{-(1)}_{\ \eta}(\eta;\tau) \cdots\cdots(65)$$

(64)，(65)式は夫々，単位巾，単位時間当りの極大および正の速度から零への滞留の数の極小および速度零から正への発散の数に対する超過分期待回数ならびに極小および負の速度から零への滞留の数の極大および

速度零から負への発散の数に対する超過分期待回数を示す。従って，単位巾，単位時間当りの有限の速度から零への滞留数から速度零から有限の速度への発散数を差引いた数の期待回数は次式で与えられる。

$$n^s(\eta\,;\,\tau)=n^+(\eta\,;\,\tau)+n^-(\eta\,;\,\tau) \quad\cdots\cdots(66)$$

(56)式の η' に関して，(64)，(65)式を夫々(54)式および(55)式から計算すると次式を得る。

$$n'^+(\eta'\,;\,\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2\eta'^2}{2(1-\rho^2)\,{}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.$$
$$\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left\{\frac{\eta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)-1\right\}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\eta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right] \quad\cdots\cdots(67)$$

$$n'^-(\eta'\,;\,\tau)=-\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2\eta'^2}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right.$$
$$\left.-\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left\{\frac{\eta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)-1\right\}\left\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\eta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right] \quad\cdots\cdots(68)$$

同様にして，(59)式の η'' に関して，(57)，(58)式からあるいは，変換，$\eta''=\eta'-(E\dot{\eta}/\rho\lambda)$ を(67)，(68)式に用いて次式を得る。

$$n''^+(\eta''\,;\,\tau)=\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\eta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}\eta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left\{\frac{\eta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)-1\right\}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right]$$
$$\cdots\cdots(69)$$

$$n''^-(\eta''\,;\,\tau)=-\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\eta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}\eta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left\{\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left.-\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left\{\frac{\eta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)-1\right\}\left\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right]$$
$$\cdots\cdots(70)$$

特に，$E\dot{\eta}=0$ の場合には，(54)，(55)，(57)，(58)式および(67)〜(70)から次式が成立する。

$$I'^+(\eta'\,;\,\tau)=I'^-(-\eta'\,;\,\tau)=I''^+(\eta''\,;\,\tau)=I''^-(-\eta''\,;\,\tau) \quad\cdots\cdots(71)$$
$$n'^+(\eta'\,;\,\tau)=n'^-(-\eta'\,;\,\tau)=n''^+(\eta''\,;\,\tau)=n''^-(-\eta''\,;\,\tau) \quad\cdots\cdots(72)$$

ただし，　$\eta'=\eta''=\eta-E\eta$

次に，(66)式を η' および η'' に関して計算すると夫々次式を得る。

$$n'^s(\eta'\,;\,\tau)=\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2\pi{}_0K_{\eta\eta}}}\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left\{\frac{\eta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)-1\right\} \quad\cdots\cdots(73)$$

$$n''^s(\eta''\,;\,\tau)=\frac{\rho\lambda}{\sqrt{2\pi{}_0K_{\eta\eta}}}\exp\left(-\frac{\eta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left\{\frac{\eta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\left(\eta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)-1\right\} \quad\cdots\cdots(74)$$

例えば，(73)式に(35)の第1，2式を代入すれば次式を得る。

$$n'^s(\eta'\,;\,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{{}_0K_{\eta\eta}})^5}\exp\left(-\frac{\left(\eta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)({}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}\eta'^2-{}_0K_{\eta\eta}E\dot{\eta}\eta'-{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}{}_0K_{\eta\eta}) \cdots\cdots(75)$$

(75)式および(74)式から得られる(75)式と類似の式の右辺第3項の判別式はともに次式で示される。

$$({}_0K_{\eta\eta}E\dot{\eta})^2+4({}_0K_{\eta\dot{\eta}})^2{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}\geqq 0 \cdots\cdots(76)$$

従って，(75)式から判るように $n'^s(\eta'\,;\,\tau)$ あるいは $n''^s(\eta''\,;\,\tau)$ は，

$$\begin{matrix}\eta_1'\\\eta_2'\end{matrix}=\frac{E\dot{\eta}}{2\rho\lambda}\pm\sqrt{\left(\frac{E\dot{\eta}}{2\rho\lambda}\right)^2+{}_0K_{\eta\eta}} \quad あるいは \quad \begin{matrix}\eta_1''\\\eta_2''\end{matrix}=-\frac{E\dot{\eta}}{2\rho\lambda}\pm\sqrt{\left(\frac{E\dot{\eta}}{2\rho\lambda}\right)+{}_0K_{\eta\eta}} \quad\cdots\cdots(77)$$

において零となるが，その他の点では零ではなく，かつ，η' あるいは η'' の範囲によってその符号を異にする。勿論，定常確率過程においては，$_0K_{\eta\dot{\eta}}=0$ かつ $E\dot{\eta}=0$ となるから，(73)，(74) 式はともに恒等的に零となる。非定常確率過程においても，$_0K_{\eta\dot{\eta}}=0$ の場合には，

$$\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}=\frac{{}_0K_{\eta\eta}E\dot{\eta}}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}} \quad\cdots\cdots(78)$$

から判るように，(48)式の中位位置，$\bar{\eta}$ が存在するためには $E\dot{\eta}=0$ でなければならないので，(73)，(74)式はともに恒等的に零となり，滞留と発散の期待回数はあらゆるレベルで等しい。然し乍ら，非定常確率過程では一般に $_0K_{\eta\dot{\eta}}\fallingdotseq 0$ であり，$_0K_{\eta\dot{\eta}}>0$ の場合には，$|\eta'|$ あるいは $|\eta''|$ が充分大ならば滞留の期待回数の密度は零速度から有限速度への発散の期待回数の密度を上廻り，$|\eta'|$ あるいは $|\eta''|$ が充分小ならば逆である。ただし，$_0K_{\eta\dot{\eta}}>0$ の場合は(63)式から非定常確率過程は発散性であるから，$|\eta'|$ あるいは $|\eta''|$ が充分大きいとき，滞留の期待回数の密度が零速度からの発散の期待回数の密度を上廻ることは，非定常確率過程の発散性，収束性とは直接関係はない。$_0K_{\eta\dot{\eta}}<0$ の場合は $_0K_{\eta\dot{\eta}}>0$ の場合と事情は全く逆である。すなわち，$|\eta'|$ あるいは $|\eta''|$ が充分大ならば，零速度から有限速度への発散の期待回数の密度は滞留の期待回数の密度を上廻り，$|\eta'|$ あるいは $|\eta''|$ が充分小ならば逆である。

先に，**2. 1.** の(34)式に求めた単位時間当りの応答レベル超過期待回数，$I(\zeta;\tau)$ およびそれのレベル，ζ に関する1階導関数は，**2. 2.** の(42)，(43)式および(64)，(65)式の諸量を用いて次式のように表わせる。

$$I(\zeta;\tau)=I^{+}(\zeta;\tau)+I^{-}(-\zeta;\tau) \quad\cdots\cdots(79)$$

$$I^{(1)}_{\zeta}(\zeta;\tau)=-(n^{+}(\zeta;\tau)+n^{-}(-\zeta;\tau)) \quad\cdots\cdots(80)$$

ただし，

$$0\leqq|\eta|=\zeta<\infty \quad\cdots\cdots(81)$$

(80)式の符号を逆にした量は，2次元変数，$(\zeta,\ \tau)$ において単位巾，単位時間あたりのレベル，ζ に関する極大および速度正から零への滞留の発生数から極小および速度零から正への発散の発生数を差引いた期待数の密度である。すなわち，$-I^{(1)}_{\zeta}(\zeta;\tau)d\zeta d\tau$ は $(\zeta,\ \tau)$ における微小領域，$d\zeta d\tau$ において，外に凸な極値および滞留の発生から外に凹な極値および発散の発生を差引いた期待回数である。(56)式および(59)式で規定した変数，η' および η'' に関するレベルを夫々，$\zeta'=|\eta'|$，$\zeta''=|\eta''|$ とすれば，(80)式は次式のように書ける。

$$I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta';\tau)=-(n'^{+}(\zeta';\tau)+n'^{-}(-\zeta';\tau)) \quad\cdots\cdots(82)$$

$$I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta'';\tau)=-(n''^{+}(\zeta'';\tau)+n''^{-}(-\zeta'';\tau)) \quad\cdots\cdots(83)$$

ただし，

$$0\leqq\zeta'=|\eta'|<\infty,\quad 0\leqq\zeta''=|\eta''|<\infty \quad\cdots\cdots(84)$$

(67)，(68)式および(69)，(70)式において，レベル，ζ' あるいは ζ'' がある程度大になると外に凹な極値および発散の発生の確率は急激に小となるから，$-I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta';\tau)d\zeta'd\tau$ および $-I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta'';\tau)d\zeta''d\tau$ は近似的に外に凸な停留値が $d\zeta'd\tau$ あるいは，$d\zeta''d\tau$ で発生する期待回数と見做すことができる。従って，任意の時間，$\tilde{\tau}$ において外に凸な停留値に関する振巾の絶対値，$\tilde{\zeta}$ が $(\zeta',\ \tau)$ あるいは $(\zeta'',\ \tau)$ の近傍の微小領域，$d\zeta'd\tau$ あるいは $d\zeta''d\tau$ にある確率は近似的に次式で評価できる。

$$P(\zeta'-d\zeta'<\tilde{\zeta}\leqq\zeta'\cap\tau-d\tau<\tilde{\tau}\leqq\tau)=-\frac{I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta';\tau)}{I'(0;\tau)}d\zeta'd\tau \quad\cdots\cdots(85)$$

$$P(\zeta''-d\zeta''<\tilde{\zeta}\leqq\zeta''\cap\tau-d\tau<\tilde{\tau}\leqq\tau)=-\frac{I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta'';\tau)}{I''(0;\tau)}d\zeta''d\tau \quad\cdots\cdots(86)$$

従って，非定常過程の任意の τ における極値振巾確率密度分布関数は次式によって定まる。

$$p'(\zeta'\,;\tau)=-\frac{I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta'\,;\tau)}{I'(0\,;\tau)}\quad,\ \int_0^\infty p'(\zeta'\,;\tau)d\zeta'=1 \qquad\cdots\cdots(87)$$

$$p''(\zeta''\,;\tau)=-\frac{I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta''\,;\tau)}{I''(0\,;\tau)}\quad,\ \int_0^\infty p''(\zeta''\,;\tau)d\zeta''=1 \qquad\cdots\cdots(88)$$

(87)，(88) 式は応答，η の envelope の変数 η' および η'' で表わした振巾確率密度分布関数である。なお，(85)～(88)式で，$I'(0\,;\tau)$，$I''(0\,;\tau)$ は(79)式に対応する

$$I'(\zeta'\,;\tau)=I'^{+}(\zeta'\,;\tau)+I'^{-}(-\zeta'\,;\tau) \qquad\cdots\cdots(89)$$

$$I''(\zeta''\,;\tau)=I''^{+}(\zeta''\,;\tau)+I''^{-}(-\zeta''\,;\tau) \qquad\cdots\cdots(90)$$

の零における値である。(54)，(55)式および(89)式から(87)式の分母は次式のように定まる。

$$I'(0\,;\tau)=\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2{}_0K_{\eta\eta}\rho^2\lambda^2}\right) \qquad\cdots\cdots(91)$$

また，(67)，(68)式と(82)式から(87)式の分子は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
-I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta'\,;\tau)=&\frac{\lambda}{2\pi}\left\{\exp\left(-\frac{\left(\zeta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)+\exp\left(-\frac{\left(\zeta'+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\right\}\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{{}_0K_{\eta\eta}}\zeta'\right.\\
&\left.\cdot\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right]\\
&-\frac{E\dot{\eta}}{2\pi\rho}\left\{\exp\left(-\frac{\left(\zeta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)-\exp\left(-\frac{\left(\zeta'+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\right\}\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\\
&\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\frac{\zeta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right]
\end{aligned} \qquad\cdots\cdots(92)$$

(91)，(92)式を(87)式に代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned}
p'(\zeta'\,;\tau)=\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)&\left[\cosh\left(\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\right)\left[\frac{\zeta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\right.\\
&\left.+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right]\\
&-\frac{E\dot{\eta}}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\sinh\left(\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\right)\left[\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\\
&\left.\left.+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\zeta'\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right]\right]
\end{aligned} \qquad\cdots\cdots(93)$$

また，ζ'' に関しては(57)，(58)，(90)式と(69)，(70)，(83)式から，(88)式の分母および分子は夫々次式のように得られる。

$$I''(0\,;\tau)=\frac{\lambda}{\pi}\left[\sqrt{1-\rho^2}\exp\left(-\frac{(E\dot{\eta})^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}\right)+E\dot{\eta}\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{E\dot{\eta}}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}\right)\right] \qquad\cdots\cdots(94)$$

$$\begin{aligned}
-I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta''\,;\tau)=&\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\zeta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\zeta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\left[\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right.\\
&\left.+\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\zeta''-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right]\\
&+\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\zeta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left[\left(\frac{\zeta''^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\left\{2+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right.\right.\\
&\left.+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}+\frac{E\dot{\eta}}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\zeta''\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right.\\
&\left.\left.-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right]
\end{aligned} \qquad\cdots\cdots(95)$$

(94)，(95) 式を (88) 式に代入すれば，$p''(\zeta'';\tau)$ が得られるが，この場合，$p'(\zeta';\tau)$ のように単純な形にならない。

特に，$E\dot{\eta}=0$ の場合には次式が成立する。

$$I'(0;\tau)=I''(0;\tau)=\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{1-\rho^2} \quad\cdots\cdots(96)$$

$$\begin{aligned}-I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta';\tau)&=-I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta'';\tau)|_{\zeta''=\zeta'}\\&=\frac{\lambda}{\pi}\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\zeta'}{_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2)_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\\&\quad\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{_0K_{\eta\eta}}-1\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right] \quad\cdots\cdots(97)\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}p'(\zeta';\tau)&=p''(\zeta';\tau)\\&=\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\zeta'}{_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2)_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{_0K_{\eta\eta}}-1\right)\left\{1+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\eta\eta}}}\right)\right\}\right] \quad\cdots\cdots(98)\end{aligned}$$

また，特に定常確率過程においては $\rho=0$ となるから，(98)式の極値振巾確率密度分布関数は次式に示す Rayleigh 分布の密度関数に帰着する[16]。

$$p'(\zeta')=p''(\zeta')=\frac{\zeta'}{_0R_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2_0R_{\eta\eta}}\right) \quad\cdots\cdots(99)$$

(98) 式で $\zeta'=0$ とおけば，

$$p'(0;\tau)=p''(0;\tau)=-\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\eta\eta}}} \quad\cdots\cdots(100)$$

となって，$\rho>0$ の場合，すなわち，$_0K_{\eta\dot{\eta}}>0$ のとき，レベル零における確率が負になる矛盾を含んでいる。このことは (66)，(80) 式から判るように，零レベルにおいては，

$$n'^s(0;\tau)=-I'^{(1)}_{\zeta'}(0;\tau),\qquad n''^s(0;\tau)=-I''^{(1)}_{\zeta''}(0;\tau) \quad\cdots\cdots(101)$$

が成立し，従って，(73)，(74) における説明が適用される。すなわち，零レベル近傍においては，$p'(\zeta';\tau)$，$p''(\zeta'';\tau)$ は極値振巾に関する確率密度としての意味を失なっていることになる。(100) 式の矛盾を除くため次の量を考える。

$$J^+(\eta;\tau)=\frac{1}{2}(n^+(\eta;\tau)-n^-(\eta;\tau)) \quad\cdots\cdots(102)$$

$$J^-(\eta;\tau)=-J^+(\eta;\tau)=\frac{1}{2}(n^-(\eta;\tau)-n^+(\eta;\tau)) \quad\cdots\cdots(103)$$

(102)，(103) 式は単に互に符号を換えた量であるが，例えば (102) 式は2次元変数，(η,τ) における単位巾，単位時間当りの極大の生起する数から極小の生起する数を差引き，それに正の速度から零への滞留の数と速度零から負の速度で発散する数の和の2分の1を加え，さらに，負の速度から零に滞留する数と速度零から正の速度で発散する数の和の2分の1を差引いた数の期待数を意味する。これから，(80) 式に対応して次の量を考える。

$$J(\zeta;\tau)=J^+(\zeta;\tau)+J^-(-\zeta;\tau) \quad\cdots\cdots(104)$$

ただし，　$0\leqq\zeta=|\eta|<\infty$

この量は，$(\zeta;\tau)$ における単位巾，単位時間当りの外に凸な極値と外から内に向かう滞留および発散の数の2分の1の和から，外に凹な極値と内から外に向かう滞留および発散の数の2分の1の和を差引いた数の期待回数である。(104) 式を ζ' および ζ'' に適用した場合，レベルがある程度大きくなると $-I'^{(1)}_{\zeta'}(\zeta';\tau)$

あるいは $-I''^{(1)}_{\zeta''}(\zeta'';\tau)$ と同様な傾向を示し，外に凸な停留値の発生が卓越するが，一般に $J(\zeta;\tau)$ は滞留と発散の影響を小ならしめ，特に，レベル零の近傍で極値の発生が低下する領域で極値振巾確率密度分布関数の精度を改善する。

(64)，(65)，(79)，(102)，(103) 式および (104) 式から，

$$\int_0^\infty J(\zeta;\tau)d\zeta=I^+(0;\tau)+I^-(0;\tau)=I(0;\tau) \quad \cdots\cdots(105)$$

が成立するから，η'，η'' に関する極値振巾確率密度分布関数は次式で定義される。

$$\tilde{p}'(\zeta';\tau)=\frac{J'(\zeta';\tau)}{I'(0;\tau)}\ ,\ \int_0^\infty \tilde{p}'(\zeta';\tau)d\zeta'=1 \quad \cdots\cdots(106)$$

$$\tilde{p}''(\zeta'';\tau)=\frac{J''(\zeta'';\tau)}{I''(0;\tau)},\ \int_0^\infty \tilde{p}''(\zeta'';\tau)d\zeta''=1 \quad \cdots\cdots(107)$$

(92)，(95) 式に対応して，ζ' および ζ'' に関する $J'(\zeta';\tau)$ および $J''(\zeta'';\tau)$ は (102)，(103)，(104) 式と同様な定義式に従って次のように計算される。

$$\begin{aligned}
J'(\zeta';\tau)=&\frac{\lambda}{2\pi}\left\{\exp\left(-\frac{\left(\zeta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)+\exp\left(-\frac{\left(\zeta'+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\right\}\\
&\cdot\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{{}_0K_{\eta\eta}}\zeta'\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho)^2{}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right]\\
&-\frac{E\dot{\eta}}{2\pi\rho}\left\{\exp\left(-\frac{\left(\zeta'-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)-\exp\left(-\frac{\left(\zeta'+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\right\}\left[\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\\
&\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\frac{\zeta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right] \quad \cdots\cdots(108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J''(\zeta'';\tau)=&\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\zeta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\zeta''}{{}_0K_{\eta\eta}}\left[\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right.\\
&\left.+\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\left(\zeta''-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)^2\right\}\right]+\frac{\lambda}{2\pi}\exp\left(-\frac{\zeta''^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\\
&\cdot\left[\left(\frac{\zeta''^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)+\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''-\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right.\\
&\left.+\frac{E\dot{\eta}}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\zeta''\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\left(\zeta''+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\right)\right\}\right]\\
&\cdots\cdots(109)
\end{aligned}$$

(91)，(108) 式を (106) 式に代入して (93) 式に対応する ζ' に関する極値振巾確率密度分布関数が次式のように得られる。

$$\begin{aligned}
\tilde{p}'(\zeta';\tau)=&\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\cosh\left(\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\right)\left[\frac{\zeta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\right.\\
&\left.+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right]\\
&-\frac{E\dot{\eta}}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\sinh\left(\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}\right)\left[\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.\\
&\left.\left.+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\zeta'\,\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right]\right] \quad \cdots\cdots(110)
\end{aligned}$$

同様にして，(94)，(109) 式を (107) 式に代入すれば $\tilde{p}''(\zeta'';\tau)$ が得られる。

特に，$E\dot{\eta}=0$ の場合には次式が得られる。

$$\tilde{p}'(\zeta';\tau)=\tilde{p}''(\zeta';\tau)=\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\zeta'}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\zeta'^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.$$

$$+\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\zeta'^2}{_0K_{\eta\eta}}-1\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\zeta'}{\sqrt{2(1-\rho^2)_0K_{\eta\eta}}}\right)\Bigg] \cdots\cdots(111)$$

(111) 式も定常確率過程においては，(99) 式の Rayleigh 分布の密度関数に帰着する。また，(111) 式によれば，零レベルにおける確率密度分布関数の値は ρ の如何に係らず零となる。

例えば，(110) 式の $\tilde{p}'(\zeta';\tau)$ と (93) 式の $p'(\zeta';\tau)$ の差は次式で与えられる。

$$\tilde{p}'(\zeta';\tau)-p'(\zeta';\tau)=\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\eta\eta}}}\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\left(1-\frac{\zeta'^2}{_0K_{\eta\eta}}\right)\cosh\left(\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{_0K_{\eta\dot{\eta}}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{_0K_{\eta\dot{\eta}}}\sinh\left(\frac{E\dot{\eta}\zeta'}{_0K_{\eta\dot{\eta}}}\right)\right] \cdots\cdots(112)$$

特に，$E\dot{\eta}=0$ の場合，(112) 式は次式となる。

$$\tilde{p}'(\zeta';\tau)-p'(\zeta';\tau)=\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{\frac{\pi}{2_0K_{\eta\eta}}}\exp\left(-\frac{\zeta'^2}{2_0K_{\eta\eta}}\right)\left(1-\frac{\zeta'^2}{_0K_{\eta\eta}}\right) \cdots\cdots(113)$$

従って，次の不等式の対応が成立する。

$$\tilde{p}'(\zeta';\tau)-p'(\zeta';\tau)\gtreqless 0 \sim {_0K_{\eta\dot{\eta}}}(\sqrt{_0K_{\eta\eta}}-\zeta')\gtreqless 0 \cdots\cdots(114)$$

(73) 式と (113) 式から，$E\dot{\eta}=0$ の場合，次式を得る。

$$\tilde{p}'(\zeta';\tau)-p'(\zeta';\tau)=-\frac{\pi}{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}n'^s(\zeta';\tau) \cdots\cdots(115)$$

また，一方，(111)，(115) 式から，

$$\tilde{p}'(0;\tau)=0,\quad p'(0;\tau)=\frac{\pi}{\lambda\sqrt{1-\rho^2}}n'^s(0;\tau) \cdots\cdots(116)$$

が得られるので，少くともレベルの小さい領域では $\tilde{p}'(\zeta';\tau)$ は $p'(\zeta';\tau)$ より妥当であり，一般に，$\tilde{p}'(\zeta';\tau)$ は滞留および発散の影響を少くする傾向を有するので非定常確率過程の極値振巾密度分布関数として (110)，(111) 式の $\tilde{p}'(\zeta';\tau)$ あるいは，$\tilde{p}''(\zeta'';\tau)$ を採用する。

なお，応答，$\{\eta\}$，およびその速度応答，$\{\dot{\eta}\}$ を夫々 $(n\times 1)$ の実数ベクトルとすれば，正規非定常確率過程として，任意の時間，τ における $\{\eta\}$ および $\{\dot{\eta}\}$ の同時確率密度分布関数は次式で与えられる。

$$w(\{\eta\},\{\dot{\eta}\};\tau)=\frac{1}{(2\pi)^n(\det[_0K])^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\{\xi_d\}^T[_0K]^{-1}\{\xi_d\}\right) \cdots\cdots(117)$$

ここで，

$$\{\xi_d\}=\begin{Bmatrix}\{\eta-E\eta\}\\\{\dot{\eta}-E\dot{\eta}\}\end{Bmatrix},\quad [_0K]=\begin{bmatrix}[_0K_{\eta\eta}] & [_0K_{\eta\dot{\eta}}]\\ [_0K_{\dot{\eta}\eta}] & [_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}]\end{bmatrix} \cdots\cdots(118)$$

(3) 式は $n=1$ の場合に相当し，(118) 式の周辺確率密度分布関数である。

3. 安定な bi-linear 形履歴特性の等価線形化

弾塑性不連続動力学系に含まれる履歴特性は安定な bi-linear 形履歴特性とする。すなわち，非線形性はあまり強くなく，復元特性は充分強いものとする。従って非定常確率過程に属するランダム入力を動力学系が受けるときにも，履歴の形状の急激な変動は生じないものとする。例えば，第2，第1分枝剛性比は正値でかつ充分大きい bi-linear 形履歴特性を対象とする。また，非定常確率過程の非定常性はあまり急激でなく，安定な動力学系の濾波作用と相俟って履歴の挙動は充分滑らかで，かつその変動は緩やかであるとする。また，動力学系の非線形性が強くない仮定から，正規性の入力に対して，出力応答の正規性も近似的に成立するものとする。かような前提のもとに，安定な bi-linear 形履歴特性の等価線形化は先ず，局所的な時間平均で履歴特性を履歴入力およびその速度の線形関数に，**2. 2.** の平均周波数を用いて表現し，次いでその係数に含まれる振巾パラメーターを**2. 2.** の極値振巾確率密度分布関数を用いて空間平均することによって非線形の履歴特性を変数係数をもつ等価線形特性として表現する。

先ず，無次化して表わした安定な履歴特性関数の中心に座標の原点を選び，履歴特性関数，$\varphi(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})$ を履歴入力，$\mathfrak{z}$ およびその１階導関数，$\dot{\mathfrak{z}}$ の線形結合，

$$\varphi_0(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})=\kappa_0\mathfrak{z}+d_0\dot{\mathfrak{z}} \qquad (119)$$

の形に，次式で与えられる誤差関数，I を最小ならしめる規範で近似する。

$$I(\kappa_0,d_0)=\int_\tau^{\tau+\bar{\tau}}(\varphi(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})-\kappa_0\mathfrak{z}-d_0\dot{\mathfrak{z}})^2d\tau \qquad (120)$$

ここで，τ は無次元時間，$\bar{\tau}$ は安定な履歴特性１サイクルに要する無次元時間である。(120) 式の最小化の条件，$\partial I/\partial\kappa_0=0$，$\partial I/\partial d_0=0$ から次式が得られる。

$$\kappa_0=\frac{\begin{vmatrix}\int\varphi\mathfrak{z}d\tau & \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau\\ \int\varphi\dot{\mathfrak{z}}d\tau & \int\dot{\mathfrak{z}}^2d\tau\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\int\mathfrak{z}^2d\tau & \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau\\ \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau & \int\dot{\mathfrak{z}}^2d\tau\end{vmatrix}}\qquad d_0=\frac{\begin{vmatrix}\int\mathfrak{z}^2d\tau & \int\varphi\mathfrak{z}d\tau\\ \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau & \int\varphi\dot{\mathfrak{z}}d\tau\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\int\mathfrak{z}^2d\tau & \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau\\ \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau & \int\dot{\mathfrak{z}}^2d\tau\end{vmatrix}} \qquad (121)$$

(121) 式中の積分の積分範囲は $(\tau,\ \tau+\bar{\tau})$ である。ここで，slowly varying を前提として，履歴入力が $\bar{\tau}$ 時間中，一定振巾，a，一定周波数，$\bar{\omega}$ を有する sinusoidal な変動を示すものと仮定する。すなわち，

$$\mathfrak{z}=-a\cos\bar{\omega}\tau,\ \dot{\mathfrak{z}}=a\bar{\omega}\sin\bar{\omega}\tau,\ \bar{\omega}=2\pi/\bar{\tau} \qquad (122)$$

と置けば，次式が得られる。

$$\int\mathfrak{z}^2d\tau=\frac{\pi}{\bar{\omega}}a^2,\quad \int\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}d\tau=0,\ \int\dot{\mathfrak{z}}^2d\tau=\pi\bar{\omega}a^2 \qquad (123)$$

ここで，安定な履歴の特性関数を，第１分枝剛性，1，第２，第１分枝剛性比，r，弾性限変位，δ，振巾パラメーター，χをもつ bi-linear 形閉履歴特性関数，$\varphi(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}\,;r,\delta\,;\chi)$ に限定すれば次式が得られる。

$$\int\varphi\dot{\mathfrak{z}}d\tau=4\delta^2(\chi-1),\ \chi\geqq1 \qquad (124)$$

$$\int\varphi\mathfrak{z}d\tau=2\delta^2\chi\Big[\{2(1-r)+(1+r)\chi\}\frac{1}{\bar{\omega}}\sin\bar{\omega}\tau_1$$
$$+\Big\{\frac{\tau_1}{2}+\frac{r}{2}\Big(\frac{\bar{\tau}}{2}-\tau_1\Big)\Big\}\chi+(1-r)\frac{\chi}{4\bar{\omega}}\sin 2\bar{\omega}\tau_1\Big],\ \chi\geqq1 \qquad (125)$$

ここで，

$$\chi=\frac{a}{\delta},\ \tau_1=\frac{1}{\bar{\omega}}\cos^{-1}\Big(1-\frac{2}{\chi}\Big),\ \chi\geqq0 \qquad (126)$$

(126) 第１式を (123) 式に，(126) 第２式から得られる

$$\sin\bar{\omega}\tau_1=\frac{2}{\chi}\sqrt{\chi-1},\ \sin2\bar{\omega}\tau_1=\frac{4}{\chi^2}\sqrt{\chi-1}(\chi-2),\ \chi\geqq1 \qquad (127)$$

を (125) 式に考慮した後，(123)，(124)，(125) 式を (121) 式に代入すれば次式を得る。

$$\kappa_0(\chi)=\frac{4(1-r)}{\pi\chi^2}\sqrt{\chi-1}+\frac{2(3+r)}{\pi\chi}\sqrt{\chi-1}+\frac{(1-r)}{\pi}\cos^{-1}\Big(1-\frac{2}{\chi}\Big)+r,\ \chi\geqq1 \qquad (128)$$

$$d_0(\chi,\bar{\omega})=\frac{4(\chi-1)}{\pi\bar{\omega}\chi^2},\ \chi\geqq1 \qquad (129)$$

なお，

$$\kappa_0(\chi)=1,\ d_0(\chi,\bar{\omega})=0,\ 0\leqq\chi<1 \qquad (130)$$

かくして，履歴中心に原点を有する bi-linear 形閉履歴特性関数，$\varphi(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}\,;r,\delta\,;\chi)$ の履歴入力，$\mathfrak{z}$ とその１階導関数，$\dot{\mathfrak{z}}$ に関する線形近似伝達特性は (128)～(130) 式を (119) 式に代入して得られるが，係数，κ_0 および d_0 は，弾塑性領域，$\chi>1$ において，履歴の無次元振巾パラメーター，χの quasi-linear な関

数となり，また，係数，d_0 は周波数，$\bar{\omega}$ を含んでいる。一方，履歴中心は元の履歴入力，η およびその1階導関数，$\dot{\eta}$ が零でない平均値を有する場合，一般に，(48) 式で定義される中立位置，$\bar{\eta}$ あるいは slowly varying の場合，近似的に $E\eta$ と考えられる。従って，非定常確率過程における履歴特性の等価線形化は履歴の安定性と slowly varying を前提として，**2. 2.** で論じたような履歴入力に関する非定常確率過程の零平均値の場合，若しくは平均値ないし中立位置に変数を変換した場合の平均周波数 $\bar{\omega}(\tau)$ と極値振巾密度分布関数，$p(\chi\,;\tau)$ を用いて，履歴振巾パラメーター，χ の空間に関する2乗平均誤差を最小ならしめる規範によって行ない，結局，履歴特性関数の等価線形化関数の係数，κ_e，d_e は時間，τ の関数として定まる。

いま，履歴特性関数，$\varphi(\mathfrak{z},\ \dot{\mathfrak{z}})$ の等価線形化関数を，

$$\varphi_e(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})=\kappa_e(\tau)\mathfrak{z}+d_e(\tau)\dot{\mathfrak{z}} \quad\cdots\cdots(131)$$

とおけば，係数，$\kappa_e(\tau)$，$d_e(\tau)$ は次の2乗平均誤差関数，

$$J(\kappa_e,d_e)=\int_0^\infty(\varphi_0(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})-\varphi_e(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}))^2p(\chi\,;\tau)d\chi$$

$$=\int_0^\infty(\kappa_0(\chi)\eta+d_0(\chi,\bar{\omega}(\tau))\dot{\eta}-\kappa_e(\tau)\eta-d_e(\tau)\dot{\eta})^2p(\chi\,;\tau)d\chi \quad\cdots\cdots(132)$$

の最小化の条件，$\partial J/\partial\kappa_e=0$，$\partial J/\partial d_e=0$ から次式のように定まる。

$$\kappa_e(\tau)=\int_0^\infty\kappa_0(\chi)p(\chi\,;\tau)d\chi \quad\cdots\cdots(133)$$

$$d_e(\tau)=\int_0^\infty d_0(\chi,\bar{\omega}(\tau))p(\chi\,;\tau)d\chi \quad\cdots\cdots(134)$$

(133)，(134) 式の $\bar{\omega}(\tau)$，$p(\chi\,;\tau)$ に対しては，正規非定常入力を対象として動力学系の非線形性があまり大きくない場合には，動力学系に含まれる履歴特性の入力もまた近似的に正規性の非定常過程に属すると見做し得て，さらに slowly varying の前提から，履歴入力の速度の平均値を近似的に零とし，かつ履歴中心は履歴入力の平均値と考えれば**2. 2.** の結果から次式が適用できる。

$$\bar{\omega}(\tau)=\lambda\sqrt{1-\rho^2} \quad\cdots\cdots(135)$$

$$p(\chi\,;\tau)=\delta\exp\left(-\frac{\chi^2\delta^2}{2{}_0K_{\eta\eta}}\right)\left[\frac{\chi\delta}{{}_0K_{\eta\eta}}\exp\left(-\frac{\rho^2\chi^2\delta^2}{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}\right)\right.$$
$$\left.+\rho\sqrt{\frac{\pi}{2{}_0K_{\eta\eta}}}\left(\frac{\chi^2\delta^2}{{}_0K_{\eta\eta}}-1\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\rho\chi\delta}{\sqrt{2(1-\rho^2){}_0K_{\eta\eta}}}\right)\right] \quad\cdots\cdots(136)$$

(135)，(136) 式で，

$$\rho=\frac{{}_0K_{\eta\dot{\eta}}}{\sqrt{{}_0K_{\eta\eta}{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}},\quad \lambda=\sqrt{\frac{{}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}{{}_0K_{\eta\eta}}} \quad\cdots\cdots(137)$$

であり，また，

$$\mathfrak{z}=\eta'=\eta-\bar{\eta}=\eta-E\eta+\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\fallingdotseq\eta''=\eta-E\eta$$
$$\dot{\mathfrak{z}}=\dot{\eta}'=\dot{\eta}-\dot{\bar{\eta}}=\dot{\eta}-(E\dot{\eta})+\left(\frac{E\dot{\eta}}{\rho\lambda}\right)\fallingdotseq\dot{\eta}''=\dot{\eta}-(E\dot{\eta})=\dot{\eta}-E\dot{\eta}\fallingdotseq\dot{\eta} \quad\cdots\cdots(138)$$

によって，$\mathfrak{z}\fallingdotseq\eta_d$，$\dot{\mathfrak{z}}\fallingdotseq\dot{\eta}_d$ が成立するから，

$${}_0K_{\eta\eta}=K_{\mathfrak{z}\mathfrak{z}},\quad {}_0K_{\eta\dot{\eta}}=K_{\mathfrak{z}\dot{\mathfrak{z}}},\quad {}_0K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}=K_{\dot{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}} \quad\cdots\cdots(139)$$

が得られる。

なお，(128) 式の $\kappa_0(\chi)$ の代りに，bi-linear 形閉履歴特性関数，$\varphi(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}\,;r,\delta\,;\chi)$ の対角線の勾配を用いるのも，表現が著しく簡単になる点で近似的には有用と思われる。

$$\kappa_0(\chi)=\frac{1}{\chi}(1+r(\chi-1)),\quad \chi\geqq1 \quad\cdots\cdots(140)$$

以上においては，履歴特性関数の中心に座標の原点を選び，(138)，(139) 式からも判るように，$E\mathfrak{z}=$

$E\dot{\mathfrak{z}}=0$ として bi-linear 形履歴特性関数の等価線形化を議論してきた。このとき，一般に履歴入力，η およびその速度，$\dot{\eta}$ は非定常確率過程に属し，その空間平均，$E\eta$，$E\dot{\eta}$ はともに零でないのであるが，slowly varying の仮定と安定な履歴の前提のもとに，$E\dot{\eta}$ を省略し，

$$\begin{aligned}&\mathfrak{z}=\eta-E\eta,\ E\mathfrak{z}=0\\&\dot{\mathfrak{z}}=\dot{\eta},\ E\dot{\mathfrak{z}}=E\dot{\eta}=0\end{aligned} \quad\cdots\cdots(141)$$

$$\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})=\varphi_\eta(\mathfrak{z}+E\eta,\dot{\mathfrak{z}})-C_0=\varphi_\eta(\eta,\dot{\eta})-C_0 \quad\cdots\cdots(142)$$

の変換を行なって，元の座標，$(\eta,\ \varphi_\eta)$ に関する履歴特性関数，$\varphi_\eta(\eta,\ \dot{\eta})$を $(E\eta,\ C_0)$を原点とする座標，$(\mathfrak{z},\ \varphi_{\mathfrak{z}})$ に移し，原点を中心とする履歴特性関数，$\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}})$ に関して等価線形化を行なった。ここで，bi-linear 形閉履歴特性，$\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}\,;r,\delta\,;\chi)$ を対象とする場合，変換，(141)，(142) 式に対応して履歴中心の元の座標に関する値，C_0 は，

$$C_0=rE\eta \quad\cdots\cdots(143)$$

である。従って，座標，$(\mathfrak{z},\ \varphi_{\mathfrak{z}})$ に関して，bi-linear 形履歴特性関数，$\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}\,;r,\delta)$ の等価線形化関数，$\varphi_{e\mathfrak{z}}(\mathfrak{z},\dot{\mathfrak{z}}\,;r,\delta)$ が定まると，元の座標，$(\eta,\ \varphi_\eta)$ に関する $\varphi_\eta(\eta,\dot{\eta}\,;r,\delta)$ の等価線形化関数，$\varphi_e(\eta,\dot{\eta}\,;r,\delta)$ は (141)，(142) 式の逆変換によって次式のように定められる。

$$\varphi_{e\eta}(\eta,\dot{\eta}\,;r,\delta)=\varphi_{e\mathfrak{z}}(\eta-E\eta,\dot{\eta}\,;r,\delta)+rE\eta \quad\cdots\cdots(144)$$

勿論，元の座標系に関する履歴特性関数，$\varphi_\eta(\eta,\dot{\eta})$ の等価線形化は直接元の座標系，$(\eta,\ \varphi_\eta)$ についても行なうことができるが，その結果は前述の履歴中心 $(E\eta,\ C_0)$ への座標変換による方法と同等である。元の座標系，$(\eta,\ \varphi_\eta)$ については，先ず等価線形化の第1段階，すなわち，安定な閉履歴特性の振巾パラメーターの quasi-linear な関数を係数とする線形近似伝達特性を定める段階では，$\varphi_\eta(\eta,\ \dot{\eta})$ の η および $\dot{\eta}$ の線形結合の係数を (120) 式の代りに次の時間に関する2乗平均誤差を最小にする規範で定める。

$$I(\kappa_0,d_0,p_0)=\int_\tau^{\tau+\bar{\tau}}(\varphi_\eta(\eta,\dot{\eta})-\kappa_0\eta-d_0\dot{\eta}-p_0)^2d\tau \quad\cdots\cdots(145)$$

上式の最小化の条件，$\partial I/\partial\kappa_0=0$，$\partial I/\partial d_0=0$，$\partial I/\partial p_0=0$ から次式が得られる。

$$\begin{aligned}
\kappa_0&=\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix}\int\varphi\eta d\tau & \int\eta\dot{\eta}d\tau & \int\eta d\tau\\ \int\varphi\dot{\eta}d\tau & \int\dot{\eta}^2d\tau & \int\dot{\eta}d\tau\\ \int\varphi d\tau & \int\dot{\eta}d\tau & \bar{\tau}\end{vmatrix} \qquad
p_0=\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix}\int\eta^2d\tau & \int\eta\dot{\eta}d\tau & \int\varphi\eta d\tau\\ \int\eta\dot{\eta}d\tau & \int\dot{\eta}^2d\tau & \int\varphi\dot{\eta}d\tau\\ \int\eta d\tau & \int\dot{\eta}d\tau & \int\varphi d\tau\end{vmatrix}\\
d_0&=\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix}\int\eta^2d\tau & \int\varphi\eta d\tau & \int\eta d\tau\\ \int\eta\dot{\eta}d\tau & \int\varphi\dot{\eta}d\tau & \int\dot{\eta}d\tau\\ \int\eta d\tau & \int\varphi d\tau & \bar{\tau}\end{vmatrix} \qquad
\varDelta=\begin{vmatrix}\int\eta^2d\tau & \int\eta\dot{\eta}d\tau & \int\eta d\tau\\ \int\eta\dot{\eta}d\tau & \int\dot{\eta}^2d\tau & \int\dot{\eta}d\tau\\ \int\eta d\tau & \int\dot{\eta}d\tau & \bar{\tau}\end{vmatrix}
\end{aligned} \quad\cdots\cdots(146)$$

いま，無次元時間の原点を安定な bi-linear 形履歴特性関数，$\varphi_\eta(\eta,\dot{\eta}\,;r,\delta\,;\chi)$ の左下角における時間，τ_0 に選び，

$$\tau'=\tau-\tau_0 \quad\cdots\cdots(147)$$

と置く。次に，例えば，(59) 式の座標変換に対応して，安定な履歴特性の入力，η を次式のように置く。

$$\begin{aligned}&\eta(\tau')=-aq(\tau')+E\eta+E\dot{\eta}\tau'\\&\dot{\eta}(\tau')=-a\dot{q}(\tau')+2E\dot{\eta}\end{aligned} \quad\cdots\cdots(148)$$

ここで，a は τ に関して緩やかな変動の正値関数で履歴振巾を示す。また，(148) 第2式では $\dot{a}$ および $(\dot{E}\dot{\eta})$ は高次の微小量として省略した。(148) の両辺の空間平均をとると次式を得る。

$$aq(\tau')=E\dot{\eta}\tau',\ a\dot{q}(\tau')=E\dot{\eta} \quad\cdots\cdots(149)$$

(149) 式は任意の時間に対しては勿論成立しないが，局所的な意味でのエルゴード性を前提して，履歴1

サイクル当りで成立するように $q(\tau')$ に条件を附加する。すなわち，

$$\int_0^{\bar{\tau}} q(\tau')d\tau'=\frac{E\dot{\eta}\bar{\tau}^2}{2a},\ \int_0^{\bar{\tau}} \dot{q}(\tau')d\tau'=\frac{E\dot{\eta}\bar{\tau}}{a} \cdots\cdots(150)$$

ここで，$\bar{\tau}$ は周期で，τ に関して緩やかな変動を示す正値関数であり従って，平均過程で a は定数と見做している。なお，$q(\tau')$ については安定かつ円滑な履歴特性関数を画くように種々の条件がさらに附加されねばならない。かような $q(\tau')$ を仮定して (148) 式に代入し，(146) 式を評価すれば，線形近似伝達特性の係数，κ_0，d_0，p_0 が得られる順序となるが，ここでさらに，slowly varying の前提によって，a を定数とし，$E\dot{\eta}$ を微小量として無視すれば，(150) 両式の右辺はともに零となり，第１式は $q(\tau')$ の時間平均が零，第２式は閉ループの条件を示す。このとき，(122) で用いた関数，

$$q(\tau')=\cos\bar{\omega}\tau' \cdots\cdots(151)$$

は (150) 式の条件と安定かつ円滑な履歴特性を画くための条件を満足する。

安定な bi-linear 形閉履歴特性関数，$\varphi_\eta(\eta,\dot{\eta}\,;r,\delta\,;\chi)$ に対して (151) 式を用いると (146) 式の各要素は次のように計算される。

$$\begin{aligned}&\int\eta d\tau'=E\eta\bar{\tau},\quad \int\dot{\eta}d\tau'=0,\quad \int\eta\dot{\eta}d\tau'=0\\ &\int\eta^2d\tau'=(E\eta)^2\bar{\tau}+\int\mathfrak{z}^2d\tau',\quad \int\dot{\eta}^2d\tau'=\int\dot{\mathfrak{z}}^2d\tau' \qquad\cdots\cdots(152)\\ &\int\varphi_\eta\dot{\eta}d\tau'=\int\varphi_{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}d\tau',\quad \int\varphi_\eta\eta d\tau'=\int\varphi_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}d\tau'+r(E\eta)^2\bar{\tau},\quad \int\varphi_\eta d\tau'=rE\eta\bar{\tau}\end{aligned}$$

従って，(146) 式から，κ_0，d_0，p_0 は次のように定まる。

$$\kappa_0=\frac{\int\varphi_{\mathfrak{z}}\mathfrak{z}d\tau'}{\int\mathfrak{z}^2d\tau'},\quad d_0=\frac{\int\varphi_{\mathfrak{z}}\dot{\mathfrak{z}}d\tau'}{\int\dot{\mathfrak{z}}^2d\tau'},\quad p_0=rE\eta-\kappa_0E\eta \cdots\cdots(153)$$

(153) 式の κ_0，d_0 は先に履歴中心に関する座標，($\mathfrak{z}$，$\varphi_{\mathfrak{z}}$) について (121)，(123) 式から定めた (128)～(130) 式に一致する。一方，(153) 式の p_0 は (119) 式および (141)～(143) 式から得られる線形近似伝達特性，

$$\varphi_{0\eta}(\eta,\dot{\eta}\,;\chi)=\kappa_0(\chi)\eta+d_0(\chi,\bar{\omega}(\tau))\dot{\eta}+p_0(\chi) \cdots\cdots(154)$$

の定数項に一致する。

この２種の手順はまた，等価線形化の第２段階，すなわち，振巾パラメーターの quasi-linear な係数を含む線形近似伝達特性から，空間に関する２乗平均誤差最小の規範による時間に関する変数係数を有する等価線形化関数の誘導過程においても同等である。すなわち，

$$J(\kappa_e,d_e,p_e)=\int_0^\infty(\varphi_{0\eta}(\eta,\dot{\eta}\,;\chi)-\kappa_e(\tau)\eta-d_e(\tau)\dot{\eta}-p_e)^2p(\chi\,;\tau)d\chi \cdots\cdots(155)$$

を最小にする条件から次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\kappa_e(\tau)=\int_0^\infty\kappa_0(\chi)p(\chi\,;\tau)d\chi,\quad d_e(\tau)=\int_0^\infty d_0(\chi,\bar{\omega}(\tau))p(\chi\,;\tau)d\tau\\ &p_e(\tau)=\int_0^\infty p_0(\chi)p(\chi\,;\tau)d\chi=rE\eta-\kappa_e(\tau)E\eta\end{aligned} \cdots\cdots(156)$$

(156) 第１，２式は先の (133)，(134) と同じ式であり，また第３式は (131)，(144) から得られる等価線形化関数，

$$\varphi_{e\eta}(\eta,\dot{\eta}\,;\tau)=\kappa_e(\tau)\eta+d_e(\tau)\dot{\eta}+p_e(\tau) \cdots\cdots(157)$$

の定数項に他ならない。

4. 弾塑性不連続動力学系の非定常ランダム応答の評価法

正規性を前提とすれば，例えば，（34）式で与えられるレベル超過期待回数のような非定常確率過程における ある種の確率統計量は，非定常過程とその微分過程に関する同時刻における1次ならびに2次の平均量のみから計算できる。一般に多次元非定常確率過程においては，それらの平均量は平均ベクトルおよび任意の2個の時間に関する共分散マトリックスの同時刻における値，すなわち，相互分散マトリックスから評価できる。また，多次元非定常確率過程のスペクトル性状は，共分散マトリックスあるいは任意の有限2次元時間領域に関する局所共分散マトリックスのフーリエ変換として定義された1次元および2次元の全あるいは局所スペクトル密度マトリックスから評価される[4]。ここでは，非定常確率過程に属するランダム入力群を受ける安定な履歴特性を含む実数係数の弾塑性不連続動力学系の出力応答ならびにその速度応答の非定常過程における平均ベクトルおよび共分散マトリックスを対象として，時間変数の微小区間毎に順次，**3**の方法によって弾塑性動力学系を実数，定数係数の弾性不連続動力学系に等価線形化し，その微小区間における出力応答とその速度応答の平均ベクトルならびに共分散マトリックスの増分を計算することによって非定常確率過程における弾塑性系の出力応答ならびにその速度応答の平均ベクトルと共分散マトリックスを数値的に評価する方法について述べる。

先ず，出力および入力に関して区別した実数時間変数，τ，μ の任意の有界閉領域，$R^1_\tau=R^1_\mu=[\mu_L, \mu_U]$ において，一般に実数変数係数の線形不連続動力学系が，任意の非定常確率過程に属する入力，$\{f(\mu)\}$ の有界閉領域，R^1_μ に属する部分，$D(\mu\,;\,R^1_\mu)\{f(\mu)\}$ を受けるとき，$\tau\epsilon R^1_\infty\supset R^1_\tau$ における動力学系の出力応答，$\{\eta(\tau)\}$ およびその1階導関数としての速度応答，$\{\eta^{(1)}_\tau(\tau)\}$ は夫々平均ベクトルと偏差ベクトルに別けて，（7）～(11) 式に与えられている。

いま，2組の実数時間変数，$(\tau_1,\ \mu_1)$ および $(\tau_2,\ \mu_2)$ の有界領域を微小区間に分け，夫々 k_1 番目，k_2 番目の微小区間を ${}_0R^{1k_1}_{\tau_1}={}_IR^{1k_1}_{\mu_1}$ および ${}_0R^{1k_2}_{\tau_2}={}_IR^{1k_2}_{\mu_2}$ とし，これから得られる微小長方形領域を ${}_{0\tau}R^{2k_1k_2}_{\tau_1\tau_2}={}_{I\tau}R^{2k_1k_2}_{\mu_1\mu_2}$ とすれば，この微小長方形領域における出力応答，$\{\eta(\tau)\}$ およびその速度応答，$\{\eta^{(1)}_\tau(\tau)\}$に関する局所共分散マトリックスは (12)～(20) 式によって得られ，これを次式のように略記する。

$$\left.\begin{aligned}
[{}_0K_{\eta\eta}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2} &= [{}_0K^{(0)(0)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2}\\
[{}_0K_{\eta\dot\eta}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2} &= [{}_0K^{(0)(1)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2}\\
[{}_0K_{\dot\eta\eta}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2} &= [{}_0K^{(1)(0)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2}\\
[{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2} &= [{}_0K^{(1)(1)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(158)$$

而して，$(\tau_1,\ \tau_2)$ が ${}_{0\tau}R^{2k_1k_2}_{\tau_1\tau_2}$ の内部領域にあるとき，

$$\begin{aligned}
[{}_0K^{(\lambda_1)(\lambda_2)}_{\tau_1\ \tau_2}(\tau_1,\tau_2)]_{k_1k_2} &= \int_{-\infty}^{\tau_1}\int_{-\infty}^{\tau_2} d\mu_1 d\mu_2 [g^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_1)]_{k_1}[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1k_2}[g^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_2)]^T_{k_2}\\
&+\int_{-\infty}^{\tau_1} d\mu_1 [g^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_1)]_{k_1}[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1k_2}[i^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_{2L})]^T_{k_2}\\
&+[i^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_{1L})]_{k_1}\int_{-\infty}^{\tau_2} d\mu_2[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{k_1k_2}[g^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_2)]^T_{k_2}\\
&+[i^{(\lambda_1)}_{\tau_1}(\tau_1,\mu_{1L})]_{k_1}[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]_{k_1k_2}[i^{(\lambda_2)}_{\tau_2}(\tau_2,\mu_{2L})]^T_{k_2},\quad \lambda_1,\lambda_2=0,1\quad\cdots\cdots(159)
\end{aligned}$$

と表わされる。(159) 式の $[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1k_2}$，$[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1k_2}$，$[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{k_1k_2}$ および $[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]_{k_1k_2}$ は ${}_{I\tau}R^{2k_1k_2}_{\mu_1\mu_2}$，${}_IR^{1k_i}_{\mu_i}$に関して，(17)～(20) に定義された量である。また，$[g^{(\lambda_i)}_{\tau_i}(\tau_i,\mu_i)]_{k_i}$ および $[i^{(\lambda_i)}_{\tau_i}(\tau_i,\mu_{iL})]_{k_i}$ は k_i 番目の微小区間における等価線形動力学系の単位衝撃応答マトリックスならびに単位初期条件応答マトリックスを示し，微小区間では動力学系は定数係数系と見做せるから，夫々，

$[g_{\tau}^{(\lambda_i)}(\tau_i-\mu_i)]_{k_i}$ および $[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_i)}(\tau_i-\mu_{iL})]_{k_i}$ と表わせる。

従って，微小長方形領域，${}_{0\tau}R_{\tau_1\tau_2}^{2k_1k_2}={}_{I\tau}R_{\mu_1\mu_2}^{2k_1k_2}=[\mu_{1L}^{k_1},\ \mu_{1U}^{k_1};\ \mu_{2L}^{k_2},\ \mu_{2U}^{k_2}]$ において，点 $(\mu_{1L}^{k_1},\ \mu_{2L}^{k_2})$ から点 $(\mu_{1U}^{k_1},\mu_{2U}^{k_2})$ に至る間の共分散マトリックスの増分，$\Delta[{}_0K_{\tau_1\ \tau_2}^{(\lambda_1)(\lambda_2)}]_{k_1k_2}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\Delta[{}_0K_{\tau_1\ \tau_2}^{(\lambda_1)(\lambda_2)}]_{k_1k_2}&=\int_{{}_{I\tau}R_{\mu_1\mu_2}^{2k_1k_2}}d\mu_1d\mu_2[g_{\tau}^{(\lambda_1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]_{k_1}[{}_IK(\mu_1,\ \mu_2)]_{k_1k_2}[g_{\tau}^{(\lambda_2)}(\mu_{2L}-\mu_2)]_{k_2}^T\\&+\int_{{}_IR_{\mu_1}^{1k_1}}d\mu_1[g_{\tau}^{(\lambda_1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]_{k_1}[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1k_2}[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_2)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]_{k_2}^T\\&+[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]_{k_1}\int_{{}_IR_{\mu_2}^{1k_2}}d\mu_2[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{k_1k_2}[g_{\tau}^{(\lambda_2)}(\mu_{2U}-\mu_2)]_{k_2}^T\\&+[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]_{k_1}[{}_0I(\mu_{1L},\ \mu_{2L})]_{k_1k_2}[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_2)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]_{k_2}^T\\&-[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_1)}(0)]_{k_1}[{}_0I(\mu_{1L},\ \mu_{2L})]_{k_1k_2}[\dot{i}_{\tau}^{(\lambda_2)}(0)]_{k_2}^T\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(160)$$

一方，k_i 番目の区間の初期条件の偏差ベクトルは k_{i-1} 番目の区間の量を用いて，

$$\begin{aligned}\{i_a(\mu_{iL})\}_{k_i}&=\int_{{}_IR_{i\mu}^{1k_i-1}}d\mu_i\begin{bmatrix}[g(\mu_{iU}-\mu_i)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{iU}-\mu_i)]\end{bmatrix}_{k_i-1}\{f_a(\mu_i)\}\\&+\begin{bmatrix}[i(\mu_{iU}-\mu_{iL})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{iU}-\mu_{iL})]\end{bmatrix}_{k_i-1}\{i_a(\mu_{iL})\}_{k_i-1}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(161)$$

と表わされるから，夫々次の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1k_2}&=\int_{{}_IR_{\mu_2}^{1k_2-1}}d\mu_2[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1k_2-1}\begin{bmatrix}[g(\mu_{2U}-\mu_2)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_2)]\end{bmatrix}_{k_2-1}^T\\&+[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1k_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}_{k_2-1}^T\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(162)$$

$$\begin{aligned}[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{k_1k_2}&=\int_{{}_IR_{\mu_1}^{1k_1-1}}d\mu_1\begin{bmatrix}[g(\mu_{1U}-\mu_1)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]\end{bmatrix}_{k_1-1}[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1-1k_2}\\&+\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-1}[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{k_1-1k_2}\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(163)$$

$$\begin{aligned}[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]_{k_1k_2}&=\int_{{}_{I\tau}R_{\mu_1\mu_2}^{k_1-1k_2-1}}d\mu_1d\mu_2\begin{bmatrix}[g(\mu_{1U}-\mu_1)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]\end{bmatrix}_{k_1-1}\\&\cdot[{}_IK(\mu_1,\ \mu_2)]_{k_1-1k_2-1}\begin{bmatrix}[g(\mu_{2U}-\mu_2)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_2)]\end{bmatrix}_{k_2-1}^T\\&+\int_{{}_IR_{\mu_1}^{1k_1-1}}d\mu_1\begin{bmatrix}[g(\mu_{1U}-\mu_1)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]\end{bmatrix}_{k_1-1}[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1-1k_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}_{k_2-1}^T\\&+\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-1}\int_{{}_IR_{\mu_2}^{1k_2-1}}d\mu_2[{}_{0I}K(\mu_{1L},\ \mu_2)]_{k_1-1k_2-1}\begin{bmatrix}[g(\mu_{2U}-\mu_2)]\\ [g_{\tau}^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_2)]\end{bmatrix}_{k_2-1}^T\\&+\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-1}[{}_0I(\mu_{1L},I_{2L})]_{k_1-1k_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [\dot{i}_{\tau}^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}_{k_2-1}^T\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(164)$$

また，(161) 式は，順次漸化式を適用することによって，

$$\{i_d(\mu_{lL})\}_{k_l}=\sum_{i=1}^{k_l-1}\prod_{j=1}^{i-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{lU}-\mu_{lL})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{lU}-\mu_{lL})]\end{bmatrix}_{k_l-j}\int_{IR_{\mu_l}^{1k_l-i}}d\mu_l$$

$$\cdot\begin{bmatrix}[g(\mu_{lU}-\mu_l)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{lU}-\mu_l)]\end{bmatrix}_{k_l-i}\{f_d(\mu_l)\}+\prod_{j=1}^{k_l-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{lU}-\mu_{lL})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{lU}-\mu_{lL})]\end{bmatrix}_{k_l-j}\{i_d(\mu_{lL})\}_1 \qquad \cdots\cdots(165)$$

と表わされる。ただし，ここで $\prod_{j=1}^{0}A_j=1$ と規約する。また $\prod_{j=1}^{i-1}$ は順次右乗するものとする。(165) 式を用いると (162)～(164) 式は夫々次のように書ける。

$$[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1k_2}=\sum_{i=1}^{k_2-1}\int_{IR_{\mu_2}^{1k_2-i}}d\mu_2[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1k_2-i}\begin{bmatrix}[g(\mu_{2U}-\mu_2)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_2)]\end{bmatrix}^T_{k_2-i}$$

$$\cdot\prod_{j=1}^{i-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}^T_{k_2-i+j}+[{}_{I0}K(\mu_1,\ \mu_{2L})]_{k_11}\prod_{j=1}^{k_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}^T_j \qquad \cdots\cdots(166)$$

$$[{}_{0I}K(\mu_{1L},\ \mu_2)]_{k_1k_2}=\sum_{i=1}^{k_1-1}\prod_{j=1}^{i-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-j}\int_{IR_{\mu_1}^{1k_1-i}}d\mu_1\begin{bmatrix}[g(\mu_{1U}-\mu_1)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]\end{bmatrix}_{k_1-i}$$

$$\cdot[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1-ik_2}+\prod_{j=1}^{k_1-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-j}[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{1k_2} \qquad \cdots\cdots(167)$$

$$[{}_0I(\mu_{1L},\ \mu_{2L})]_{k_1k_2}=\sum_{i_1=1}^{k_1-1}\sum_{i_2=1}^{k_2-1}\prod_{j_1=1}^{i_1-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-j_1}$$

$$\cdot\int_{IrR_{\mu_1\mu_2}^{2k_1-i_1k_2-i_2}}d\mu_1d\mu_2\begin{bmatrix}[g(\mu_{1U}-\mu_1)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]\end{bmatrix}_{k_1-i_1}[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{k_1-i_1k_2-i_2}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}[g(\mu_{2U}-\mu_2)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_2)]\end{bmatrix}^T_{k_2-i_2}\prod_{j_2=1}^{i_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}^T_{k_2-i_2+j_2}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{k_1-1}\prod_{j_1=1}^{i_1-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-j_1}\int_{IR_{\mu_1}^{1k_1-i_1}}d\mu_1\begin{bmatrix}[g(\mu_{1U}-\mu_1)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_1)]\end{bmatrix}_{k_1-i_1}$$

$$\cdot[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{k_1-i_11}\prod_{j_2=1}^{k_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}^T_{j_2}$$

$$+\prod_{j_1=1}^{k_1-1}\begin{bmatrix}[(i\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-j_1}\sum_{i_2=1}^{k_2-1}\int_{IR_{\mu_2}^{1k_2-i_2}}d\mu_2[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{1k_2-i_2}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}[g(\mu_{2U}-\mu_2)]\\ [g_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_2)]\end{bmatrix}^T_{k_2-i_2}\prod_{j_2=1}^{i_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}^T_{k_2-i_2+j_2}$$

$$+\prod_{j_1=1}^{k_1-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{1U}-\mu_{1L})]\end{bmatrix}_{k_1-j_1}[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]_{11}\prod_{j_2=1}^{k_2-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_{2U}-\mu_{2L})]\end{bmatrix}^T_{j_2}$$

$$k_1,k_2=1,2,\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots(168)$$

ここで，(11)，(20) の式の定義に従って，

$$[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]_{k_1k_2}=\begin{bmatrix}[{}_0K_{\tau_1\ \tau_2}^{(0)(0)}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})] & [{}_0K_{\tau_1\ \tau_2}^{(0)(1)}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})]\\ [{}_0K_{\tau_1\ \tau_2}^{(1)(0)}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})] & [{}_0K_{\tau_1\ \tau_2}^{(1)(1)}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}[{}_0K_{\eta\eta}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})] & [{}_0K_{\eta\dot\eta}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})]\\ [{}_0K_{\dot\eta\eta}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})] & [{}_0K_{\dot\eta\dot\eta}(\overset{k_1}{\mu_{1L}},\overset{k_2}{\mu_{2L}})]\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(169)$$

(160) 式および (166)～(169) 式から，任意の微小長方形領域 ${}_{0\tau}R^{2k_1k_2}_{\tau_1\tau_2}$ における出力応答ならびにその速度応答の共分散マトリックスを求めるには， $k_1\geqq i_1\geqq 1$, $k_2\geqq i_2\geqq 1$ の範囲の (i_1, i_2) に関して，入力と初期条件に関する共分散マトリックス， $[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]_{i_1i_2}$, $[{}_{I0}K(\mu_1,\mu_{2L})]_{i_11}$, $[{}_{0I}K(\mu_{1L},\mu_2)]_{1i_2}$ および $[{}_0I(\mu_{1L},\mu_{2L})]_{11}$ が既知であり，かつ各微小区間における等価線形動力学系の単位衝撃応答マトリックスと単位初期条件応答マトリックスが必要である。通常，2組の変数 (τ_1, μ_1) および (τ_2, μ_2) の分割法は変える必要はないから，$k=max(k_1,k_2)$ として，${}_IR^1_{\mu_i}=\sum_{j=1}^{k}{}_IR^{1j}_{\mu_i}=[\mu_L,\mu_U]$, ${}_{IS}R^2_{\mu_1\mu_2}=[{}_IR^1_{\mu_1},{}_IR^1_{\mu_2}]=[\mu_L,\mu_U\,;\,\mu_L,\mu_U]$ における $[{}_IK(\mu_1,\mu_2\,;\,{}_{IS}R^2_{\mu_1\mu_2})]$, $[{}_{I0}K(\mu,\mu_L)]=[{}_{0I}K(\mu_L,\mu)]^T$ および $[{}_0I(\mu_L,\mu_L)]$ が既知であり，かつ $k\geqq i\geqq 1$ なる i 区間に関する等価線形動力学系の単位衝撃応答マトリックスと単位初期条件応答マトリックスが必要となる。後者は実際には **3** で述べたように，出力応答とその速度応答に関する共分散マトリックスの $\tau_1=\tau_2=\tau$ における値を用いて等価線形化を行なうわけであるから，先端微小正方形領域，${}_{0S}R^{2k_1k_2}_{\tau_1\tau_2}$ に関しては，$k=k_1=k_2$ でなければならない。従って，単に $\tau_1=\tau_2=\tau$ における共分散マトリックスの値にのみ興味がある場合には， $k_1=k_2=k=1,2,\cdots\cdots$ として微小正方形領域，${}_{0S}R^{2kk}_{\tau_1\tau_2}={}_{IS}R^{2kk}_{\mu_1\mu_2}={}_{IS}R^{2k}_{\mu_1\mu_2}=({}_IR^{1k}_{\mu_1},{}_IR^{1k}_{\mu_2})=[\mu_Lk,\mu_Uk\,;\,\mu_Lk,\mu_Uk]$ を選び，$\tau_1=\tau_2=\tau$ に沿って，下限，τ_L から τ まで順次共分散マトリックスの評価と等価線形化を繰返して計算を進めることができるが，その際，有限正方形領域，${}_{0S}R^2_{\tau_L\tau}$ に含まれる任意の領域の共分散マトリックスの評価に必要な情報はすべて既知となっているから，先端微小正方形領域の番号を k_U として，例えば，$k_U\geqq k_1$, $k_2\geqq 1$ なる任意の (k_1, k_2) における (169) 式の共分散マトリックスの値は (168) 式から容易に計算できる。

なお，**2**,**3** で述べたように応答レベル超過期待回数を計算する場合や等価線形化を行なう場合に出力応答およびその速度応答の平均ベクトルを必要とする。k 番目の微小区間，${}_0R^{1k}_\tau={}_IR^{1k}_\mu=[\mu_Lk,\mu_Uk]$ における出力応答，$\{\eta(\tau)\}$ およびその速度応答，$\{\eta^{(1)}_\tau(\tau)\}$ の平均ベクトルは，(9) 式から次式のように表わせる。

$$\{\eta_m{}^{(\lambda)}_\tau(\tau)\}_k=\int_{-\infty}^{\tau}d\mu[g^{(\lambda)}_\tau(\tau,\mu)]_k\{f_m(\mu)\}_k+[i^{(\lambda)}_\tau(\tau,\mu_L)]\{i_m(\mu_L)\}_k \quad\cdots\cdots(170)$$

ここで，　$\lambda=0,1$

$$\left.\begin{aligned}\{f_m(\mu)\}_k&=D(\mu\,;\,{}_IR^{1k}_\mu)E\{f(\mu)\}\\ \{i_m(\mu_L)\}_k&=E\{i(\mu_Lk)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(171)$$

従って，微小区間，${}_IR^{1k}_\mu$ における増分は次のように書ける。

$$\Delta\{\eta_m{}^{(\lambda)}_\tau\}_k=\int_{{}_IR^{1k}_\mu}d\mu[g^{(\lambda)}_\tau(\mu_U-\mu)]_k\{f_m(\mu)\}_k$$
$$+([i^{(\lambda)}_\tau(\mu_U-\mu_L)]_k-[i^{(\lambda)}_\tau(0)]_k)\{i_m(\mu_L)\}_k \quad\cdots\cdots(172)$$

ここで次式が成立する。

$$\{i_m(\mu_L)\}_k=\int_{{}_IR^{1k-1}_\mu}d\mu\begin{bmatrix}[g(\mu_U-\mu_1)]\\ [g^{(1)}_\tau(\mu_U-\mu)]\end{bmatrix}_{k-1}\{f_m(\mu)\}_{k-1}$$
$$+\begin{bmatrix}[i(\mu_U-\mu_L)]\\ [i^{(1)}_\tau(\mu_U-\mu_L)]\end{bmatrix}_{k-1}\{i_m(\mu_L)\}_{k-1}$$
$$=\sum_{i-1}^{k-1}\prod_{j=1}^{i=1}\begin{bmatrix}[i(\mu_U-\mu_L)]\\ [i^{(1)}_\tau(\mu_U-\mu_L)]\end{bmatrix}_{k-j}\int_{{}_IR^{1k-i}_\mu}d\mu\begin{bmatrix}[g(\mu_U-\mu)]\\ [g^{(1)}_\tau(\mu_U-\mu)]\end{bmatrix}_{k-i}\{f_m(\mu)\}_{k-i}$$

$$+\prod_{j=1}^{k-1}\begin{bmatrix}[i(\mu_U-\mu_L)]\\ [i_\tau^{(1)}(\mu_U-\mu_L)]\end{bmatrix}_{k-j}\{i_m(\mu_L)\}_1 \quad\cdots\cdots(173)$$

(170), (173) 式から，任意の微小区間，${}_IR_\mu^{1k}$ における出力応答ならびにその速度応答の平均ベクトルを求めるには，${}_IR_\mu^1=\sum_{i=1}^{k}{}_IR_\mu^{1i}=[\mu_L,\mu_U]$ における入力の平均ベクトルと μ_L における初期条件の平均ベクトルが既知であり，かつ，$k\geqq i\geqq 1$ の任意の微小区間，${}_IR_\mu^{1i}$ における等価線形系の単位衝撃応答マトリックスと単位初期条件応答マトリックスが必要である。

共分散マトリックスおよび平均ベクトルの数値解析は実際上，微小領域の初期値を代表値として漸化式に基づいて行なうのが便利と考えられる。そこで，ベクトル，

$$\{\xi(\tau)\}=\begin{Bmatrix}\{\eta(\tau)\}\\ \{\eta_\tau^{(1)}(\tau)\}\end{Bmatrix}=\{\xi_a(\tau)\}+\{\xi_m(\tau)\} \quad\cdots\cdots(174)$$

を定義すると，これに関する単位衝撃応答マトリックスおよび単位初期条件応答マトリックスは，夫々，次式で与えられる。

$$[\tilde{g}(\tau,\mu)]=\begin{bmatrix}[g(\tau,\mu)]\\ [g_\tau^{(1)}(\tau,\mu)]\end{bmatrix},\quad [\tilde{i}(\tau,\mu_L)]=\begin{bmatrix}[i(\tau,\mu_L)]\\ [i_\tau^{(1)}(\tau,\mu_L)]\end{bmatrix} \quad\cdots\cdots(175)$$

従って，共分散マトリックスに関する (162)～(164) 式および平均ベクトルに関する (173)第1式は次式のように略記できる。

$$[{}_0I]_{k_1+1k_2+1}=[\int[\tilde{g}]d\mu,[\tilde{i}]]_{k_1}\begin{bmatrix}[{}_IK] & [{}_{I0}K]\\ [{}_{0I}K] & [{}_0I]\end{bmatrix}_{k_1k_2}[\int[\tilde{g}]d\mu,[\tilde{i}]]_{k_2}^T \quad\cdots\cdots(176)$$

$$[{}_{I0}K]_{k_1k_2}=[[{}_IK],[{}_{I0}K]]_{k_1k_2-1}[\int[\tilde{g}]d\mu,[\tilde{i}]]_{k_2-1}^T \quad\cdots\cdots(177)$$

$$[{}_{0I}K]_{k_1k_2}=[\int[\tilde{g}]d\mu,[\tilde{i}]]_{k_1-1}[[{}_IK],[{}_{0I}K]]_{k_1-1k_2}^T \quad\cdots\cdots(178)$$

$$\{i_m\}_{k+1}=[\int[\tilde{g}]d\mu,[\tilde{i}]]_k[\{f_m\},\{i_m\}]_k^T \quad\cdots\cdots(179)$$

通常，(176)～(178) 式は等価線形化の手順上，先ず $k_1=k_2=k$ に対して評価するのが便利であるが，このとき，(177) 式と (178) 式は互に転置行列となるので一方のみ評価すればよい。

k 領域における等価線形化は正規性の前提が許容される限りにおいて，$[{}_0I]_{kk}$ および $\{i_m\}_k$ の値を用いて弾塑性動力学系のすべての履歴特性の入力の平均周波数および極値振巾確率密度関数を定め，さらに **3** に述べた方法に従って各履歴特性の等価線形化関数を求めることによって行なわれる。かくして弾塑性動力学系は k 領域において実数，定数係数の線形不連続系に確率統計的に近似され，その領域に固有な単位衝撃応答マトリックス，$[g(\tau)]_k$ および単位初期条件応答マトリックス，$[i(\tau)]_k$ が確定する[17]。従って，入力の平均値，$\{f_m(\mu)\}$，共分散マトリックス，$[{}_IK(\mu_1,\mu_2)]$，動力学系の初期条件の平均値，$\{i_m(\overset{1}{\mu_L})\}$，共分散マトリックス，$[{}_0I(\overset{1}{\mu_L},\overset{1}{\mu_L})]$ および入力と初期条件の共分散マトリックス，$[{}_{I0}K(\mu,\overset{1}{\mu_L})]=[{}_{0I}K(\overset{1}{\mu_L},\mu)]^T$ が既知ならば，共分散マトリックスの評価と等価線形化を微小領域毎に逐次繰返して，$\tau_1=\tau_2=\tau$ における出力応答ならびにその速度応答に関する共分散マトリックス，$[{}_0K_{\tau_1}^{(\lambda_1)}{}_{\tau_2}^{(\lambda_2)}(\tau,\tau)]$ $(\lambda_1,\lambda_2=0,1)$，さらに，$\tau_1,\tau_2\epsilon{}_0SR_{\tau_L\tau}^2$ に対する $[{}_0K_{\tau_1}^{(\lambda_1)}{}_{\tau_2}^{(\lambda_2)}(\tau_1,\tau_2)]$ が数値的に評価される。

5. む　す　び

中ないし強震外乱群に対する建築構造物の確率統計的耐震設計法に関連する地震応答解析法の基礎として，耐震安全性の確率統計的尺度としての応答レベル超過期待回数の正規非定常過程における表現を示すとともに，非線性があまり大でなく，かつ安定な bi-linear 形履歴特性を含む弾塑性不連続動力学系が正規性

の非定常確率過程に属する入力外乱を受ける場合を対象として，応答レベル超過期待回数の評価に必要な動力学系の出力応答ならびにその速度応答に関する共分散マトリックスの等価線形化解法について述べた。

先ず，応答レベル超過期待回数を正規性の前提のもとに S.O. Rice 氏の定常確率過程における結果の拡張として，一般に零でない平均値をもつ非定常確率過程の場合に求め，さらに単位時間当りの応答レベル超過期待回数の解析的表現から，非定常確率過程における平均周波数と極値振巾確率密度分布関数の解析的表現を導いた。而して，これらの量を用いて，安定な bi-linear 形履歴特性の非定常確率過程における等価線形化の方法を T.K. Caughey 氏の定常確率過程における方法の非定常確率過程への応用として試みた。最後に実数，正規非定常入力群を受ける実数，変数係数不連続弾塑性動力学系の出力応答ならびにその速度応答に関する共分散マトリックスの評価法として，椹木，砂原，添田氏の微小時間分割法に準じて，一般に零でない平均値を有する非定常入力過程と零でない確率統計的な初期条件をもつ場合を対象として，微小領域毎に動力学系の等価線形化と共分散マトリックスの評価を順次繰返し行なう数値解析法を示した。特に，普通の地震応答解析においては，入力過程の平均値は零，かつ動力学系の初期条件も零と考えてよいとすれば，等価線形化に要する平均周波数，極値振巾確率密度分布関数の表現は著しく単純となり，また，共分散マトリックスの評価も大巾に単純化する。

一般に中ないし強震外乱群に対しては外乱安全率を比較的小さく選び，一方，応答安全率を比較的大きく採用し，弾塑性系においても許容応答値を弾性限近傍に選定することになるので，動力学系は線形あるいは等価線形と見做し得る領域に挙動すると考えてもよいと思われ，また応答安全率の大きいことから，構造物の耐震安全性を確率統計的な平均値，例えば応答レベル超過回数や許容レベル超過確率で判定することも妥当と判断される。非定常確率過程の正規性については，入力過程としての地震波外乱群について空間的な意味での正規性は確めることはできないけれども，複雑な多数の因子に影響される地震波外乱の集団に正規性を仮定することは，それ程的はずれではないと思われるし，また比較的継続時間が長くてランダム定常的な地震加速度記録において，時間方向に時間率としての振巾分布関数を評価した結果では，微小振巾と大振巾域を除いて大略正規分布と見做せる[18]。入力過程の正規性が認められるとすれば，非定常出力応答の正規性の前提は，特に，中ないし強震外乱群に対する許容応答設計法では，対象とする弾塑性構造物の地震応答をあまり非線形性が大でなく，かつ安定な弾塑性挙動の領域内に留めることになるので，近似的に成立する意味で許容されると考えられる。

参　考　文　献

1）棚橋諒，小堀鐸二，南井良一郎：構造物の動的耐震設計法と地震レスポンス，京大防災研究所年報，第5号B，昭37. 3，pp. 1—32.

2）南井良一郎：擬定常外乱による統計的線型非定常応答のレベル超過回数について，日本建築学会論文報告集，第76号，昭37. 9，p. 80.

3）Shinozuka, M.: Probability of Structural Failure under Random Loading, Proc. of ASCE, Vol. 90, No. EM5, Oct., 1964, pp. 147—170.

4）小堀鐸二，南井良一郎，竹内吉弘：非定常入力を受ける線形系の確率統計的応答，第2回災害科学総合講演会講演論文集，昭40. 10，pp. 181—184.

5）Booton, R.C., Jr. : The Analysis of Nonlinear Control Systems with Random Inputs, Proc. of Symposium on Nonlinear Circuit Analysis, Vol. II, 1953, IRE Trans. on Circuit Theory, CT—1, 1954, pp. 9—18.

6）椹木義一，砂原善文，中溝高好：非定常等価線形化法による非線形制御系の応答の解析，日本機械学会論文集，第1部，29巻，200号，昭38. 4，pp. 812—820.

7）小堀鐸二：非線形構造物の不規則な地震応答，日本建築学会論文報告集，第76号，昭37. 9，p. 82.

8）Sawaragi, Y., Sunahara, Y., Nakamizo, T. and Hirakawa, K. : Statistical Analyses of

Control Systems Containing a Non-linear Element with Hysteresis Characteristic, Technical Reports of the Engineering Research Institute, Kyoto Univ., Vol. XII, No. 7, Report No. 97, Sept., 1962.

9) Caughey, T. K.: Random Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Appl. Mech., Dec., 1960, pp. 649—652.

10) Caughey, T. K.: Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, Journal of Appl. Mech., Dec., 1960, pp. 640—643.

11) 樵木義一，砂原善文，添田喬：ランダムパラメーターを有する非線形制御系の非定常応答，日本機械学会論文集，（第1部），29巻，197号，昭38.1. pp. 211—218.

12) 樵木義一，砂原善文，添田喬：平均値をもつ突変不規則入力をうける非線形制御系の応答（回路特性が時間に対して変化しない場合），日本機械学会論文集（第1部），29巻，197号，pp. 218—224.

13) 樵木義一，砂原善文，添田喬：自動制御系における非定常不規則信号に対する非線形制御系の応答，日本機械学会論文集（第1部），30巻，215号，昭39.7，pp. 910—916.

14) Rice, S. O.: Mathematical Analysis of Random Noise, Bell System Technical Journal, Vols. 23, 24, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes edited by N. Wax, Dover Pub., pp. 133—294.

15) Eringen, A. C.: Response of Tall Buildings to Random Earthquakes, Proc. of the 3rd Congr. for Appl. Mech., 1958, pp. 141—151.

16) Caughey, T. K. and Stumpt, H. J.: Transient Response of a Dynamic System under Random Excitation, Journal of Appl. Mech., Vol. 28, Series E, No. 4, Dec., 1961, pp. 563—566.

17) 小堀鐸二，南井良一郎：制震系の解析—弾塑性多質点系モデル—（制震構造に関する研究3，4），日本建築学会論文報告集，第69号，昭36.10，pp. 405—412.

18) Tanabashi, R., Kobori, T., Kaneta, K. and Minai, R.: Statistical Properties of Earthquake Accelerograms and Equivalent Earthquake Excitation Pattern, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., Vol. 14, Part 2, Feb., 1965, pp. 45—68.