

不均質粘弾性地盤の波動伝達特性について

小堀 鐸二・南井良一郎・鈴木 有

WAVE TRANSFER FUNCTIONS OF INHOMOGENEOUS LINEAR VISCOELASTIC MULTI-LAYERED MEDIA

By *Takuji KOBORI, Ryoichiro MINAI and Tamotsu SUZUKI*

Synopsis

General Expressions of the one-dimensional wave transfer functions of the horizontally multi-layered media are derived to vertically incident waves of the SH type at the bottom boundary adjacent to the foundation medium. It is assumed that each layer is composed of a homogeneous or an inhomogeneous, isotropic, linear viscoelastic medium. The properties of the inhomogeneous media treated herein are selected so that the fundamental solutions of their wave equations may be expressed in terms of the Whittaker functions which contain the well-known trigonometric, exponential and Bessel functions. Some numerical examples are presented in graphical form and their wave transfer characteristics are discussed in detail.

1. ま え が き

構造物に作用する地震動の性格を合理的に想定することは、構造物系の特性の決定と応答評価の尺度の選定とともに、地震時における構造物の挙動を評価するさいの基本的な問題のひとつである。構造物への入力地震波の特性は震源における生成波の性格、地震波動の伝播経路やその媒体の性質などに依存するが、一般に地表面近くの地盤の特性——地層構成や媒体の性質など——によって大きな影響を受けることが知られている。

一般に地表面近くの地盤の構成は極めて複雑で、多数の層を成して存在しており、また各層の媒体の性質も非常に多岐にわたっている。しかし、構造物基礎の周辺地盤あるいは構造物に作用する地震波動の媒体地盤という工学的観点に立てば、地表面近くの地層の構成は水平な境界面をもつ成層地盤とみなしうる場合が多いと思われる。また一方、地震波動の伝播速度は巨視的にみれば深さとともに増加しており、地中深いところの所謂振動基盤以深での速度に比べると地表面近くの値はかなり小さいことが知られているので、波動の反射・透過現象の性質より推測して、地表面付近では地震波はほぼ地層の境界面に垂直な鉛直方向に伝播すると考えることが許されよう。さらに、地震波動のうち構造物の応答に対して最も影響を与えるのはSH波の成分であることを考え合わせると、地表面近くの地震波動媒体地盤のモデルを次のように想定することができる。すなわち、基盤上にいくつかの水平な層をもつ成層地盤に震源から到達した波動が、基盤層よりSH波として鉛直上方に入射するというモデルで、このようなモデルはこれまで多くの研究者によって扱われ、その波動伝達特性が論じられてきた^{1)~5)}。

従来扱いでは、地層を構成する媒体はすべて均質な (homogeneous) 粘弾性体とされているが、現実の地盤には均質な媒体として扱うことが必ずしも妥当だとは思われない二つの場合が考えられる。一つは、同じ種類の媒質よりなる一つの層内においても、媒体としての性質が深さとともに変化している場合である。例えば、砂中を伝わる各種の波動の速度は、乾燥砂のときにもまた飽和砂についても、拘束応力の冪乗にほぼ比例するという B.O. Hardin and F.E. Richart⁶⁾ に代表される多くの実験的研究があり、一方、粒状媒

体 (granular medium) を弾性体の球が接触しながら詰込まれているモデルで表現して、その波動伝播の問題を扱った J. Duffy and R.D. Mindlin の研究⁷⁾ や、多孔質な (porous) 物質が巨視的には均質な弾性体の骨組 (skeleton) からなり、その空隙は液体で満たされているとする、骨組と液体の連成モデルの問題を扱った M.A. Biot の研究⁸⁾ があって、この二つの理論的研究からも、波動の伝播速度は拘束応力の冪乗に比例するという実験結果を裏付ける結論が導かれている。(これら一連の研究に関する概要は参考文献⁶⁾ に詳しくまとめられている。) したがって、深さが増すとともに地中の媒体の拘束応力は増加するから、砂質土により構成される地層にあっては、単一の層内でも深さとともに媒体としての性質が変化するような場合が生じるのである。I.M. Idriss and H.B. Seed は主として Hardin and Richart の実験結果を適用し、砂質部分の層のみを深さの冪乗に比例した剪断弾性係数をもつ不均質層として、成層地盤の波動伝達特性を解析している⁹⁾。

いま一つは、連続するいくつかの層の性質の変化を近似的に深さ方向への連続的变化としてとらえることができ、かつまた層数の多いときにはこの扱いの方が単純化されるような場合である。地表面近くの地盤の性質は巨視的な見方をすると、一般に深さとともに波動の伝播速度が次第に増加しているとみなしうから、多数の層が存在する成層地盤の動特性を概括的に表現するには、このような扱いによる方が簡単でかつ性状がとらえやすい場合もあると考えられるのである。

本研究は、上述の二つの観点から、均質もしくは深さ方向に不均質な (inhomogeneous or heterogeneous) 粘弾性体からなるいくつかの水平層が基盤層上に存在する成層地盤を対象に選び、基盤層から SH 波が鉛直上方に入射したときの波動伝達特性の解析的表現を求める手法を中心に述べ、若干の計算例を通して、均質な成層地盤の場合と対比させながら、あわせてこのような成層地盤の波動伝達特性の性状を論じようとするものである。

そのためにはまず運動方程式の基本解が必要である。均質な媒体のときには、フーリエ変換あるいは $e^{i\omega t}$ の導入によって time factor を分離した運動方程式はよく知られているように定数係数の線形常微分方程式になって、その基本解は指数関数または三角関数によって常に求められる。しかし、不均質な媒体になると、この基礎方程式が一般に変数係数をもつ線形常微分方程式となるので、基本解の一般的な表現を得ることは不可能になる。そこで、よく知られた三角関数・指数関数・円柱関数などをそのなかに含む相当巾のひろい特殊関数である“Whittaker 関数”を選び、この関数を基本解とするような媒体を逆にさがすという手法をとった。すなわち、適用可能な媒体の種類を拡張するために、言換えると媒体の性質を表わすパラメータにかかる制限を緩和するために、運動方程式において従属変数の変換を、また基本解になるべき Whittaker 関数を解とする“Whittaker の微分方程式”において独立変数の変換を施し、そののち両式を等置して係数間に成立つべき条件から、媒体の性質を定めるパラメータと変数変換にさいして導入された任意関数との間に成立つべき関係式を導いた。結果は3階の導関数を含む連立の非線形常微分方程式となり、その解の一般的な表現を導くことは困難なので、逆に、媒体の性質を表わすパラメータの関数形を適当に仮定してこの関係式を満たす媒体をさがし、その基本解の表現を求めるという手法をとった。基礎方程式の変換と基本解誘導の手法を第2章で述べ、得られた関係式を満足する媒体の性質を定めてその基本解の表現を求める具体的な方法を、代表的な数例について APPENDIX に示した。

波動伝達特性を求めるには大別すると二つの方法がある。第一は、波動インピーダンス比によって定まる透過係数と反射係数を用いて、運動方程式の一般解を上昇波(進行波)と下降波(逆行波)に分離して表現する方法である。波動の物理的性質を理解しやすい表現になっているが、この方法の適用は一般解を進行波と逆行波の二つの成分に分離して表わしうる媒体、すなわち均質な媒体にのみ限られる。第二の方法は、未定常数を含んだ運動方程式の一般解の表現を直接境界条件式に代入し、これを解いて未定常数を決定するものである。一般的な方法であって、均質な媒体にはもちろん、媒体内のいたるところで波動の反射と透過の現象が生じるという、言わば波動の拡散のような現象の起こる不均質な媒体の場合にも適用可能である。

本研究では当然後者の方法によることになるが、基盤層の境界面における上昇波を既知の入射波として与え、あわせて上方の層より基盤層を通じて下方へ伝播する波動による逸散減衰を評価するために、基盤層のみを均質な媒体からなると仮定している。全体の解析手法は既に I. Herrera and E. Rosenblueth がマトリックス表示を用いて均質な媒体に適用した方法³⁾に基づいているので、結果は彼等の表現を拡張した形になっている。波動伝達特性の解析的表現を導く手法を第3章にまとめた。

地盤の示す減衰性状には、上に触れた無限遠への波動伝播に起因するエネルギー逸散の現象によるものと、媒質自身のもつ内部的な減衰機構のため波動のエネルギーが消費される現象によるものとに区別される。後者の場合、内部減衰の実際の機構は極めて複雑でその性質も変化にとみ、未だ解明されていない部分が多いために、統一的な理論モデルの提示は不可能な現状にある。既往の研究では解析上の簡便さから Voigt 型の粘弾性が最もよく採用されているが、ここでは解析上の便宜を考慮して、Voigt 型等をそのなかに含む“線形粘弾性”という仮定をおいた。さらに、粘弾性の表現に含まれる弾性および粘性に関する係数が深さ方向にともに同一の関数形で変化するような不均質性をもつと仮定した。

第4章には三つの数値計算例を示した。不均質な媒体は均質な成層媒体で層数を無限大にした一つの極限と考えられるので、まず最も単純な2層構成の地盤で不均質性の程度の異なる二つの例について、不均質な地盤に対応する均質成層地盤の波動伝達特性を求め、後者の層数を変えることによって両者の対応関係を調べた。次に、基盤層上の不均質な表層のなかに均質な薄い中間層が介在する例について、中間層の性状が軟弱なものから堅固なものへと変化したときに、波動伝達特性にどのような影響を及ぼすかを検討した。

2. 基礎方程式と基本解の誘導

不均質な1次元線形粘弾性体の運動方程式は、 z 軸を鉛直下方にとれば、

$$\rho(z) \frac{\partial^2 w(z, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G \left(z, \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial w(z, t)}{\partial z} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに、

$$w(z, t); \text{水平変位}, \rho(z); \text{密度}, G \left(z, \frac{\partial}{\partial t} \right); \text{粘弾性係数} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

で表わされる。ここで

$$w(z, t) = \bar{w}(z) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

とおいて time factor を分離すれば、(2.1) 式は

$$\left[\frac{d}{dz} \left\{ G(z, i\omega) \frac{d}{dz} \right\} + \omega^2 \rho(z) \right] \bar{w}(z) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

となる。媒体の弾性を表わす係数と粘性を表わす係数が深さ方向にともに同じ関数形に比例して変化すると仮定のもとに、(2.4) 式において

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(z) = \rho_0 m(\xi), \quad G(z, i\omega) = G_0(i a_0) g(\xi), \quad \varphi(\xi) = \frac{\bar{w}(z)}{w_0}, \quad V_0^2 = \frac{G_0(i a_0)}{\rho_0}, \\ \xi = \frac{z}{H}, \quad a_0 = \frac{\omega}{V_0} H, \quad H; \text{基準層厚}, \quad w_0; \text{基準変位振幅} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

なる変換と無次元量の導入を行えば、無次元化された運動方程式は次式で与えられる。

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left\{ g(\xi) \frac{d}{d\xi} \right\} + a_0^2 m(\xi) \right] \varphi(\xi) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

さて上式の従属変数を

$$\varphi(\xi) = \eta(\xi) \psi(\xi) \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

なる関係によって変換すれば、(以下では argument の ξ を省略して表わす場合が多い)

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \left(2 \frac{\eta'}{\eta} + \frac{g'}{g} \right) \frac{d}{d\xi} + \left(\frac{\eta''}{\eta} + \frac{g'}{g} \cdot \frac{\eta'}{\eta} + a_0^2 \frac{m}{g} \right) \right] \psi(\xi) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

となる。ここに $' = d/d\xi$ を表わす。

次に, Whittaker の微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{\zeta} - \frac{\mu^2 - 1/4}{\zeta^2} \right) \right] W_{\kappa, \mu}(\zeta) = 0 \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

において (ここに $W_{\kappa, \mu}(\zeta)$ は Whittaker 関数を一般的に表わすものとする),

$$\zeta = \zeta(\xi) \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

なる独立変数の変換を行えば,

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\zeta''}{\zeta'} \cdot \frac{d}{d\xi} + (\zeta')^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{\zeta} - \frac{\mu^2 - 1/4}{\zeta^2} \right) \right] W_{\kappa, \mu}(\zeta(\xi)) = 0 \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

ここで, $\psi(\xi) = W_{\kappa, \mu}(\zeta(\xi))$ において (2.8) 式と (2.11) 式を等置すれば, 係数間の条件より次の関係式が得られる。

$$\begin{cases} 2\frac{\eta'}{\eta} + \frac{g'}{g} = -\frac{\zeta''}{\zeta'} \\ \frac{\eta''}{\eta} + \frac{g''}{g} + a_0^2 \frac{m}{g} = (\zeta')^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{\zeta} - \frac{\mu^2 - 1/4}{\zeta^2} \right) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

上の第1式を積分すると,

$$\eta = d(g\zeta')^{-1/2}, \quad \text{ここに } d; \text{ 積分常数} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

この関係を上の第2式に代入し η を消去すれば,

$$2\frac{\zeta'''}{\zeta'} - 3\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2 + (1 - 4\mu^2 + 4\kappa\zeta - \zeta^2) \left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)^2 = 4a_0^2 \frac{m}{g} - 2\frac{g''}{g} + \left(\frac{g'}{g}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

が得られる。以上をまとめると,

不均質な 1次元線形粘弾性体の無次元運動方程式

$$\left[\frac{d}{d\xi} \left\{ g(\xi) \frac{d}{d\xi} \right\} + a_0^2 m(\xi) \right] \varphi(\xi) = 0 \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

の解は,

$$\eta(\xi) = d \left[g(\xi) \frac{d\xi}{d\xi} \right]^{-1/2} \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

および

$$\begin{aligned} & 2\frac{d^3\zeta}{d\xi^3} \frac{d\xi}{d\xi} - 3\left\{ \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} \frac{d\xi}{d\xi} \right\}^2 + \{1 - 4\mu^2 + 4\kappa\zeta(\xi) - \zeta^2(\xi)\} \left\{ \frac{d\xi}{d\xi} \frac{d\xi}{d\xi} \right\}^2 \\ & = 4a_0^2 \frac{m(\xi)}{g(\xi)} - 2\frac{d^2g}{d\xi^2} \frac{d\xi}{d\xi} + \left\{ \frac{dg}{d\xi} \frac{d\xi}{d\xi} \right\}^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

なる関係が満たされるとき, Whittaker の微分方程式

$$\left[\frac{d}{d\zeta^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{\zeta} - \frac{\mu^2 - 1/4}{\zeta^2} \right) \right] W_{\kappa, \mu}(\zeta) = 0 \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

の解である Whittaker 関数 $W_{\kappa, \mu}(\zeta)$ を用いて,

$$\varphi(\xi) = \eta(\xi) W_{\kappa, \mu}(\zeta(\xi)) \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

で与えられる。

(2.13) および (2.14) 式は 3 階の導関数を含む連立の非線型常微分方程式である。その一般解の表現を求めるのは極めて困難なので, 媒体の密度と粘弾性係数の関数形を適当に与え, さらに独立変数の変換を表わす $\zeta(\xi)$ の形を仮定して出発するという方法によって, この二つの条件式を満たす基本解の表現を求めた。基本解誘導の過程を示すいくつかの代表的な例を **APPENDIX** に示した。

媒体の性質が深さ ξ の 1 次関数の冪乗および指数関数あるいはそれらの組合わせで示される場合を主として扱ったが, こうして得られたいくつかの媒体の密度 $m(\xi)$ および粘弾性係数 $g(\xi)$ の関数形とその基本解 $\varphi(\xi)$ の表現式を一括して **Table 1** に示した。Whittaker 関数 $W_{\kappa, \mu}$ のうち $\kappa=0$ のときは円柱関

Table 1 Properties of inhomogeneous media and fundamental solutions of their wave equations.

$g(\xi)$	$m(\xi)$	$\varphi(\xi)=\eta(\xi) W_{r,p}(\zeta(\xi))$				$\varphi(\xi)=\eta(\xi) Z_r(\zeta(\xi))$			
		$\eta(\xi)^{-1}$	κ	μ	$\zeta(\xi)$	$\eta(\xi)^{-1}$	ν	$\zeta(\xi)$	
$(1+\alpha\xi)^{2p}$	$(1+\alpha\xi)^{2p}$	$(1+\alpha\xi)^{p+1/2}$	0	$\pm \frac{2p-1}{2(q-p+1)}$	$\pm 2\frac{a_0}{\alpha(q-p+1)}(1+\alpha\xi)^{r-p+1}$	$(1+\alpha\xi)^{p-1/2}$	$\pm \frac{2p-1}{2(q-p+1)}$	$\frac{\pm a_0}{\alpha(q-p+1)}(1+\alpha\xi)^{r-p+1}$	
$e^{\beta\xi}$	$e^{\beta\xi}$	$e^{(p+1)\xi/2}$	0	$\pm \frac{p}{q-p}$	$\pm 2\frac{a_0}{\alpha}e^{(r-p)\xi}$	$e^{\beta\xi}$	$\pm \frac{p}{q-p}$	$\pm \frac{a_0}{q-p}e^{(r-p)\xi}$	
$1+\beta\xi$	$1+\beta\xi$	$(1+\alpha\xi)^{1/2}$	$\pm \frac{a_0}{2\alpha} \cdot \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{-\alpha\beta}}$ *	0	$\pm 2\frac{a_0}{\alpha}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(1+\alpha\xi)$ *				
$(1+\alpha\xi)^2(1+\beta\xi)^{2r}$	$(1+\alpha\xi)^2(1+\beta\xi)^{2r}$	$(1+\alpha\xi)(1+\beta\xi)^{r/2}$	0	$\pm \frac{1}{2(r+1)}$	$\pm 2\frac{a_0}{\beta(r+1)}(1+\beta\xi)^{r+1}$	$\frac{1+\alpha\xi}{(1+\beta\xi)^{1/2}}$	$\pm \frac{1}{2(r+1)}$	$\pm \frac{a_0}{\beta(r+1)}(1+\beta\xi)^{r+1}$	
$(1+\alpha\xi)^2$	$(1+\alpha\xi)^2$	$(1+\alpha\xi)^{p/2}$	0	0	$\pm 2\frac{a_0}{\alpha}e^{\beta\xi}$	$1+\alpha\xi$	0	$\pm \frac{a_0}{\alpha}e^{\beta\xi}$	
$(1+\alpha\xi)^2 e^{\beta\xi}$	$e^{\beta\xi}$	$(1+\alpha\xi)^{p/2}$	∓ 1 *	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a_0^2}{\alpha^2}}$	$\pm \frac{2p}{\alpha}(1+\alpha\xi)$ *				
$(1+\alpha\xi)^2 e^{\beta\xi}$	$e^{\beta\xi}$	$(1+\alpha\xi)^{p/2}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{\alpha^2}-1\right)$	0	$\pm \frac{2p}{\alpha}(1+\alpha\xi)$				
$e^{\beta\xi}$	$\frac{e^{\beta\xi}}{(1+\alpha\xi)^2}$	$e^{\beta\xi}$	0	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a_0^2}{\alpha^2}}$	$\pm \frac{2p}{\alpha}(1+\alpha\xi)$	$\frac{e^{\beta\xi}}{(1+\alpha\xi)^{1/2}}$	$\pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{a_0^2}{\alpha^2}}$	$\pm \frac{p}{\alpha}(1+\alpha\xi)$	
$e^{\beta\xi}$	$\frac{e^{\beta\xi}}{1+\alpha\xi}$	$e^{\beta\xi}$	$\pm \frac{a_0^2}{2p\alpha}$ *	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{2p}{\alpha}(1+\alpha\xi)$ *				
$(1+\frac{\alpha}{2}\xi)^{2p}$	$(1+\frac{\alpha}{2}\xi)^{-2p}$	1	0	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm 2\frac{a_0}{\alpha}\left[1+\frac{\alpha}{2}\xi\right]^{-2p}d\xi$	$\left[\left[1+\frac{\alpha}{2}\xi\right]^{-2p}d\xi\right]^{-1/2}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{a_0}{\alpha}\left[1+\frac{\alpha}{2}\xi\right]^{-2p}d\xi$	

数 Z_n によっても基本解を表わすことができるので、その表現式を右の対応する欄に示した。なお、 $\kappa=0$ かつ $\mu=\pm 1/2$ のときには指数関数あるいは三角関数によっても基本解を表わすことができる。表中の記号“*”は同一行内の複号が同順であることを示し、また基本解を誘導する過程で現われてきた常数にあたる部分は省略してある。

3. 波動伝達特性の解析的表現

Fig. 1 に示すように、境界面がすべて水平で均質または深さ方向に不均質な N 個の層からなる成層地盤を想定する。最下層(第 N 層)を基盤層とし、ここより鉛直上方へ SH 波が入射する場合の地盤内の各点における波動伝達特性の解析的表現を求めてみよう。Fig. 1(a) は成層地盤の構成を有次元量で示したもので、また Fig. 1(b) はこれを無次元表示に書改めたものである。

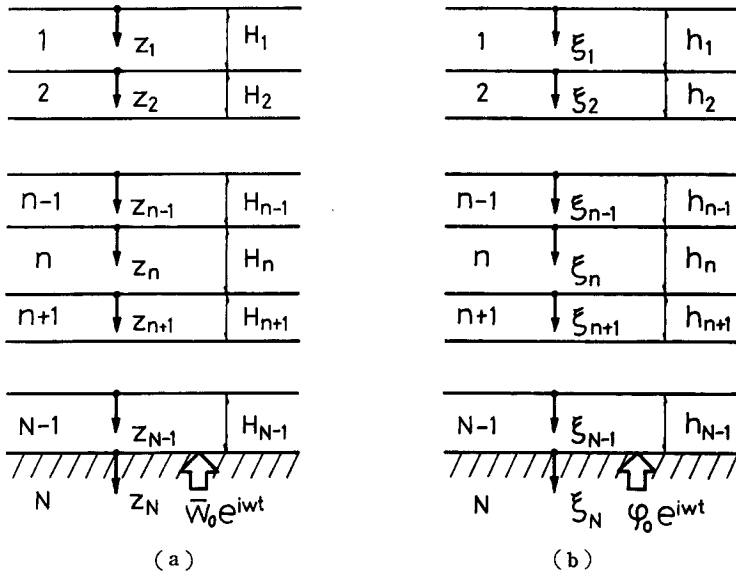


Fig. 1 Formulation of the horizontally multi-layered media: (a) expressed in the dimensional form; and (b) expressed in the non-dimensional form.

Fig. 1 と前章で得られた基本解の表現とを参照して、第 n 層の運動方程式の一般解を次式で表現する。

$$\varphi_n(\xi_n) = \eta_n(\xi_n) [b_n U_n(\zeta_n(\xi_n)) + c_n V_n(\zeta_n(\xi_n))] \quad (n=1, 2, \dots, N) \dots\dots\dots(3.1)$$

ここに、

$$\begin{cases} \xi_n; \text{第 } n \text{ 層の上境界面を原点とし鉛直下方を正の向きとする局所座標,} \\ b_n, c_n; \text{境界条件より定まる未定常数} \end{cases}$$

(3.1) 式に含まれる $2N$ 個の未定常数は以下に記す 3 種の境界条件より定めることができる。

[1] 第 $n, n+1$ 層間の境界面における変位および剪断応力の連続条件 ($n=1, 2, \dots, N-1$)

$$\varphi_n(h_n) = \varphi_{n+1}(0) \dots\dots\dots(3.2)$$

$$G_{0n}(ia_{0n})g_n(h_n)\varphi'_n(h_n) = G_{0n+1}(ia_{0n+1})g_{n+1}(0)\varphi'_{n+1}(0) \dots\dots\dots(3.3)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{array}{l} h_n = \frac{H_n}{H}, H_n; \text{無次元および有次元量で表わした第 } n \text{ 層の層厚, } ' = \frac{d}{d\xi_n} \text{ または } \frac{d}{d\xi_{n+1}} \\ \text{その他の記号は前章で使用したものに第 } n \text{ または } n+1 \text{ 層を意味する suffix } n \text{ または} \\ n+1 \text{ をつけたもの} \end{array} \right.$$

一般解 (3.1) 式を代入すると上式は未定常数 b_{n+1}, c_{n+1} および b_n, c_n に関する連立方程式となるので、これを解いて次の漸化式を得る。

$$\begin{bmatrix} b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = T_n \begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, N-1) \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

ここに、

$$\left\{ \begin{array}{l} T_n = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_n \\ f_{11} = \frac{1}{F_n} [k_n U_n V_{n+1} + \eta_n (U_n V'_{n+1} - \bar{g}_n U'_n V_{n+1})], \\ f_{12} = \frac{1}{F_n} [k_n V_n V_{n+1} + \eta_n (V_n V'_{n+1} - \bar{g}_n V'_n V_{n+1})], \quad \dots\dots\dots(3.5) \\ f_{21} = \frac{-1}{F_n} [k_n U_n U_{n+1} + \eta_n (U_n U'_{n+1} - \bar{g}_n U'_n U_{n+1})] \\ f_{22} = \frac{-1}{F_n} [k_n V_n U_{n+1} + \eta_n (V_n U'_{n+1} - \bar{g}_n V'_n U_{n+1})] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_n = U_{n+1} V'_{n+1} - U'_{n+1} V_{n+1}, \quad \bar{g}_n = \frac{G_{0n}(ia_{0n})g_n(h_n)}{G_{0n+1}(ia_{0n+1})g_{n+1}(0)}, \\ k_n = \frac{1}{\eta_{n+1}(0)} [\bar{\eta}_n \eta'_{n+1}(0) - \bar{g}_n \eta'_n(h_n)], \quad \eta_n = \frac{\eta_n(h_n)}{\eta_{n+1}(0)}, \quad \dots\dots\dots(3.6) \\ U_n = U_n(\zeta_n(h_n)), \quad V_n = V_n(\zeta_n(h_n)), \\ U_{n+1} = U_{n+1}(\zeta_{n+1}(0)), \quad V_{n+1} = V_{n+1}(\zeta_{n+1}(0)) \end{array} \right.$$

とくに第 n 層または第 $n+1$ 層のみが均質な媒体からなる場合には、均質な層の一般解を $\varphi_n(\xi_n) = b_n e^{ia_{0n}\xi_n} + c_n e^{-ia_{0n}\xi_n} \quad (n=n \text{ または } n+1) \quad \dots\dots\dots(3.7)$ で表わすと、(3.5) 式の $f_{kl}[k=1, 2; l=1, 2]$ は次のように表現される。

<第 n 層が均質な場合>

$$f_{kl} = \frac{\pm e^{ia_{0n}h_n}}{\eta_{n+1}^2(0)F_n} \left[\mp ia_{0n}\bar{g}_n + \frac{d}{d\xi_{n+1}} \right] \cdot \{ \eta_{n+1}(\xi_{n+1}) I_{n+1}(\zeta_{n+1}(\xi_{n+1})) \} \xi_{n+1}=0 \quad \dots\dots\dots(3.5A)$$

<第 $n+1$ 層が均質な場合>

$$f_{kl} = \frac{1}{2} \left[1 \mp i \frac{\bar{g}_n}{a_{0n+1}} \cdot \frac{d}{d\xi_n} \right] \cdot \{ \eta_n(\xi_n) I_n(\zeta_n(\xi_n)) \} \xi_n=h_n \quad \dots\dots\dots(3.5B)$$

ここに、

k	l	\pm	\mp	I
1	1	+	-	V
1	2	+	+	V
2	1	-	-	U
2	2	-	+	U

ここに、

k	l	\mp	I
1	1	-	U
1	2	-	V
2	1	+	U
2	2	+	V

[2] 地表面において剪断応力が零という境界条件 $G_{01}(ia_{01})g_1(0)\varphi_1'(0) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.8)$

上式に (3.1) 式を代入すると未定常数 b_1, c_1 間の次の関係式が得られる。

$$c_1 = lb_1, \quad \text{ここに } l = - \left[\frac{\frac{d}{d\xi_1} \{ \eta_1(\xi_1) U_1(\zeta_1(\xi_1)) \}}{\frac{d}{d\xi_1} \{ \eta_1(\xi_1) V_1(\zeta_1(\xi_1)) \}} \right]_{\xi_1=0} \dots\dots\dots (3.9)$$

とくに最上層 (第 1 層) が均質でその基本解を $e^{ia_0\xi_1}$ および $e^{-ia_0\xi_1}$ で表わす場合には,

$$l=1 \quad \text{あるいは} \quad c_1 = b_1 \quad \dots\dots\dots (3.9a)$$

また基本解を $\cos a_0\xi_1$ および $\sin a_0\xi_1$ とする均質な最上層の場合には,

$$l=0 \quad \text{あるいは} \quad c_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.9b)$$

なる条件式が得られる。

〔3〕 入射波の条件

基盤層 (第 N 層) の境界面における上昇波 (進行波) を既知の入射波として与え, あわせて下降波 (逆行波) によって表わされる上層から基盤層への波動の逸散を評価するためには, 一般解の表現を上昇波成分と下降波成分とに分離しなければならない。しかし, 不均質な媒体ではこの分離が一般には不可能なので, ここでは基盤層は均質な媒体からなると仮定する。厳密に言うと, この仮定は基盤層の境界面の近傍で成立てばよいのであって, このような入射波を想定する場合には, 基盤層より上の位置での波動伝達特性に注目する限り, 境界面の近傍で深の媒体の性質は問題としないのである。したがって, たとえ基盤層が不均質な媒体であっても, 境界面の近傍だけをとりだせば近似的に均質とみなしうるので, 實際上この仮定が不適当になる場合はほとんどないと思われる。

さて基盤層の一般解を

$$\varphi_N(\xi_N)e^{i\omega t} = b_N e^{i(\omega t + a_{0N}\xi_N)} + c_N e^{i(\omega t - a_{0N}\xi_N)} \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

で表わすと, 右辺の第 1 項が上昇波, 第 2 項が下降波成分であるから, 基盤層の境界面 $\xi_N=0$ における上昇波成分 $b_N e^{i\omega t}$ を既知の入射波 $\varphi_0 e^{i\omega t}$ に等しいとおき, さらに (2.5) 式の基準変位振幅 w_0 を入射波の振幅にとれば次の関係式が得られる。

$$b_N = \varphi_0 = 1 \quad \dots\dots\dots (3.11)$$

以上得られた $2N$ 個の条件式 [(3.4), (3.9) および (3.11) 式] より, まず (3.4) 式を反復適用し, さらに (3.9) 式を用いれば,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_N \\ c_N \end{bmatrix} &= T_{N-1} \begin{bmatrix} b_{N-1} \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = T_{N-1} \cdot T_{N-2} \begin{bmatrix} b_{N-2} \\ c_{N-2} \end{bmatrix} = \dots\dots \\ &= T_{N-1} \cdot T_{N-2} \dots T_1 \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = T_{N-1} \cdot T_{N-2} \dots T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ l \end{bmatrix} b_1 \dots\dots\dots (3.12) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{bmatrix} s_{1N} \\ s_{2N} \end{bmatrix} = T_{N-1} \cdot T_{N-2} \dots T_1 \cdot T_0 \begin{bmatrix} 1 \\ l \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, N; T_0=1) \quad \dots\dots\dots (3.13)$$

なる記号を導入すれば上式は次のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} b_N \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1N} \\ s_{2N} \end{bmatrix} b_1 \quad \dots\dots\dots (3.14)$$

この関係を (3.11) 式に代入すると,

$$b_1 = \frac{1}{s_{1N}} \quad \dots\dots\dots (3.15)$$

のように b_1 が定まるので, (3.12) 式と同様な変形を行うと未定常数 b_n, c_n は

$$\begin{bmatrix} b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \frac{1}{s_{1N}} \begin{bmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (3.16)$$

で全て定まる。したがって、基盤層からの入射波に対する地盤内の任意点における波動伝達特性の解析的表現は次式で与えられる。

$$\varphi_n(\xi_n) = \frac{\gamma_n(\xi_n)}{s_{1N}} [s_{1n} U_n(\zeta_n(\xi_n)) + s_{2n} V_n(\zeta_n(\xi_n))] \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(3.17)$$

なお、この場合の固有値方程式 A_N は、基盤層からの入射波に關与する項 b_N を零とおくことにより、

$$A_N = s_{1N} = 0 \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

で与えられる。

とくに地盤が2層構成 ($N=2$) で基盤層全体が均質である場合には、(3.17) 式は次のように簡単な表現になる。

$$\begin{cases} \varphi_1(\xi_1) = \frac{2\Phi(\xi_1)}{A_2} \\ \varphi_2(\xi_2) = e^{ia_{02}\xi_2} + \frac{1}{A_2} \left[1 + i \frac{\bar{g}_1}{a_{02}} \cdot \frac{d}{d\xi_1} \right] \{\Phi(\xi_1)\}_{\xi_1=h_1} e^{-ia_{02}\xi_2} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

ここに、

$$\begin{cases} A_2 = \left[1 - i \frac{\bar{g}_1}{a_{02}} \cdot \frac{d}{d\xi_1} \right] \{\Phi(\xi_1)\}_{\xi_1=h_1} \\ \Phi(\xi_1) = \gamma_1(\xi_1) [U_1(\zeta_1(\xi_1)) + iV_1(\zeta_1(\xi_1))] \quad [U; (3.9) \text{ 式}] \end{cases} \quad \dots\dots\dots(3.20)$$

また、各層ともすべて均質な媒体からなりその基本解を

$$e^{ia_{0n}\xi_n} \text{ および } e^{-ia_{0n}\xi_n} \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

で表わす場合には、波動伝達特性の解析的表現は

$$\varphi_n(\xi_n) = \frac{1}{s_{1N}} [s_{1n} e^{ia_{0n}\xi_n} + s_{2n} e^{-ia_{0n}\xi_n}] \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(3.17a)$$

ここに、

$$\begin{bmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \end{bmatrix} = T_{n-1} \cdot T_{n-2} \cdots T_1 \cdot T_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, N; T_0=1) \quad \dots\dots\dots(3.13a)$$

$$T_n = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha_n}{2} e^{ia_{0n}h_n} & \frac{1-\alpha_n}{2} e^{-ia_{0n}h_n} \\ \frac{1-\alpha_n}{2} e^{ia_{0n}h_n} & \frac{1+\alpha_n}{2} e^{-ia_{0n}h_n} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(3.5a)$$

で、同じくすべて均質な媒体からなる成層地盤で基本解を

$$\cos a_{0n}\xi_n \text{ および } \sin a_{0n}\xi_n \quad (n=1, 2, \dots, N)$$

で表わす場合には、

$$\varphi_n(\xi_n) = \frac{2}{s_{1N} - is_{2N}} [s_{1n} \cos a_{0n}\xi_n + s_{2n} \sin a_{0n}\xi_n] \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots(3.17b)$$

ここに、

$$\begin{bmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \end{bmatrix} = T_{n-1} \cdot T_{n-2} \cdots T_1 \cdot T_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n=1, 2, \dots, N; T_0=1) \quad \dots\dots\dots(3.13b)$$

$$T_n = \begin{bmatrix} \cos a_{0n}h_n & \sin a_{0n}h_n \\ -\alpha_n \sin a_{0n}h_n & \alpha_n \cos a_{0n}h_n \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(3.5b)$$

でそれぞれ表わされる。上式中に現われている α_n は波動インピーダンス比で、均質な各層の密度と粘弾性係数を ρ_n および $G_n(ia_{0n})$ で表わすと次式で与えられる。

$$\alpha_n = \left[\frac{\rho_n G_n(ia_{0n})}{\rho_{n+1} G_{n+1}(ia_{0n+1})} \right]^{1/2} \quad (n=1, 2, \dots, N-1) \quad \dots\dots\dots(3.21)$$

なお (3.17b) 式は第1章で述べた I. Herrera and E. Rosenblueth の解³⁾ に一致する。

4. 数値計算例

以下に示す計算例では簡単のために媒質が減衰項を含まない場合、すなわち $G_{0n}(ia_{0n}) \equiv G_{0n}$ [定数] の場合を扱う。また、基準量を

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{基準層厚 } H; \text{ 地表面より基盤層までの深さ,} \\ \text{基準密度 } \rho_0, \text{ 基準剪断弾性係数 } G_0, \text{ 基準剪断波速度 } V_0 = \sqrt{G_0/\rho_0} \text{ および} \dots\dots(4.1) \\ \text{基準振動数パラメータ } a_0 = \omega H/V_0; \text{ 地表面 } (\xi_1=0) \text{ におけるそれぞれの値} \end{array} \right.$$

のように与え、これに基づいて必要なパラメータの分布をを次のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} \{g_{0n}\} = \left\{ \frac{G_{0n}}{G_0} \right\}; \text{ 層の上境界面における剪断弾性係数の分布} \\ \{m_{0n}\} = \left\{ \frac{\rho_{0n}}{\rho_0} \right\}; \text{ 層の上境界面における密度の分布} \\ \{v_{0n}\} = \left\{ \frac{V_{0n}}{V_0} \right\} = \left\{ \sqrt{\frac{g_{0n}}{m_{0n}}} \right\}; \text{ 層の上境界面における剪断波速度の分布} \\ \{m_n(\xi_n), \{g_n(\xi_n)\}; \text{ 層内の密度および剪断弾性係数の分布を示す関数形} \\ \{v_n(\xi_n)\} = \left\{ \sqrt{\frac{g_n(\xi_n)}{m_n(\xi_n)}} \right\}; \text{ 層内の剪断波速度の分布を示す関数形} \dots\dots(4.2) \\ \{a_{0n}\} = \left\{ \frac{\omega}{V_{0n}} H \right\} = \left\{ \frac{a_0}{v_{0n}} \right\}; \text{ 振動数パラメータの分布} \quad (\text{以上 } n=1, 2, \dots, N) \\ \{\bar{g}_n\} = \left\{ \frac{g_{0n}g_n(h_n)}{g_{0n+1}g_{n+1}(0)} \right\}; \text{ 境界面における剪断弾性係数比を表わすパラメータの分布} \\ \{h_n\} = \left\{ \frac{H_n}{H} \right\}; \text{ 層厚の分布} \quad (\text{以上 } n=1, 2, \dots, N-1) \end{array} \right.$$

[例1] 容易に予測できるように、不均質な地盤は均質な成層地盤で層数を無限大とした一つの極限と考えることができるので、まず最初に、両者の境界面位置における波動伝達特性の比較を行ってみよう。

Fig. 2 に示すように、均質な基盤層の上に不均質な表層がのる2層構成の地盤を考える。表層の密度の分布と剪断弾性係数の分布を表わす関数形を

$$m_1(\xi_1) = \left(1 + \frac{\xi_1}{4}\right)^2, \quad g_1(\xi_1) = \left(1 + \frac{\xi_1}{4}\right)^3 \dots\dots(4.3)$$

で与える。このとき剪断波速度分布の関数形は

$$v_1(\xi_1) = \left(1 + \frac{\xi_1}{4}\right)^{1/2} \dots\dots(4.4)$$

で与えられる。表層の一般解は Table 1 の第1行を参照すると、

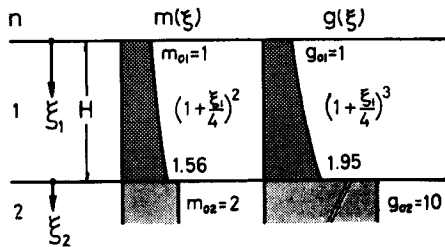


Fig. 2 Formulation of the two-layered media (Case 1).

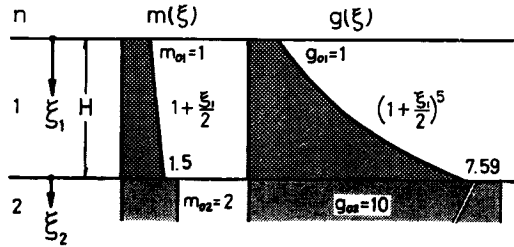


Fig. 3 Formulation of the two-layered media (Case 2).

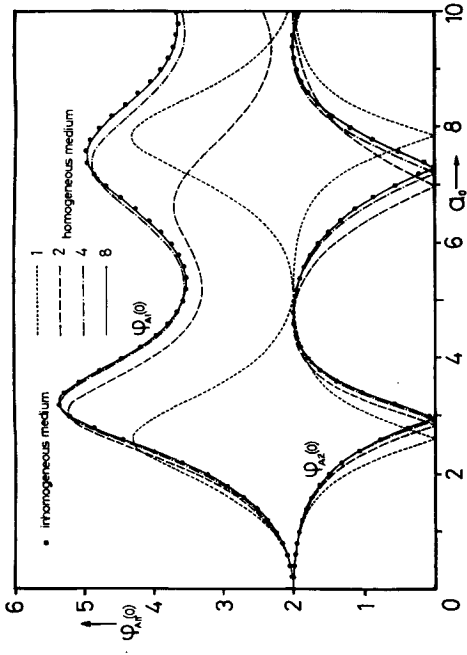


Fig. 6 Amplitude characteristics of the boundary surfaces, Case 2.

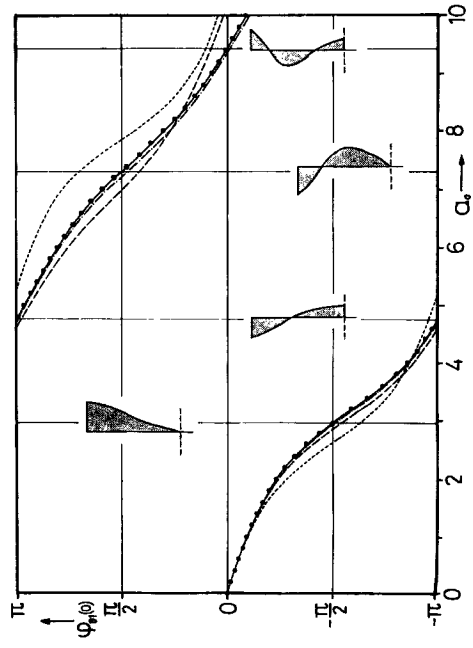


Fig. 7 Phase characteristics of the free surface and vibrational mode shapes, Case 2.

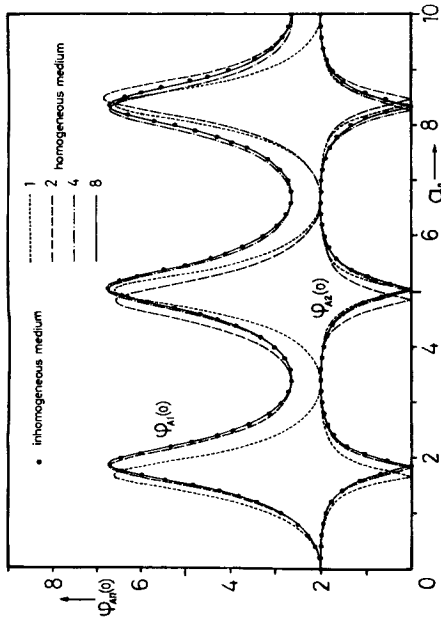


Fig. 4 Amplitude characteristics of the boundary surfaces, Case 1.

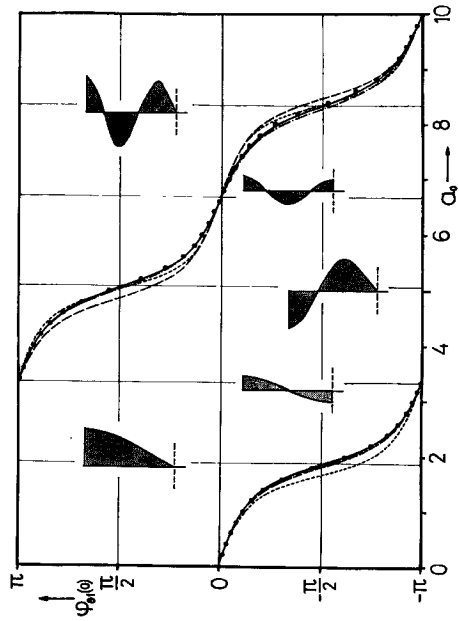


Fig. 5 Phase characteristics of the free surface and vibrational mode shapes, Case 1.

$$\omega_1(\xi_1) = \left(1 + \frac{\xi_1}{4}\right)^{-1} \left[b_1 J_2 \left(8a_{01} \left(1 + \frac{\xi_1}{4}\right)^{1/2}\right) + c_1 Y_2 \left(8a_{01} \left(1 + \frac{\xi_1}{4}\right)^{1/2}\right) \right] \dots\dots\dots (4.5)$$

ここに、 $\begin{cases} J_2; 2\text{次の第1種円柱関数} & (\text{または Bessel 関数}) \\ Y_2; 2\text{次の第2種円柱関数} & (\text{または Neumann 関数}) \end{cases}$

のように表わすことができるので、他のパラメータの値を Fig. 2 に示すように与えて (3.17) 式あるいは (3.19) 式を用いると、地盤内の任意点における波動伝達特性を求めることができる。

計算結果を Fig. 4 と Fig. 5 の●印で示す。これらは基準振動数パラメータ a_0 を横軸にとって、地表面 ($\xi_1=0$) および表層と基盤層との境界面 ($\xi_2=0$) における波動伝達特性を

$$\begin{cases} \text{振巾特性} & \varphi_{A_n}(0) = |\varphi_n(0)| \\ \text{位相特性} & \varphi_{\theta_n}(0) = \tan^{-1} \left[\frac{I\{\varphi_n(0)\}}{R\{\varphi_n(0)\}} \right] \quad (n=1, 2) \end{cases} \dots\dots\dots (4.6)$$

(ここに、 R ; 実数部分, I ; 虚数部分を示す)

の二つに分けて図示したものである。位相特性は入射波の位相とのずれを示している。Fig. 5 は地表面の振巾特性 $\varphi_{\theta_1}(0)$ を表わすものであるが、表層と基盤層との境界面の位相特性 $\varphi_{\theta_2}(0)$ は、振動モードに応じてこの図の位相に等しい振動数領域と π だけずれた位相になる領域とに分かれる。また同図には、基盤層と表層の境界面における位相特性が $\pm\pi/2$ および零または $\pm\pi$ になるところ、言換えるとそこでの振巾特性が極小値 (零) および極大値をとるところの振動モードを示した。

一方、この不均質な表層に対応する均質な成層地盤を次のようにして定める。すなわち、表層を互いに等しい層厚をもつ数個の層に分割し、分割された各層において連続的に変化する層内での平均値をとってこれをその層を代表する値として、全体を階段状に性質が変化する均質な成層地盤に置換えるのである。表層の分割数を 1, 2, 4 および 8 とした場合の計算結果を Figs. 4 および 5 のそれぞれ点線、破線、一点鎖線および実線で示した。

これらの図より以下の点が指摘できる。

1. $a_0=0$ すなわち静的な場合に表層の上下両境界面の振巾特性がとる 2 という値は、基盤層からの入射波の振巾の 2 倍になることを示し、これは基盤層と表層の境界面が自由表面になったときの振巾に等しい。地表面の振巾特性は $a_0=0$ のときのこの値よりも常に大きく ($\varphi_{A1}(0) \geq 2$)、また基盤層と表層の境界面の振巾特性は反対にこの値よりも常に小さい ($\varphi_{A2}(0) \leq 2$) という均質な 2 層地盤のときにみられた性質が、この不均質な地盤の場合にも成立していることがわかる。

2. 表層の分割数が増えるとともに、均質成層地盤の性質は不均質な地盤のものによく漸近していくことが明瞭に認められる。不均質性の程度が比較的小さいこの例では、少ない分割数での置換えによっても均質成層地盤による近似化が可能で、実用的には 4 程度の分割数で十分であり、分割数が 8 程度になると図の振動数範囲で両者はほぼ完全に一致している。

3. この算例では、均質な 2 層地盤のときにみられるように、波動伝達特性は振動数に関してほぼ周期的な変動を示している。したがって、共振振動数が固有振動数に近いということを考慮すれば、固有振動数もまたほぼ周期的に現われてくるものと思われる。

4. 均質な 2 層地盤の場合には位相特性が 0 または $\pm\pi$ のところで表層の両境界面における振巾特性が相等しくなる点を除いて、この例に示す程度の不均質性の小さい表層をもつ地盤の特性は、全体としてみれば均質な 2 層地盤のものともあまり変わらず、表層全体を分割を行わずに一つの均質な媒体に置換えた 2 層地盤でもだいたい傾向は表現されているとみることができよう。

[例 2] もう少し不均質性の大きい媒体で例 1 と同じ比較を試みてみよう。Fig. 3 に示すように、例 1 と同じ構成で表層の性質のみを変えた地盤を考え、表層の性質を表わす関数形を次のように与える。

$$m_1(\xi_1) = 1 + \alpha\xi_1, \quad g_1(\xi_1) = (1 + \alpha\xi_1)^5 \dots\dots\dots (4.7)$$

(以下この算例では $\alpha=1/2$ とする) したがって剪断波速度分布の関数形は

$$v_1(\xi_1) = (1 + \alpha \xi_1)^2 \dots\dots\dots (4.8)$$

となる。また、表層の一般解は **Table 1** の第1行を参照して

$$\omega_1(\xi_1) = (1 + \alpha \xi_1)^{-2} \left[b_1 J_2 \left(\frac{a_{01}}{\alpha} (1 + \alpha \xi_1)^{-1} \right) + c_1 Y_2 \left(\frac{a_{01}}{\alpha} (1 + \alpha \xi_1)^{-1} \right) \right] \dots\dots\dots (4.9)$$

のようにやはり2次の円柱関数を含んだ形で表わされ、例1と同様にして波動伝達特性を求めることができる。境界面の波動伝達特性に関する計算結果を、例1と同じ形式で **Fig. 6** (振巾特性) および **Fig. 7** (位相特性と振動モード) に示した。

これらの図より指摘できる点は、

1. 例1に比べると表層の不均質性の程度が大きくなっているの、均質成層地盤に置換えた結果をみると、分割数が少ないときに不均質な場合とのずれがやはり大きい、それでも分割数が4程度でその傾向は十分押えられており、8程度になると両者はほぼ一致するという結果が得られている。また図には示さなかったが、例1および例2を通じて、表層および基盤層の内部の位置においても両者の比較に関して同様な傾向を示す結果が得られている。

2. したがって、不均質な媒体は、これを適当な層数で分割し、分割された各層ごとに層内での平均的な性質をもつような均質な成層媒体に置換えることによって、十分な精度で近似することができるといえよう。このことはまた、波動伝達特性の評価にさいして、連続するいくつかの均質な層で深さ方向への性質の変化を適当な関数形で近似できるときには、全体を不均質な一つの層に置換えることを示唆しているのである。

3. 一般的な傾向として、分割数を多くとっても振動数が相当高くなると両者のずれの現われてくるのが認められるが、実際には入射波(基盤における地震動)の性格としてある限度以上の高い振動数成分は含んでいないと考えられるので、入射波の振動数成分が一定の範囲内に留まるものとすれば、前項で述べた近似化あるいは置換えは実用上十分可能であろう。

4. この図の範囲を越えているが、振動数が高くなるとともに例1と同様に、不均質地盤の波動伝達特性は振動数に関してほぼ周期的な変動を示すようになり、振巾特性の極大値・極小値もそれぞれほぼ等しい値をとるようになる。

[例3] 例2で扱った場合とほぼ同様な構成をもつ地盤で、表層の真中に均質な薄い中間層を挟む場合を考えてみよう。**Fig. 8** にその構成と各パラメータの値を示す。このうち中間層の密度 m_{02} と剪断弾性係数 g_{02} のみを種々変えて、波動伝達特性に及ぼす中間層の影響を考察する。中間層の剪弾性係数は地表面における値を基準にしてその10倍から1/4倍まで7通りの値を与え、密度の方もそれに応じて増減する値を想定している。また、比較のために中間層がない基盤上に単一の不均質な表層のみがある場合 ($h_2=0$) を加え、合

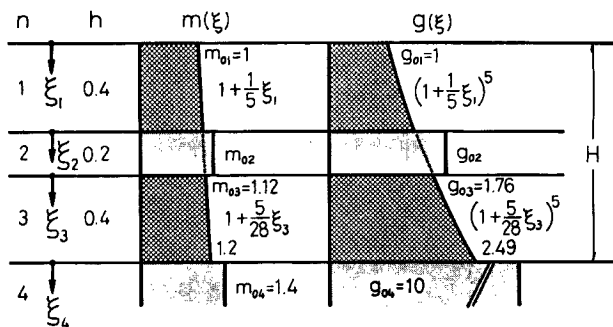
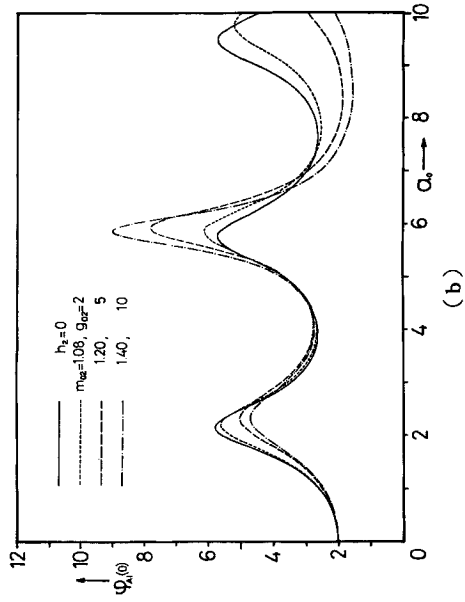
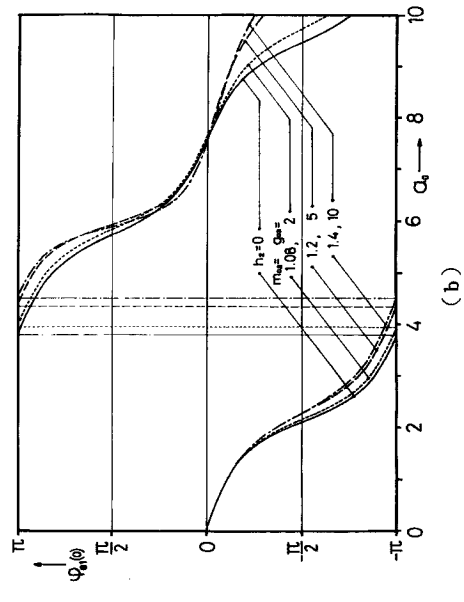


Fig. 8 Formulation of the four-layered media (Case 3).



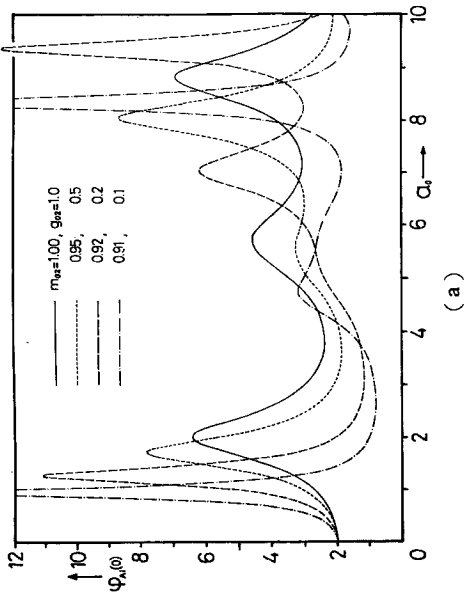
(b)



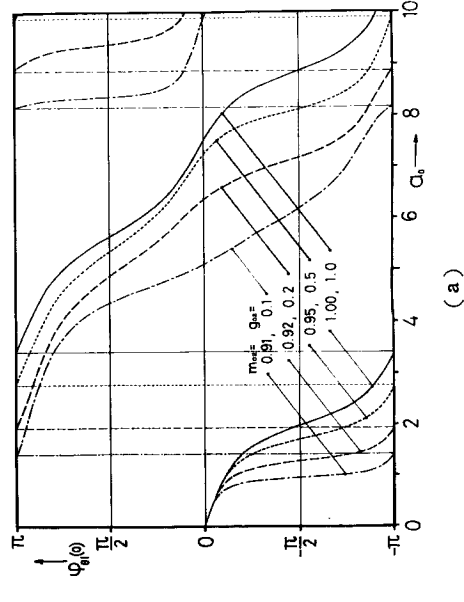
(b)

Fig. 9 Amplitude characteristics of the free surface, Case 3.

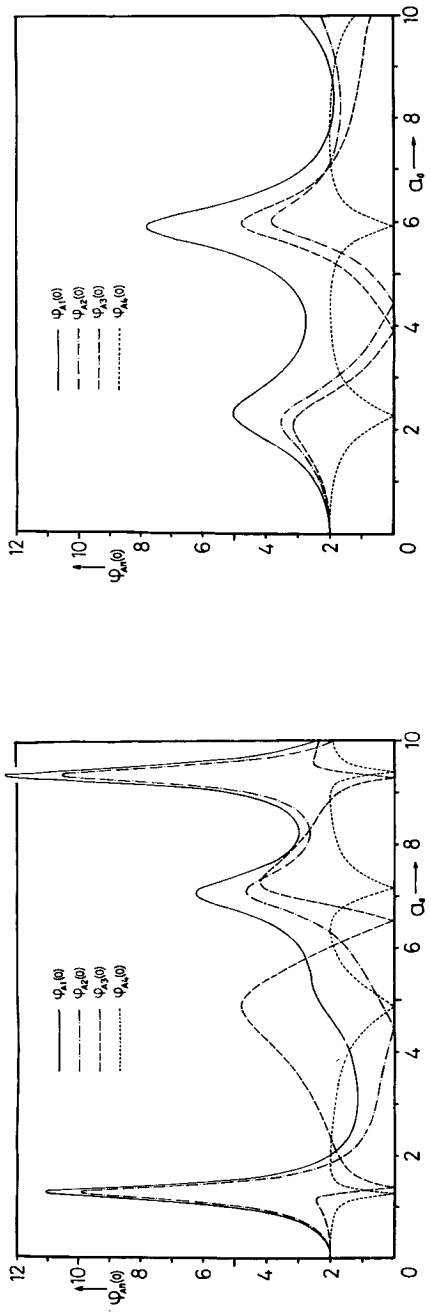
Fig. 10 Phase characteristics of the free surface, Case 3.



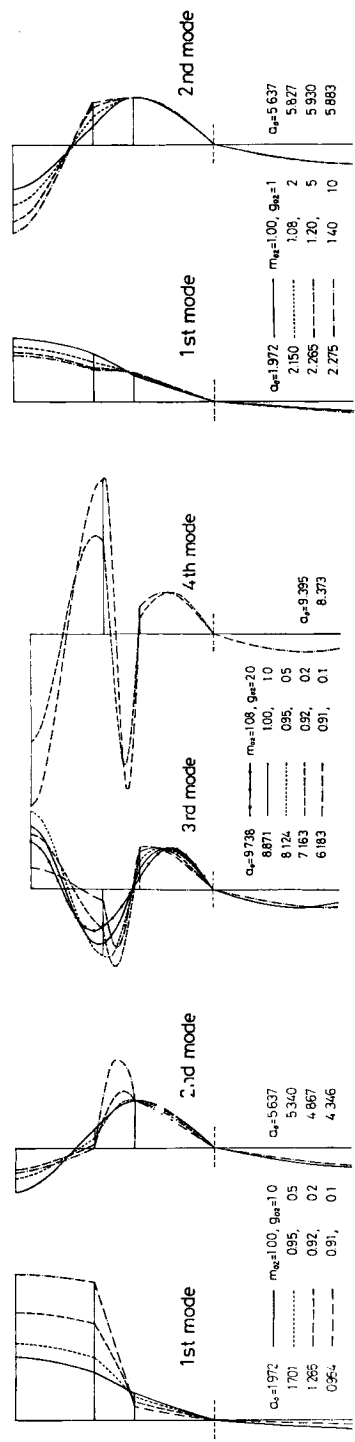
(a)



(a)



(a) (b) Fig. 11 Amplitude characteristics of the boundary surfaces, Case 3.



(a) (b) Fig. 12 Vibrational mode shapes at the resonant frequencies, Case 3.

わせて8通りの場合について数値計算を行った。なお、第1層および第3層における密度、剪断弾性係数の分布を示す各関数形および一般解の表現は、例2の(4.7)~(4.9)式において $\alpha=1/5$ とおくか、あるいは層を示すsuffixを3に変えかつ $\alpha=5/28$ とおけばそれぞれ得られる。

計算結果のうち、中間層の性質をパラメータにとったときの地表面における振巾特性 $\varphi_{A1}(0)$ と位相特性 $\varphi_{\theta1}(0)$ をそれぞれFig. 9とFig. 10に示した。また、中間層の性質を固定した代表的な2つの例について、各境界面における振巾特性 $\varphi_{An}(0)$ [$n=1, 2, 3, 4$]の変化をFig. 11に、そして、中間層の性質を変えたときに1次から4次までの共振時(厳密には地表面の位相特性が $\pm\pi/2$ になるとき)の振動モードがどのように変化するかを、そのときの共振振動数の a_0 値とともにFig. 12に示した。以上の各図において、(a)で示したのは中間層が密度・剪断弾性係数ともに小さい所謂“軟弱な”場合で、また(b)は中間層が密度・剪断弾性係数ともに大きい所謂“堅固な”場合に当たっている。

解析結果をまとめると、

1. 中間層が軟弱な場合

Fig. 9(a)にみられるように、中間層の性質が振巾特性に及ぼす影響は極めて敏感で、軟弱性が大きくなるとともに共振振動数は大巾に減少する。この共振振動数は媒体が減衰項を含んでいないことを考え合わせると固有振動数にごく近いとみなしうるので、この地盤系の固有振動数に対しても中間層の性質は同様な影響を及ぼしているものと思われる。

一方、地表面の振巾特性も大きな影響を受けて、軟弱な性質の増大とともに共振点付近では非常に大きな値をとるようになる。これは主として軟弱な中間層の増巾作用が最上層の挙動に及ぼした結果であることが、Figs. 11(a)および12(a)より理解される。

2. 中間層が堅固な場合

軟弱な場合とは対照的に、中間層の性質が振巾特性に及ぼす影響は割合鈍感である。Fig. 9(b)にみられるように、中間層の性質が相当堅固になっても共振振動数(したがって上述の意味で近似的に固有振動数)の変化は比較的少ない。とくに1次あるいは2次のような低次のときにはほとんど変化がなく、また、中間層がより堅固な性質へ移行しても、この振動数が必ずしも一様に大きくなるとは限らない。

一般的な傾向としては、中間層が堅固になるとともに地表面における共振点付近の振巾特性は小さくなるのが予想される。Fig. 9(b)をみると確かに1次および3次の場合には予想通りの傾向を示しているが、中間層が堅固になるほど地表面の共振点付近の振巾特性が増大し、しかもこのときの値が図の領域内では最も大きいというような2次の場合もあるから注意を要する。中間層の性質が堅固になるとともにその上の層との間の波動インピーダンス比が大きくなるが、Figs. 11(b)および12(b)の2次のモードを参照すれば、この比の値の増加によって最上層での増巾作用が大きくなるような振動数領域があって、2次がちょうどこの領域内に入っているためにこのような現象が生じてきたのではなかろうかと考えられる。

5. む す び

本研究は不均質な線形粘弾性媒体からなる成層地盤の波動伝達特性を求める解析手法を主として論じたものであるが、その内容を要約すれば次のようになる。

まず、不均質な1次元線形粘弾性体の運動方程式の基本解が三角関数・指数関数・円柱関数などをそのなかに含むWhittaker関数によって表現されるための条件として、媒体の性質を表わすパラメータと便宜的に導入された任意関数との間に成立つべき関係式を求めた。結果は3階の導関数を含む連立非線形常微分方程式になるが、この関係を満たすいくつかの不均質な媒体の性質とその基本解の表現を一覧表にまとめた。次に、均質な基盤層上に均質あるいは不均質な層ののる成層地盤を想定し、基盤層からSH波が鉛直上方に入射したときの地盤内の任意点における波動伝達特性を、前段に得られた基本解を普遍的に表現した各層の運動方程式の一般解から出発して、各境界面における境界条件に基づいて決定していくという手法により求

めた。最後に、不均質な媒体の場合と均質成層媒体の場合との比較対照を含めて若干の計算例を示し、その性状を検討した。

計算例から得られた主要な結論は次のように要約できる。

1. 不均質な媒体は均質な成層媒体で層数を無限大とした一つの極限と考えられる。したがって、不均質な媒体の波動伝達特性は、これを適当な個数の層に分割し、分割された各層において層内での平均的な性質をもつような均質な成層媒体に置換えることによって近似的に表現することができ、また分割数を増すことによりその近似度を高めることができる。

2. このことは逆に、均質な成層媒体の深さ方向への不連続な性質の変化を適当な形の連続な関数で十分よく近似できるときには、この成層媒体を単一の不均質媒体に置換えて、その波動伝達特性を近似的に評価しうることを示している。

3. 算例で扱ったような基盤上の表層のなかに薄い中間層を狭む地盤で、中間層の地盤常数のみを変化させると、地表面での波動伝達特性は、軟弱な性質への移行に対してはその影響を敏感に受けて、共振振動数は減少し共振点付近の振巾特性は増大するという方向に大きく変動する。反対に堅固な性質への移行に対してはこれらの特性の変動は割合鈍感で、とくに低次の共振振動数はほとんど変わらない。

4. 上記の算例において、中間層が堅固になるとともに地表面での共振点付近の振巾特性は一般に小さくなるのが普通であるが、この傾向が全く逆になるような振動数領域が現われてくることがある。構造物への入力地震波の特性を評価するさいに注意すべきことがらであろう。

本論の算例では簡単のために無減衰媒体の場合を扱ったが、実際の地盤を構成する媒質には何らかの内部的な減衰機構が存在し、これに基づく減衰性状が現われてくるので、媒質が減衰機構をもつ成層地盤も興味ある対象であろう。その場合には振動数パラメータ a_{0n} が複素数となるため、本論の算例で言えば、複素 argument をもつ円柱関数の計算が必要になるという数値計算上の多少のめんどうさが入ってくるだけで、あとは無減衰の場合と全く同様な計算手法で波動伝達特性を求めることができる。ここで得られた波動伝達特性を基礎周辺地盤の動特性、例えば筆者等が一連の研究のなかで扱ってきた“長方形基礎の Dynamical Ground Compliance”等と組合わせて表現し、さらに上部構造物系の動特性に接続して表現すれば、基盤層からの入射波に対する“波動媒体地盤—基礎周辺地盤—構造物”という総合系の動特性＝伝達関数が得られることになる。

最後に、本論で扱った解析手法は、各層の特性分布が連続する数層において一様に変化するような多層構造物で1次元剪断型連続体に抽象できるものについても、基礎部分からの入射波動に対するその伝達特性の表現を導くさいに、そのまま適用できることを付記しておく。

参 考 文 献

- 1) Sezawa, K.: Possibility of the Free Oscillations of the Surface Layer Excited by the Seismic Waves, Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Vol. 8, Part 1, 1930, pp. 1~11.
- 2) Kanai, K.: Relation between the Nature of Surface Layer and the Amplitudes of Earthquake Motions, Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Vol. 30, Part 1, 1952, pp. 31~37.
- 3) Herrera, I. and E. Rosenblueth : Response Spectra on Stratified Soil, Proceedings of the Third World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 1, 1965, pp. 1-44~60.
- 4) Kobayashi, H. and H. Kagami : A Numerical Analysis of the Propagation of Shear Waves in Multi-Layered Ground, Proceedings of Japan Earthquake Engineering Symposium 1966, 1966, pp. 15~20.

- 5) Kobori, T. and R. Minai : One-Dimensional Wave-Transfer Functions of the Linear Visco-Elastic Multi-Layered Half-Space, Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Vol. 18, Part 4, No. 148, 1969, pp. 27~64.
- 6) Hardin, B.O. and F.E. Richart : Elastic Wave Velocities in Granular Soils, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 89, No. SM1, 1963, pp. 33~65.
- 7) Duffy, J. and Mindlin, R.D.: Stress-Strain Relations and Vibrations of a Granular Medium, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 24, 1957, pp. 585~593.
- 8) Biot, M.A.: Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid, I. Low-Frequency Range, the Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 28, No. 2, 1956, pp. 168~178.
- 9) Idriss, I.M. and Seed, H.B.: Seismic Response of Horizontal Soil Layers, Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol. 94, No. SM4, 1968, pp. 1003~1031.
- 10) 森口繁一・宇田川銑久・松信：数学公式—特殊関数—，岩波書店，1960，p.56, p.150.

APPENDIX

[例1] $g(\xi) = (1 + \alpha\xi)^{2p}$, $m(\xi) = (1 + \alpha\xi)^{2q}$ [α, p, q ; 任意常数] を与える場合

$$\zeta(\xi) = \zeta_0(1 + \alpha\xi)^\gamma \quad [\zeta_0, \gamma; \text{未定常数}] \quad \dots\dots\dots (A. 1)$$

と仮定し，これらの関係を条件式 (2.14) に代入すると，

$$\begin{aligned} [(2p-1)^2 - 4\mu^2\gamma^2] + \left[4\kappa\zeta_0\gamma^2(1 + \alpha\xi)^\gamma - \zeta_0^2\gamma^2(1 + \alpha\xi)^{2\gamma} \right. \\ \left. - 4\frac{a_0^2}{\alpha^2}(1 + \alpha\xi)^{2(q-p+1)} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (A. 2) \end{aligned}$$

この関係が恒等的に成立つためには，

$$(2p-1)^2 = 4\mu^2\gamma^2, \quad \kappa = 0, \quad 2\gamma = 2(q-p+1), \quad -\zeta_0^2\gamma^2 = 4\frac{a_0^2}{\alpha^2} \quad \dots\dots\dots (A. 3)$$

なる関係式が同時に満たされればよい。これを解いて，

$$\gamma = q - p + 1, \quad \kappa = 0, \quad \mu = \pm \frac{2p-1}{2(q-p+1)}, \quad \zeta_0 = \pm 2i \frac{a_0}{\alpha(q-p+1)} \quad \dots\dots\dots (A. 4)$$

が得られる。また (A. 1) および (2.13) 式より，

$$\zeta(\xi) = \pm 2i \frac{a_0}{\alpha(q-p+1)} (1 + \alpha\xi)^{q-p+1} \quad \dots\dots\dots (A. 5)$$

$$\eta(\xi) = A(1 + \alpha\xi)^{-(p+q)/2}, \quad \text{ここに } A = d[\pm 2ia_0]^{-1/2} \quad \dots\dots\dots (A. 6)$$

したがって，この媒体の基本解は上に得られた関係を (2.15) 式に代入して次のように求められる。

$$\varphi(\xi) = A(1 + \alpha\xi)^{-(p+q)/2} W_{0, \pm \frac{2p-1}{2(q-p+1)}} \left(\pm 2i \frac{a_0}{\alpha(q-p+1)} (1 + \alpha\xi)^{q-p+1} \right) \quad \dots\dots\dots (A. 7)$$

次に，Whittaker 関数 $M_{0,\nu}(2iz)$ と Bessl 関数 $J_\nu(z)$ との関係式¹⁰⁾

$$J_\nu(z) = \frac{e^{-(\nu/2+1/4)\pi}}{2^{2\nu}\Gamma(\nu+1)\sqrt{2z}} M_{0,\nu}(2iz) \quad \dots\dots\dots (A. 8)$$

などを参照して，(2.9) 式において

$$\zeta \rightarrow 2i\zeta \quad \text{かつ} \quad W_{\kappa,\mu}(2i\zeta) = (2\zeta)^{1/2} Z_\nu(\zeta), \quad \kappa = 0, \quad \mu = \nu$$

なる変換を施せば，これは Bessel の微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{d}{d\zeta} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\zeta^2} \right) \right] Z_\nu(\zeta) = 0 \quad \dots\dots\dots (A. 9)$$

に帰着する。(ここに $Z_\nu(\zeta)$ は円柱関数を一般的に表わすものとする) 以上の考察より，この媒体の基本

解は円柱関数を用いて次のように表現することもできる。

$$\varphi(\xi) = B(1 + \alpha\xi)^{1/2 - p} Z_{\pm \frac{2p-1}{2(q-p+1)}} \left(\pm \frac{a_0}{\alpha(q-p+1)} (1 + \alpha\xi)^{q-p+1} \right) \dots\dots\dots (A. 10)$$

ここに、 B は常数部分を示す。

[例 2] $g(\xi) = (1 + \alpha\xi)^{2p}$, $m(\xi) = (1 + \beta\xi)^{2q}$ [a, β, p, q ; 任意常数] を与える場合

$$\zeta(\xi) = \zeta_0(1 + \alpha\xi)^\gamma \quad [\zeta_0, \gamma; \text{未定常数}] \dots\dots\dots (A. 11)$$

を仮定すると、条件式 (2.14) は次のようになる。

$$[(2p-1)^2 - 4\mu^2 r^2] + [4\kappa\zeta_0 r^2 (1 + \alpha\xi)^\gamma - \zeta_0^2 r^2 (1 + \alpha\xi)^{2\gamma} - 4\frac{a_0^2}{\alpha^2} \cdot \frac{(1 + \beta\xi)^{2q}}{(1 + \alpha\xi)^{2(p-1)}}] = 0 \dots\dots\dots (A. 12)$$

ここで、 $p=q=1/2$ かつ $r=1$ とおけば、

$$\mu = 0, \quad 4\kappa\zeta_0(1 + \alpha\xi) - \zeta_0^2(1 + \alpha\xi)^2 - 4\frac{a_0^2}{\alpha^2}(1 + \beta\xi)(1 + \alpha\xi) = 0 \dots\dots\dots (A. 13)$$

が得られる。上の第 2 式が恒等的に成立つためには、 ξ に関する各項の係数が零にならなければならないから、

$$\zeta_0^2 \alpha^2 + 4\alpha\beta\frac{a_0^2}{\alpha^2} = 0, \quad 4\kappa\zeta_0\alpha - 2\zeta_0^2\alpha - 4(\alpha + \beta)\frac{a_0^2}{\alpha^2} = 0, \quad 4\kappa\zeta_0 - \zeta_0^2 - 4\frac{a_0^2}{\alpha^2} = 0 \dots\dots\dots (A. 14)$$

上の第 2 式は残る二つの関係式が満足されれば恒等的に成立つ。故に第 1 式と第 3 式を連立させて解くと、

$$\zeta_0 = \pm 2\frac{a_0}{\alpha} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}, \quad \kappa = \pm \frac{a_0}{2\alpha} \cdot \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{-\alpha\beta}} \quad [\text{複号同順}] \dots\dots\dots (A. 15)$$

が得られる。また (A. 11) および (2.13) 式より

$$\zeta(\xi) = \pm 2\frac{a_0}{\alpha} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} (1 + \alpha\xi) \dots\dots\dots (A. 16)$$

$$\eta(\xi) = A(1 + \alpha\xi)^{-1/2}, \quad \text{ここに } A = d \left[\pm 2\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} a_0 \right]^{-1/2} \dots\dots\dots (A. 17)$$

したがって、この媒体 [$g(\xi) = 1 + \alpha\xi, m(\xi) = 1 + \beta\xi$] の基本解は (2.14) 式より次のように求められる。

$$\varphi(\xi) = A(1 + \alpha\xi)^{-1/2} W_{\pm \frac{a_0}{2\alpha}, \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{-\alpha\beta}}}, 0 \left(\pm 2\frac{a_0}{\alpha} \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} (1 + \alpha\xi) \right) \quad [\text{複号同順}] \dots\dots\dots (A. 18)$$

なお $\alpha = \beta$ のときには例 1 の $p=q=1/2$ の場合に一致する。

[例 3] $g(\xi) = \left(1 + \frac{\alpha}{\xi}\right)^{2p}$, $m(\xi) = \left(1 + \frac{\alpha}{\xi}\right)^{2q}$ [a, p, q ; 任意常数] を与える場合

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 = -4a_0^2 \frac{m(\xi)}{g(\xi)} = -4a_0^2 \left(1 + \frac{\alpha}{\xi}\right)^{2(q-p)} \dots\dots\dots (A. 19)$$

を仮定し、さらに $\kappa=0$ かつ $\mu = \pm 1/2$ とおけば、条件式は、

$$2\frac{\zeta'''}{\zeta'} - 3\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 + 2\frac{g''}{g} - \left(\frac{g'}{g}\right)^2 = 0 \quad \text{あるいは}$$

$$(p+q)\left(1 + \frac{\alpha}{\xi}\right)^{-2} \frac{\alpha}{\xi^3} \left[3(p-q-2)\frac{\alpha}{\xi} + 4\left(1 + \frac{\alpha}{\xi}\right) \right] = 0 \dots\dots\dots (A. 20)$$

のように変形される。故に

$$p+q=0 \dots\dots\dots (A. 21)$$

が成立てば上式は恒等的に満足される。また (A. 19) および (2.13) 式より、

$$\zeta(\xi) = \pm 2ia_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\xi}\right)^{-2p} d\xi \dots\dots\dots (A. 22)$$

$$\eta(\xi) = A = d[2ia_0]^{-1/2} \dots\dots\dots (A. 23)$$

が得られる。したがって、この媒体 $[g(\xi)=(1+\alpha/\xi)^{2p}, m(\xi)=(1+\alpha/\xi)^{-2p}]$ の基本解は次のようになる。

$$\varphi(\xi) = A W_{0, \pm 1/2} \left(\pm 2ia_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\xi} \right)^{-2p} d\xi \right) \quad \dots\dots\dots (A. 24)$$

なお、指数関数と合流型超幾何関数および Whittaker 関数の間の関係式¹⁰⁾

$$e^z = F(\alpha, \alpha; z) = M_{0, \pm 1/2}(2z) \quad \dots\dots\dots (A. 25)$$

を参照して、

$$\zeta \rightarrow 2\zeta \quad \text{かつ} \quad \kappa = 0, \quad \mu = \pm 1/2$$

なる変換を (2.9) 式に施せば、指数関数の方程式

$$\left[\frac{d^2}{d\zeta^2} - 1 \right] e\zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (A. 26)$$

に帰着するので、基本解はまた次式のように表現することもできる。

$$\varphi(\xi) = B \exp \left(\pm ia_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\xi} \right)^{-2p} d\xi \right) \quad \dots\dots\dots (A. 27)$$

ここに、 B は常数部分を示す。