

# 建築構造物の耐震安全性について

南 井 良 一 郎

## ON THE ASEISMIC SAFETY OF BUILDING STRUCTURES

By *Ryoichiro* MINAI

### Synopsis

This paper deals with the aseismic safety of building structures subjected to destructive earthquakes from the probabilistic point of view. The reliability function, which is defined as the probability of survival as a function of time, of the elasto-plastic structures to random earthquake excitations is discussed by considering low cycle fatigue phenomenon of structures composed of ductile materials. It is found that the reliability function is remarkably influenced by the type of low cycle fatigue represented by a exponent and the static fracture ductility and the non-stationarity of earthquake excitations mainly expressed by the duration-time.

### 1. ま え が き

高層建築物のいわゆる動的耐震設計が行なわれるようになってから数年を経て、その経験も豊富となり、その成果の一部が耐震規程の改正に取り入れられる気運にある。多くの動的耐震解析の結果得られた一般的な工学的知見が、合理的かつ普遍的な耐震設計資料として耐震規程に活かされること自体は望ましいことではある。しかし、現在行なわれている高層建築物の動的耐震設計の支配的な方法においては、過去に記録された典型的な強震加速度記録を、ただ最大振巾が 200~300 gal になるように調整して地震外乱とし、これに対して建築物の耐震安全性は、たとえば、各層層間変位の最大値に注目して、おもに、弾性域で論じているようである。これは、過去の典型的な強震加速度記録の大部分について、卓越周波数域が 2~3 cps にあり、他方、通常の高層建築物の基本固有周波数が 1 cps 以下である関係から、比較的低い 0.05~0.15 程度のベース・シャー係数を採用しても地震応答を弾性域に収めて、現行法規に照らして十分設計の経済性の要求を充足することに無関係ではない。ところが、高層建築物における動的耐震設計と同じ考えを基本固有周波数が 2~3 cps の中層建物に適用すると、たとえ、相当大きい臨界減衰比を想定してもなお、弾性設計の立場を採れば、ベース・シャー係数は 0.5 以上も要することになり、現行法規に較べ、大変不経済と思われる結果に帰することはよく知られている<sup>1)</sup>。それで、中層建築物については、現行法規によれば標準震度 0.2 で弾性域での性能を主対象として設計されているわけであるから、この差は、建築物の有する靱性、または、塑性域におけるエネルギー消費能力、建築物周辺地盤におけるエネルギー消散、基礎地盤への波動エネルギーとしての逸散、あるいは、計算外の余力とかに莫然と期待していることになる。このような曖昧さが 1968 年十勝沖地震における中層鉄筋コンクリート建築物の被害に関係があるとすれば、耐震工学に従う者は大いに反省しなければならない。震害調査の結果では、現行法規に照らせばそれ程大きな問題があるわけではないが、余力は少ないと推定される中層鉄筋コンクリート構造の柱の被害が目立ったのであるが、これなど莫然と期待していた靱性が、現行の仕様の鉄筋コンクリート柱では十分に発揮されなかった結果の現われと解釈できる。また、ほとんど同じ地点のほとんど同じ規模と構造の建築物で、一方は大被害を受けているのに、他方はほとんど被害を蒙っていない例があるが、この解釈としては、地盤や構造物の性質に関する僅

小の差によって構造物の地震応答に大きな差異を生ずることがあると考えるより、むしろ、現行の設計法では弾性性状に主として関心を集中している結果、多小の外乱の超過によって構造物が弾性限を越えた場合、脆性破壊を生ずることを、必ずしも、防止することにはなっていないことによると考えた方が無理がない。もしそのような状況にあるとすれば、もう少し大きい地震を想定したときの不安は逃れえない。

わが国のような地震国では、全国至るところ、最大加速度で 200~300 gal 以上の地震が、たとえ、その発生する確率は小さいにしても、建築物の設計に際して生じうると考えねばならないし、また、わが国のような複雑な地盤構成と建築物の耐震設計の対象となるような強震記録の根本的な不足を考えれば、たとえば、強震加速度波形の卓越周波数域を確実に予測することも困難と言わねばならない。一方、建築物の耐震設計を考える場合、大地震によって建築物に大被害を生ずることがあるにしても、人命に関わるような崩壊の発生は極力防止しなければならないという原則がある。

地震外乱の強さにある種の限界が存在することは確かではあるが、地震波形は時間関数として極めて不規則な性状を示す。一般に構造物の動的解析に際しては、たんに外乱の強さばかりでなく、波形に関する情報を必要とするが、このような立場から、ある土地で将来どんな地震が発生するかを適確に予知することはきわめて困難と思われる。このような状況にあって、すでに30年以上も前に、棚橋諒教授は著名な「速度—ポテンシャル・エネルギー説」において<sup>2)</sup>、地震の構造物に対する破壊力の尺度は地震の最大速度の2乗に比例し、構造物の耐震性は破壊までに蓄えうる準静的ポテンシャル・エネルギーに比例すると指摘され、構造物に対する地震の強さの考え方と耐震性に対する構造物の靱性の重要性を示され、近年の塑性域を対象とする耐震解析の基礎と構造物の弾塑性終局耐震設計法の道標を与えられた<sup>3),4)</sup>。1964年の新潟地震における震害の経験が、軟弱地盤の動的性質の考慮が構造物の耐震設計にいかん重要であることを教え、この分野の研究を大いに刺激したことに対して、1968年十勝沖地震の震害経験は、ある見方をすれば、現在行なわれている動的解析の予測がかなり信頼出来る程度であることを示したことになるが、それよりもいかに構造物の靱性が耐震的に重要であることを教えたと言える。このことは、建築構造物の耐震安全性は、まず、構造物の崩壊防止を第1の目標として、地震外乱の非予測性と不確定性の立場から、設計用地震波群を、強度的にも周波数的にも十分な外乱安全率を見込んで想定し、これに対して構造物の安全性は、その靱性を十分評価しながら終局状態において検討する方針の弾塑性終局耐震設計法によって保証されるのが妥当であることを示し、この場合、構造物の有する靱性、あるいは、塑性域におけるエネルギー消費能力が、構造物の終局耐震安全性と耐震設計の経済性の支配的な要素となる<sup>5),6)</sup>。しかしながら、一方、このような立場から、現在の段階で、構造物の終局耐震安全性を定量的にどの程度明らかにしうるか謙虚に考えるならば、いかながら、定量的な観点からはきわめて重要でありながら、はなはだ不明確な諸点や、今後の研究にまつべき困難な問題も多いことを認めざるをえない。

まず第1に、対象とすべき地震外乱群が、ある土地で将来生じうるという意味では、たとえ、それを確率統計的に把えとしても、はなはだ定量的には判然とし難い性質のものである。第2に、現在構造物の動的耐震解析に用いられている非線形復元力特性や減衰特性の数学的モデルおよび弾塑性構造物の耐震安全性の尺度として用いている靱性率応答などは、ずいぶん理想化して考えているが、設計され実現する構造物の特性や耐震安全性にどの程度定量的に対応するかが明瞭になっているとは言えない。また、最大地震応答との比較において構造物の耐震安全性を判定する許容応答値にしても、終局状態の観点からして、定量的にどの程度の安全率を持っているかは判然としていない。さらに根本的に、将来予想すべき地震外乱群に関しても、設計施工を媒介とする構造物の動的性質や終局性状に関しても、確率統計的にしか把えられない諸量の多い中で、建築構造物の耐震安全性をいかに定量化するかは重要な問題として残されている。

以上述べたように、建築構造物の耐震設計を合理化するためには、弾塑性域の性状を対象とする終局耐震設計法の確立が望まれるわけであるが、これに関連して、最近、弾塑性域における低サイクル疲労現象が注目され<sup>7)~11)</sup>、地震時の不規則な大振幅繰返し挙動に伴なう構造物の変形能力の劣化が耐震安全性におよぼ

す影響の評価が問題となってきた。一方、不規則な強度を有する構造物が、不規則な時系列外力を受けるときの安全性は、安全の確率として論じられているが<sup>12),13)</sup>、ここでは、一般に、非定常確率過程として記述される地震外乱群を受ける弾塑性建築構造物の終局耐震安全性の尺度と種々の不規則要因の影響を統一的に単一の量として評価しうる確率統計的な安全性の尺度として、それぞれ、低サイクル疲労破壊の規範と通常 reliability function と呼ばれる時間関数としての安全の確率を採り上げ<sup>13),14),15),25)</sup>、等価線形化法による非定常ランダム地震応答解析を仲介とする耐震安全性の確率統計的解析における基本的問題を論ずる<sup>16)</sup>。

## 2. ランダム低サイクル疲労

低サイクル疲労の研究は、最近、金属材料および構造工学の分野で多く行なわれ、定波形で繰返される歪振巾と破壊繰返し回数の関係は次式で与えられている<sup>17)</sup>。

$$\left(\frac{\bar{e}^P}{e_F^P}\right)^a = \frac{1}{4N}, \quad \bar{e} = \bar{e}^E + \bar{e}^P, \quad a > 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\bar{e}$  は歪振巾、 $\bar{e}^E$ 、 $\bar{e}^P$  は、それぞれ、 $\bar{e}$  の弾性および塑性成分、 $e_F^P$  は準静的破断歪  $e_F$  の塑性成分、 $N$  はその振巾に関する破壊繰返し回数である。

金属材料の分野では、一般に破壊繰返し回数が  $10^4$  以下の領域を低サイクル疲労と呼んでいるが、破壊繰返し数が数十サイクル以下の領域では (1) 式の塑性歪の代りに全歪を採用して、全歪振巾  $\bar{e}$  と対応する破壊繰返し数  $N$  の関係が次式で表わされる<sup>18)</sup>。

$$\left(\frac{\bar{e}}{e_F}\right)^a = \frac{1}{4N}, \quad a > 0 \dots\dots\dots (2)$$

(1) および (2) 式における指数  $a$  は低サイクル疲労の型を定めるパラメータで、金属材料に関する実験結果からは、2.0前後の数値である<sup>17)</sup>。

構造工学、あるいは、とくに耐震工学の立場から低サイクル疲労の問題を扱うには、微視的な歪振巾より巨視的な変位系統の尺度、たとえば、構造部材あるいは構造物を対象として弾塑性変位と弾性限変位の比として定義した靱性率によって表わすのが便利である<sup>3)</sup>。この場合、低サイクル疲労破壊が、結局、脆性の破壊現象であることを考えれば、材料の歪振巾に関する低サイクル疲労の型は、部材、あるいは、それによって構成される構造物の変位に対して定義した靱性率振巾に関する低サイクル疲労の型に、ある程度密接に関連するものと考えられる。そこで、ここでは、変位に関する靱性率に対して、定振巾の低サイクル疲労破壊の規範が、歪振巾に対する(2)式と同型の次式によって与えられるものと仮定する。

$$\left(\frac{\bar{\eta}}{\eta_F}\right)^a = \frac{1}{4N}, \quad \bar{\eta} = \frac{\bar{x}}{x_Y}, \quad \eta_F = \frac{x_F}{x_Y}, \quad a > 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\bar{x}$ 、 $x_F$  および  $x_Y$  は、それぞれ、変位振巾、準静的終局変位および弾性限変位に対応する規準変位、したがって、 $\bar{\eta}$ 、 $\eta_F$  は、それぞれ変位に関する靱性率振巾および準静的終局靱性率を示す。

靱性率は歪に関しても定義でき、ある同一の状態に対して歪に関する靱性率と変位に関する靱性率が量的に大きく相異なるのは勿論であるが、二つの状態に関する比率が両方の靱性率について、定った指数で何乗かの形で結ばれるならば、両者の低サイクル疲労の規範は同様な式で表現され、さらに特別に、比率が保持されるならば、(2) および (3) 式の指数  $a$  は不変である。

構造部材や構造物についての低サイクル疲労の研究は少く、それで、(3) 式の準静的終局靱性率  $\eta_F$  や指数  $a$  の値やそのバラツキの性質は将来の研究にまたねばならないが、たとえば、指数  $a$  に関しては  $a=1.0$  は、塑性挙動が強い場合には、近似的に履歴消費エネルギー率<sup>4),5)</sup>の尺度に対応し、履歴エネルギーの消費能力に単一な限界の存在することを意味し、他方、 $a=\infty$  は、靱性率の尺度に対応し、繰返しによって変形能力に劣化がないことを意味する。かかる観点から(3)式に示される低サイクル疲労破壊の規範は、きわめて一般的な破壊の尺度であり、したがって、構造材料や構造細部設計あるいは構造形式に対して指数  $a$  の値と準静的終局靱性率  $\eta_F$  を実験的に明らかにする必要がある。なお、準静的終局靱性率  $\eta_F$  には当然バラツキ

が予想され、本質的には確率変数と考えるべきものと思われる。

種々の大きさの振巾が複合した場合の低サイクル疲労破壊に関しては、累積損傷説が成立するものとし<sup>19),20)</sup>、(3)式の韌性率振巾  $\eta$  の1サイクル当りの損傷度  $\Delta\Psi_1$  を

$$\Delta\Psi_1 = 4 \left( \frac{\eta}{\eta_F} \right)^a \dots\dots\dots (4)$$

で表わし、種々の韌性率振巾による損傷度の増分を加算して損傷度  $\Psi$  を定め、基本的には次式を低サイクル疲労破壊に関する安全性の判定規準とする。

$$1 - \Psi \geq 0, \Psi = \sum_i n_i \Delta\Psi_1^i \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\Delta\Psi_1^i$  は振巾  $\eta_i$  1サイクル当りの損傷度、 $n_i$  は  $\eta_i$  のサイクルの数である。

しかし、種々の振巾が複合した場合には、その強制変位のパターンによって、必ずしも、 $\Psi$  が1近傍の値で破壊が発生するとは限らない<sup>18)</sup>。不規則な強制変位過程では、一定の傾向が生じないため、 $\Psi$  が1近傍の値で破壊することが知られているが、原則として、(5)式の代りに、

$$C - \Psi \geq 0 \dots\dots\dots (6)$$

を採用し、 $C$  は確率変数と考えるのが妥当と思われる。(3)および(6)式から、損傷度  $\Psi$  を受けた状態で残存する準静的終局韌性率  $\eta_R$  は次式で与えられる。

$$\eta_R = \eta_F (C - \Psi)^{1/a} \dots\dots\dots (7)$$

つぎに、ランダム低サイクル疲労の扱いに便利のように、R.W. Lardner の方法に従って、損傷速度を用いて疲労過程を連続化し、損傷度  $\Psi$  を時間  $T$  の連続関数として次式のように表現する<sup>21)</sup>。

$$\Psi(T) = \int_0^T F(\eta) |\dot{\eta}| dt, \quad F(\eta) = \frac{a}{\eta_F^a} |\eta|^{a-1} \dots\dots\dots (8)$$

上式で  $\dot{\phantom{x}}$  は時間に関する微分を示し、また、 $F(\eta) |\dot{\eta}|$  は損傷速度を示す。(8)の第2式の  $F(\eta)$  の形は、定振巾疲労の1サイクル当りの損傷の増分が(4)式と一致するように定めてある。

つぎに、韌性率応答  $\eta$  が非定常確率過程に属するとして、時間  $t$  における  $\eta$  の値  $\eta_t$  と  $\dot{\eta}$  の値  $\dot{\eta}_t$  の同時確率密度関数が  $w(\eta_t, \dot{\eta}_t; t)$  とすれば、時間  $T$  における平均損傷度  $E\Psi(T)$  は次式で与えられる。

$$E\Psi(T) = \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_t F(\eta_t) \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\eta}_t |\dot{\eta}_t| w(\eta_t, \dot{\eta}_t; t) \dots\dots\dots (9)$$

ここで、応答レベル  $\eta$  を、それぞれ、正および負の速度で、時間  $t$  において単位時間当りに横切る期待回数を、 $I^+(\eta; t)$  および  $I^-(\eta; t)$  とすれば、

$$\left. \begin{aligned} I^+(\eta; t) &= \int_0^{\infty} \dot{\eta}_t w(\eta, \dot{\eta}_t; t) d\dot{\eta}_t \\ I^-(\eta; t) &= - \int_{-\infty}^0 \dot{\eta}_t w(\eta, \dot{\eta}_t; t) d\dot{\eta}_t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

と表わされ、その和は、時間  $t$  において応答レベル  $\eta$  を単位時間当りに横切る期待回数を示す。すなわち、 $I(\eta; t) = I^+(\eta; t) + I^-(\eta; t) \dots\dots\dots (11)$

この量を用いると、損傷度  $\Psi$  の平均値  $E\Psi$  およびその時間率、あるいは、損傷速度  $\dot{\Psi}$  の平均値  $E\dot{\Psi}$  は(8)の第2式を考慮して次式のように表わされる。

$$E\Psi(T) = E \left( \int_0^T dt F(\eta_t) |\dot{\eta}_t| \right) = \frac{a}{\eta_F^a} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} d\eta |\eta|^{a-1} I(\eta; t) \dots\dots\dots (12)$$

$$\dot{E}\Psi(T) = \frac{a}{\eta_F^a} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta |\eta|^{a-1} I(\eta; T) = E\dot{\Psi}(T) \dots\dots\dots (13)$$

ここで、 $\dot{E}$  は平均値の時間に関する微分を示す。

また、時間  $t_1$  および  $t_2$  における  $\eta, \dot{\eta}$  の値、 $(\eta_{t_1}, \dot{\eta}_{t_1})$  と  $(\eta_{t_2}, \dot{\eta}_{t_2})$  の同時確率密度関数を  $w(\eta_{t_1}, \dot{\eta}_{t_1}; t_1; \eta_{t_2}, \dot{\eta}_{t_2}; t_2)$  とすれば、損傷度  $\Psi$  の2乗平均値  $E\Psi^2(T)$  とその時間率  $\dot{E}\Psi^2(T)$  は、それぞれ、次式のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 E\Psi^2(T) &= E\left(\int_0^T dt_1 F(\eta_{t_1}) |\dot{\eta}_{t_1}| \int_0^T dt_2 F(\eta_{t_2}) |\dot{\eta}_{t_2}| \right) \\
 &= \left(\frac{\alpha}{\eta_F^a}\right)^2 \int_0^T dt_1 \int_0^T dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{t_1} |\eta_{t_1}|^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\eta}_{t_1} |\dot{\eta}_{t_1}| \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_{t_2} |\eta_{t_2}|^{a-1} \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\eta}_{t_2} |\dot{\eta}_{t_2}| w(\eta_{t_1}, \dot{\eta}_{t_1}; t_1; \eta_{t_2}, \dot{\eta}_{t_2}; t_2) \dots\dots\dots (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}\Psi^2(T) &= 2 \left(\frac{\alpha}{\eta_F^a}\right)^2 \int_0^T dt \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_t |\eta_t|^{a-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\eta}_t |\dot{\eta}_t| \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_T |\eta_T|^{a-1} \\
 &\quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{\eta}_T |\dot{\eta}_T| w(\eta_t, \dot{\eta}_t; t; \eta_T, \dot{\eta}_T; T) \\
 &= 2E(\Psi(T)\dot{\Psi}(T)) \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

(8)式から判るように、損傷度  $\Psi$  は変域  $[0, \infty)$  の非定常確率過程であり、ここで、その確率密度関数を  $w_{\Psi}(\psi; t)$  と表わす、一方、ランダム低サイクル疲労破壊に関する安全性の判定規範(6)式の  $C$  は1近傍で鋭いピークを示す変域  $[0, \infty)$  の確率密度関数  $w_C(c)$  を有するものと考えられる。このとき、健全度

$$\Phi = C - \Psi, \dots\dots\dots (16)$$

の確率密度関数  $w_{\Phi}(\phi; t)$  は次式で与えられる。

$$w_{\Phi}(\phi; t) = \int_0^{\infty} w_C(\phi + \xi) w_{\Psi}(\xi; t) d\xi \dots\dots\dots (17)$$

また、準静的終局靱性率  $\eta_F$  の変域  $[0, \infty)$  における確率密度関数を  $w_{\eta_F}(\eta_f)$  とすれば、(7)式の残準静的終局靱性率  $\eta_R$  の確率密度関数  $w_{\eta_R}(\eta_r)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 w_{\eta_R}(\eta_r; t) &= a \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta_f} \left(\frac{\eta_r}{\eta_f}\right)^{a-1} w_{\eta_F}(\eta_f) w_{\Phi}\left(\left(\frac{\eta_r}{\eta_f}\right)^a; t\right) d\eta_f \\
 &\quad + \delta(\eta_r) \int_{-\infty}^0 w_{\Phi}(\phi; t) d\phi \dots\dots\dots (18)
 \end{aligned}$$

上に述べた確率密度関数  $w_{\Psi}(\psi; t)$ ,  $w_C(c)$  および  $w_{\eta_F}(\eta_f)$  は、互に独立な確率変数  $\Psi, C$  および  $\eta_F$  に関するものであり、このうち、 $w_C(c)$  と  $w_{\eta_F}(\eta_f)$  は実験の結果に基づいて与えられなければならないが、ランダム低サイクル疲労でも、 $C=1$  とすれば、デルタ関数を用いて、

$$w_C(c) = \delta(c-1), \quad w_{\Phi}(\phi; t) = w_{\Psi}(1-\phi; t) \dots\dots\dots (19)$$

と表わされるので、(18)式は次式に帰する。

$$\begin{aligned}
 w_{\eta_R}(\eta_r; t) &= a \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta_f} \left(\frac{\eta_r}{\eta_f}\right)^{a-1} w_{\eta_F}(\eta_f) w_{\Psi}\left(1-\left(\frac{\eta_r}{\eta_f}\right)^a; t\right) d\eta_f \\
 &\quad + \delta(\eta_r) \int_1^{\infty} w_{\Psi}(\psi; t) d\psi \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned}$$

さらに、準静的終局靱性率  $\eta_F$  が確定量であるとするならば、

$$w_{\eta_F}(\eta_f) = \delta(\eta_f - \eta_F) \dots\dots\dots (21)$$

と表わされ、(20)式は次式に帰する。

$$w_{\eta_R}(\eta_r; t) = \frac{\alpha}{\eta_F} \left(\frac{\eta_r}{\eta_F}\right)^{a-1} w_{\Psi}\left(1-\left(\frac{\eta_r}{\eta_F}\right)^a; t\right) + \delta(\eta_r) \int_1^{\infty} w_{\Psi}(\psi; t) d\psi \quad 0 \leq \eta_r \leq \eta_F \dots\dots (22)$$

損傷度  $\Psi$  の確率密度関数  $w_{\Psi}(\psi; t)$  に関しては、(8)式と非定常確率過程  $\eta$  の性質に従って決定するべきものであるが、厳密に評価することは難しいので、時間  $t$  における  $\Psi$  の平均値  $E\Psi(t)$  および2乗平均値  $E\Psi^2(t)$  を用いて、変域  $[0, \infty)$  で定義された適当な確率密度関数、たとえば、次式のガンマ分布で近似的に表現するのが便利であろう。

$$w_{\Psi}(\psi; t) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \psi^{\alpha-1} \exp(-\beta\psi) \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{ここで,} \quad \alpha &= \frac{(E\Psi(t))^2}{V\Psi(t)}, \quad \beta = \frac{\alpha}{E\Psi(t)} = \frac{E\Psi(t)}{V\Psi(t)} \\
 V\Psi(t) &= E\Psi^2(t) - (E\Psi(t))^2, \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} \nu^{x-1} \exp(-\nu) d\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

とくに,  $\alpha=1$  の場合は, (23) 式は指数分布,

$$w_{\Psi}(\psi; t) = \frac{1}{E\Psi(t)} \exp\left(-\frac{\psi}{E\Psi(t)}\right) \dots\dots\dots(25)$$

となり, (22) 式は次のように表わされる。

$$w_{\eta_R}(\eta_r; t) = \frac{\alpha}{\eta_r} \left(\frac{\eta_r}{\eta_F}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{E\Psi(t)} \exp\left[-\frac{1}{E\Psi(t)} \left(1 - \left(\frac{\eta_r}{\eta_F}\right)^\alpha\right)\right] + \delta(\eta_r) \exp\left(-\frac{1}{E\Psi(t)}\right) \\ 0 \leq \eta_r \leq \eta_F \dots\dots\dots(26)$$

また,  $V\Psi(t)=0$  と考えると<sup>21)</sup>,

$$w_{\Psi}(\psi; t) = \left. \begin{aligned} &= \delta(\psi - E\Psi(t)) \quad \text{for } 0 \leq E\Psi(t) < 1 \\ &= \delta(\psi - 1) \quad \text{for } 1 \leq E\Psi(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

と表わされ, (22) 式は次式に帰する。

$$w_{\eta_R}(\eta_r; t) = \left. \begin{aligned} &= \delta(\eta_r - \eta_F(1 - E\Psi(t))^{1/\alpha}) \quad \text{for } 0 \leq E\Psi(t) < 1 \\ &= \delta(\eta_r) \quad \text{for } 1 \leq E\Psi(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

つぎに, 非定常確率過程  $(\eta, \dot{\eta})$  が零平均値の正規過程とすると (10) および (11) 式は次のように表わされる<sup>4), 14), 16), 22)</sup>。

$$I^+(\eta; t) = \frac{\lambda}{2\pi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2K_{\eta\eta}}\right) \left[ \sqrt{1-\rho^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2\eta^2}{2(1-\rho^2)K_{\eta\eta}}\right\} \right. \\ \left. + \rho\eta\sqrt{\frac{\pi}{2K_{\eta\eta}}}\left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho\eta}{\sqrt{2(1-\rho^2)K_{\eta\eta}}}\right)\right\} \right] \dots\dots\dots(29)$$

$$I^-(\eta; t) = \frac{\lambda}{2\pi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2K_{\eta\eta}}\right) \left[ \sqrt{1-\rho^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2\eta^2}{2(1-\rho^2)K_{\eta\eta}}\right\} \right. \\ \left. - \rho\eta\sqrt{\frac{\pi}{2K_{\eta\eta}}}\left\{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\rho\eta}{\sqrt{2(1-\rho^2)K_{\eta\eta}}}\right)\right\} \right] \dots\dots\dots(30)$$

$$I'(\eta; t) = \frac{\lambda}{\pi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2K_{\eta\eta}}\right) \left[ \sqrt{1-\rho^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2\eta^2}{2(1-\rho^2)K_{\eta\eta}}\right\} \right. \\ \left. + \rho\eta\sqrt{\frac{\pi}{2K_{\eta\eta}}}\operatorname{erf}\left(\frac{\rho\eta}{\sqrt{2(1-\rho^2)K_{\eta\eta}}}\right) \right] \dots\dots\dots(31)$$

ここで,

$$\rho = \frac{K_{\eta\dot{\eta}}}{\sqrt{K_{\eta\eta}K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{K_{\dot{\eta}\dot{\eta}}}{K_{\eta\eta}}}, \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\nu^2) d\nu \dots\dots\dots(32)$$

なお,

$$[K] = E\left(\begin{matrix} \{\eta_a\} \\ \{\dot{\eta}_a\} \end{matrix} \begin{matrix} \{\eta_a\} \\ \{\dot{\eta}_a\} \end{matrix}\right) = \begin{bmatrix} K_{\eta\eta} & K_{\eta\dot{\eta}} \\ K_{\dot{\eta}\eta} & K_{\dot{\eta}\dot{\eta}} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \{\eta_a\} \\ \{\dot{\eta}_a\} \end{matrix} = \begin{matrix} \{\eta - M_\eta\} \\ \{\dot{\eta} - M_{\dot{\eta}}\} \end{matrix}, \quad \{M\} = E\begin{matrix} \{\eta\} \\ \{\dot{\eta}\} \end{matrix} = \begin{matrix} \{M_\eta\} \\ \{M_{\dot{\eta}}\} \end{matrix} \dots\dots\dots(33)$$

であるが, (29)~(31) 式では,  $\{M\}=\{0\}$  としている。

ここで, 次の定積分を考える。

$$I(\alpha, \beta, \tau) = \int_0^\infty \xi^\alpha \exp(-\beta\xi^2) \operatorname{erf}(\tau\xi) d\xi, \quad \alpha, \beta \geq 0 \dots\dots\dots(34)$$

この積分は漸化式,

$$I(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\tau}{2\sqrt{\pi\beta}} \left(\frac{1}{\beta + \tau^2}\right)^{\alpha/2} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha-1}{2\beta} I(\alpha-2, \beta, \tau) \dots\dots\dots(35)$$

を用いて, とくに,  $\alpha$  が零または正の整数である場合, 次式のように表わせる。

$$I(\alpha, \beta, \tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{(\alpha-3)/2} \frac{\prod_{i=1}^{j+1} (\alpha+1-2i)}{(\alpha-1-2j)(2\beta)^{j+1}} \left(\frac{1}{\beta + \tau^2}\right)^{(\alpha-2j)/2} \Gamma\left(\frac{\alpha-2j}{2}\right) \\ + \frac{(\alpha-1)/2}{(2\beta)^{(\alpha-1)/2}} I(1, \beta, \tau) \quad \text{for } \alpha; \text{ odd}, \quad \alpha \geq 3 \dots\dots\dots(36)$$

$$I(\alpha, \beta, r) = \frac{r}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{(\alpha/2)-1} \frac{\prod_{i=1}^{j+1} (\alpha+1-2i)}{(\alpha-1-2j)(2\beta)^{j+1} (\beta+r^2)^{(\alpha-2j)/2}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2j}{2}\right) \\ + \frac{\prod_{i=1}^{\alpha/2} (\alpha+1-2i)}{(2\beta)^{\alpha/2}} I(0, \beta, r) \quad \text{for } \alpha : \text{even}, \alpha \geq 2 \dots\dots\dots (37)$$

ここで,  $I(1, \beta, r) = \frac{r}{2\beta\sqrt{\beta+r^2}} \dots\dots\dots (38)$

$$I(0, \beta, r) = \frac{1}{r} I\left(0, -\frac{\beta}{r^2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} I\left(0, 1, \frac{r}{\sqrt{\beta}}\right) = \int_0^\infty \exp(-\xi^2) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{\beta}} \xi\right) d\xi \dots\dots (39)$$

(36) および (38) 式によって,  $\alpha$  が奇数の場合には積分が求められたことになるが,  $\alpha$  が偶数の場合には (39) 式を数値積分しなければならない。一般に,  $\alpha \geq 2$  として,  $[x]$  を  $x$  を越えない最大の整数とすれば, (34) 式は,

$$I(\alpha, \beta, r) = \frac{r}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{[\alpha/2]-1} \frac{\prod_{i=1}^{j+1} (\alpha+1-2i)}{(\alpha-1-2j)(2\beta)^{j+1} (\beta+r^2)^{(\alpha-2j)/2}} \Gamma\left(\frac{\alpha-2j}{2}\right) \\ + \frac{\prod_{i=1}^{[\alpha/2]} (\alpha+1-2i)}{(2\beta)^{[\alpha/2]}} I\left(\alpha-2\left[\frac{\alpha}{2}\right], \beta, r\right) \dots\dots\dots (40)$$

と表現できる。上式は (36) および (37) 式を一般化したものであり, 任意の  $\alpha \geq 2$  のパラメータに関する  $I(\alpha, \beta, r)$  が,  $0 \leq \alpha < 2$  のパラメータ領域の積分を用いて評価できることを示している。

(34) 式で  $r = \infty$  と置いた特別な場合は次式のように表わされる。

$$I(\alpha, \beta, \infty) = \int_0^\infty \xi^\alpha \exp(-\beta\xi^2) d\xi = \frac{\alpha-1}{2\beta} I(\alpha-2, \beta, \infty) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{(\alpha+1)/2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \dots\dots\dots (41)$$

(31) 式を (13) 式に代入すると, 平均損傷度の時間率, あるいは, 損傷速度の平均値が, (34) および (41) 式で定義した積分を用いて次式のように書ける。

$$\dot{E}\Psi(t) = E\dot{\Psi}(t) = \frac{4aN(t)}{\eta_F^a} (\sqrt{K\eta\eta})^a \left[ I\left(a-1, \frac{1}{2(1-\rho^2)}, \infty\right) + \frac{\sqrt{\pi}\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \cdot I\left(a, \frac{1}{2}, \frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right] \dots\dots\dots (42)$$

ここで,  $N(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \dots\dots\dots (43)$

(12) および (13) 式で定義した平均損傷  $E\Psi(T)$  とその時間率  $\dot{E}\Psi(T) = E\dot{\Psi}(T)$  は時間  $t$  における単時位間当りの平均全ピーク数  $N(t)$  と極値振巾確率密度関数  $p(\eta; t)$  を用いれば次式のように表わせる<sup>23)</sup>。

$$E\Psi(T) = \frac{4}{\eta_F^a} \int_0^T dt N(t) \int_0^\infty d\eta \eta^a p(\eta; t) \dots\dots\dots (44)$$

$$\dot{E}\Psi(T) = \frac{4}{\eta_F^a} N(T) \int_0^\infty d\eta \eta^a p(\eta; T) = E\dot{\Psi}(T) \dots\dots\dots (45)$$

(33) 式の  $\eta, \dot{\eta}$  に関する共分数マトリックス  $[K]$  を用いて,  $N(t)$  および  $p(\eta; t)$  は正規性の仮定のもとに次式のように書ける<sup>16), 24)</sup>。

$$N(t) = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}, \quad p(\eta; t) = \nu \tilde{p}(\nu\eta; t), \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{K\eta\eta}} \dots\dots\dots (46)$$

$$\tilde{p}(\zeta; t) = \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \left[ \zeta \exp\left(-\frac{\rho^2\zeta^2}{2(1-\rho^2)}\right) + \frac{\sqrt{\pi}\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} (\zeta^2-1) \operatorname{erf}\left(\frac{\rho\zeta}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right] \dots\dots (47)$$

(43), (46) および (47) 式の  $\rho$  および  $\lambda$  は (32) の第 1, 第 2 式で与えられている。

(47) 式を用いて, (44) および (45) 式の  $\bar{\eta}$  に関する積分,

$$J(t) = \int_0^{\infty} \bar{\eta}^a p(\bar{\eta}; t) d\bar{\eta} \dots\dots\dots(48)$$

を評価すると, (35) の漸化式を考慮して, (34) および (41) 式の積分によって次のように表わされる。

$$\begin{aligned} J(t) &= (\sqrt{K_{\eta\eta}})^a \left[ I\left(a+1, \frac{1}{2(1-\rho^2)}, \infty\right) + \frac{\sqrt{\pi\rho}}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \left\{ I\left(a+2, \frac{1}{2}, \frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - I\left(a, \frac{1}{2}, \frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right\} \right] \\ &= a(\sqrt{K_{\eta\eta}})^a \left[ I\left(a-1, \frac{1}{2(1-\rho^2)}, \infty\right) + \frac{\sqrt{\pi\rho}}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} I\left(a, \frac{1}{2}, \frac{\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right] \dots\dots(49) \end{aligned}$$

上式を (45) 式に代入して得られる平均損傷の時間率, あるいは, 損傷速度の平均値は, (42) 式に一致する。

(46) および (47) 式に基づく極値振巾確率密度関数は,  $M_{\bar{\eta}}=0$  の場合に,  $\bar{\eta}=M_{\bar{\eta}}$  を中立位置とする極値振巾の分布を, (29) および (30) 式に与えられる応答レベル超過期待回数の応答レベルに関する 1 階導関数を基礎にして,  $\bar{\eta}$  の小さい領域で確率が負になる性質に若干の修正を加えて導いたものであるが<sup>16)</sup>, それでもなお,  $|\rho|/\sqrt{2(1-\rho^2)}$  が大きい場合には,  $\bar{\eta}$  の小さい領域で確率が負になる<sup>24)</sup>。(44) および (45) 式と同等な方法は, すでに, J.B. Roberts によって非正常ランダム荷重による構造物の疲労の問題に用いられているが<sup>23)</sup>, ここでは, 修正の加えられていない無次元極値振巾確率密度関数,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\zeta; t) &= \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \left[ \zeta \exp\left(-\frac{\rho^2\zeta^2}{2(1-\rho^2)}\right) + \frac{\sqrt{\pi\rho}}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} (\zeta^2-1) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho\zeta}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) \right\} \right] \\ &\dots\dots\dots(50) \end{aligned}$$

が (47) 式の代りに用いられているので, したがって,  $\bar{\eta}$  の小さい領域での不適合性はさらに大きくなり, また, それによって評価した平均損傷速度  $\dot{E}\Psi(t) = E\dot{\Psi}(t)$  は, R.W. Lardner の方法に従って導いた結果 (42) 式にも一致しない。

(47) 式のもつ確率密度関数としての不適合性を除くため, 非正常確率過程 ( $\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$ ) を対象とする共分散マトリックス  $[K]$  および平均ベクトル  $\{M\}$ , すなわち,

$$\begin{aligned} [K] &= E \begin{pmatrix} \eta_a \\ \dot{\eta}_a \\ \ddot{\eta}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_a & \dot{\eta}_a & \ddot{\eta}_a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\eta\eta} & K_{\eta\dot{\eta}} & K_{\eta\ddot{\eta}} \\ K_{\dot{\eta}\eta} & K_{\dot{\eta}\dot{\eta}} & K_{\dot{\eta}\ddot{\eta}} \\ K_{\ddot{\eta}\eta} & K_{\ddot{\eta}\dot{\eta}} & K_{\ddot{\eta}\ddot{\eta}} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_a \\ \dot{\eta}_a \\ \ddot{\eta}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} \\ \{M\} &= E \begin{pmatrix} \eta \\ \dot{\eta} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\eta} \\ M_{\dot{\eta}} \\ M_{\ddot{\eta}} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(51) \end{aligned}$$

を基礎とし, 正規性の仮定のもとに, 時間  $t$  における単位時間当りの平均全ピーク数  $N(t)$  および,

$$\bar{\eta} = \frac{A_3^1 M_{\eta} + A_3^2 M_{\dot{\eta}} + A_3^3 M_{\ddot{\eta}}}{A_3^3} \dots\dots\dots(52)$$

を中立位置とする極値振巾確率密度関数  $p(\bar{\eta}; t)$  を求めると (46) および (47) 式に対応して, それぞれ, 次式を得る。

$$N(t) = \frac{1}{4\pi\nu^2} \left( 1 + \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \right) \frac{\sqrt{A_1^1}}{A_3^3}, \quad p(\bar{\eta}; t) = \nu \tilde{p}(\nu\bar{\eta}; t) \dots\dots\dots(53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\zeta; t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\sqrt{1+\kappa^2}-\kappa}}{\sqrt{1+\kappa^2}+\kappa} \exp\left(-\frac{(1+\kappa^2)\zeta^2}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\kappa\zeta}{\sqrt{1+\kappa^2}+\kappa} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\frac{\kappa\zeta}{\sqrt{2}} \right\} \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

ここで,



$$\nu = \sqrt{\frac{A_1^1 A_3^3 - (A_3^1)^2}{\det [K] A_3^3}}, \quad \kappa = \frac{A_3^1}{\sqrt{A_1^1 A_3^3 - (A_3^1)^2}} \quad \dots\dots\dots (55)$$

なお、(52)～(55) 式に含まれる  $A_j^i$  は (51) の第 1 式で与えられる共分散マトリックス  $[K]$  の随伴マトリックス  $[K]^A$  の  $i$  行  $j$  列要素を示し、 $[K]$  の要素を用いて次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A_1^1 &= K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} - (K_{\eta\eta})^2, & A_2^1 &= A_1^2 = K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} - K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} \\ A_3^1 &= A_1^3 = K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} - K_{\eta\eta} K_{\eta\eta}, & A_2^2 &= K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} - (K_{\eta\eta})^2 \\ A_3^2 &= A_2^3 = K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} - K_{\eta\eta} K_{\eta\eta}, & A_3^3 &= K_{\eta\eta} K_{\eta\eta} - (K_{\eta\eta})^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

なお、 $[K]$  および  $[K]^A$  さらに、 $[K]^A$  の随伴マトリックス  $[K]^{AA} = [K]^{A2}$  は、すべて positive definite であることが証明され、したがって、次式が成立つ。

$$\det [K] > 0, \quad A_i^i > 0, \quad A_i^i A_j^j - (A_j^i)^2 > 0 \quad \text{for } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad \dots\dots\dots (57)$$

(53) の第 2 式と (54) 式を用いて、(48) 式を評価すると、(34) および (41) 式の積分によって次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} J(t) &= \nu^{-a} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\kappa^2}-\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}+\kappa}} I\left(a, \frac{1+\kappa^2}{2}, \infty\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}+\kappa} \left\{ I\left(a+1, \frac{1}{2}, \infty\right) + I\left(a+1, \frac{1}{2}, \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

一般に非定常正規確率過程に属する靱性率応答  $\eta$  を対象として、ランダム低サイクル疲労による平均損傷速度、 $\dot{E}\Psi(t) = E\dot{\Psi}(t)$  は、(46) の第 1 式の単位時間当りの平均全ピーク数  $N(t)$  および (49) 式の  $J(t)$ 、あるいは、(53) の第 1 式の  $N(t)$  および (58) 式の  $J(t)$  を用いて、(45) 式に従つて次式で与えられる。

$$\dot{E}\Psi(t) = E\dot{\Psi}(t) = \frac{4N(t)J(t)}{\eta_F^a} \quad \dots\dots\dots (59)$$

とくに、靱性率応答  $\eta$  が定常正規確率過程に属する場合には、 $(\eta, \eta)$  の共分散マトリックスから評価した (46) 第 1 式の  $N(t)$  および (49) 式の  $J(t)$ 、したがって、(59) 式は次のような時間に関する定数に帰する。

$$N(t) \rightarrow N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{R_{\eta\eta}}{R_{\eta\eta}}}, \quad J(t) \rightarrow J = (\sqrt{2R_{\eta\eta}})^a \Gamma\left(\frac{a}{2} + 1\right) \quad \dots\dots\dots (60)$$

$$\dot{E}\Psi(t) = E\dot{\Psi}(t) \rightarrow \dot{E}\Psi = E\dot{\Psi} = \frac{\sqrt{2} a (\sqrt{2R_{\eta\eta}})^{a-1} \sqrt{R_{\eta\eta}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\pi \eta_F^a} \quad \dots\dots\dots (61)$$

また、定常正規確率過程の場合、(53) の第 1 式の  $N(t)$ 、および (58) 式の  $J(t)$  は次式に帰する。

$$N(t) \rightarrow N = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{R_{\eta\eta}}{R_{\eta\eta}}} \left( 1 + \frac{\sqrt{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}}}{R_{\eta\eta}} \right) \quad \dots\dots\dots (62)$$

$$\begin{aligned} J(t) \rightarrow J &= (\sqrt{R_{\eta\eta}})^a \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\sqrt{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}} - R_{\eta\eta}}{\sqrt{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}} + R_{\eta\eta}}} I\left(a, \frac{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}}{2\{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta} - (R_{\eta\eta})^2\}}, \infty\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_{\eta\eta}}{\sqrt{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}} + R_{\eta\eta}} \left\{ I\left(a+1, \frac{1}{2}, \infty\right) + I\left(a+1, \frac{1}{2}, \frac{R_{\eta\eta}}{\sqrt{2\{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta} - (R_{\eta\eta})^2\}}}\right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (63) \end{aligned}$$

ここで、通常そうであるように、靱性率応答  $\eta$  が狭帯域のスペクトル密度を有するとすれば、

$$\kappa \rightarrow \frac{R_{\eta\eta}}{\sqrt{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}} - (R_{\eta\eta})^2} \rightarrow \infty, \quad \text{i.e., } R_{\eta\eta} \approx \sqrt{R_{\eta\eta} R_{\eta\eta}} \quad \dots\dots\dots (64)$$

が成立し、したがって、(41) 式を考慮して、(62) 式および (63) 式は、それぞれ、(60) 式の第 1 式および第 2 式に一致する。

ここで、(60)～(64) 式の  $R_{\eta\eta}$ 、 $R_{\eta\eta}$  および  $R_{\eta\eta}$  は、それぞれ、定常過程における、 $\eta$ 、 $\eta$  および  $\eta$  の分散を示し、 $\eta$  の相関関数を  $R(\tau)$  とすれば、次式で与えられる。

$$R_{\eta\eta} = R(0), \quad R_{\eta\eta} = -R^{(2)}(0), \quad R_{\eta\eta} = R^{(4)}(0) \quad \dots\dots\dots (65)$$

上式で  $R^{(i)}(0)$  は  $\tau$  に関する  $R(\tau)$  の  $i$  階導関数の  $\tau=0$  における値を示す。

### 3. 終局耐震安全性

不規則な地震外乱群を受ける弾塑性構造物が、前節に述べたランダム低サイクル疲労によって損傷を蒙り、漸次、その終局変形能力に劣化を生ずる場合を対象として、時間の非増加関数として記述される安全の確率、いわゆる reliability function を解析する。

一般に、安全性の尺度で表わされた時間関数としての確率変数を非定常確率過程  $X(t)$  とし、有限時間領域、 $D=[t_0, t]$  の右端の時間  $t$  における安全の確率を  $R(t)$  とする。 $X(t)$  に関して、安全である領域を  $V$ 、破壊する領域を  $\bar{V}$  とすれば、 $R(t)$  は次式で定義される。

$$R(t) = P(X(\tau) \in V \text{ for all } \tau \in D), \quad D = [t_0, t] \quad \dots\dots\dots(66)$$

ここで、次式に示す条件附確率、

$$h(t)dt = P(X(\tau') \in \bar{V} \text{ at any } \tau' \in dD \mid X(\tau) \in V \text{ for all } \tau \in D) \quad dD = (t, t+dt) \quad \dots\dots\dots(67)$$

によって定義される破壊率  $h(t)$  を考えると、

$$-dR(t) = R(t)h(t)dt \quad \dots\dots\dots(68)$$

の関係から、 $T \geq t_0$  の任意の時間  $T$  に対して次式を得る<sup>(12)~(14), 25)</sup>。

$$R(T) = R(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^T h(t)dt\right) \quad \dots\dots\dots(69)$$

ランダム低サイクル疲労を対象とするとき、安全性の尺度で表わされる確率過程  $X(t)$  としては、(67) 式で定義される破壊率  $h(t)$  が求め易いように、ここでは、R.W. Lardner に従って、(7) 式で定義した残存準静的終局靱性率  $\eta_R$  と靱性率応答の絶対値  $|\eta|$  の差を採用する。

$$X(t) = \eta_R - |\eta| \quad \dots\dots\dots(70)$$

それで、上式に定義された非定常確率過程に関する安全の領域  $V$  および破壊の領域  $\bar{V}$  は、それぞれ、次のように与えられる。

$$V = (0, \infty), \quad \bar{V} = (-\infty, 0] \quad \dots\dots\dots(71)$$

ここで、有限時間領域  $D$  を  $[0, T]$  とすれば、安全の確率  $R(T)$  は (66), (70) および (71) 式によって次式で表わされる。

$$R(T) = P(|\eta(t)| < \eta_R(t) \text{ for all } 0 \leq t \leq T) \quad \dots\dots\dots(72)$$

また、 $h(t)dt$  は (67), (70) および (71) 式に従って、次式のように書ける。

$$h(t)dt = P(|\eta(\tau')| \geq \eta_R(\tau') \text{ at any } t < \tau' \leq t+dt \mid |\eta(\tau)| < \eta_R(\tau) \text{ for all } 0 \leq \tau \leq t) \quad \dots\dots\dots(73)$$

(73) 式の右辺の確率を厳密に求めることは困難であるが、対象とする確率変数  $X(t)$  について、破壊する事象  $X(t) \in \bar{V}$  が、構造物の安全性を論ずる限り、通常稀な事象に属すると考えられる領域に興味が集まること<sup>25)</sup>、および低サイクル疲労によって  $\eta_R$  が時間とともに単調に減少することによって、非定常確率過程  $X(t)$  に関する破壊率  $h(t)$  が時間の増加関数となる傾向が強いことを考慮して、(73) 式を近似的に次式によって評価する。

$$h(t)dt \approx P(|\eta(t+dt)| \geq \eta_R(t+dt) \cap |\eta(t)| < \eta_R(t)) \quad \dots\dots\dots(74)$$

上式で、 $\eta, \eta_R$  は互に独立ではない非定常確率過程であるが、いま、 $\eta_R(t)$  を  $\eta_r(t)$  に固定したときの条件附確率  $h(t; \eta_r)$  を考えると、 $(\eta, \eta)$  の同時確率密度関数、 $w(\eta_i, \eta_i; t)$  を用いて次式を得る。

$$h(t; \eta_r) = \int_{\eta_r}^{\infty} d\eta_i(\eta_i - \eta_r)w(\eta_r, \eta_i; t) - \int_{-\infty}^{-\eta_r} d\eta_i(\eta_i + \eta_r)w(-\eta_r, \eta_i; t) \quad \dots\dots\dots(75)$$

(7) および (8) 式と  $|\eta_i|$  が  $\eta_r$  の近傍にあることを考慮すれば、通常対象となる  $a$  の範囲では、 $\eta_r$  は近似的に次のように評価される。すなわち、

$$\eta_r = -\frac{\eta_F}{a}(C-\psi)^{(1-a)/a}\dot{\psi}, \quad \dot{\psi} = \frac{a}{\eta_F} \eta_r^{a-1} |\dot{\eta}_i| = \frac{a}{\eta_F} (C-\psi)^{(a-1)/a} |\dot{\eta}_i|$$

の両式から、次式を得る。

$$\dot{\eta}_r = -|\dot{\eta}_t| \dots\dots\dots(76)$$

(76) 式を (75) 式に代入し、(10) 式の記号を用いると次式が得られる。

$$h(t; \eta_r) = 2[I^+(\eta_r; t) + I^-(\eta_r; t)] = 2I(\eta_r; t) \dots\dots\dots(77)$$

ここで、

$$I(\eta; t) = I^+(\eta, t) + I^-(\eta; t), \quad \eta \geq 0 \dots\dots\dots(78)$$

は、時間  $t$  において、応答レベル  $\eta$  を内から外に単位時間当りに超える期待回数である。零平均値  $\{M\} = \{0\}$  の非定常確率過程では次式が成立つ。

$$I(\eta; t) = 2I^+(\eta, t) = 2I^-(\eta; t) \dots\dots\dots(79)$$

一般に、残存準静的終局靱性率  $\eta_R$  の確率密度関数、 $w_{\eta_R}(\eta_r; t)$  が (18) 式によって与えられるならば、(74) 式の破壊率  $h(t)$  は次式のように表わされる。

$$h(t) = 2 \int_0^\infty I(\eta_r; t) w_{\eta_R}(\eta_r; t) d\eta_r \dots\dots\dots(80)$$

それで、(72) 式で定義される安全の確率  $R(T)$  は、(69) 式によって次のように表現できる。

$$R(T) = R(0) \exp\left\{-2 \int_0^T dt \int_0^\infty d\eta_r I(\eta_r; t) w_{\eta_R}(\eta_r; t)\right\} \dots\dots\dots(81)$$

たとえば、特別な場合として、

$$w_G(c) = \delta(c-1), \quad w_{\eta_F}(\eta_f) = \delta(\eta_f - \eta_F) \dots\dots\dots(82)$$

$$w_\Psi(\psi; t) = \delta(\psi - E\Psi(t)) \quad \text{for } 0 \leq E\Psi(t) < 1 \\ = \delta(\psi - 1) \quad \text{for } 1 \leq E\Psi(t) \dots\dots\dots(83)$$

によって記述される場合を対象とすると、(81) 式の  $w_{\eta_R}(\eta_r; t)$  に (28) 式を代入して安全の確率  $R(T)$  は次式で評価される。

$$R(T) = R(0) \exp\left[-2 \left\{ \int_0^{\min(T, T^*)} dt I(\eta_F(1 - E\Psi(t))^{1/a}; t) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\min(T, T^*)}^T dt I(0; t) \right\} \right] \dots\dots\dots(84)$$

ここで、

$$E\Psi(T^*) = 1 \dots\dots\dots(85)$$

さらに特別に、(3) 式で  $a = \infty$  の場合はランダム低サイクル疲労が生じない場合に相当し、 $\eta_R$  の確率密度関数は、

$$w_{\eta_R}(\eta_r; t) = w_{\eta_F}(\eta_r) \dots\dots\dots(86)$$

与えられるが、この場合には、 $\eta_r = 0$  であるから、(86) 式を直接  $a$  の比較的小さい場合に成立する (81) 式に代入することはできず、(75) 式から、

$$h(t; \eta_r) = I(\eta_r; t) \dots\dots\dots(87)$$

が得られ、したがって、安全の確率  $R(T)$  は次式で与えられる。

$$R(T) = R(0) \exp\left\{-\int_0^T dt \int_0^\infty d\eta_r I(\eta_r; t) w_{\eta_F}(\eta_r)\right\} \dots\dots\dots(88)$$

とくに、準静的終局靱性率  $\eta_F$  が確定量の場合には、(21) 式を (88) 式に代入して次式を得る。

$$R(T) = R(0) \exp\left\{-\int_0^T I(\eta_F; t) dt\right\} \dots\dots\dots(89)$$

非定常確率過程  $(\eta, \dot{\eta})$  が零平均値の正規過程である場合には、(81)、(84)、(88) あるいは (89) 式の  $I(\eta; t)$  は (29) および (30) 式と (78) あるいは (79) 式によって次式のように書ける。

$$I(\eta; t) = \frac{\lambda}{\pi} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2K_{\eta\eta}}\right) \left[ \sqrt{1 - \rho^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2 \eta^2}{2(1 - \rho^2)K_{\eta\eta}}\right\} \right. \\ \left. + \rho \eta \sqrt{\frac{\pi}{2K_{\eta\eta}}} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho \eta}{\sqrt{2(1 - \rho^2)K_{\eta\eta}}}\right) \right\} \right] \dots\dots\dots(90)$$

上式の  $\rho, \lambda$  入等は (32) および (33) 式に定義されている。

ランダム低サイクル疲労によって残存準静的終局靱性率  $\eta_R$  に劣化を生ずる場合の安全の確率  $R(T)$  は、一般的に (81) 式で表現されるが、ここに含まれる  $\eta_R$  の確率密度関数  $w_{\eta_R}(\eta_r; t)$  は、準静的終局靱性率  $\eta_F$  の確率密度関数  $w_{\eta_F}(\eta_f)$ 、損傷度上限  $C$  の確率密度関数  $w_C(c)$  および損傷度  $\Psi(t)$  の確率密度関数  $w_\Psi(\psi; t)$  を用いて、一般的には、(17) および (18) 式に従って評価しなければならない。ここで、損傷度  $\Psi(t)$  は、一般的には非定常確率過程に属する靱性率応答  $\eta$  の関数として定まる非定常確率過程であり、したがって、前節で述べた方法に従って  $w_\Psi(\psi; t)$  を定めるためには、まず、(33) 式あるいは (51) 式で定義される靱性率応答  $\eta$  に関する共分散マトリックス  $[K]$  および平均ベクトル  $\{M\}$  が、確率統計的な非定常非線形地震応答解析によって評価されねばならない。かかる目的のために、安定な bi-linear 形履歴特性を有する多自由度弾塑性系を対象として、その非定常ランダム応答の平均ベクトルと共分散マトリックスの等価線形化解法を、すでに、精しく論じたが<sup>16)</sup>、ここでは、Fig. 1 に示すような一般的な履歴特性を対象と

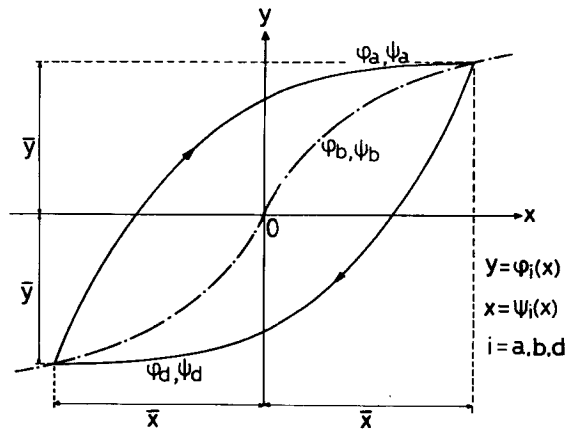


Fig. 1 Curved hysteresis loop and backbone curve.

して、等価線形化解法の概要を説明する。ただし、履歴特性は安定な型とし、低サイクル疲労による履歴特性の劣化はないものとする。ここで、 $x$  を変位、 $y$  を復元力として、任意の分枝における  $x$  と  $y$  の関係が次式で与えられるとする。

$$y = \phi_i(x), \quad x = \psi_i(y), \quad i = a, b, d \quad \dots\dots\dots(91)$$

ここで、下添字の  $a, b, d$  は、それぞれ、上昇曲線、処女曲線、下降曲線を示す。閉じた履歴曲線を対象とし、 $\bar{x}, \bar{y}$  を、それぞれ、変位および復元力の振巾として、 $x = \bar{x} \cos \omega t$  と置いて、slowly varying の仮定のもとに、1周期についての非線形復元力と線形特性の2乗平均誤差を最小にするように、剛性  $k_0$  と粘性減衰係数  $c_0$  を定めると次式を得る。

$$\pi k_0 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \int_{-1}^1 \{ \Phi_a(x\xi) + \Phi_d(x\xi) \} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \quad \dots\dots\dots(92)$$

$$\pi \bar{\omega} c_0 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \int_{-1}^1 \{ \Phi_a(x\xi) - \Phi_d(x\xi) \} d\xi \quad \dots\dots\dots(93)$$

または、

$$\pi k_0 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \int_{-1}^1 \{ \sqrt{1-\Psi_a^2(\bar{y}\xi)} + \sqrt{1-\Psi_d^2(\bar{y}\xi)} \} d\xi \quad \dots\dots\dots(94)$$

$$\pi \bar{\omega} c_0 \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \int_{-1}^1 \{ \Psi_d(\bar{y}\xi) - \Psi_a(\bar{y}\xi) \} d\xi \quad \dots\dots\dots(95)$$

(92) および (93) 式において、 $\Phi_a, \Phi_d$  および  $\Psi_a, \Psi_d$  は次式で定義する。

$$\Phi_a(x) = \varphi_a(x)/\bar{y}, \quad \Phi_d(x) = \varphi_d(x)/\bar{y}, \quad \bar{y} = \varphi_a(\bar{x}) = \varphi_d(\bar{x}) \quad \dots\dots\dots(96)$$

$$\Psi_a(y) = \psi_a(y)/\bar{x}, \quad \Psi_d(y) = \psi_d(y)/\bar{x}, \quad \bar{x} = \psi_a(\bar{y}) = \psi_d(\bar{y}) \quad \dots\dots\dots(97)$$

とくに、原点に関して対称な双曲線  $y = \varphi_b(x)$  あるいは  $x = \psi_b(y)$  が存在し、 $(x_0, y_0)$  から始まる分枝が

$$\frac{y-y_0}{2} = \varphi_b\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \quad \text{or} \quad \frac{x-x_0}{2} = \psi_b\left(\frac{y-y_0}{2}\right) \quad \dots\dots\dots(98)$$

で記述される場合には次式が成立つ。

$$\frac{\pi k_0}{4} \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \int_0^1 \Phi_b(\bar{x}\xi) \frac{2\xi-1}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} d\xi \quad \dots\dots\dots(99)$$

$$\frac{\pi \bar{\omega} c_0}{4} \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 2 \int_0^1 \Phi_b(\bar{x}\xi) d\xi - 1 \quad \dots\dots\dots(100)$$

または、

$$\frac{\pi k_0}{4} \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 2 \int_0^1 \sqrt{\Psi_b(\bar{y}\xi)} \sqrt{1-\Psi_b(\bar{y}\xi)} d\xi \quad \dots\dots\dots(101)$$

$$\frac{\pi \bar{\omega} c_0}{4} \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = 1 - 2 \int_0^1 \Psi_b(\bar{y}\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots(102)$$

(99)~(102) 式の  $\Phi_b$  および  $\Psi_b$  は次式で定義する。

$$\Phi_b(x) = \varphi_b(x)/\bar{y}, \quad \bar{y} = \varphi_b(\bar{x}) \quad \dots\dots\dots(103)$$

$$\Psi_b(y) = \psi_b(y)/\bar{x}, \quad \bar{x} = \psi_b(\bar{y}) \quad \dots\dots\dots(104)$$

たとえば、bi-linear 形履歴特性に対しては、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_b(x) &= Kx/\bar{y} && \text{for } 0 \leq x < d \\ &= K\{d+r(x-d)\}/\bar{y} && \text{for } d \leq x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(105)$$

ここで、 $K, r, d$  は、それぞれ、第1分枝剛性、第2第1分枝剛性比、弾性限変位を示す。靱性率振巾  $\bar{\eta}$  を

$$\bar{\eta} = \bar{x}/d \quad \dots\dots\dots(106)$$

によって定義し、(99) および (100) 式によって、 $k_0$  および  $c_0$  を評価すると次式を得る。

$$\kappa_0(\bar{\eta}) = \frac{k_0}{K} = \frac{2(1-r)(2-\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}-1}}{\pi\bar{\eta}^2} + \frac{1-r}{\pi} \cos^{-1}\left(1 - \frac{2}{\bar{\eta}}\right) + r$$

$$d_0(\bar{\eta}, \bar{\omega}) = \frac{c_0}{K} = \frac{4(1-r)(\bar{\eta}-1)}{\pi\bar{\omega}\bar{\eta}^2} \quad \text{for } 1 \leq \bar{\eta} \quad \dots\dots\dots(107)$$

$$\kappa_0(\bar{\eta}) = \frac{k_0}{K} = 1, \quad d_0(\bar{\eta}, \bar{\omega}) = \frac{c_0}{K} = 0 \quad \text{for } 0 \leq \bar{\eta} < 1 \quad \dots\dots\dots(108)$$

つぎに、(46) 第1式、あるいは、(53) の第1式に与えられた平均全ピーク数  $N(t)$  を用いて、時間  $t$  における平均周波数  $\bar{\omega}(t)$  を次式で定義する。

$$\bar{\omega}(t) = 2\pi N(t) \quad \dots\dots\dots(109)$$

この量と (46) の第2式と (47) 式、あるいは、(53) の第2式と (54) 式に与えられた極値振巾確率密度関数  $p(\bar{\eta}; t)$  を用いて、確率統計的な等価剛性  $k_e(t)$  と等価粘性減衰係数  $c_e(t)$  が、時間関数として、次式によって定まる。

$$\left. \begin{aligned} k_e(t) &= \int_0^\infty k_0(\bar{\eta}) p(\bar{\eta}; t) d\bar{\eta} \\ c_e(t) &= \int_0^\infty c_0(\bar{\eta}, \bar{\omega}) p(\bar{\eta}; t) d\bar{\eta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(110)$$

上式の  $k_0(\bar{\eta}), c_0(\bar{\eta}, \bar{\omega})$  は、Fig. 1 に示すような一般の履歴特性に対しては、弾性限変位に関する適当な規準量  $d$  を選んで靱性率  $\bar{\eta}$  を (106) 式に従って定義し、(92)~(95) 式、あるいは、(99)~(102) 式で定まる  $k_0$  および  $c_0$  を、それぞれ、 $\bar{\eta}$  および  $\bar{\eta}$  と  $\bar{\omega}$  によって表現したものである。

かくして、初期条件から始めて、step by step に非線形多自由度系各部の等価線形係数を (110) 式に従

って定め、それらによって構成される等価線形動力学系を対象として微小時間区間における共分散マトリックスの増分および平均ベクトルの増分が順次求まり、したがってまた、平均周波数  $\omega(t)$  および極値振巾確率密度関数が順次評価される<sup>16)</sup>。

最後に、安定な bi-linear 形履歴特性  $\Phi^{BP}(x; K, d, r)$  を有する 1 自由度弾塑性動力学系が、不規則な擬定常加速度外乱  $A(t)W(t)$  を受けてランダム低サイクル疲労を生ずる場合の安全の確率の数値解析例を示す。 $M$  を質量、 $\Omega_0$  を固有周波数として

$$\eta = \frac{x}{d}, \quad \tau = \sqrt{\frac{K}{M}}t = \Omega_0 t \quad \dots\dots\dots(111)$$

の変数変換を行なうと、韌性率  $\eta$  に関する次の無次元運動方程式を得る。

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\eta + 2h \frac{d}{d\tau}\eta + \phi^{BP}(\eta; r) = -a(\tau)w(\tau) \quad \dots\dots\dots(112)$$

上式で、 $\phi^{BP}(\eta; r)$  は初期剛性 1、弾性限変位 1、第 2 第 1 剛性比  $r$  の bi-linear 形履歴特性関数であり、 $h$  は臨界減衰比、 $a(\tau), w(\tau)$  は擬定常外乱の抱絡線  $A(t)$  と定常確率過程  $W(t)$  と次式によって結ばれる。

$$a(\tau) = A\left(\sqrt{\frac{M}{K}}\tau\right), \quad w(\tau) = W\left(\sqrt{\frac{M}{K}}\tau\right), \quad \max_{\tau} |a(\tau)| = \max_t |A(t)| = 1 \quad \dots\dots\dots(113)$$

(107) および(108) 式の等価線形係数を用いて、(112) 式は次式のように表わされる<sup>26)</sup>。

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\eta + 2h_e(\tau)w_e(\tau)\frac{d}{d\tau}\eta + w_e^2(\tau)\eta = -a(\tau)w(\tau) \quad \dots\dots\dots(114)$$

ここで、

$$w_e(\tau) = \sqrt{\kappa_e(\tau)}, \quad h_e(\tau) = \frac{2h + d_e(\tau)}{2\sqrt{\kappa_e(\tau)}}; \quad \omega_e(0) = 1, \quad h_e(0) = h \quad \dots\dots\dots(115)$$

とくに、擬定常外乱の抱絡線  $A(t)$  を step function, 定常確率過程  $W(t)$  をサイクル当りのスペクトル密度  $S_0$  の white Gaussian noise とすると、 $a(\tau)$  は step function,  $w(\tau)$  は無次元スペクトル密度  $s_0$  の white noise となる。弾性限強度  $B = Kd$  に対応するベース・シャー係数を  $c_B, g$  を重力加速度とすると、無次元および有次元のスペクトル密度のレベルは次式で関係付けられる。

$$c_B = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{\Omega_0 S_0}{s_0}} \quad \dots\dots\dots(116)$$

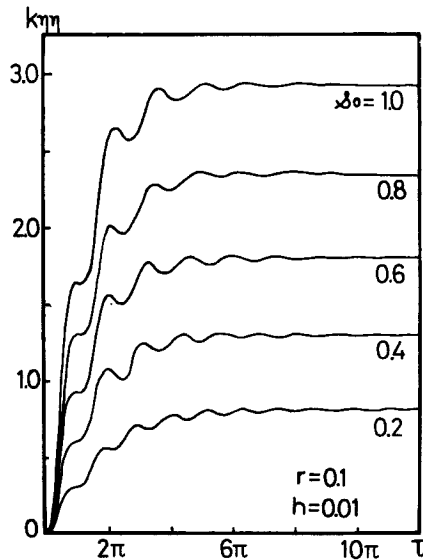


Fig. 2 Variance of the ductility ratio.

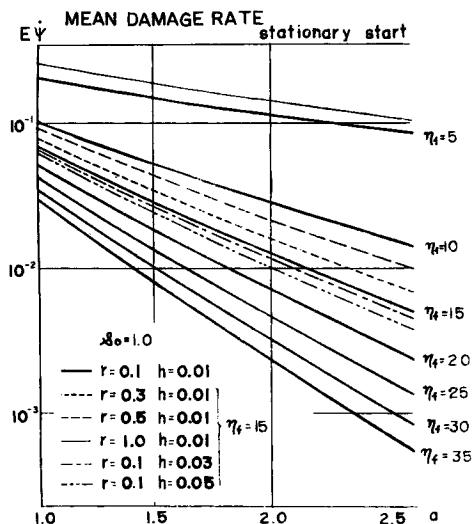


Fig. 3 Mean damage rate in the stationary random process.

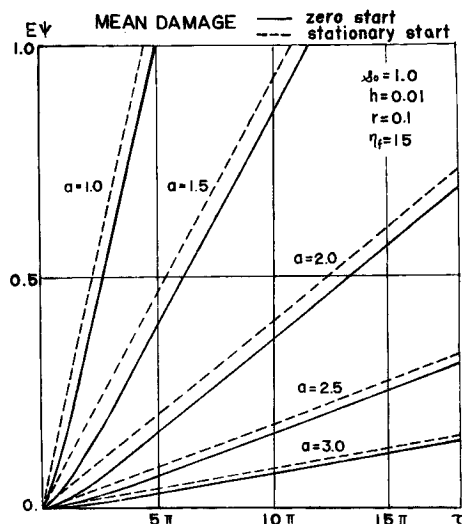


Fig. 4 Comparison of the mean damage between stationary and non-stationary random processes.

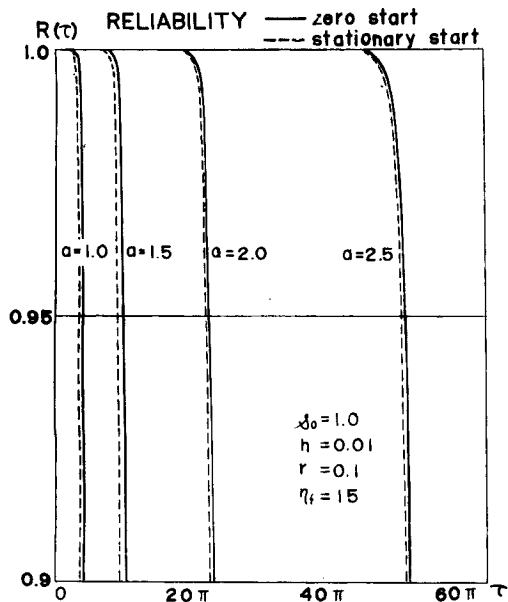


Fig. 5 Comparison of the reliability functions between stationary and non-stationary random processes.

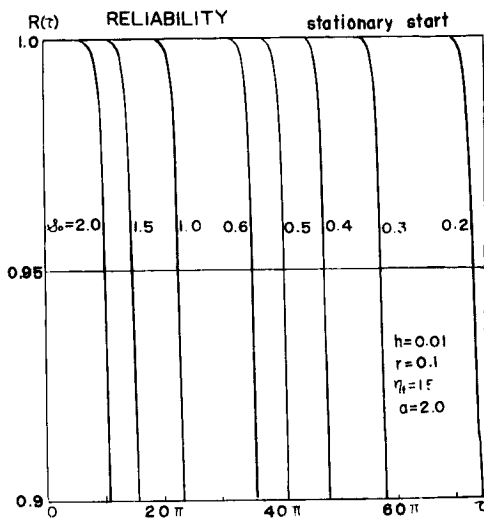


Fig. 6 Effect of the level of spectral density on the reliability function in the stationary random process.

Fig. 2 は (46) および (47) 式に基づく等価線形化解法によって得た靱性率応答の非定常状態における分散  $K_{\eta\eta}$  を示す<sup>27), 28)</sup>。解析の対象とした 1 自由度弾塑性動力学系の無次元固有周期は  $2\pi$  であり, Fig. 2 から,  $h=0.01$  の場合でも, 履歴によるエネルギー消散によって等価粘性減衰は増加し, 系の固有周期の 2 ~ 3 倍の継続時間の擬定常外乱によりほとんど定常状態に達することが判る。一般に,  $\omega_s(\tau)$  の劣化は少ないが,  $h_s(\tau)$  は  $s_0=0.2$  の場合でも 0.07~0.08 に達することが判っている<sup>29)</sup>。

(33) 第 1 式の靱性率応答に関する共分散マトリックス  $[K]$  が, たとえば, 等価線形化解法により求められると, 平均損傷度  $E\Psi(\tau)$  やその時間率  $\dot{E}\Psi(\tau)=E\dot{\Psi}(\tau)$ , さらに安全の確率  $R(\tau)$  が計算される<sup>29)</sup>。

Fig. 3 は, 靱性率応答が定常確率過程に属する場合の平均損傷速度  $E\dot{\Psi}(\tau)$  を示す。低サイクル疲労の型を示す指数  $a$  と準静的終局靱性率  $\eta_F$  の平均損傷速度  $E\dot{\Psi}(\tau)$  におよぼす影響が著しいことを表わしているが,  $a$  が小さくなって低サイクル疲労が強くなると  $\eta_F$  の効果は減少する傾向にあることを示している。

Fig. 4 は, step function を抱絡線とする擬定常外乱を静止の初期条件から受ける場合の非定常過程と対応する定常確率過程における平均損傷度  $E\Psi(\tau)$  を示したものである。過渡状態における損傷度の差が当然表われるが, 固有周期の数倍の時間の経過後は, ほとんど平均損傷速度  $E\dot{\Psi}(\tau)$  は一定値を取ることが判る。また, この図は低サイクル疲労が問題となる場合には, 継続時間を始めとする外乱のパターンが安全上重大な影響を持つことを示している。

Fig. 5 は (82) および (83) 式の条件のもとに (84) 式によって評価した安全の確率  $R(\tau)$  を示し, Fig. 4 と同様, 非定常確率過程と定常確率過程に対して,  $a$  の影響を比較している。非定常と定常の間に顕著な差は認められないが, 指数  $a$  の影響は極めて大きいことが判る。共通的に顕著な特徴は, 安全の破率  $R(\tau)$  が, ある外乱継続時間後急激に低下することである。この臨界的な外乱継続時間の存在は, 低サイクル疲労に固有な性質と考えられ, 構造物の耐震安全性を論ずる際, 重要な目安を提供するものと思われる。

Fig. 6 は Fig. 5 と同様 (84) 式を用いて定常確率過程の場合の安全の確率  $R(\tau)$  を計算し, 無次元スペクトル密度のレベル  $s_0$  の影響を示したものである。 $R(\tau)$  が急激に低下する無次元臨界継続時間は  $s_0$  の顕著な影響を受けるが, このことは耐震設計上重要な意味があると思われる。たとえば, 地震加速度外乱の有次元のスペクトル密度レベル  $S_0$  と継続時間  $T_d$  が与えられたとき,  $T_d$  と構造物の基本固有周期  $T_0=2\pi/\Omega_0$  の比の  $2\pi$  倍を無次元臨界継続時間とするような  $s_0$  が Fig. 6 から定まり, (116) 式によって臨界的なベースシャー係数が定まることになる。

#### 4. む す び

建築構造物の終局耐震安全性を定量的な観点から明らかにし, 合理的な構造物の耐震設計法を導くためには, 設計の対象とすべき地震外乱群の本来的な非予測性と時間関数としてのランダム性の他に, 設計施工の過程を経て実現する構造物の持つ動的性質のパラツキ, とくに終局状態を規定する諸パラメータのパラツキを考慮して構造物の終局耐震安全性を確率統計的に評価する必要がある。また, 地震時の構造物の終局状態を適確に判定する動的破壊の尺度が導入され, ことによって耐震安全性が明らかにされねばならない。ここでは, このような立場から, 地震時の動的破壊の一般的尺度として, 低サイクル疲労破壊の規範を採り上げ, また, 種々の不規則要因の安全性への影響を総合して単一の確率統計量として表現しうる安全の確率によって, ランダム低サイクル疲労を受ける構造物の耐震安全性の定量化の方法を論じた。建築構造物の耐震性という大きな問題の中で, たんに, 一つの論点について述べたに過ぎないが, ランダム低サイクル疲労が地震外乱のパターンと関連して構造物の終局耐震安全の確率に顕著な影響を有し, それから得られる知見が耐震設計上重要な意味を持つであろうことをある程度明らかにしえたと思う。

最後に, 常に御指導戴く小堀鐸二先生に深く感謝の念を捧げるとともに, この論文を作製するに当って, 御討議, 御協力戴いた井上豊助教授と浅野幸一郎, 鈴木祥之両氏に御礼申し上げます。



## 参 考 文 献

- 1) Housner, G.W., R.R. Martel, and J.L. Alford: Spectrum Analysis of Strong Motion Earthquakes, Bull. of S.S.A., Vol. 43, No. 2, April, 1953, pp. 97~119.
- 2) Tanabashi, R.: On the Resistance of Structures to Earthquake Shocks, Mem. of the College of Engrg., Kyoto Univ., Vol. IX, No. 4, 1937, pp. 191~205.
- 3) Veletsos, A.S., and N.M. Newmark: Effect of Inelastic Behavior on the Response of Simple Systems to Earthquake Motions, Proc. of the 2nd W.C.E.E., 1960, pp. 895~912.
- 4) 棚橋 諒・小堀鐸二・南井良一郎：構造物の動的耐震設計法と地震レスポンス，京大防災研究所年報，第5号B，昭37. 3，pp. 1~32.
- 5) Kobori, T. and R. Minai: Aseismic Design Method of Elasto-Plastic Building Structures, Bull. of Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., No. 68, March, 1964, pp. 1~64.
- 6) 小堀鐸二・南井良一郎・井上 豊・久徳敏治：弾塑性多層構造物の地震応答解析と耐震設計資料の誘導，京大防災研究所年報，第9号，昭41. 3，pp. 137~164.
- 7) Popov, E.P., and R.B. Pinkney; Reliability of Steel Beam-to-Column Connections under Cyclic Loading, Proc. of the 4th W.C.E.E., 1969, B-3, pp. 15~30.
- 8) 鷲尾健三・三井宜之：鋼管十字型接合部の高応力疲労実験研究，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），〈構造系〉，昭43. 10，pp. 933~934.
- 9) 棚橋 諒・横尾義貫・若林 実・中村恒善・国枝治郎・松永裕之・久保田俊彦：H型鋼の定軸圧下繰返両振塑性曲げ試験（その1，II断面材），（その2，H100×100），日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），〈構造系〉，昭43. 10，pp. 935~938.
- 10) 棚橋 諒・横尾義貫・若林 実・中村恒善・国枝治郎・松永裕之・久保田俊彦：溶接構造H型アルミニウム合金材の両振曲げ塑性疲労，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），〈構造系〉，昭43. 10，pp. 939~940.
- 11) 水畑耕治：地震荷重をうける金属構造物の低サイクル疲労に関する一考察，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），〈構造系〉，昭43. 10，pp. 919~920.
- 12) Freudenthal, A.M.: Safety, Reliability and Structural Design, Proc. of A.S.C.E., Journal of Structural Div., Vol. 87, No. ST3, March, 1961, pp. 1-16.
- 13) Barlow, R.E., and F. Proschan: Mathematical Theory of Reliability, John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- 14) Goto, H. and H. Kameda: A Statistical Study of the Maximum Ground Motion in Strong Earthquakes, Mem. of Faculty of Engng., Kyoto Univ., Vol. 29, Part 4, Oct., 1967, pp. 389~419.
- 15) 後藤尚男・亀田弘行：構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について，京大防災研究所年報，第11号A，昭43. 3，pp. 239~253.
- 16) 小堀鐸二・南井良一郎：非定常ランダム応答の等価線形化解法，京大防災研究所年報，第10号A，昭42. 3，pp. 235~260.
- 17) Coffin Jr, L.P.: A Study of the Effects of Cyclic Thermal Stresses on a Ductile Metal, Trans. of A.S.M.E., Vol. 76, 1954, pp. 931~950.
- 18) Ohji, K., W.R. Miller and J. Marin: Cumulative Damage and Effect of Mean Strain in Low-Cycle Fatigue of a 2024-T351 Aluminum Alloy, Journal of Basic Engrg., Vol. 88, Dec., 1966, pp. 801~810.
- 19) Palmgren, A.: Die Lebensdauer von Kugellagern, Ver. deut. Ingr., Bd. 68, 1928, s. 339~341.
- 20) Miner, M.A.: Cumulative Damage in Fatigue, Journal of Appl. Mech., Vol. 12, 1945, pp.

A159~A164.

- 21) Lardner, R.W.: A Theory of Random Fatigue, *Journal of Mech. Phys. Solids*, Vol. 15, 1967, pp. 205~221.
- 22) 南井良一郎: 擬定常外乱による統計的線型非定常応答のレベル超過回数について, 日本建築学会論文報告集, 第76号, 昭37. 9, p. 80.
- 23) Roberts, J.B.: Structural Fatigue under Non-Stationary Random Loading, *Journal of Mech. Engrg. Science*, Vol. 8, 1966, pp. 392~405.
- 24) Kobori, T. and R. Minai: Response Spectra of Quasi-Stationary Random Excitations, *Bull. of Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ.*, Vol. 17, Part 3, March, 1968, pp. 45~94.
- 25) Rice, J.R. and F.P. Bear: First-Occurrence Time of High-Level Crossings in a Continuous Random Process, *Journal of Acoust. Society of America*, Vol. 39, No. 2, 1966, pp. 323~335.
- 26) 小堀鐸二・南井良一郎・浅野幸一郎: 弾塑性構造物の非定常ランダム応答 (等価線形化による数値計算法), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), <構造系>, 昭43. 10, pp. 425~426.
- 27) 小堀鐸二・南井良一郎・浅野幸一郎: 履歴特性をもつ非線形系の非定常ランダム応答, 第18回応用力学連合講演会論文抄録集, 昭43. 11, pp. 33~34.
- 28) 小堀鐸二・南井良一郎・浅野幸一郎: 弾塑性構造物の非定常ランダム応答一等価線形化による数値計算結果—日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), <構造系>, 昭44. 8, pp. 691~692.
- 29) 小堀鐸二・南井良一郎・鈴木祥之: 構造物の終局耐震性の Reliability に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), <構造系>, 昭44. 8, pp. 633~634.