

土砂を多量に含む流れの漸変流について（序報）

矢野 勝正・大同 淳之

ON THE SURFACE PROFILES OF A MUD FLOW FOR GRADUALLY VARIED FLOW IN A OPEN CHANNEL (PRELIMINARY REPORT)

By *Katsumasa YANO* and *Atsuyuki DAIDO*

Synopsis

This paper deals with the surface profiles of a mud flow for gradually varied flow in an open channel.

The observed surface profiles of the mud flow is steeper in spite of consideration for friction increase than a profile which is calculated by ordinarily used equation of gradually varied flow.

In this paper authors introduced a deviator normal stress due to a visco-elasticity character of fluid into the equation of gradually varied flow and compared a gradient due to that stress with the experimental results.

1. は し が き

この研究は、土砂を多量に含む流れ（以下これを土砂流と呼ぶ）が、河床勾配の急変点あるいは水路構造物の背後においてどのような流動勾配を形成するかを研究したものである。

豪雨にともなう、溪流に発生する土砂の異常流出を防ぐためには、発生防止と流下のせき止めが考えられる。発生に対する対策は、発生機構が十分に明らかでない現在、これに完全を期待することはむづかしい。次善の方法として流下のせき止めについて考察してみよう。土砂流の流下をせき止める工法として考えられる第2の方法は、砂防ダムのようなせきによるせき止めである。せきのせき止め能力は、せきの推砂容量によって決められる。砂防ダムによるせき止めは、ダムが空虚のときはその効果が大いだが、土砂流の発生する地域では一般に平年流砂量が大い地域が多いため、砂防ダムは築造後数年をまたずに満砂し、ダムの貯砂能力を期待することは一般に困難で、ダムによるせき止め能力としては、満砂後のダムの貯溜効果にたよらざるを得ない。

土砂流においては、一般に掃流型式によって運ばれた土砂による推砂勾配より急な流動勾配を形成することが予想され、流動が停止したのちでも、全量が流出してしまわずに、かなりの量がそのままそこに残留することが予想される。そこでこのような流れが発生した場合、これをできるだけ溪流にとどめて少なくとも本川への流出を防ぐためには、床固群を作って個々の床固に一時的に貯溜される量の合計が発生した土量を上廻るようにすればよい。

さて、この床固による土砂流のせき止め量を求めるには、このような流れの流動形状をしり、ダムの堆砂形状との差を求めればよい。この流動形状を知るために、二、三の実験を行ない、その結果について若干の考察を試みた。この実験においては、対象とする土砂流を、粘土を多量に含む流体に限定し、その流動が

粘弾性的な性質をもつ場合について行なったもので、流体の物質常数決定の精度上から以下の実験においては粘土のみを混合した流体で行なったが、礫を含んだ場合も、礫を含んだ場合についての常数を用いることによって同様の取扱いが可能なものと考えている。

2. 実験の範囲と結果の概略

実験に用いた流体は、中央粒径 $d_{50}=3.4 \times 10^{-3}$ mm, 粒径分布の標準偏差 $\sigma_{\phi}=2.96$, 比重 2.703 の粘土を混入したもので、混合比は重量で水 1 に対して粘土 0.85 から 0.97, 混合液の密度 ρ は 1.405~1.450 の範囲である。この流体は従来の研究¹⁾によるといわれるビンガム流体の性質を示し、その粘度 μ_B とせん断降伏値 τ_v は 20°C のとき、Fig. 1 に示すような値を示す。ただしこの値は温度、または媒質である水の性質が変わると変化するので、実験結果の解析にあたってはその都度実測した値を用いた。粘度およびせん断降伏値 τ_v の測定は共軸円筒型粘度計で行なった。

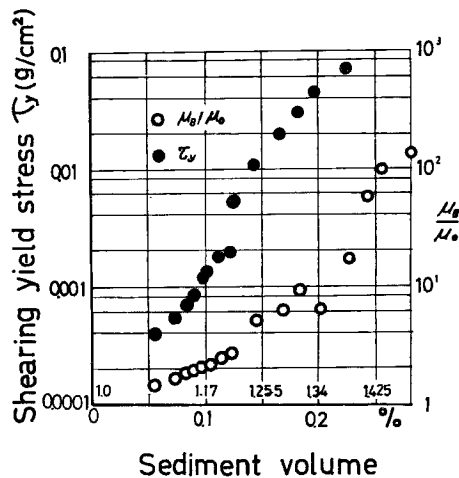


Fig. 1 Relation between shearing yield stress or relative viscosity and sediment volume.

用いた水路は幅 0.2 m, 深さ 0.5 m, 長さ 20 m の循環式鋼製水路で、流量は 1.7 l/sec から 4.2 l/sec で、流量の測定はマスで測定した。水路の勾配は 1/100 から 1/20 である。流動形状の測定は 0.2 m ないし 0.5 m 毎に point gage を用いて測定した。

実験結果の 1 例を Fig. 2 に示す。Fig. 2 は下流端にせきを設けてせき上げたもので、水路勾配は 1/30 と 1/20 である。Fig. の上流端における Reynolds 数は、従来のわれわれの研究にしたがって $Re_B = \frac{u_m R}{\nu} \cdot \beta$, $\beta = (3/2) \cdot F \cdot \{a'^2 - a'^3/3\}$ を用いて表わすと (i), (ii) はそれぞれ 4.84 および 0.518 で層流の領域に属する。Reynolds 数は下流へ行くにしたがって低下し、せきの点では (ii) の場合で 0.297 程度である。次節において考察した Froude 数は (i), (ii) それぞれ 0.385, 0.345 であって、ニュートン流体の定義では常流の領域に属する。

また Fig. 3 は水路下流端が段落ちの場合で流動形状は低下曲線を示す。 $i=1/30$ のときには等流が形成されたが、勾配がそれよりゆるい場合にはいずれも顕著な低下曲線が形成される。従来ニュートン流体の低下背水の領域は小さいと云われているが、この場合には水路全長にわたって不等流の状態が生じることが測定された。Fig. 4 に一般に定義される Reynolds 数 $u_m R/\nu$ に乗ぜられたビンガム流体に対する補正係数 β と水深 h に対してせん断降伏値 τ_v 以上のせん断力を受けてせん断流動を生じる限界の底からの高さ z_y の割合 a' の関係を示す。

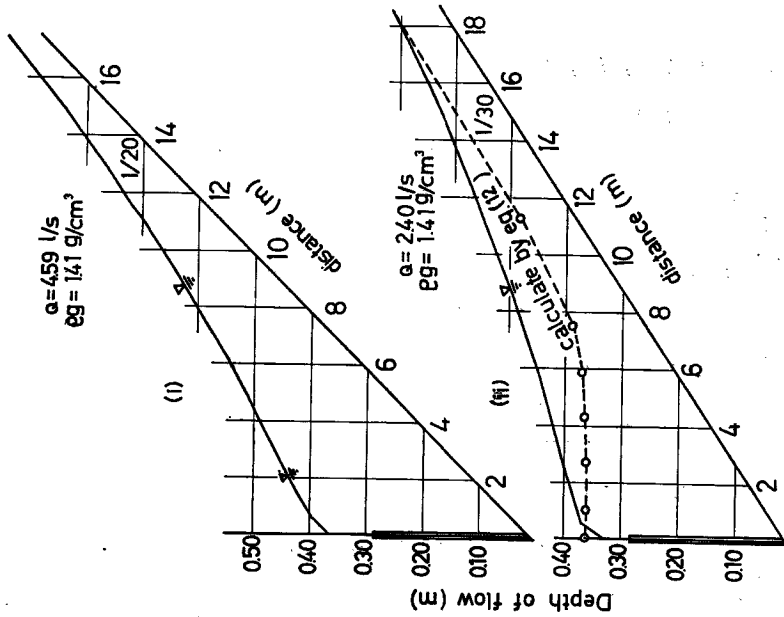


Fig. 2 Surface profiles of mud flow in experimental flume. (back water curve)

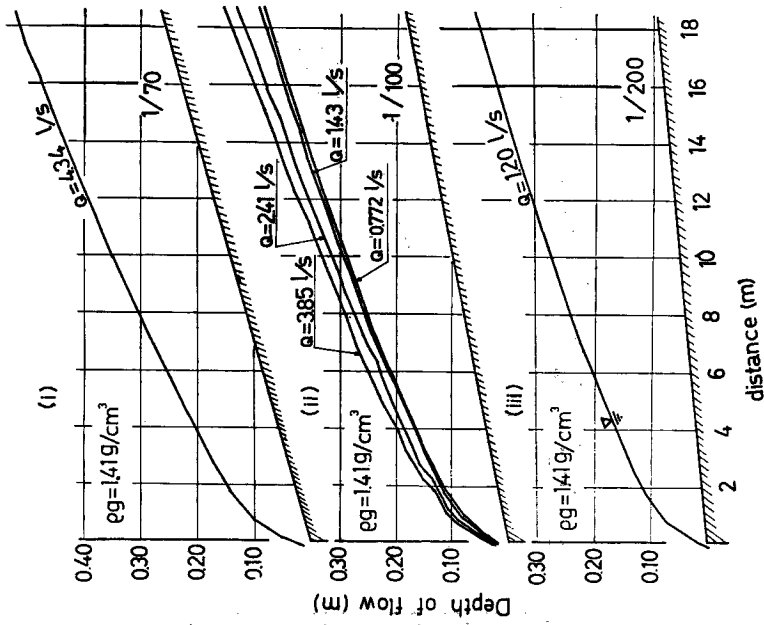


Fig. 3 Surface profiles of mud flow in experimental flume. (draw down curve)

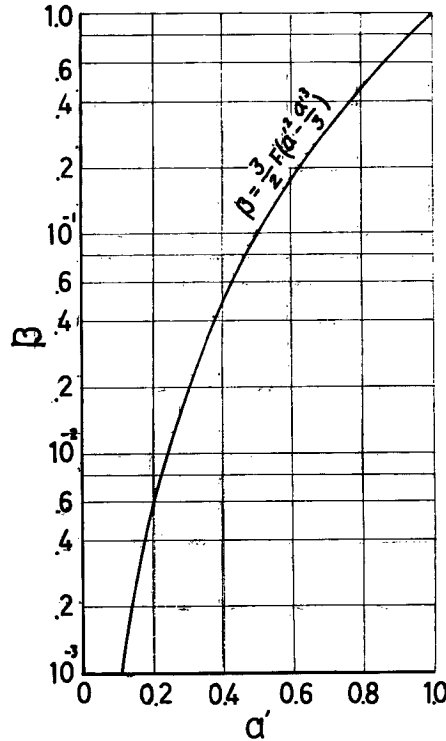


Fig. 4 Relation between Reynolds correction factor β and α' .

3. 実験結果に対する考察

(A) 従来の不等流式の適用

こことりあつかう流体は、我々の従来の研究²⁾によると、これを高速で流動するとき、ニュートン流体と同様な挙動を示し、その流速分布についても乱流の場合には対数法則が成立することも明らかにされている。したがってこのような流体のエネルギー E はニュートン流体と同様にあらわされるはずである。

$$E = \alpha \frac{u_m^2}{2g} + z + h \cos \theta \dots\dots\dots (1)$$

ここに α は流速分布の補正係数で $\alpha = \int_A \left(\frac{u}{u_m}\right)^2 \frac{dA}{A}$ 、 u_m は断面内の平均流速、 g は重力の加速度、 z は基準面から水路床までの高さ、 h は流れの深さ、 θ は水路勾配である。 α の値は流れが例えばみかけの層流のとき、この流れの層流の流速分布および平均流速 u_m は幅広い水路では²⁾

$$u = \frac{\tau_y}{\mu_R(h - zy)} \left(zy - \frac{z^2}{2}\right) \dots\dots\dots (2)$$

$$u_m = \frac{\tau_y}{\mu_R(h - zy)} \frac{zy^2}{2} \left(1 - \frac{zy}{3h}\right) \dots\dots\dots (3)$$

ここに τ_y は流体のせん断降伏値、 μ_R は流体の塑性粘度、 zy は τ_y の生じる高さ、であるから

$$\alpha = \frac{1 - \frac{7}{15}\alpha'}{\left(1 - \frac{\alpha'}{3}\right)^2} \dots\dots\dots (4)$$

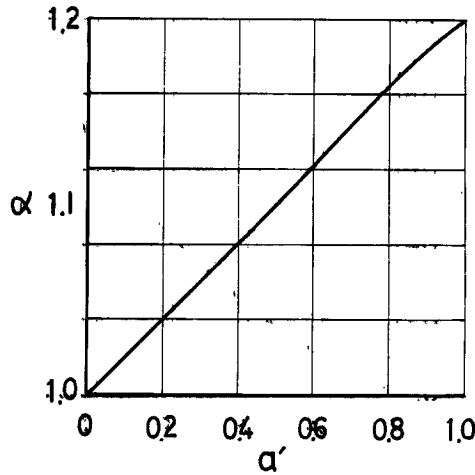


Fig. 5 Relation between the kinetic-energy correction factor α and α' .

となる。Fig. 5 に運動エネルギーの補正係数 α と α' の関係を示す。そこで限界水深 h_c 、Froude 数 F_r およびそれらの限界値は

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g B^3 \cos \theta}} \dots\dots\dots (5) \quad v_c = \sqrt[3]{\frac{g Q \cos \theta}{\alpha B}} \dots\dots\dots (6)$$

$$F_r = \frac{u_m}{\sqrt{g h \cos \theta}} \dots\dots\dots (7) \quad F_{r,c} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \dots\dots\dots (8)$$

ここに B は水路幅、 Q は流量として、従来のニュートン流体と同じ関係式で定義できる。対象とする河川は一般に急勾配であるから、 $\cos \theta$ の項は省略せずに残したが、これも $i=1/10$ 程度までは $\cos \theta=1$ とみなして差支えないものである。

等流水深は、ビンガム流動ではエネルギー消費がせん断降伏値 τ_y 以上の領域についてのみ行なわれることを考慮すると、平均流速 u_m は

$$u_m = \sqrt{\frac{2g}{f_N F}} \sqrt{i h} \dots\dots\dots (9)$$

と表わされる⁴⁾。ここに f_N は抵抗係数、 F は断面内において実際にエネルギーを消費する部分の代表流速の二乗の比を表わす係数で、幅広い水路では $F = (6.67\alpha'/15) / \{1 - (\alpha'/3)\}^2$ で、Fig. 6 に F と α' の関係を示す。 i は水路勾配である。

$$c = \sqrt{2g / f_N F} \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、等流水深はニュートン流体と同形の式

$$h_0 = \sqrt[3]{\alpha Q^2 / c_0^3 i B^2} \dots\dots\dots (11)$$

となる。

その結果、流れの流動形状はニュートン流体の水面形と同じく、例えば幅一様な長方形水路では

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i \left(1 - \frac{c_0 h_0^3}{c h^3} \right)}{1 - \frac{h_0^3}{h^3}} \dots\dots\dots (12)$$

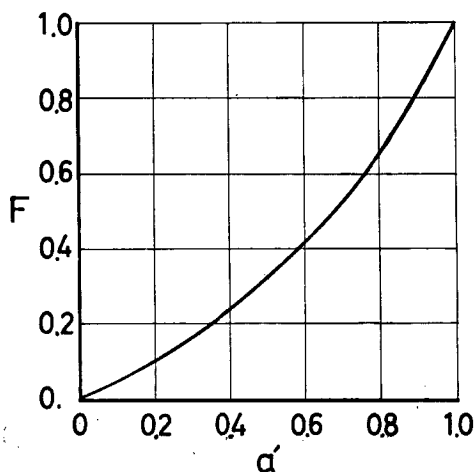


Fig. 6 Relation between the friction correction factor F and a' .

となり、もし $c=c_0$ と考えると水面形の計算における Bresse の公式あるいは Chow の公式が適用できるようになる。実際には $c=c_0$ でないので、 c が一定とみなされる範囲に分割し、各区間における Reynolds 数から、 $f_R=6/R_{eR}$ の関係を用いて f_R を求め、各区間における c の変化を考慮して、水面形を計算した結果を Fig. 2 に示す。不等流領域における抵抗係数のきめ方に問題を残しているが、実験値と計算結果の間には本質的にちがいがあるように思われる。

(B) 偏差法線応力を考慮した場合

(i) 偏差法線応力を考慮した場合の不等流の基礎式

ここでとりあつかっている流体は、本質的には粘弾性流体である。定常状態の流動においては、摩擦損失が粘性のみに支配されて弾性の影響は表面は表面にでないが、不等流の場合で、とくに流体の受けるせん断力がせん断降伏値にくらべてそれほど大きくないとき、表面に表われてくることが考えられる。弾性論の知識によると、 x 軸方向の単純ずりにおいて有限変形では、ひずみの 2 乗の項が生じるため、応力成分 σ_{ij} と回復しうるひずみ ε の間にはつぎの関係が成立つことが知られている。

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_{zz} &= G\varepsilon^2 & \sigma_{zz} &= G\varepsilon & \dots\dots\dots(13) \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{yy} \end{aligned}$$

ここに G は剛性率である。粘弾性流体について Rivlin⁵⁾、富田⁶⁾らの研究を参考にすると

$$\sigma_{zz} = \sigma_{yy} = 0 \dots\dots\dots(14)$$

とおけるので、

$$\sigma_{xx} = G\varepsilon^2 \dots\dots\dots(15)$$

となる。粘弾性流体における剛性率は一定でなく、ひずみの大きさ、緩和時間等に関係するものと考えられるが、ここでは一応一定として考察を進める。

一方この研究で対象とするビンガム流体ではせん断降伏応力を差引いた有効応力 σ_{xx} を

$$\sigma_{xx} = \mu_R \frac{du}{dz} \dots\dots\dots(16)$$

と表わしているの、(13) 式に代入するとつぎのようになる。

$$G\varepsilon = \mu_R \frac{du}{dz} \dots\dots\dots(17)$$

したがって、偏差応力 σ_{xx} は

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu R^2}{G} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \dots\dots\dots(18)$$

と表わされる。

このような性質を有する流れの運動量の法則は、従来考えられている諸量のほかにこの偏差応力による項が付加えられる。この結果、流れの運動方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (u_m A) + \rho \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_m u_m^2 A) = -\tau_0 S + \rho g A \sin \theta - \rho g A \frac{\partial h}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial x} \int_{A_d} \sigma_{xx} dA \dots\dots(19)$$

ここに A_d はせん断力 τ が τ_y 以上の部分の面積である。

流れが層流の場合、流速分布は近似的に (2), (3) 式より

$$\frac{du}{dz} = 2u_m \left\{ \frac{1 - (z/z_y)}{z_y \left(1 - \frac{z_y}{3h}\right)} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

とすると、二次元の場合、 σ_{xx} は

$$\sigma_{xx} = 4 \frac{\mu R^2}{G} u_m^2 \left\{ \frac{1 - (z/z_y)}{z_y \left(1 - \frac{z_y}{3h}\right)} \right\}^2 \dots\dots\dots(21)$$

となり、河幅 B 一定のとき、 $\int_{A_d} \sigma_{xx} dA$ は

$$B \cdot \int_0^{z_y} \sigma_{xx} dz = \frac{4B}{3} \cdot \frac{\mu R^2}{G} \cdot \frac{Q^2 \Gamma}{A^2} \quad \Gamma = \frac{1}{z_y \cdot \left(1 - \frac{z_y}{3h}\right)^2} \dots\dots\dots(22)$$

となる。連続式 $\partial A / \partial t + \partial Q / \partial x = 0$ を用いて、(19) 式の第 1 項、第 2 項を整理し、各項を $\rho g A$ で割ると $\partial / \partial t = 0$ のとき

$$-i + \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha u_m^2}{2g} \right) + \frac{\tau_0}{\rho g R} - \frac{4Q^2 \mu R^2 \Gamma B}{3G \rho g A^3} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} - \frac{2}{A} \frac{dA}{dh} \frac{dh}{dx} \right) = 0 \dots\dots\dots(23)$$

となって、従来の不等流の運動方程式に最後の項が加わる。この式を長方形断面の場合について書き直すと

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - \frac{Q^2}{c^2 b^2 h^3} + \frac{4Q^2 \mu R^2 B}{3G \rho g A^3} \frac{d\Gamma}{dx}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g b^2 h^3} + \frac{8}{3} \frac{Q^2 \mu R^2 \Gamma}{G \rho g b^2 h^4}} \dots\dots\dots(24)$$

であって、水面形を求めることができる。

(ii) 剛性率 G の測定

(24) 式を用いて水面形を計算するとき、剛性率 G の値が必要である。 G の値はさききのべたようにずりの大きさまたは緩和時間に関係するものと予想される。しかしこれを測定する適当な装置はないので、ここでは Fig. 7 に示す Schwedoff の装置⁷⁾ を作製して使用した。寸法は内筒の長さ 20.69 cm, 太さ 4.06 cm, 内外筒のすきまは 2.0 mm で鋼線の太さ 0.5 mm, 長さ 27 cm のものを使用した。ねじれ角の測定は望遠鏡と尺度の方法によった。この測定法による G と試料のねじれの関係はつぎの式で表わされる⁷⁾。

$$G = \frac{k}{4\pi H} \left(\frac{1}{R_i^2} - \frac{1}{R_o^2} \right) \frac{\varphi - \theta}{\theta} \dots\dots\dots(25)$$

ここに k は鋼線のねじれ常数, H は試料が内筒に浸たる深さ, R_i, R_o はそれぞれ内外筒の半径, φ は鋼線のねじれ角, θ は試料のねじれた角である。

この実験に用いているのは粘弾性流体であるからかならずしも弾性平衡点にとまらず、 θ は時は時間と共に増加していく。この変化の進む時間はかなり長く（この測定では 2 時間位）、その結果 G の決定をどこで行なうかが問題になり、 G の決定に必ずしも適切ではないが、ほぼ θ の変化が時間に無関係になる値をみ

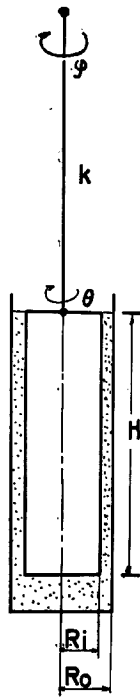


Fig. 7 Measuring apparatus of rigidity.

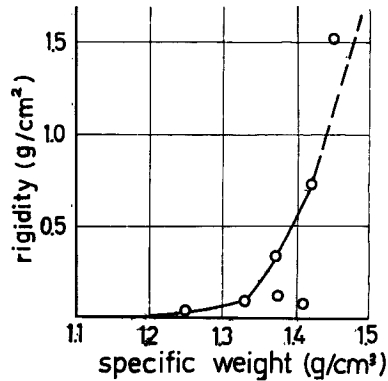


Fig. 8 Relation between the rigidity G and the specific weight of fluid.

いだして G の値を求めた結果を Fig. 8 に示す。

(iii) 実験結果への適用

以上の結果, 必要な常数は一応決定されたので, 実験結果を用いて (24) 式の各項の大きさを求めた。実験結果は, 水路幅に対して水深が水路幅の 1.5 倍程度に達するため断面の影響を考慮する必要がある。

Γ の値を求めるためには, $\tau > \tau_y$ のせん断力を受ける領域をきめる必要がある。断面内のせん断力の分布は不明であるが, ずり流動をしていない栓の部分に対して

$$\tau_y = \rho g I_e y_y \dots\dots\dots(26)$$

ここに I_e はエネルギー勾配, y_y は未流動領域の径深である。(26) 式がなりたつものとし, 全断面に対する径深 R から y_y を差引いたものを流動深さ, それに平均潤辺長 $b = 2h + B - 2R_y$ を乗じたものを流動面積とした。したがって (23) 式の偏差応力によって生ずる勾配は

$$-\frac{4Q^2 \mu R^2 \Gamma b}{3G \rho g A^3} \left(\frac{1}{\Gamma} \frac{d\Gamma}{dx} - \frac{2}{h} \frac{dh}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right), \quad b = 2h + B - 2R_y \dots\dots\dots(27)$$

と書き直される。

摩擦項としては, 不等流の場合の抵抗係数が等流のときとどの位変わるか不明である。これはニュートン流体でも明らかでない。ここではさきにならわの求めた等流のときの抵抗係数

$$f_R = 6/R_{eR}, \quad R_{eR} = \frac{u_m R}{\nu_B} \beta \dots\dots\dots(28)$$

によることとし, 測定区間を 1m 毎に分割して, 各区分毎に R_{eR} を計算して, f_B を求めた。

各項の大きさを計算した結果を Fig. 9 (a), (b) に示す。(a)はせき上げ背水, (b)は低下背水の場合である。

(27) 式において, dh/dx が正のとき, 一般に $d\Gamma/dx$ は負, db/dx は正, また dh/dx が負のとき,

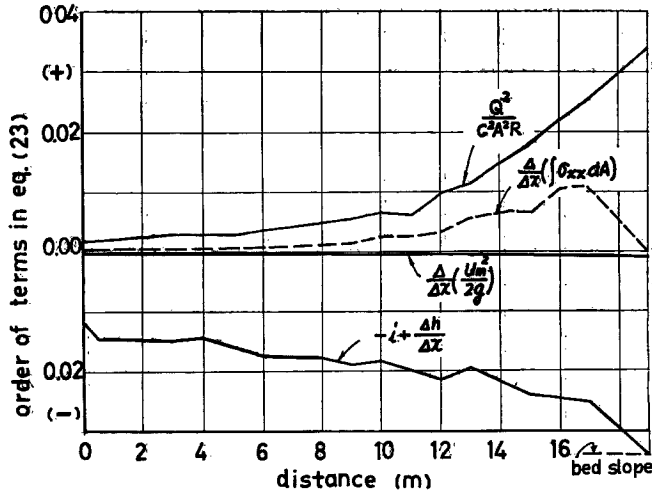


Fig. 9 (a) The order of terms in eq. (23) of profile in Fig. 2 (ii)

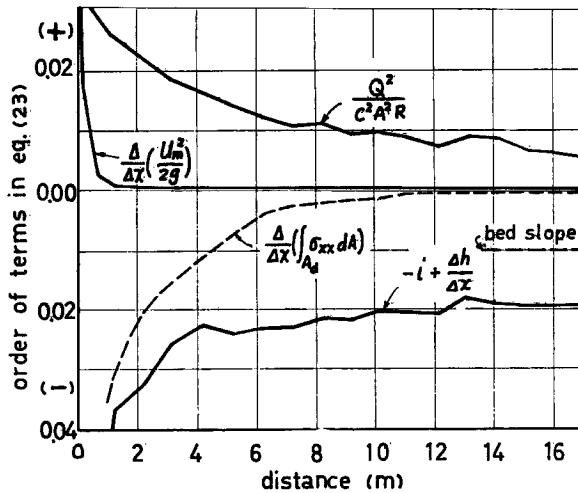


Fig. 9 (b) The order of terms in eq. (23) of profile in Fig. 3 (ii)

$d\Gamma/dx$ は正、 db/dx は負である。しかし (27) 式の括弧内の各項の大きさを比較すると、いずれの場合も $(2/h) \times (dh/dx)$ の項が大きく、 dh/dx の正負で (27) 式の正負がきまる。 dh/dx が正のとき、偏差法線応力効果は摩擦勾配と同じ符号を、また dh/dx が負のときは逆の符号をもつ。これは dh/dx が正のとき、見掛け上摩擦が増して流れにくくなって水深が増し、 dh/dx が負のときは、摩擦が減じて水深が低下することを意味する。この結果は Fig. 2, 3 の実験結果の傾向と一致する。Fig. 2 において、(12) 式によって計算した結果より水深が大きいの、この偏差法線応力効果が働いていると解釈することができる。同様に Fig. 3 においては、流れは当然等流水深で流れるべきところ、段落ち部で生じた不等流現象によって偏差法線効果を生じ、等流水深より低くなる領域が顕著になると解することができる。

Fig. 9 (a), (b) において求めたこの偏差効果の流れ方向の変化は、Fig. 2 における (19) 式による計算値と実測値の差、あるいは Fig. 3 における等流水深と実測値との差の流れ方向の変化と傾向としては一致し、次上にのべたことを立証している。

現在のところ流体の物理常数たとえば剛性率 G などの絶対値が決定的でないため、定量的に以上の考えが妥当であるかどうか説明できない。(23)式の考え方が正しいければ、Fig. 9において、エネルギー勾配と摩擦勾配の差は偏差効果による勾配となるべきで、逆に偏差効果の働いていないところでは、エネルギー勾配と摩擦勾配は釣り合うべきである。Fig. 9の計算結果はこの関係をみだしていない。これは偏差効果よりも摩擦勾配の算定に問題があり、Fig. 9(a)よりわかるように、不等流の区間に入ると摩擦勾配の計算値は急に小さくなって釣合いを失なう。この傾向は、Lorenz G. Straub⁹⁾による断面形の補正を行なうとさらに助長する。従来ニュートン流体の流れにおいても背水区間においては、みかけ上抵抗係数が増すことが指摘されているので、この計算においても当然この影響に対する補正をしなければならぬ。しかしこの補正は未知の点が多く、みだりに補正を加えると、他の要因による影響を見失う恐れがあるので、ここでは補正をしていない。ニュートン流体における背水区間の摩擦抵抗の究明が望まれる。摩擦勾配を求めるときに注意すべきもう一つの要因は、計算に採用した各断面の a' の値の決定において、流体の緩和現象は考慮せず、その場所の外力だけで決めているが、流体自身は、その前の時刻に、前の場所でうけた力の影響を保持していると考えられる。偏差効果の計算値が、一般に現象より急激な変化で表われているのもこの緩和現象を考慮していないからであろう。この問題についてはこの流体の粘弾性的な応力とひずみの関係をさらに究明する必要がある。

4. む す び

以上、土砂流の流動勾配について、実験結果をもとに二、三の考察を行ない $\tau \gg \tau_y$ の領域でニュートン流体に近似の挙動をみせる粘弾性流体でも、おせいせん断をうけるような場合には、必ずしもニュートン流体と同じような取扱いは不十分であって、弾性効果の影響を考える必要がある。この論文では、偏差法線応力効果が働らく場合の不等流の運動方程式をみちびき実験結果との比較を行なった。物質常数の測定が十分でないため、以上の考え方が十分であるかどうかきまにくい、傾向は実験値と一致することがわかった。偏差法線応力が存在すると、水面形はこれがないときにくらべて変る。この効果は dh/dx が正のとき、見かけ上摩擦が増す方向に、 dh/dx が負のときは摩擦を減ずる方向に働らく。今後物質常数の測定を改良して、さらに検討を進めて行きたい。この実験を行なうにあたり終始熱心にご協力を頂いた神戸市立工業高等専門学校日下部重幸氏に厚く感謝の意を表する。なおこの研究は、文部省特定研究費による研究の一部であって、関係方面に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) K. Yano, A. Daido; Fundamental study on Mud-flow, vol. 14, Part. 3, March, 1965, p. 69.
- 2) A. Daido, S. Kusakabe; Friction Factor and Velocity Distribution in Turbulent Region for Plastic Eluid, Proc. of the 15th Japan National Congress for App. Mech. (in print)
- 3) 1)と同じ
- 4) 1)と同じ
- 5) Rivlin; Rheology, Edited by R. Eirich, vol. 1, 1956, p. 351, Academic Press, New York.
- 6) 富田幸雄; 粘弾性流動に関する研究 (第4報), 日本機械学会講演前刷集, No. 136, 昭40. 2, p. 51.
- 7) 中川鶴太郎, 神戸博太郎; レオロジー, みみず書房, 昭34, p. 521.
- 8) L.G. Straub, E. Silberman, H.C. Nelson; Some observation on open Channel Flow at Small Reynolds Numbers, Proc. A.S.C.E. Vol.82 July 1956, pp.1031.1-28.