Forchheimer 則を適用した Confined Seepage (2)

—— 河川構造物の浸透問題(2) ——

岡　　太　　郎

STUDY OF CONFINED SEEPAGE AROUND SHEET PILE APPLYING FORCHHEIMER'S LAW (2)

——Seepage Problem for River Structure (2)——

By *Taro* OKA

Synopsis

In this paper, some steady confined seepage problems in a non-Darcy region are discussed theoretically and experimentally. The fundamental equation for the flow are derived using Forchheimer's law believed to be applicable to the seepage flow beyond the applicability of Darcy law, and solved nemerically using the technique of the finite difference.

The computer solution of the equation and Laplace equation are compared with experimental results for the seepage around a sheet pile in order to examine the applicability of the fundamental equation to the confined seepage problems in a non-Darcy region.

Moreover, some characteristics for the flow under a low dam with sheet piles are discussed about the uplift pressure distribution at the base of the dam and the relationship between the seepage flux and total head loss using computer solutions of the fundamental equation and Laplace equation.

1. まえがき

porous media 内の流れが乱流状態に遷移すると Darcy 則が成立しないといわれている[1]が，本研究はこの non-Darcy 領域における confined seepage 問題に Forchheimer 則を適用して検討し，その実用性を確かめようとしたものである。

前報[2]で扱った矢板のまわりの confined seepage 問題では，二次元領域における Forchheimer 則を流れ方向成分の流速のみを考慮した近似的な形で検討したが，今回は流れに直角方向の成分をも考慮した厳密形で検討した結果を報告する。まずこの場合の基礎方程式を示し，その数値解法について若干の考察を行なう。次に矢板のまわりの流れを実験結果と対比しつつ理論的に検討し，non-Darcy 領域における confined seepage 問題への Forchheimer 則の適用性を吟味する。最後に実際河川にみられるような sheet pile を有する低ダム周辺の流れを解析しその結果について考察を加える。

2. 基礎方程式および境界条件

2.1. 基礎方程式

一様な porous media 内の流れに対しての Forchheimer 則を二次元的に表わすと次のようになる[3]。

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}&=-F(q)u \quad \cdots\cdots\text{(a)}\\ \frac{\partial h}{\partial y}&=-F(q)v \quad \cdots\cdots\text{(b)}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここに $F(q)$ は流速の関数であって次式で示されるものである。

$$\left.\begin{aligned}F(q)&=a+bq\\ q&=\sqrt{u^2+v^2} \quad \cdots\cdots\text{(c)}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1)'$$

a：定数 $[L^{-1}\cdot T]$　b：定数 $[L^{-2}\cdot T^2]$　h：水頭 $[L]$　x, y：座標 $[L]$

u, v：x, y 方向の断面平均流速 $[LT^{-1}]$

また連続の方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

で，よく知られているように流れの函数 ψ は次式で定義される。

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \cdots\cdots(3)$$

（3）式を（1）式に代入し，前報と同様な方法[2)]により，流れの関数 ψ についての基礎式を誘導すると（4）式を得る。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{-b}{\left\{a+b\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}\right\}\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}\cdot\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} \quad \cdots\cdots(4)$$

水頭 h については（5）式を得る

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}\cdot\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right\}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\right] \quad \cdots\cdots(5)$$

とくに（4），（5）式において，$b=0$ のとき，すなわち Darcy 則が成立するときには

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

となり流れの関 ψ，水頭 h に関数してラプラス方程式が成立する。

2.2. 境 界 条 件

簡単のため境界は x, y 軸に直角とする。ここで **Fig. 2** のような解析領域を考えると各境界に対する条件は次のとおりである。

（i） 流入面（AS）〔流出面（TE）〕：この面では水頭 h は一定であるから $\partial h/\partial x=0$ である。したがって $u=0$ となり，$\partial\psi/\partial y=0$ を得る。

（ii） 不透壁〔構造物の壁上（SO, OP, OT）または不透壁面上（ABCDE）〕：不透壁は一つの流線と考えられるから不透壁上の流れの関数値は一定である。

$\psi_{SOPOT}=0$

$\psi_{ABCDE}=\text{const.}$

また不透壁を横切る流れはないから水頭 h についての境界条件は次のように表わされる。

AB, DE, OP 上では $\dfrac{\partial h}{\partial x}=0$

SO, OT, BCD 上では $\dfrac{\partial h}{\partial y}=0$

3. 解　　法

流れの関数に関する基礎方程式は（4）式であり，水頭に関する基礎方程式は（5）式である。（5）式の中には流れの関数が含まれているため（5）式単独では水頭 h の値を求めることはできない。そこでまず（4）式を与えられた境界条件のもとに解析し，領域内の流れの関数の値を得た後，（5）式に代入し水頭 h の値を求める。ただ（4）式は非線形であり，境界の形状，条件から考えて解析的に解くのは困難であるので数値解法により解を得ることにする。

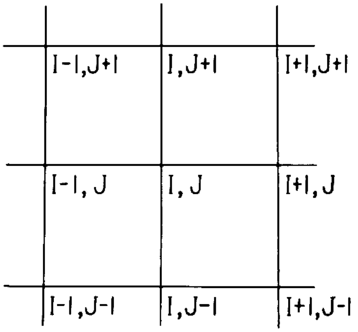

Fig. 1　Finite difference grid used to solve the differential equation.

まず **Fig. 1** の場において（4），（5）式を差分近似式で表わすとそれぞれ（8），（9）式となる。

（4）式から：

$$\frac{\psi_{i+1,j}+\psi_{i,j+1}+\psi_{i-1,j}+\psi_{i,j-1}-4\psi_{i,j}}{n^2}=\rho_{i,j} \quad \cdots\cdots(8)$$

ここに，$\psi_{i,j}$ は格子点 i, j の ψ の値，n は格子点間隔，$\rho_{i,j}$ は次式で表わされる。

$$\rho_{i,j}=\frac{-b}{\left[a+b\left\{\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)^2+\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right]\left\{\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)^2+\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$
$$\times\left[\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)^2\left(\frac{\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}-2\psi_{i,j}}{2n}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{n}\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)\left(\frac{\psi_{i+1,j+1}-\psi_{i+1,j-1}}{2n}-\frac{\psi_{i-1,j+1}-\psi_{i-1,j-1}}{2n}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)^2\left(\frac{\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}-2\psi_{i,j}}{n^2}\right)\right] \quad \cdots\cdots(8')$$

（5）式から

$$\frac{h_{i+1,j}+h_{i,j+1}+h_{i-1,j}+h_{i,j-1}-4h_{i,j}}{n^2}=c_{i,j} \quad \cdots\cdots(9)$$

ただし，

$$c_{i,j}=\frac{b}{\left\{\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)^2+\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$
$$\times\left[\left\{\frac{1}{2n}\left(\frac{\psi_{i+1,j+1}-\psi_{i+1,j-1}}{2n}-\frac{\psi_{i-1,j+1}-\psi_{i-1,j-1}}{2n}\right)\right\}\left\{\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)^2-\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)^2\right\}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\psi_{i+1,j}-\psi_{i-1,j}}{2n}\right)\left(\frac{\psi_{i,j+1}-\psi_{i,j-1}}{2n}\right)\left(\frac{\psi_{i,j+1}+\psi_{i,j-1}-2\psi_{i,j}}{n^2}-\frac{\psi_{i+1,j}+\psi_{i-1,j}-2\psi_{i,j}}{n^2}\right)\right]$$
$$\cdots\cdots(9')$$

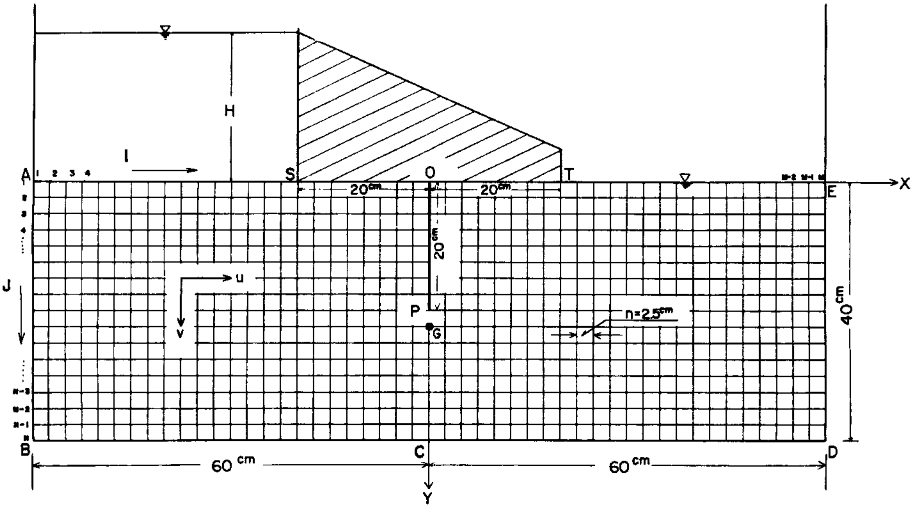

Fig. 2 Coordinate system and finite difference grid net works used for numerical analysis.

数値計算の手順としては，はじめ（8）式により，与えられた境界条件のもとで各点の ϕ の値を求める。次にその流れの系における上下流の水頭差（全損失水頭）Hは，（1）式を任意の一つの流線に沿って積分することによって求まるから，流入面の水頭をH，流出面の水頭を0として，（9）式により水頭分布を計算する。たとえば **Fig. 2** に示される系では，全損失水頭（H）は不透壁面 ABCDE を一つの流線に選ぶことにより次のように求めることができる。

$$
\begin{aligned}
H=&\sum_{i=1,j=1}^{i=1,j=N}-\left\{\left(a+b\left|\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}\right|\right)\left(\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}\right)\Delta y\right.\\
&+\sum_{i=1,j=N}^{i=M,j=N}\left\{\left(a+b\left|\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\Delta y}\right|\right)\left(\frac{\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1}}{\Delta y}\right)\Delta x\right.\\
&+\sum_{i=M,j=1}^{i=M,j=N}-\left\{\left(a+b\left|\frac{\phi_{i-1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}\right|\right)\left(\frac{\phi_{i-1,j}-\phi_{i,j}}{\Delta x}\right)\right\}\Delta y \qquad \cdots\cdots(10)
\end{aligned}
$$

ただし，$\Delta x=\Delta y=n$

非線形方程式である（8）式の数値解法には逐次代入法[4]を用いる。すなわち，すべての格子点で第 m 次近似 $[\phi_{i,j}^m]$ を既知，および $k,l=1,2,3\cdots$ として $(i,j-k),(i-l,j)$ などの点で第 $m+1$ 次近似を既知とすると，（8′）式により点 (i,j) の $\rho_{i,j}^m$ が求められるから，第 $m+1$ 次近似 $[\phi_{i,j}^{m+1}]$ は次式で求められる。

$$\phi_{i,j}^{m+1}=\phi_{i,j}^m+RA \qquad \cdots\cdots(11)$$

ここで，

$$RA=w\left[\frac{(\phi_{i,j+1}^m+\phi_{i,j-1}^{m+1}+\phi_{i+1,j}^m+\phi_{i-1,j}^{m+1}-\rho_{i,j}^m\times n^2)}{4.0}-\phi_{i,j}^m\right]$$

上式中wは加速係数である。この計算において ϕ の出発値 $\phi_{i,j}^0$ としては真の解になるべく近いものを用いることが望ましいが，ここでは $\rho_{i,j}=0$ の場合，すなわちラプラス方程式の解[5]を用いる。

収束の判定としては，あらかじめ小さな値（ER）を与えておき（11）式における $\phi_{i,j}^m$ の修正量（RA）のその系の内点での絶対値の総和（$\sum|RA|$）が ER より小さくなったとき収束したものとみなす。なおこの計算において，境界条件として与えられる流れの関数値（単位断面を流下する流量 q），係数 a,b，交点間隔 n などの値によっては，（8）式が収束しない場合もあるが，この場合には，加速係数として $w<1$ の値を用いることにより収束させることができる[4]。

（9）式については右辺が既知であるので，S.O.R.法により容易に数値解を得ることができる[5]。

4. 数値計算に関する考察

この種の数値計算では常に収束性，収速速度，得られた結果の精度などが問題となるが，これらはいまの場合係数 a, b，格子点数，格子点間隔，単位断面流下量（q），などと複雑に関連するので一般的な論議はむつかしい。そこで，ここでは代表的に一つの解析領域を選定し，各係数，条件等もある程度限定して数値計算を行ない，その結果を通して上述の問題点について考察を加えることにする。

まず解析領域として **Fig. 2** に示されるような系を選ぶ。また係数 a, b については実験[2]から得られた $a=0.27\ \mathrm{cm^{-1}sec}$, $b=0.25\ \mathrm{cm^{-2}\cdot sec^2}$, 条件として与えられる単位断面を流下する流量として $20\ \mathrm{cm^3/sec/cm}$ を用いる。この場合の計算結果から得られる流線網を **Fig. 3** に示す。

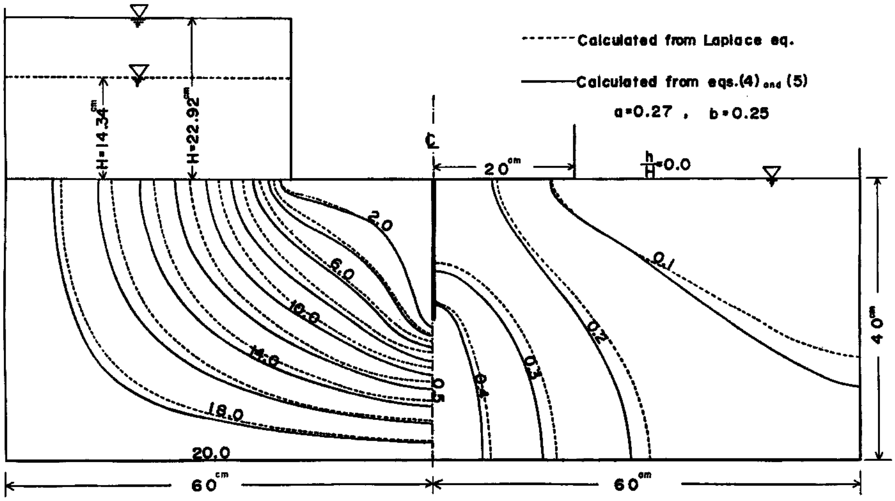

Fig. 3 Flow-nets calculated from Laplace equation and eqs. (4) and (5) in the case of Fig. 2.

4.1. 格子点間隔 n について

この種の計算では，格子点間隔 n が小さければ小さいほど得られる結果の精度のよくなることが推測されるが格子点間隔の縮小は急激に計算量の増加をもたらすので，そこにおのずと限界がある。そこで，まずこの点について若干の考察を行なう。

Fig. 2 の領域を格子点間隔を $n=1.25$ cm, 2.50 cm および 4.0 cm とすると全領域内の格子点数は境界上の点を含めそれぞれ3201点，833点，および341点となるが実際の計算に必要な格子点数は，流れの関数を計算する場合にはそれぞれ2991点，727点，および274点，また水頭についての計算では sheet pile 上で両面を計算する必要もあってそれぞれ3151点，807点，および324点となる。

この計算における一点の打ち切り誤差すなわちこの数値計算において収束したとみなす限界を $n=2.5$ cm と $n=4.0$ cm の場合に 1.4×10^{-4} としたが，$n=1.25$ の場合には格子点数が3000点もあり計算に長時間を要するので他の場合より要求精度を一桁下げ 1×10^{-3} とした。

これらの格子点間隔について，全損失水頭Hのラプラス方程式の解およびこの理論による解を（10）式より求め，$n=2.5$ cm の場合の計算結果との比率で示すと **Fig. 4** のようになる。なお $H_{n=2.5}=22.92$ cm（本理論解）および 14.34 cm（ラプラス解）であった。この結果は，打ち切り誤差を一様にしていない点に問題が残るが，**Fig. 2** に示すような系については，格子点間隔を 2.5 cm 程度でかなりの精度の計算結

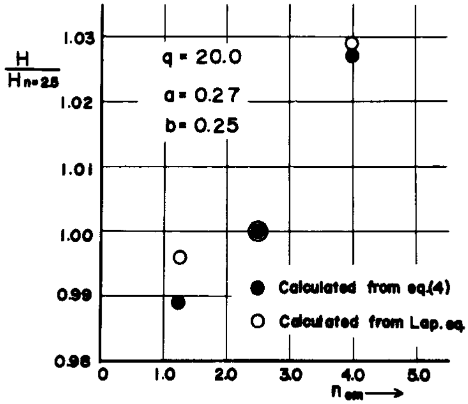

Fig. 4　Relationship between $H/H_{n=2.5}$ and mesh interval (n).
$H_{n=2.5}$: total water head loss calculated in $n=2.5$ cm.

果が得られることがわかる。

4.2.　打ち切り誤差について

前述の方法では，水頭分布を求めるのに流れの関数の計算結果を用いるから，流れの関数に含まれる誤差も水頭分布にかなりの影響をもってくる。そこでいま **Fig. 2** の系において格子点間隔 $n=2.5$ cm とし，許容誤差，すなわち（11）式における修正量（RA）の絶対値の（格子点727の）総和の許容値（$ER>\sum|RA|$）として0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0を与えた場合の全損失水頭Hの差異を検討した。これを $ER=0.1$（格子点一点について 1.4×10^{-4}）を規準にとって比較すると **Fig. 5** のようである。また同様に **Fig. 2** に示すG点の水頭 h_G についても $ER=0.1$ の場合を規準にとった場合を比較すると **Fig. 6** のようになる。**Fig. 2** の系はy軸に関して左右対称であるのでG点における水頭は全損失水頭の½となるはずであるがこの計算では領域を対称軸で2分することなく全領域について値を求めた。したがって，**Fig. 6** は **Fig. 5** とはまた別の意味を有する。

Figs. 5, および **6** よりこの計算では $ER\leq0.1$（一点については0.0001）であればこの種の誤差は無視できることがわかる。なおラプラス方程式の解についてのこの種の誤差はほとんどの場合問題とならなかった。なおこの系についての左右対称性については，許容誤差の範囲内で，十分な解が得られた。

以上の結果，打ち切り誤差が計算結果におよぼす影響はさほど大きくなく，むしろ格子点間隔のとりかた

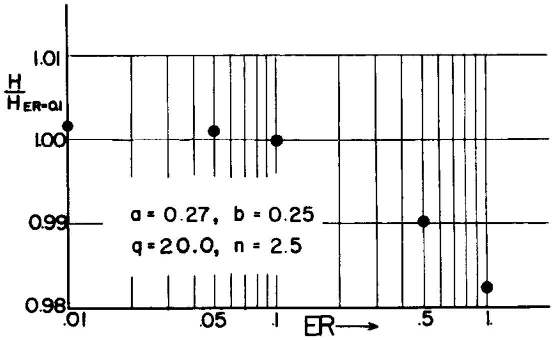

Fig. 5　Relationship between $H/H_{ER=0.1}$ and allowable error (ER).
$H_{ER=0.1}$: total water head loss calculated in $ER=0.1$.

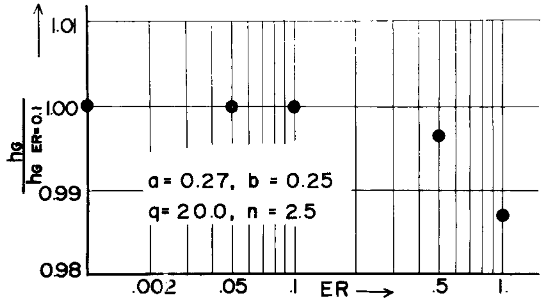

Fig. 6 Relationship between $h_G/h_{G\ ER=0.1}$ and allowable error (ER).
h_G: water head at the point of G in Fig. 2.

の方が計算精度に大きな影響をもつことがわかった。したがって実際の場では打ち切り誤差を多少大きくとっても，格子点間隔を小さくする方が望ましいといえる。

4.3. 加速係数 w について

一般に繰返し計算では，いかにして収束速度を速めるかということが，電子計算機の使用時間の節約上大きな問題となる。また係数の取り方，計算条件，交点間隔等によっては収束しない場合も生ずる。こうした問題に特に重要な役割りを果すのが加速係数wである。(11) 式の計算では各ケースとも $w=1.0$ で収束したが，この計算に後述のラプラス方程式を解く場合の最適加速係数に近い値を用いると収束しなかった。

はじめに，本研究ではラプラス方程式の解を本理論解との対比に用い，かつまた（8）式の計算のための出発値としたが，このためラプラス方程式の解を S.O.R. 法[5]により求めることにした。ラプラス方程式の計算において，その出発値は解とはほど遠い値であることが多いため，良好精度の解を得るためには（8）式を解く場合と同程度の繰返し回数を必要とする。この繰返し計算の回数を減少させるには，加速係数wの選択が極めて重要となるので，以下若干の検討をする。

Fig. 2 に示す領域を格子点間隔 2.5 cm で分割し $q=20$ cm³/sec/cm を与えた場合の全格子点での修正量絶対値の総和 $\sum|RA|$ と繰返し回数Nとの関係を **Fig. 7** に示す。

いま最適加速係数 w_{opt} と書くと，一般に $N\sim\sum|RA|$ の関係は $w<w_{opt}$ ならば滑らかであるに対し $w>w_{opt}$ となると波状を示すことが知られているが[6]，こうした観点より **Fig. 7** をみると，ラプラス方程式の解を求めるための流れの関数の計算では $w_{opt}\fallingdotseq1.8$，水頭hの計算では $w_{opt}\fallingdotseq1.9$ であることがわかる。なお流れの関数と水頭分布の計算で w_{opt} が異なるのは不透壁面上での計算の有無，すなわち領域形状の差異になるものと考えられる。

以上によって S.O.R. 法によるこの種の計算では，wの値が計算速度に及ぼす影響の大きいことがわかった。w_{opt} の値は領域形状により若干変化するから必

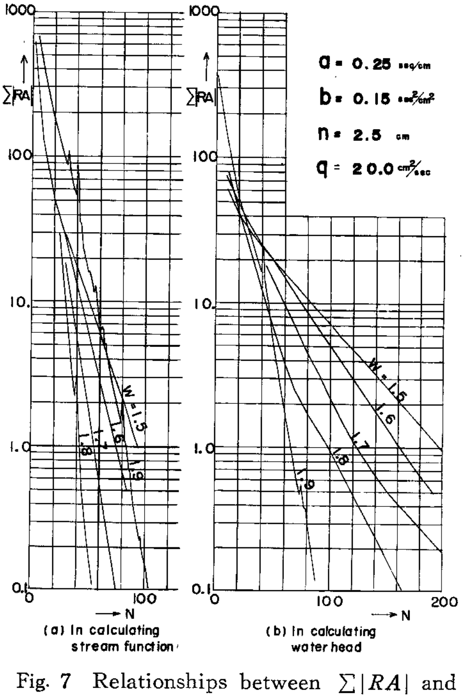

Fig. 7 Relationships between $\sum|RA|$ and iteration number, N, in the successive over-relaxation process.

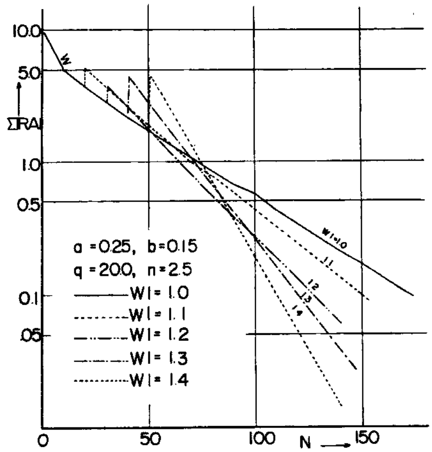

Fig. 8 Relationship between $\sum|RA|$ and iteration number, N, in the calculation of Eq. (11) with the first and second relaxation factors, w and wl.

ずしも一般的なものではないが，この種の問題を解くための一つの目安になろう。

次に，(11) 式の繰返し計算では，収束するまでの繰返し回数 (N) は，計算の出発値，格子点の数，係数 a, b，境界値などに関係するので一概に言えないが，いま **Fig. 2** に示すような系についてラプラス方程式の解を出発値とし，当初適当な回数を $w=1.0$ として計算した後，w を変えて収束を調べた1例を **Fig. 8** に示す。これより出発値が最終値とかなり離れた値である場合には，ある段階まで $w\leq1$ で近似度を上げた後 $w>1$ の加速係数を用いることにより，収束速度を上げる方法のあることがわかる。ただこれだけの計算では加速係数を変更する時期および変更後の最適加速係数については明らかではないが，計算時間を短縮するための手段の一つを示すものである。

5. 実験とその考察

前述の理論の適応性を検討するため一つの実験を行なった。実験装置，材料，手法および実験対象については前報[2]と同一のものである。前回の実験では水道水を直接使用したため，実験時間を短縮したり，スクリーンの配置することなどにより porous media 内の溶解空気分離の悪影響の除去に努めたが，十分であったかどうか疑問が残った。今回はこうした難点を改善するため流量測定の終えた水を溶解空気分離塔を通した後上流側給水槽までは空気に接触させず給水する方法を取った。この空気分離塔は下端を閉鎖した長さ 1.5 m，直径 0.3 m の塩化ビニールパイプを鉛直に立て，これに実験材料と同組成の砂を充塡したもので，上端に入れた水を下端から 5 cm のところにとりつけた直径 7.5 cm の塩化ビニールパイプより取り出すようにしたものである。この空気分離塔を通水させることにより溶解空気が完全に除去し得るかどうかは不明であるとしても，実験で支障をきたす現象は現われなかった。

実験は前報 Fig. 1[2] に示す有限領域内の矢板のまわりの流れについて行なった。今回の実験では porous media の間隙率は0.35であった。

Fig. 9 に実験および計算結果との対比を全損失水頭 H と単位断面流量 q の関係で示す。これより，実験による $q\sim H$ 関係は直線状にはなく，Darcy 則の下で成立するラプラス方程式の解からはかなりの隔りがみとめられる。また，この porous media についての透水試験の結果から充塡密度のちがいによって係数の若干異なる Forchheimer 則を得ているが，これらの係数を用いた計算結果と比較すると $a=0.25\,\mathrm{cm}^{-1}\cdot\mathrm{sec}$, $b=0.15\,\mathrm{cm}^{-2}\cdot\mathrm{sec}^2$ を適用した場合が最も実験結果を良く説明しているといえる。透水試験装置（直径 12.5

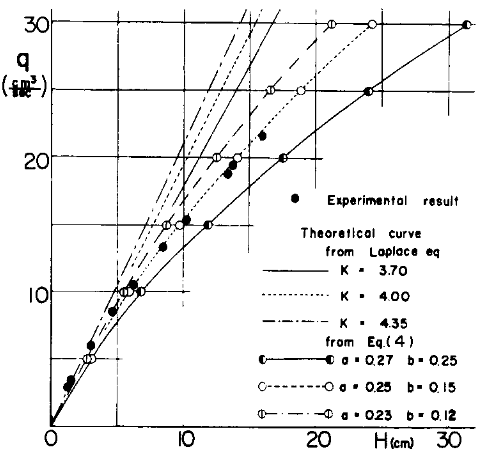

Fig. 9 Comparison of theoretical and experimental relationships between q and H.

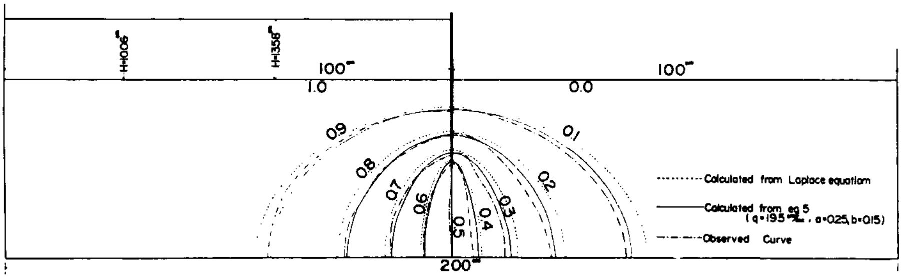

Fig. 10 Comparison of equi-water head lines obtained by Eq. (5), Laplace equation and experiment.

cm のパイプを使用[2]) 内への砂の充塡を密にすることは容易であるが，大きい水槽内の砂をこれと同密度にすることの困難性を考慮すると，この解析結果と実験結果との一致はかなり良好なものとみて良い。

Fig. 10 に $q=19.5\,\mathrm{cm^3/sec/cm}$ の条件下で得られた実験結果と，$a=0.25\,\mathrm{cm^{-1}\cdot sec}$, $b=0.15\,\mathrm{cm^{-2}\cdot sec^2}$ を用い，格子点間隔 $n=2.0\,\mathrm{cm}$ で解析して得られた結果とを水頭分布について示す。全損失水頭については，実験では 13.67 cm，理論からは 13.58 cm となりかなり良い一致を見ることができる。また図には，$q=19.5\,\mathrm{cm^3/sec/cm}$ の場合のラプラス方程式の解を併示してある。この解では $H=10.06\,\mathrm{cm}$ となり絶対値では比較にならないがこの水頭分布の状態のみに着目しても実験結果とかなり様相が異なる。これに対し，この理論結果は良く実験結果と合っていると言えよう。

以上 **Figs. 9**, および **10** の対比より，Darcy 則の上限を越える流れの領域では Forchheimer 則の適用が良い結果を与えると結論することができる。

6. Sheet Pile を有するダムのまわりの流れ

前項では 2, 3 で示した理論の適応性が実験的に実証されたので，ここではこの理論を次の二つの系に適用しその特性をラプラス方程式の解と比較しつつ検討することにする。まず **Fig. 11** (a) に示すように有限領域の中央に設置された 1 列の sheet pile を有するダムのまわりの流れを非対称系の代表例として考える。次に対称系の代表例として **Fig. 11** (b) に示すように 2 列の sheet pile を有するダムを考え，この

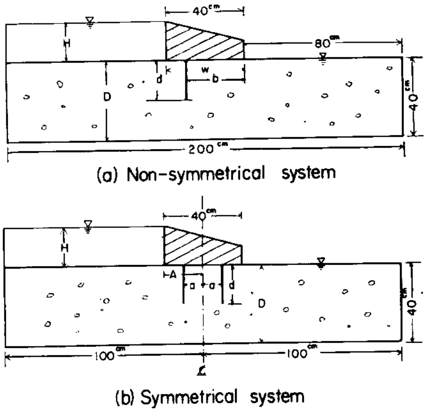

Fig. 11 Schematic diagrams and symbols for low dams in a river.

sheet pile は互に対称軸に対して対称の位置にあり長さは等しいものとする。**Fig. 11** に示すとおり sheet pile の長さを d，透水層の深さ D をとする。非対称系ではダムの長さを W，ダムの下流端から Sheet pile までの距離を b で表わし，対称系ではダムの長さの½を A，対称軸から sheet pile までの距離を a で表わす。これらの系において sheet pile の配列形式を色々変化させた場合の計算結果について述べる。なおこの計算で用いた Forcheimer 則の係数は $a=0.25\ cm^{-1}\cdot sec$，$b=0.15\ cm^{-2}\cdot sec^2$ であり，すべての計算は単位断面を流下する流量 q が $20\ cm^3/sec/cm$，格子点間隔は 2 cm，一点で許るされる誤差はほぼ 1×10^{-4} の条件で行なわれたものである。

6.1. 流　線　網

Fig. 11 (a) において $b/W=0.8$，$d/D=0.75$，同図 (b) において $a/A=0.6$，$d/D=0.75$ の配列例についての計算結果をそれぞれ **Fig. 12**, **Fig. 13** に例示する。これから流線分布はラプラス方程式から得られるそれより流速の大きい所で平均化され，等水頭線はラプラス方程式の解に比べ流速の大きい部分に集まっていることがわかる。これは流速の 2 乗に比例する抵抗項がかなりの比重をもつためで，流れは抵抗の少ない方に進もうとし，水頭は流速の大きいところで多く失なわれているのが認められる。**Fig. 13** においては，この理論を適用した場合ラプラス方程式の解と比較して sheet pile と sheet pile の間の流速が比較的小さい部分に流線が入り込み流速を平均化する傾向が顕著である。

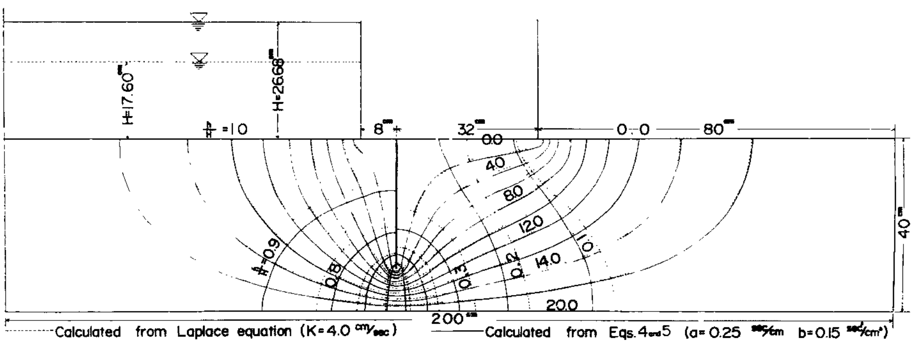

Fig. 12 Flow-nets calculated from Eqs. (4) and (5) and Laplace equation for $b/W=0.8$, $d/D=0.75$ in the system of Fig. 10 (a).

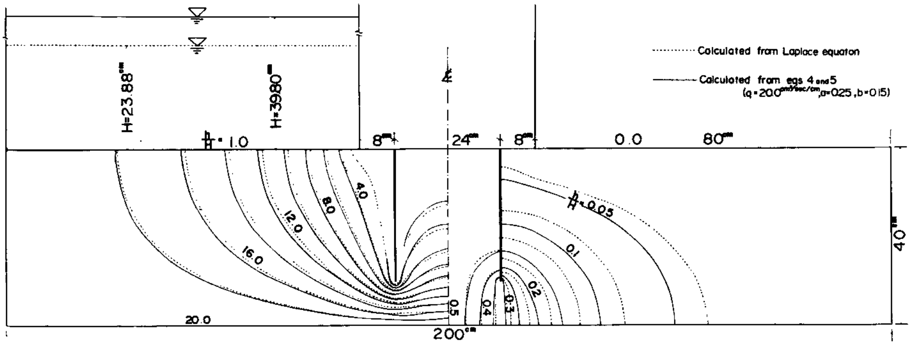

Fig. 13　Flow-nets calculated from eqs. (4) and (5) and Laplace equation for $a/A=0.6$, $d/D=0.75$ in the system of Fig. 10 (b).

6.2. Sheet Pile の位置，深さと全損失水頭Hとの関係

$a=0.25\,\mathrm{cm^{-1}sec}$, $b=0.15\,\mathrm{cm^{-2}sec^2}$, $q=20\,\mathrm{cm^3/sec/cm}$ の場合，**Fig. 11** (a) の系での $H\sim b/W$, **Fig. 11** (b) の系での $H\sim a/A$ の関係を **Fig. 14, 15** に示す。同図にラプラス方程式から得られる結果を示してあるが，その差異は顕著に認められる。sheet pile の位置，深さと全損失水頭 H との関係は同じ傾向にあり sheet ple が深ければ深いほど，ダムの端に近ければ近いほど，また **Figs 14,** および **15** の比較から1列の sheet pile より2列の sheet pile の方が効果の大きいことが認められる。特に sheet pile が2列の場合は sheet pile の位置の効果が顕著に現われているが，これは **Fig. 13** の流線網からわかるようにいわゆる sheet pile の間の死水領域がより縮小されるためである。sheet pile が1列の場合は sheet

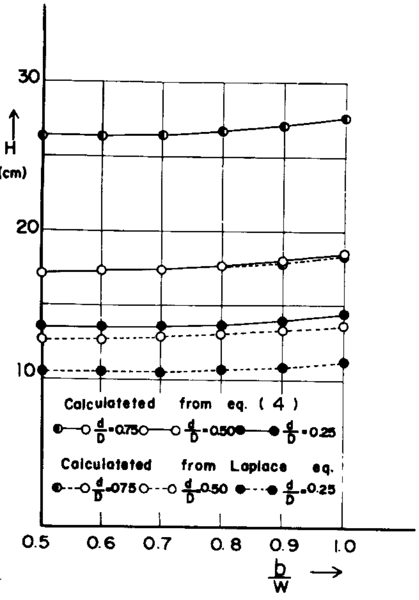

Fig. 14　Relationship among H, b/W and d/D in the system of Fig. 10 (a).
$q=20.0\,\mathrm{cm^3/sec/cm}$,
$a=0.25\,\mathrm{cm^{-1}sec}$,
$b=0.15\,\mathrm{cm^{-2}sec^2}$

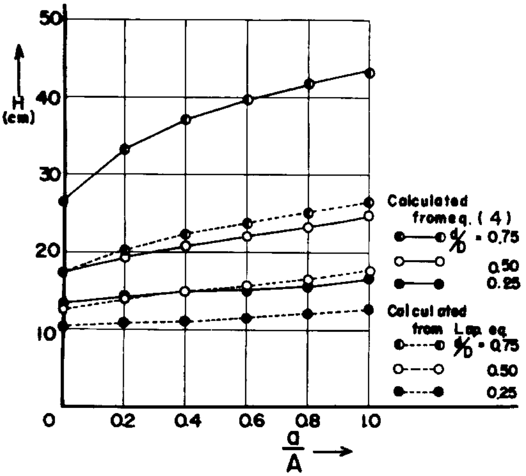

Fig. 15　Relationship among H, a/A and d/D in the system of Fig. 10 (b).
$q=20.0\,\mathrm{cm^3/sec/cm}$,
$a=0.25\,\mathrm{cm^{-1}sec}$,
$b=0.15\,\mathrm{cm^{-2}sec^2}$

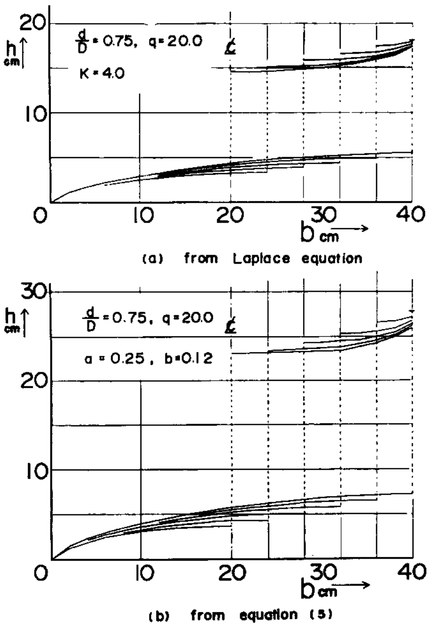

Fig. 16 The water head distribution at the base of a dam with a sheet pile shown in Fig. 10 (a).
The vertical dotted line shows the location of the sheet pile and the water head drop over the sheet pile.

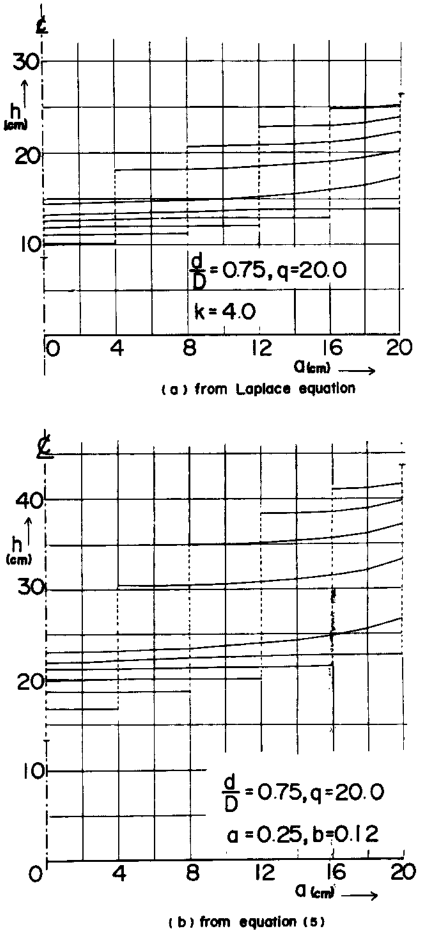

Fig. 17 The water head distribution at the base of a dam with two sheet piles shown in Fig. 10 (b).
The vertical dotted line shows the location of the sheet pile and the water head drop over sheet pile.

pile の位置の影響はそれほど大きくなかった。

6.3. 揚 圧 力 分 布

Fig. 11 (a), (b) の系において, $d/D=0.75$ の場合のダム底面に働く水頭分布を **Figs. 16,** および **17** に例示する。同図にはラプラス方程式から得られた結果についても示してある。この理論とラプラス方程式の解との差は同一流量 ($q=20.0\,cm^3/sec/cm$) を流下させるのに必要な水頭に差があるため揚圧力の値に関しては大きな差を生じているが，この例ではその分布形状について特に大きな差異は認められていない。

7. 結　　語

Non-Darcy 領域における confined seepage 問題に Forchheimer 則を適用することを考え，この法則を適用した場合の基礎方程式，その数値解法を示すとともに，1例として矢板のまわりの流れについて実験を行ない，理論解との対比からこの理論の適応性を実証した。また河川構造物の1例についての解析を行ないラプラス方程式の解と対比しつついくつかの特性について論議を加えた。この研究で扱った scale がすべて実験室的な大きさにとどまっている点に，問題が残るが，Forchheimer 則を用いて non-Darcy 領域の confined-seepage 問題を説明することの可能性，適応性については十分論議できたと考えている。

なおこの計算には京都大学大型計算機センターの電子計算機 FACOM 230—60 を使用した。

参　考　文　献

1）例えば Kochina, P.: Theory of Ground Water Movement. 1962, p. 17.

2）岡太郎：Forchheiner 則を適用した Confined Seepage —河川構造物の浸透問題（1）—，京都大学防災研究所年報，第12号B，昭44，3，pp. 401～410.

3）Scheidegger, A. F.: The Physics of Flow through Porous Media. 1960, p. 127.

4）高見穎郎：Navier-Stokes 方程式の解の一計算，偏微分方程式の数値計算研究会報告集，京大数理解析研究所講究録，昭43，pp. 53～66.

5）山内・森口・一松：電子計算機のための数値計算法（1），培風館，昭40，pp. 163～172.

6）森口繁一：加速係数を用いる無反射法，偏微分方程式の数値計算研究会報告集，京大数理解解研究所講究録，昭43，pp. 71～95.