二変数ガンマ分布とその適用に関する研究（1）
——二変数指数分布の基礎理論——

長尾正志・角屋睦

STUDY ON TWO-VARIATE GAMMA DISTRIBUTION AND ITS ENGINEERING APPLICATION (1)
——Fundamental Theory of Two-Variate Exponential Distribution——

By *Masashi* NAGAO and *Mutsumi* KADOYA

Synopsis

This study aims to develop the fundamental theory on two-variate gamma distribution for its engineering application. The outline of the study is as follows:

(1) Methods of estimation of the parameters included in the probability density function of the distribution, the shape parameter in the marginal distribution of which is the same in each other, are developed by using the techniques of maximum likelihood and moments. As the remarkable result, it is pointed out that the estimator for correlation parameter is coincident with the usual definition of correlation coefficient by the latter but not by the former.

(2) The characters of the two-variate exponential distribution, which is a special type of the gamma distribution, is discussed theoretically and numerically.

(3) For the convenience of engineering applications of the two-variate exponential distribution, numerical values of conditional probability under a given correlation parameter are provided in a table.

1. 緒　　言

近年，合理的な河川計画を樹立するために，たとえば治水計画を例にとれば，洪水のピーク流量，ピーク水位，総流量，総雨量，あるいは潮位など治水機能に関連する多くの要因を同時に勘考していこうとする動きがかなりみられ，多変量統計論の重要性が強く認識されつつある。二変量の統計論はその基礎的な役割を果すものであるが，従来この方面の研究はほとんど正規分布に立脚したものであり，実用解析もまたこの線を出ていない。しかし現実には水文量その他調査対象となる変量が直接正規分布にしたがう場合は少なく，むしろ量の多い方に長く尾を引くような非対称分布を示すことが多く，たとえば指数分布のように顕著な逆J字型の分布を示すものも少なくない。このような非対称分布に対して，対数変換，n乗根変換など適当な変数変換によって正規化し，正規分布としての理論を適用していく方法やその他の非対称分布をあてはめる手法が，一変数の問題としてこれまでにもかなり研究されてきていることは周知のとおりである。しかし二変数，多変数問題となると非対称分布に関する理論がほとんど皆無であるため，結局正規化の手法に依らざるを得ず，水文統計学上の一つの問題点となっている。

このような問題点は，最近盛んになりつつある確率モデルによるシミュレーション解析においても好例が

みられる。たとえば，計画の基礎となる日降水量や日流出量を模擬発生させる場合，これらの変量の分布は指数分布に近いとみられるにもかかわらず，現在のところ，それを一度正規変量に変換して，data generation を行ない，得られた結論を再びもとの変量にもどして議論をし直すという二重の手間が必要とされている。もっともこうした過程において，現在の data generation の理論的根底になっている正規性の検討もされずに，盲信的に直接変量のシミュレーションを行ない，誤った判断を与えることにもなりかねないことに気付かない場合すらみられることもある。

本研究は非対称分布として広く適応性をもつと考えられるガンマ分布について二変数の理論を開発し，その成果の水工計画への応用を図る目的で着手したもので，ここでは二変数のガンマ分布についての基礎理論の展望と，とくに二変数指数分布の基礎理論の展開を試みた結果について報告する。

2.　多変数ガンマ分布研究の現状

ガンマ分布（Γ-分布）は，K. Pearson のIII型分布ともいわれるが，その母数の選択に応じて，正規分布に近い形から，指数分布などの非対称分布に至る非常な広範囲の形をとることから，応用面で極めて有効なものと目されている[1),2)]。

しかし，変量相互間の相関を考慮した多変量ガンマ分布に関する研究は僅かしか見当らない。著者らは不幸にしてその多くを知らないが，ガンマ型の二変数分布の導出およびその Laguerre 多項式あるいはベッセル関数による表現を試みた W. F. Kibble の研究[3)]，さらにその多変量統計への拡張を試みた A. S. Krishnamoorthy らの研究[4)]，わが国では気象統計の立場から検討した井沢の論文[5),6)]などが注目される。ただこれらはいずれも数学的な興味がみられる程度であって，問題への応用という観点よりすると，なお詳細に究明されるべき問題も少なくない。ここでは今後の研究発展上必要な基礎理論のうち，従来の成果の利用できるものについてはその都度引用しつつ，理論的考察を加えていきたい。

3.　二変数ガンマ分布

3.1.　定義と基礎式

一変数のガンマ分布の密度分布関数はよく知られるように次式で定義される。

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\nu}\Gamma(\nu)}e^{-x/\beta}x^{\nu-1},\quad x\geq 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

ν は指数，β は尺度母数といわれる母数である。この分布の平均値 $E(x)$，分散 $D^2(x)$ は，それぞれ

$$E(x)=\beta\nu,\quad D^2(x)=\beta^2\nu \qquad \cdots\cdots(2)$$

で与えられる。とくに $\nu=1$ の場合は指数分布となり，また $\beta=2$ のときは自由度 2ν の χ^2-分布としてよく知られている。

さて，周辺分布が指数 $\nu_1, \nu_2 (\nu_1 \fallingdotseq \nu_1)$ のガンマ分布である二変数 x_1, x_2 についての分布関数は井沢によって誘導されている[6)]が，ここでは指数の等しい場合，すなわち $\nu_1=\nu_2=\nu$ の場合の定義から出発することにする。この場合の密度分布関数 $f(x_1, x_2)$ は次式で与えられる。

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{\Gamma(\nu)(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}}\exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)}-\frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}$$
$$\times(x_1x_2)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}}\right) \qquad \cdots\cdots(3)$$

ただし，式中の$\Gamma(\nu), I_{\nu-1}(z)$ はそれぞれ引数 ν のガンマ関数，$(\nu-1)$ 次の変数ベッセル関数であり，次式で定義される。

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt,\quad I_{\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{\nu+2n}}{2^{\nu+2n}n!\,\Gamma(\nu+n+1)}$$

また，σ_1, σ_2 および ρ はある定数である。なお，定数 ρ は井沢によって指摘されているように，ρ が負のときは変形ベッセル関数 $I_{\nu}(z)$ の z が虚数となり ν の値によっては密度分布が負や虚数になるから不適当で

ある。そこで ρ は非負でなければならない。（３）式より x_1, x_2 の周辺分布 $f_1(x_1), f_2(x_2)$ および x_2 を与えた場合の x_1 の条件付分布 $f(x_1|x_2)$ はそれぞれ（４），（５）式のようになる。

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1)&\equiv\int_0^\infty f(x_1,x_2)dx_2=\frac{1}{\Gamma(\nu)\sigma_1{}^\nu}x_1{}^{\nu-1}\exp\left(-\frac{x_1}{\sigma_1}\right)\\ f_2(x_2)&\equiv\int_0^\infty f(x_1,x_2)dx_1=\frac{1}{\Gamma(\nu)\sigma_2{}^\nu}x_2{}^{\nu-1}\exp\left(-\frac{x_2}{\sigma_2}\right)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

$$f(x_1|x_2)\equiv\frac{f(x_1,x_2)}{f_2(x_2)}=\frac{\sigma_2{}^\nu}{(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)}-\frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}}\right)\quad\cdots\cdots(5)$$

また，x_2 を与えた場合の x_1 の等件付平均値（回帰曲線）$E(x_1|x_2)$ および条件付分散 $D^2(x_1|x_2)$ は次式で与えられる。

$$E(x_1|x_2)=\nu\sigma_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(x_2-\nu\sigma_2)\quad\cdots\cdots(6)$$

$$D^2(x_1|x_2)=\nu\sigma_1{}^2(1-\rho)^2+2\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2}\rho(1-\rho)x_2\quad\cdots\cdots(7)$$

以上は井沢によって導かれたものであるが，以後の考察の基礎となるので結果のみを記した。

3.2. 母数の推定

さて，以上の結果を実際に使用するには，まず定義式中の未知の母数 σ_1, σ_2 および ρ を推定しなければならない。ところで，二変数ガンマ分布の推定論，さらに推定値の検定論は現在ほとんど研究が進んでおらず，わずかに井沢が指数分布に関する最尤解を導いているに過ぎない。そこで，著者らは二変数ガンマ分布について最尤解および積率解を求め，実用に供しようとしたものである。

（１）最　尤　解

いま，（３）式の ν を既知とした場合の二変数ガンマ分布に従う n 組の標本 $(x_{1i}, x_{2i})(i=1,2,\cdots,n)$ を取り出したとき，その同時分布 P_n は次式のようになる。

$$P_n=\frac{1}{\{\Gamma(\nu)\cdot(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}\}^n}\prod_{i=1}^n(x_{1i}x_{2i})^{\frac{\nu-1}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_1(1-\rho)}\sum_{i=1}^n x_{1i}-\frac{1}{\sigma_2(1-\rho)}\sum_{i=1}^n x_{2i}\right\}\times\prod_{i=1}^n I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho x_{1i}x_{2i}}}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(1-\rho)}\right)\quad\cdots\cdots(8)$$

これより

$$\frac{\partial(\log P_n)}{\partial\sigma_1}=\frac{\partial(\log P_n)}{\partial\sigma_2}=\frac{\partial(\log P_n)}{\partial\rho}=0$$

を連立して解き，微分 $I_\nu'(z)=\{I_{\nu-1}(z)+I_{\nu+1}(z)\}/2$ および漸化式 $I_{\nu-1}(z)-I_{\nu+1}(z)=(2\nu/z)I_\nu(z)$ を用いて整理すると，最尤解はつぎのようになる。

$$\widehat{\sigma_1}=\frac{1}{n\nu}\sum_{i=1}^n x_{1i},\quad \widehat{\sigma_2}=\frac{1}{n\nu}\sum_{i=1}^n x_{2i}\quad\cdots\cdots(9)$$

$$\nu\sqrt{\hat\rho}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{I_\nu\left(\frac{2\sqrt{\hat\rho\xi_i\eta_i}}{1-\hat\rho}\right)}{I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\hat\rho\xi_i\eta_i}}{1-\hat\rho}\right)}\sqrt{\xi_i\eta_i}\quad\cdots\cdots(10)$$

ただし，ξ_i, η_i は次式で与えられる。

$$\xi_i=\frac{x_{1i}}{\widehat{\sigma_1}},\quad \eta_i=\frac{x_{2i}}{\widehat{\sigma_2}}\quad\cdots\cdots(11)$$

なお，以後この ξ, η を二変数ガンマ分布の規準化変量とよぶことにする。

以上の結果をみると，結局，尺度母数 σ_1, σ_2 は簡単に平均値から推定できるが，相関に関係する母数 ρ

は陰に含まれるから，（10）式を満足する値として試算的に求めざるを得ず，扱いやすい形とはいえない。

（2）積　率　解

分布関数の定義式を用いると，p, q 次の積率 ν_{pq} はつぎのように書ける。

$$\left.\begin{aligned}\nu_{pq}&\equiv\int_0^\infty\int_0^\infty x_1{}^p x_2{}^q f(x_1,x_2)dx_1dx_2=C_1\int_0^\infty x_2{}^{\frac{\nu-1}{2}+q}\exp\left\{-\frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}dx_2\\&\quad\times\int_0^\infty x_1{}^{\frac{\nu-1}{2}+p}\exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)}\right\}\cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho x_2}}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(1-\rho)}\sqrt{x_1}\right)dx_1\\&\text{ただし}\\C_1&=\frac{1}{\Gamma(\nu)\cdot(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)^{\frac{\nu-1}{2}}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

ところで，式中の x_1 に関する積分項を I_1 とおき，$x_1=\sqrt{t}$ の変換を用いると，これは次式のように積分できる[7]。

$$\left.\begin{aligned}I_1&\equiv\int_0^\infty x_1{}^{\frac{\nu-1}{2}+p}\exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)}\right\}I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}(1-\rho)}\sqrt{x_1}\right)dx_1\\&=C_2\frac{\Gamma(\nu+p)}{\Gamma(\nu)}\rho^{\frac{\nu-1}{2}}(1-\rho)^{p+1}\sigma_1{}^{p+\frac{\nu+1}{2}}x_2{}^{\frac{\nu-1}{2}}{}_1F_1\left(\nu+p\,;\nu\,;\frac{\rho}{\sigma_2(1-\rho)}x_2\right)\\C_2&=\sigma_2{}^{-\frac{\nu-1}{2}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(13)$$

ただし，${}_1F_1$ は合流型超幾何関数で

$${}_1F_1(\alpha\,;\gamma\,;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}$$

である。

したがって，積率は次式のように求められる[8]。

$$\begin{aligned}\nu_{pq}&=C_1C_2\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}x_2{}^{\nu+q-1}{}_1F_1\left(\nu+p\,;\nu\,;\frac{\rho}{\sigma_2(1-\rho)}x_2\right)dx_2\\&=\frac{\Gamma(\nu+p)\Gamma(\nu+q)}{\{\Gamma(\nu)\}^2}(1-\rho)^{p+q+\nu}\sigma_1{}^p\sigma_2{}^qF(\nu+p,\nu+q\,;\nu\,;\rho)\quad\cdots\cdots(14)\end{aligned}$$

ただし，Fは超幾何関数で

$$F(a\,;b\,;c\,;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^\infty\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{n!\,\Gamma(c+n)}z^n$$

である。そこで p, q に具体的に 0，1，2 を代入することによって次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\nu_{10}=\nu\sigma_1,\quad\nu_{20}=\nu(\nu+1)\sigma_1{}^2\\&\nu_{01}=\nu\sigma_2,\quad\nu_{02}=\nu(\nu+1)\sigma_2{}^2\\&\nu_{11}=\nu(\nu+\rho)\sigma_1\sigma_2\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(15)$$

よって，二変数ガンマ分布からの n 組の標本 $(x_{1i},x_{2i})(i=1,\cdots,n)$ より算出される一次および二次の積率に関して次式が成り立つ。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{1i}\equiv\overline{x_1}=\nu\sigma_1,\quad\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{2i}\equiv\overline{x_2}=\nu\sigma_2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_1{}^2\equiv\overline{x_1{}^2}=\nu(\nu+1)\sigma_1{}^2,\quad\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{2i}{}^2\equiv\overline{x_2{}^2}=\nu(\nu+1)\sigma_2{}^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{1i}x_{2i}\equiv\overline{x_1x_2}=\nu(\nu+\rho)\sigma_1\sigma_2$$

結局，積率解は上記の諸式よりつぎのようになる。

$$\hat{\nu}=\frac{(\overline{x_1})^2}{\overline{x_1{}^2}-(\overline{x_1})^2}=\frac{(\overline{x_2})^2}{\overline{x_2{}^2}-(\overline{x_2})^2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\sigma}_1=\frac{\overline{x_1^2}-(\overline{x_1})^2}{\overline{x_1}},\quad \hat{\sigma}_2=\frac{\overline{x_2^2}-(\overline{x_2})^2}{\overline{x_2}}\\&\hat{\rho}=\frac{\overline{x_1x_2}-\overline{x_1}\,\overline{x_2}}{\sqrt{\overline{x_1^2}-(\overline{x_1})^2}\sqrt{\overline{x_2^2}-(\overline{x_2})^2}}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(16)$$

この結果をみると，密度分布関数に含まれる母数に関して，σ については尤度解と積率解が一致すること，および相関に関する母数 ρ の積率解が通常の定義による標本相関係数と一致することが明らかとなった。

なお，指数 ν を既知とする場合の積率解として次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\sigma}_1=\frac{\overline{x_1}}{\nu},\quad \hat{\sigma}_2=\frac{\overline{x_2}}{\nu}\\&\widehat{\sigma_1^2}=\frac{\overline{x_1^2}}{\nu(\nu+1)},\quad \widehat{\sigma_2^2}=\frac{\overline{x_2^2}}{\nu(\nu+1)}\\&\hat{\rho}=\frac{\nu\overline{x_1x_2}}{\overline{x_1}\,\overline{x_2}}-\nu\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(17)$$

4.　二変数指数分布

4.1.　基　礎　式

われわれの周辺では $\nu=1$ とおいたガンマ分布，すなわち指数分布に従う変量がよくみられるから，これについて考察する。二変数の指数分布の定義ないし諸特性は以上の関係式から容易に誘導される。その結果を列挙するとつぎのようになる。なお，記号はすべて前の場合と同じものを使っている。

密度分布関数

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho)}\exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)}-\frac{x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}\times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}}\right)\quad\cdots\cdots(18)$$

周辺分布

$$f_1(x_1)=\frac{1}{\sigma_1}\exp\left(-\frac{x_1}{\sigma_1}\right),\quad f_2(x_2)=\frac{1}{\sigma_2}\exp\left(-\frac{x_2}{\sigma_2}\right)\quad\cdots\cdots(19)$$

条件付分布

$$f(x_1|x_2)=\frac{1}{\sigma_1(1-\rho)}\exp\left\{-\frac{x_1}{\sigma_1(1-\rho)}-\frac{\rho x_2}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}\times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{x_1x_2}{\sigma_1\sigma_2}}\right)\quad\cdots\cdots(20)$$

条件付平均値

$$E(x_1|x_2)=\sigma_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(x_2-\sigma_2)\quad\cdots\cdots(21)$$

条件付分散

$$D^2(x_1|x_2)=\sigma_1^2(1-\rho)^2+2\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2}\rho(1-\rho)x_2\quad\cdots\cdots(22)$$

4.2.　母 数 の 推 定

（1）最　尤　解

（9），(10)，(11) 式から次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\sigma}_1=\overline{x_1},\quad \hat{\sigma}_2=\overline{x_2}\\&\sqrt{\hat{\rho}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_1\left(\dfrac{2\sqrt{\hat{\rho}\xi_i\eta_i}}{1-\hat{\rho}}\right)}{I_0\left(\dfrac{2\sqrt{\hat{\rho}\xi_i\eta_i}}{1-\hat{\rho}}\right)}\sqrt{\xi_i\eta_i}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(23)$$

ただし

$$\xi_i=\frac{x_{1i}}{\hat{\sigma}_1},\quad \eta_i=\frac{x_{2i}}{\hat{\sigma}_2}\quad\cdots\cdots(24)$$

ところで，上式から試算して $\hat{\rho}$ を求めるにはつぎのようにすればよい。すなわち，新しい変数 z_i を

$$z_i \equiv \frac{2\sqrt{\hat{\rho}}}{1-\hat{\rho}}\sqrt{\xi_i \eta_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots(25)$$

と定義し，それから作られる関数 $K(z_i)$

$$K(z_i) \equiv \frac{I_1(z_i)}{I_0(z_i)} z_i = K(\hat{\rho}\,;\xi_i, \eta_i) \qquad \cdots\cdots(26)$$

を用いると，(23) 式はつぎのように書ける。

$$\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K(z_i) \qquad \cdots\cdots(27)$$

したがって，あらかじめ z と $K(z)$ の関係を求めておけば適当に $\hat{\rho}$ を仮定することによって z_i を求め，この z_i に対して (27) 式が満足されるように $\hat{\rho}$ を修正していけばよい。なお $\hat{\rho}$ の第一次近似としてつぎの積率解を使えば好都合であるが，このような労力の多い試算によって厳密な最尤解を求めることは標本の誤差などをも考慮するとその価値に疑義がある。実際の計算にはつぎの積率解を利用すれば十分であろう。

(2) 積　率　解

二変数指数分布に対する積率は (14) 式から次式のようになる。

$$\nu_{pq} = p!\,q!\,(1-\rho)^{p+q+1}\sigma_1{}^p\sigma_2{}^q F(p+1, q+1\,;1\,;\rho) \qquad \cdots\cdots(28)$$

したがって，任意の積率は上式によって計算できるからその結果を使うか，あるいは，二変数ガンマ分布で ν が既知で1である場合の積率解 (17) 式を用いると，積率解はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\sigma}_1 = \overline{x_1}, \quad \hat{\sigma}_2 = \overline{x_2} \\ &\hat{\sigma}_1{}^2 = \frac{1}{2}\overline{x_1{}^2}, \quad \hat{\sigma}_2 = \frac{1}{2}\overline{x_2{}^2} \\ &\hat{\rho} = \frac{\overline{x_1 x_2}}{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} - 1 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(29)$$

以上によって密度分布関数に含まれる母数がすべて推定できたので，つぎに具体的に密度分布関数の性質を調べてみよう。なお，以後の計算ではすべて規準化変量を使って表現する。

4.3. 密度分布関数

二変数指数分布の定義式 (18) で示される密度分布を三次元空間の曲面の方程式として幾何学的に考察してみよう。まず分布曲面を概括的に把握するために ρ を 0.3 としたときの密度分布の1例を **Fig. 1** に示す。

この曲面で η を固定した場合の分布曲線を $f=f(\xi, \eta)$ として調べてみると，まず $\eta=0$ では，

$$f(\xi, 0) = \frac{1}{1-\rho}\exp\left(-\frac{\xi}{1-\rho}\right)$$

となるから，ξ が増すにつれて $f(\xi, \eta)$ は指数関数的に減少する。つぎに，η が増加するにつれて，$f(\xi, \eta)$ の減少は指数関数よりも鈍くなり，ついに，ある限界 $\eta=\eta_c$ からモードが現われてくるが，図では縦距が小さく判り難いので，これを $\eta=\eta$ で切った断面における分布曲線の例を **Fig. 2** (a), (b), (c) に示す。これらの図によってつぎのような傾向が認められる。

i) $\eta=0$ では ξ の増加に伴って $f(\xi, \eta)$ は指数関数的なてい減をするのに対して，η が増すにつれてモードが現われてくる。このモードは，ρ が大きいほど小さな η から現われてくる。

ii) モードの位置は，ρ が大きくなるにつれて，あるいは，η が大になるにつれて，ξ の正の方向へ移行する。

iii) モードの近傍の尖りは，ρ が小さいほど，また，η が大きいほど，小さい。

ところで，このモードの位置はつぎのようにして求められる。いま，η を固定した場合にモードを生ずる ξ を ξ_m と記すと，ξ_m は $[\partial f(\xi, \eta)/\partial\xi]_{\xi=\xi_m}=0$ より (30)，(31) 式で求められる。($\rho, \eta \fallingdotseq 0$)

$$\frac{1-\rho}{2\rho}\cdot\frac{1}{\eta} = \frac{I_1(z)}{z\cdot I_0(z)} \equiv G(z) \qquad \cdots\cdots(30)$$

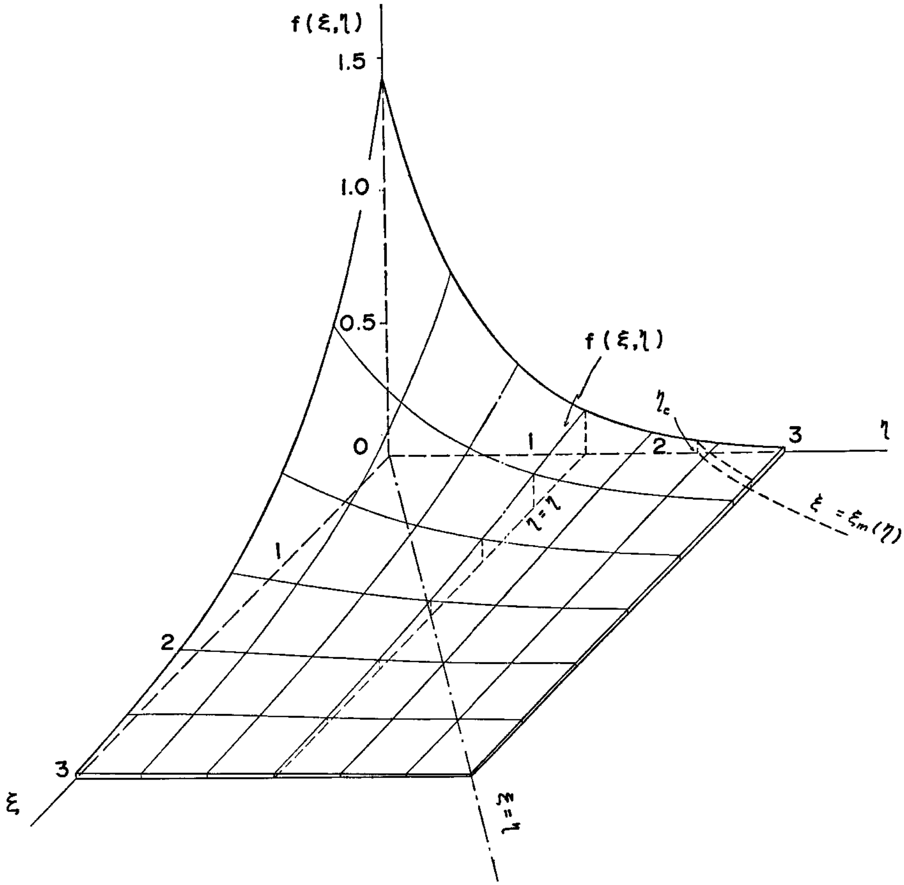


Fig. 1　Example of two-variate exponential distribution (case of $\rho=0.3$).

$$z\equiv\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\xi_m\eta}\quad\cdots\cdots(31)$$

ところで，ρ,η が与えられると（30）式の左辺は既知である。そこで，あらかじめ z と $G(z)$ の関係を求めておけば z が，したがって，（31）式によって，ξ_m が求められる。

つぎにモードの存在限界を求めよう。変形ベッセル関数の漸化式を使って

$$\frac{I_1(z)}{zI_0(z)}=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{I_2(z)}{I_0(z)}\right\}$$

が導かれるが，変形ベッセル関数の性質として，$0\leq I_2(z)/I_0(z)<1$（等号は $z=0$ で成立）である。よって，

$$\eta\geq\frac{1-\rho}{\rho}\equiv\eta_c\quad\cdots\cdots(32)$$

の範囲に η がないとモードは存在しないことが判る。

以上の諸式を用いて，η を固定した場合の ξ のモードの位置 ξ_m を，ρ の種々の値について示すと **Fig. 3** のようになる。これより ρ が小さければ，η がかなり大きな値をとらない限りモードは現われないが，ρ が大きくなると η の小さい値からでも出現してくる様子が諒解されよう。また，η が大きくなるにつれて，モードを連ねた曲線 $\xi_m=\xi_m(\eta)$ は直線に近くなり，ある漸近曲線をもつことが予想される。この漸近曲線は

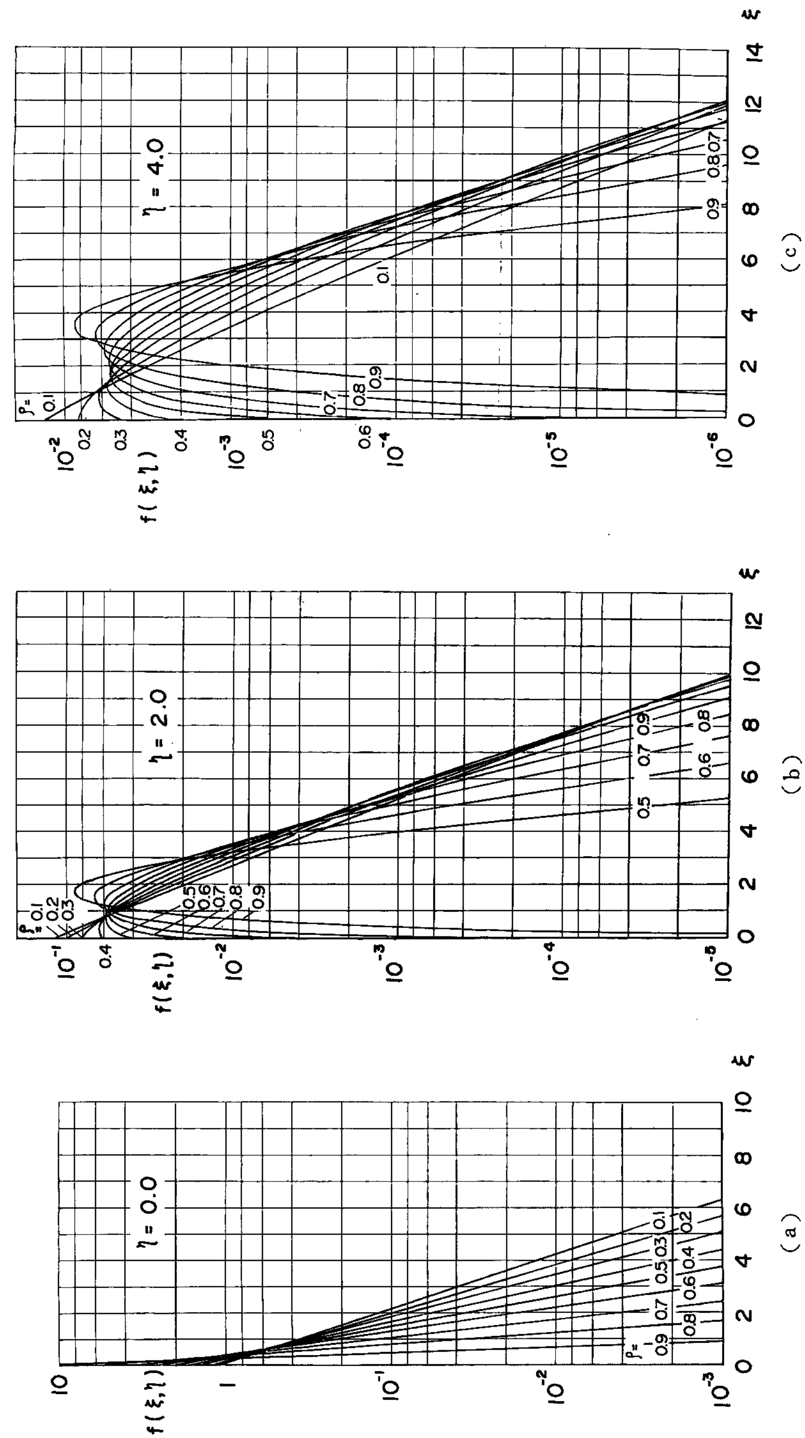


Fig. 2 Examples of probability density of two-variate exponential distribution.

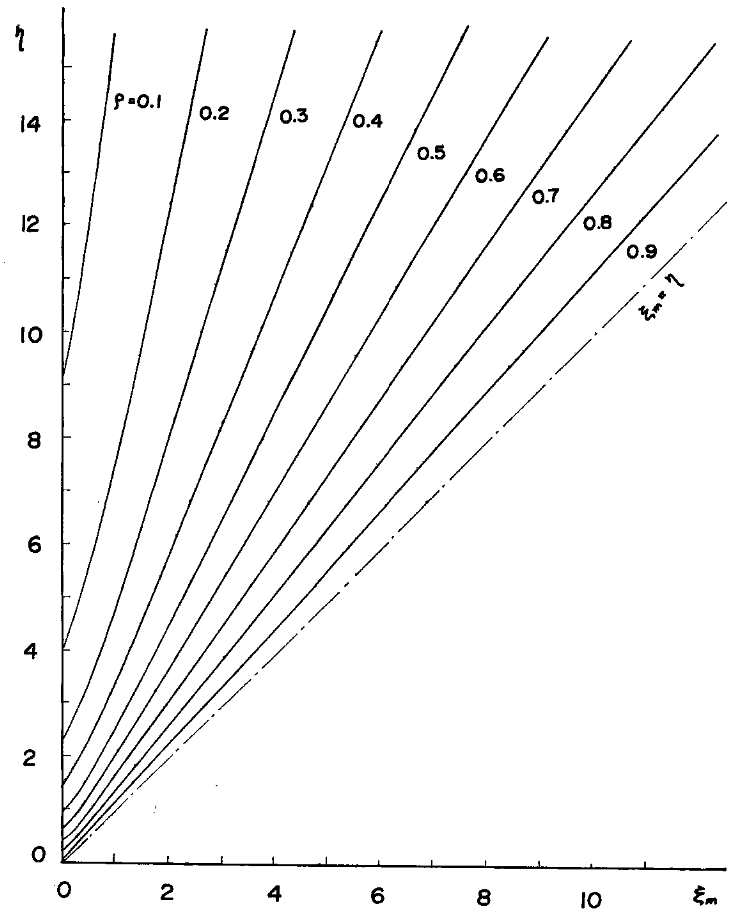


Fig. 3 Positions of mode of conditional probability density function.

つぎのようにして求められる。

まず，$z \to \infty$ のときの $I_\nu(z)$ の漸近展開

$$I_\nu(z)=\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\left\{1-\frac{4\nu^2-1^2}{1!(8z)}+\frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)}{2!(8z)^2}+\cdots\right\}$$

を用いると，$I_1(z)/I_0(z)$ を z のべき数に展開して，

$$\frac{I_1(z)}{I_0(z)}\fallingdotseq 1-\frac{0.5}{z}-\frac{0.125}{z^2}-\cdots$$

となる。これを (30) 式に代入して

$$\frac{z^2}{\eta}\fallingdotseq\frac{2\rho}{1-\rho}z\left(1-\frac{0.5}{z}-\frac{0.125}{z^2}-\cdots\right)=\frac{2\rho}{1-\rho}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)-O\left(\frac{1}{z}\right)\right\}\quad\cdots\cdots(33)$$

となるが，z が十分大きいとき $O(1/z)$ は $(z-1/2)$ に比べて無視できるとして，(31) 式に代入すると

$$\xi_m\fallingdotseq\frac{1-\rho}{2}z-\frac{1-\rho}{4}$$

がえられる。ところで，(33) 式においてさらに z が大きくなれば，$z\gg 1/2$ としてよく，(33) 式は $z\fallingdotseq 2\rho\eta/(1-\rho)$ となる。したがって

$$\xi_m \doteqdot \rho\eta-\frac{1-\rho}{4} \quad \text{あるいは} \quad \eta \doteqdot \frac{1}{\rho}\xi_m+\frac{1-\rho}{4\rho} \qquad \cdots\cdots(34)$$

が求める漸近線の方程式である。

4.4.　条件付非超過確率

実用上の便宜のために，ここに条件付非超過確率を定義しておこう。規準化変量を用いれば，これは(20)式を考慮するとつぎのように表わされる。

$$F(\xi|\eta)=\int_0^{\xi} f(\xi|\eta)d\xi=\int_0^{\xi}\frac{1}{1-\rho}\exp\left(-\frac{\xi+\rho\eta}{1-\rho}\right)I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\xi\eta}\right)d\xi \qquad \cdots\cdots(35)$$

これは当然のことながら ρ に依存する。ρ の 0.1(0.1)0.9 の値に対しての $F(\xi|\eta)$ の値を，η に関して 0(0.25)3.00(0.5)5(1)10(2)18，ξ に関して 0.25(0.25)10(0.5)14(1)18，また $\rho\geq 0.6$ に対しては ξ について 0.05(0.05)0.25 を付加した数表を **Table 1〜9** に示す。ただし，同表で左端欄は ξ，最上欄は η の値を示す。計算は必要に応じて ξ を最小 0.005 ごとに $f(\xi|\eta)$ を求め Newton-Cotes の数値積分公式を用い，KDC-II を利用して行なった。

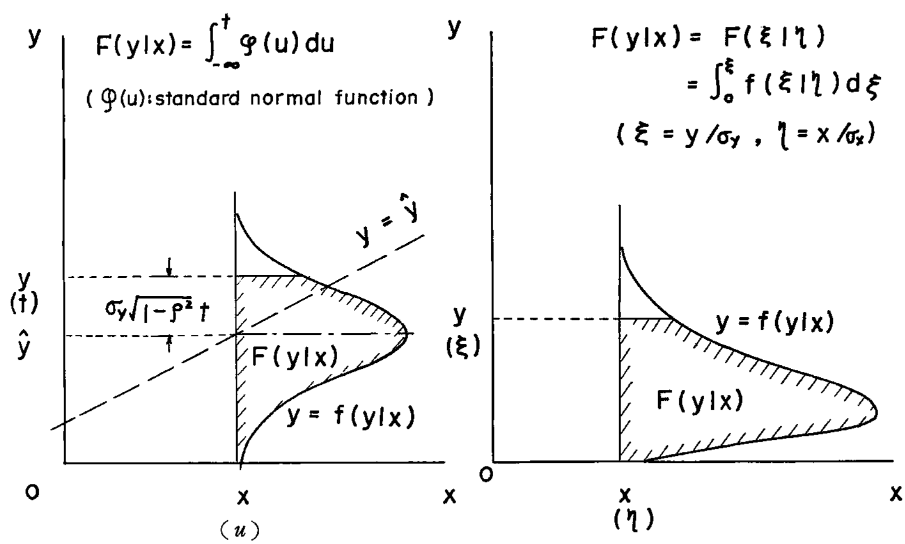
この数表の利用方法の1例として二変数 (x, y) のシミュレーション手法を考えてみる。二変数の正規分布の場合，指定変数 x に対する y の推定式は周知のように次式で与えられる。

$$y=\bar{y}+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})+\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}\,t \qquad \cdots\cdots(36)$$

ここに，t は規準化正規変量である。正規分布の場合の条件付分散 $D^2(y|x)$ は x に依存しないから，条件付平均値に付け加えられる項は上式右辺第3項のランダム項のように簡単な形をとるが，x, y が指数分布の場合には上式に対応してつぎの形式をとる。

$$y=\bar{y}+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})+\sqrt{\sigma_y^2(1-\rho)^2+2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x}\rho(1-\rho)x}\;\varepsilon \qquad \cdots\cdots(37)$$

ただし ε は(36)式の t に対応する変量であるが，ρ, x に無関係な規準化変量であり得ず，$F(y|x)$ の関



$$f(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{y|x}}\exp\left(-\frac{(y-\hat{y})^2}{2\sigma_{y|x}{}^2}\right) \qquad f(y|x)=\frac{1}{\sigma_y(1-\rho)}\exp\left(-\frac{y}{\sigma_y(1-\rho)}-\frac{\rho x}{\sigma_y(1-\rho)}\right)$$

$$\hat{y}=\bar{y}+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x}) \qquad \times I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}}\right)$$

(a)　　　　(b)

Fig. 4　Conceptional illustrations of conditional probability density function for normal and exponential distributions.

数 $\varepsilon=\varepsilon[F(y|x)]$ である。すなわち指定変数 $x=x$ に対する y の条件付密度分布は ρ, x に依存するから，**Fig. 4**（a），（b）に示されるように正規分布の場合の（36）式で与えられる y は，指数分布の場合は，$F(y|x)$ すなわち $F(\xi|\eta)$ の関数として，

$$y=y[F(y|x)]=y[F(\xi|\eta)] \quad \cdots\cdots(38)$$

の形で与えられることがわかる。すなわち $F(\xi|\eta)$ の数表が実用上きわめて重要な役割を果すわけである。

いま一つ二変数指数分布の場合の任意領域 D に (x, y) なる点が含まれる確率を考えよう。D を規準化座標 (ξ, η) で表わすと，(ξ, η) が領域 D に含まれる確率 $P(D)$ は

$$P(D)=\iint_D f(\xi, \eta)d\xi d\eta=\int_{\eta_l}^{\eta_u} f(\eta)\left\{\int_{\xi_{il}}^{\xi_{iu}} f(\xi|\eta)d\xi\right\}d\eta$$

の形で表現できる。ここに η_l, η_u は η の変域を表わし ξ_{il}, ξ_{iu} は ξ 軸に平行な直線で領域を分割したとき，i 番目のスリットの下限，上限を意味する。具体的には上式はつぎの形式に表わせる。

$$P(D)=\sum_{i=0}^{n} e^{-\eta_i}\{F(\xi_{iu}|\eta_i)-F(\xi_{il}|\eta_i)\}\Delta\eta_i \quad \cdots\cdots(39)$$

ここに $\Delta\eta_i$ は分割領域の間隔，n は分割数である。$F(\xi|\eta)$ は表に示されているから，この計算は容易に実行できる。

5. 結　　語

以上，相関を考慮した場合の指数の等しい二変数ガンマ分布とくに指数分布について，理論的に研究を行なったが結果を要約するとつぎのようになる。

（1）二変数ガンマ分布およびその典型としての二変数指数分布の母数推定について最尤解および積率解を理論的に誘導し，尺度母数に関する最尤解と積率解が一致することおよび相関に関係する母数の積率解が通常使われる相関係数と一致することを示した。

（2）さらに二変数指数分布については，分布関数の性質を具体的な計算を通じて明確にし，とくに，モードの位置，発生条件などを明らかにした。

（3）二変数指数分布に関連する確率計算を容易にするため，種々の相関係数および規準化変量に対する非超過確率の値を計算し数表にまとめ，これを利用したシミュレーションや任意領域における確率計算の手法を示した。

今後，以上の研究成果を継続・発展させるとともに二変数指数分布における検定論，極値論の研究，さらにその一般ガンマ分布への拡張を通じて水工計画への応用を考えて行く予定である。

本研究のとりまとめに際し，本研究所福島晟助手，壺井義統研修生の助力を得た。記して謝意を表する。なお本研究に際し文部省科学研究費の一部を充当した。

参　考　文　献

1）たとえば，岡本雅典・鈴木栄一：降水量の分布とその正規化に関する2，3の問題，気象と統計，第6巻，pp.49～51.
2）小林康江・石部幽香子：雨量の度数の分布について，気象と統計，第8巻，第3～4号，pp.51～53.
3）Kibble W. F.: A Two-Variate Gamma Type Distribution, SANKHYA (The Indian Journa of Statistics) vol. 5, 1941, pp.137～150.
4）Krishnamoorthy A. S. and M. Parthasathy: A Multivariate Gamma-type Distribution, Annal of Mathematical Statistics, vol. 22, 1951, pp.549～117.
5）井沢竜夫：二変数の Γ-分布について（降水量の分布第2報），気象と統計，第4巻，第1号，pp.9～15.
6）井沢竜夫：二変数の Γ-分布について（続），気象と統計，第4巻，第2号，pp.15～19.
7）たとえば，森口繁一他：数学公式III，一特殊関数一岩波全書，p.200.
8）Gradshteyn I. S. and I. M. Ryzhik: Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York and London, 1965, p.860.

Table 1-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.1$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.25	242535	236760	231121	225615	220240	214992	209868	204866	199981	195213	190557	186012	181574
0.50	426247	417481	408889	400468	392215	384127	376200	368431	360818	353357	346045	338880	331859
0.75	565402	555423	545605	535945	526442	517093	507897	498851	489953	481201	472592	464126	455800
1.00	670807	660710	650736	640887	631161	621558	612075	602714	593472	584349	575344	566456	557684
1.25	750648	741069	731572	722157	712826	703577	694413	685332	676335	667423	658594	649851	641192
1.50	811125	802401	793719	785080	776486	767936	759434	750980	742574	734218	725913	717659	709458
1.75	856933	849209	841493	833786	826091	818409	810741	803090	795456	787842	780248	772676	765128
2.00	891632	884933	878215	871480	864731	857969	851196	844414	837624	830829	824031	817229	810427
2.25	917915	912195	906438	900645	894818	888960	883071	877154	871212	865245	859254	853243	847212
2.50	937824	933000	928127	923206	918238	913225	908170	903073	897936	892762	887551	882306	877027
2.75	952904	948877	944793	940655	936462	932216	927919	923573	919179	914738	910252	905722	901150
3.00	964326	960993	957599	954147	950637	947071	943450	939776	936048	932270	928440	924563	920637
3.25	972978	970238	967437	964578	961661	958687	955657	952572	949433	946240	942996	939700	936354
3.50	979532	977292	974995	972641	970231	967765	965245	962671	960043	957363	954631	951848	949014
3.75	984496	982675	980800	978872	976891	974857	972772	970635	968448	966210	963921	961584	959197
4.00	988256	986782	985259	983686	982065	980396	978678	976913	975100	973240	971332	969378	967377
4.25	991105	989916	988683	987406	986085	984720	983311	981858	980361	978822	977238	975612	973942
4.50	993262	992307	991312	990279	989206	988094	986942	985751	984520	983250	981941	980592	979203
4.75	994896	994131	993332	992498	991629	990725	989787	988813	987805	986761	985681	984567	983416
5.00	996134	995523	994882	994211	993509	992778	992015	991282	990398	989542	988655	987736	986786
5.25	997072	996585	996072	995533	994969	994377	993759	993115	992443	991744	991017	990262	989479
5.50	997782	997395	996986	996554	996101	995624	995124	994602	994056	993486	992891	992273	991629
5.75	998320	998013	997687	997342	996979	996596	996192	995769	995326	994863	994378	993872	993345
6.00	998728	998484	998225	997950	997659	997352	997027	996686	996327	995951	995556	995143	994712
6.25	999036	998844	998639	998420	998187	997941	997680	997405	997114	996810	996489	996153	995801
6.50	999270	999118	998956	998781	998596	998399	998190	997968	997734	997488	997228	996955	996668
6.75	999447	999327	999199	999061	998913	998756	998588	998410	998221	998023	997812	997591	997357
7.00	999581	999487	999386	999276	999159	999033	998899	998756	998605	998444	998274	998095	997905
7.25	999683	999609	999529	999442	999349	999249	999141	999028	998906	998777	998639	998494	998341
7.50	999760	999702	999639	999570	999496	999417	999331	999240	999142	999038	998928	998811	998686
7.75	999818	999772	999723	999669	999610	999547	999479	999406	999328	999244	999155	999061	998960
8.00	999862	999826	999788	999745	999699	999648	999594	999536	999473	999406	999335	999259	999177
8.25	999896	999868	999837	999804	999767	999727	999684	999638	999587	999534	999476	999415	999350
8.50	999921	999899	999875	999849	999820	999788	999754	999717	999677	999634	999588	999539	999486
8.75	999940	999923	999905	999884	999861	999836	999808	999779	999747	999713	999676	999636	999594
9.00	999955	999941	999927	999910	999892	999872	999851	999828	999802	999775	999745	999714	999679
9.25	999966	999955	999944	999931	999917	999901	999884	999866	999846	999824	999800	999774	999747
9.50	999974	999966	999957	999947	999936	999923	999910	999895	999879	999862	999843	999822	999800
9.75	999980	999974	999967	999959	999950	999941	999930	999919	999906	999892	999876	999860	999843
10.00	999985	999980	999975	999969	999962	999954	999945	999937	999926	999915	999903	999890	999876
10.50	999992	999988	999985	999982	999977	999973	999967	999962	999955	999948	999940	999932	999923
11.00	999995	999993	999992	999989	999987	999984	999980	999977	999973	999968	999963	999958	999952
11.50	999997	999996	999995	999994	999992	999990	999988	999986	999983	999980	999977	999974	999970
12.00	999998	999998	999997	999996	999995	999994	999993	999992	999990	999988	999986	999984	999982
12.50	999999	999999	999999	999998	999997	999997	999995	999995	999994	999993	999991	999990	999989
13.00	999999	999999	999999	999999	999998	999998	999997	999997	999996	999995	999995	999994	999993
13.50				999999	999999	999999	999998	999998	999998	999997	999997	999996	999996
14.00					999999	999999	999999	999999	999999	999998	999998	999998	999997
15.00									999999	999999	999999	999999	999999

Table 1-(b) Continue. (η=3.50～18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.25	173011	164850	157071	149657	135855	123318	111931	101589	92198	75925	62510	51453	42343
0.50	318237	305158	292601	280545	257864	236968	217722	200000	183685	154855	130456	109827	92399
0.75	439559	423854	408670	393992	336093	340043	315733	293058	271919	233876	200905	172377	147735
1.00	540484	523738	507437	491574	461128	432334	405128	379443	355214	310865	271575	236857	206256
1.25	624128	607402	591015	574964	543869	514101	485641	458464	432541	384334	340743	301471	266206
1.50	693216	677192	661393	645823	615385	585905	557402	529886	503365	453301	407157	364825	326152
1.75	750108	735196	720402	705735	676813	648485	620800	593798	567511	517181	469948	425874	384956
2.00	796828	783245	769688	756169	729286	702671	676391	650505	625064	575692	528562	483871	444746
2.25	835099	822928	810710	798458	773894	749321	724817	700450	676284	628779	582688	538312	495876
2.50	866377	855613	844747	833791	811652	789281	766759	744160	721550	676553	632212	588895	546901
2.75	891885	882468	872909	863219	843488	823357	802902	782196	761308	719237	677160	635479	594537
3.00	912647	904482	896148	887657	870238	852298	833906	815130	796035	757135	717668	678046	638635
3.25	929516	922489	915280	907897	892643	876787	860392	843517	826221	790593	753944	716676	679154
3.50	943198	937190	930996	924620	911354	897442	882935	867885	852343	819982	786248	751516	716136
3.75	954279	949171	943879	938406	926938	914808	902057	888726	874857	845679	814869	782763	749688
4.00	963238	958918	954420	949746	939887	929370	918227	906489	894190	868054	840108	810646	779961
4.25	970474	966835	963029	959057	950621	941548	931860	921581	910736	887462	862272	835413	807141
4.50	976309	973257	970050	966687	959500	951708	943326	934368	924853	904237	881659	857318	831431
4.75	981009	978458	975765	972930	966830	960166	952944	945173	936863	918690	898556	876617	853049
5.00	984790	982665	980412	978029	972871	967193	960994	954279	947053	931103	913234	893557	872212
5.25	987829	986064	984185	982188	977841	973019	967718	961937	955676	941736	925944	908378	889139
5.50	990269	988807	987244	985576	981922	977840	973322	968362	962958	950819	936919	921303	904039
5.75	992226	991018	989721	988331	985269	981824	977984	973742	969093	958559	946370	932542	917115
6.00	993794	992798	991724	990569	988010	985109	981856	978239	974251	965139	954488	942288	928554
6.25	995049	994230	993343	992386	990251	987816	985066	981990	978579	970722	961444	950717	938535
6.50	996053	995381	994650	993858	992082	990041	987723	985114	982205	975448	967391	957989	947220
6.75	996856	996305	995704	995049	993575	991869	989919	987712	985236	979442	972464	964249	954759
7.00	997497	997046	996553	996013	994791	993368	991732	989868	987767	982810	976783	969625	961287
7.25	998009	997640	997236	996792	995781	994596	993225	991656	989876	985645	980454	974233	966928
7.50	998417	998116	997785	997421	996586	995601	994455	993136	991631	988029	983567	978174	971791
7.75	998742	998497	998227	997928	997239	996422	995466	994359	993090	990029	986202	981539	975976
8.00	999001	998801	998581	998336	997769	997093	996297	995369	994301	991704	988431	984407	979570
8.25	999207	999045	998866	998665	998199	997640	996977	996202	995304	993106	990311	986847	982651
8.50	999371	999239	999094	998930	998547	998085	997535	996888	996135	994278	991895	988919	985287
8.75	999501	999395	999276	999143	998829	998448	997992	997452	996822	995255	993228	990677	987539
9.00	999604	999518	999422	999313	999057	998743	998365	997916	997389	996070	994349	992165	989460
9.25	999686	999617	999539	999450	999241	998982	998670	998297	997857	996748	995289	993423	991095
9.50	999752	999695	999633	999560	999389	999177	998919	998610	998242	997311	996076	994485	992486
9.75	999804	999758	999707	999649	999509	999335	999122	998866	998560	997779	996736	995381	993667
10.00	999845	999808	999767	999719	999605	999463	999288	999075	998821	998168	997287	996135	994668
10.50	999903	999879	999853	999821	999745	999650	999532	999387	999211	998755	998131	997302	996232
11.00	999940	999924	999907	999886	999836	999773	999693	999595	999474	999157	998717	998124	997349
11.50	999962	999952	999942	999928	999895	999853	999799	999733	999650	999431	999123	998701	998142
12.00	999977	999970	999964	999954	999933	999905	999869	999824	999768	999617	999402	999103	998702
12.50	999986	999982	999977	999971	999957	999939	999915	999885	999846	999743	999594	999382	999097
13.00	999991	999988	999986	999982	999972	999961	999945	999925	999899	999828	999725	999576	999373
13.50	999995	999993	999991	999989	999982	999974	999964	999951	999933	999885	999814	999710	999567
14.00	999997	999996	999995	999993	999989	999984	999977	999968	999956	999923	999875	999802	999701
15.00	999999	999999	999998	999998	999996	999993	999990	999987	999981	999966	999944	999909	999859
16.00				999999	999998	999997	999996	999994	999992	999985	999975	999958	999935
17.00					999999	999999	999999	999998	999997	999993	999990	999981	999970
18.00								999999	999998	999997	999996	999992	999987

Table 2-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.2$. The left column shows ξ and the fiirst row η. ($\eta=0\sim 3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.25	268384	254465	241262	228737	216857	205588	194900	184763	175149	166031	157383	149183	141406
0.50	464739	444273	424671	405898	387921	370709	354230	338456	323358	308909	295082	281852	269194
0.75	608394	585827	564002	542902	522507	502800	483762	465375	447620	430481	413939	397977	382578
1.00	713495	691374	669776	648699	628140	608095	588560	569529	550997	532958	515406	498333	481732
1.25	790389	770061	750024	730290	710866	691762	672984	654538	636428	618660	601235	584156	567426
1.50	846645	828712	810870	793134	775523	758053	740737	723590	706623	689847	673272	656909	640764
1.75	887803	872423	856975	841482	825963	810439	794926	779444	764007	748632	733331	718119	703008
2.00	917915	904993	891893	878636	865245	851737	838133	824452	810710	796924	783111	769285	755461
2.25	939945	929258	918323	907160	895787	884224	872488	860957	848568	836417	824160	811812	799389
2.50	956063	947334	938319	929036	919500	909727	899734	889535	879146	868581	857855	846983	835977
2.75	967855	960796	953439	945798	937884	929711	921292	912638	903764	894681	885402	875938	866303
3.00	976482	970821	964867	958630	952119	945343	938313	931036	923526	915790	907838	899682	891330
3.25	982794	978286	973501	968446	963127	957551	951724	945653	939346	932810	926052	919081	911903
3.50	987412	983843	980020	975949	971631	967071	962273	957240	951980	946496	940793	934877	928755
3.75	990790	987979	984941	981679	978192	974484	970555	966408	962046	957472	952690	947702	942513
4.00	993262	991058	988655	986052	983250	980248	977047	973647	970050	966255	962266	958085	953712
4.25	995070	993349	991455	989387	987145	984726	982129	979353	976400	973268	969957	966469	962803
4.50	996393	995054	993566	991930	990142	988199	986101	983845	981430	978855	976120	973223	970165
4.75	997361	996322	995157	993866	992445	990891	989202	987374	985408	983299	981048	978652	976111
5.00	998070	997265	996356	995340	994214	992975	991619	990143	988547	986827	984981	983007	980904
5.25	998588	997967	997259	996462	995572	994586	993501	992314	991022	989623	988114	986494	984759
5.50	998967	998489	997939	997315	996613	995831	994965	994012	992970	991836	990607	989280	987854
5.75	999244	998877	998451	997963	997411	996793	996103	995340	994502	993584	992585	991503	990334
6.00	999447	999165	998835	998455	998023	997534	996986	996377	995704	994964	994154	993273	992318
6.25	999595	999380	999125	998829	998490	998105	997671	997185	996646	996051	995397	994681	993902
6.50	999704	999539	999343	999113	998848	998545	998202	997815	997384	996906	996379	995799	995166
6.75	999784	999658	999506	999328	999121	998883	998612	998305	997962	997579	997154	996686	996172
7.00	999842	999745	999630	999491	999330	999144	998930	998687	998413	998107	997766	997388	996972
7.25	999884	999811	999722	999615	999490	999344	999176	998983	998766	998521	998248	997944	997608
7.50	999915	999860	999791	999709	999611	999497	999365	999213	999041	998846	998627	998383	998112
7.75	999938	999896	999843	999780	999704	999615	999512	999391	999255	999100	998925	998729	998511
8.00	999955	999923	999882	999833	999775	999705	999624	999530	999422	999299	999159	999002	998827
8.25	999967	999943	999912	999874	999829	999775	999711	999637	999552	999454	999343	999217	999077
8.50	999976	999957	999934	999905	999870	999828	999778	999719	999652	999575	999487	999386	999274
8.75	999982	999968	999950	999928	999901	999868	999830	999784	999731	999670	999600	999520	999429
9.00	999987	999977	999963	999946	999925	999899	999870	999833	999792	999743	999688	999624	999552
9.25	999991	999983	999972	999959	999943	999923	999900	999871	999839	999801	999757	999706	999648
9.50	999993	999987	999979	999969	999957	999941	999923	999901	999875	999845	999811	999770	999724
9.75	999995	999990	999984	999977	999967	999955	999941	999924	999904	999880	999853	999821	999784
10.00	999996	999993	999988	999982	999975	999966	999955	999941	999926	999907	999886	999860	999831
10.50	999998	999996	999993	999990	999986	999980	999974	999965	999956	999944	999932	999915	999897
11.00	999999	999998	999996	999994	999992	999988	999985	999979	999974	999967	999959	999949	999937
11.50		999999	999998	999997	999995	999993	999991	999988	999985	999980	999976	999969	999961
12.00			999999	999998	999997	999996	999995	999993	999991	999988	999986	999981	999976
12.50				999999	999998	999998	999997	999996	999995	999993	999992	999989	999985
13.00					999999	999999	999998	999997	999997	999996	999995	999993	999991
13.50							999999	999998	999998	999998	999998	999996	999994
14.00								999999	999999	999999	999999	999997	999997
15.00												999999	999999

Table 2-(b) Continue. (η=3.50～18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.25	127038	114119	102504	92062	74242	59850	48231	38855	31291	20276	13122	8483	5478
0.50	245503	223830	204012	185897	154225	127816	105826	87537	72344	49286	33473	22668	15310
0.75	353403	326283	301094	277715	235934	200088	169408	143211	120887	85786	60574	42579	29807
1.00	449917	419898	391607	364977	316418	273660	236149	203351	174764	128379	93683	67959	49034
1.25	535012	503993	474362	446100	393596	346243	303751	265790	232016	175631	131891	98337	72849
1.50	609160	578511	548854	520220	466083	416161	370414	328727	290931	226155	174203	133094	100941
1.75	673135	643796	615062	586993	533044	482249	434781	390719	350062	278664	219605	171512	132868
2.00	727874	700450	673281	646447	594061	543757	495876	450652	408230	332007	267112	212828	168099
2.25	774371	749213	724012	698861	649024	600268	553045	507704	464506	385191	315801	256273	206047
2.50	813619	790886	767874	744676	698050	651619	605896	561306	518191	437383	364840	301101	246102
2.75	846564	826279	805537	784424	741408	697838	654248	611101	568788	487911	413501	346613	287652
3.00	874081	856172	837680	818682	779466	739092	698081	656904	615976	536254	461163	392176	330109
3.25	896962	881294	864964	848037	812650	775643	737499	698672	659576	582027	507318	437230	372924
3.50	915912	902313	888011	873057	841412	807812	772690	736463	699527	624968	551561	481273	415594
3.75	931547	919828	907393	894282	866206	835958	803905	770420	735864	664918	593588	523967	457675
4.00	944405	934368	923626	912209	887477	860450	831431	800738	768692	701807	633182	564928	498783
4.25	954947	946398	937173	927291	905642	881658	855574	827652	798167	735637	670205	603930	538595
4.50	963564	956320	948440	939932	921093	899939	876645	851418	824484	776468	704589	640792	576848
4.75	970590	964480	957780	950493	934184	915631	894953	872303	847859	794405	736322	675397	613337
5.00	976304	971172	965501	959288	945237	929049	910793	890573	868523	819586	765438	707679	647913
5.25	980941	976647	971866	966591	954540	940482	924444	906489	886709	842169	792009	737620	680471
5.50	984696	981115	977100	972639	962345	950190	936167	920301	902648	862331	816137	765241	710954
5.75	987729	984754	981394	977634	968874	953408	946200	932244	916563	880254	837943	790592	739341
6.00	990176	987712	984908	981750	974323	965345	954759	942535	928669	896122	857566	813750	765641
6.25	992146	990110	987778	985134	978857	971183	962039	951374	939163	910118	875150	834811	789895
6.50	993730	992052	990118	987911	982622	976084	968213	958943	948232	922419	890846	853886	812160
6.75	995000	993622	992021	990184	985741	980189	973435	965406	956045	933195	904807	871093	832515
7.00	996018	994888	993567	992042	988320	983618	977842	970910	962758	942603	917180	886557	851050
7.25	996833	995908	994821	993557	990447	986477	981551	975586	968508	950794	928111	900407	867862
7.50	997483	996729	995835	994791	992199	988855	984666	979547	973423	957904	937738	912768	883060
7.75	998003	997388	996655	995794	993639	990829	987277	982896	977612	964058	946190	923767	896749
8.00	998416	997916	997317	996608	994820	992465	989460	985722	981174	969373	953591	933522	909041
8.25	998745	998340	997851	997268	995788	993818	991282	988100	984197	973950	960054	942151	920044
8.50	999007	998678	998280	997803	996579	994936	992800	990097	986756	977883	965682	949761	929863
8.75	999215	998949	998625	998234	997225	995856	994062	991772	988919	981255	970572	956455	938602
9.00	999380	999165	998902	998583	997751	996614	995109	993174	990743	984140	974811	962329	946358
9.25	999511	999337	999124	998863	998180	997237	995978	994345	992279	986602	978477	967470	953224
9.50	999614	999474	999302	999090	998529	997748	996696	995321	993569	988700	981640	971959	959287
9.75	999696	999584	999444	999272	998812	998166	997290	996135	994650	990484	984363	975870	964628
10.00	999761	999671	999558	999418	999042	998509	997779	996810	995556	991998	986704	979271	969322
10.50	999852	999794	999721	999629	999378	999017	998515	997837	996946	994366	990431	984775	977041
11.00	999909	999872	999824	999764	999598	999355	999011	998540	997911	996055	993153	988887	982927
11.50	999944	999920	999890	999851	999742	999578	999344	999019	998578	997251	995127	991935	987381
12.00	999965	999951	999931	999906	999834	999725	999567	999343	999037	998094	996550	994179	990727
12.50	999979	999970	999957	999941	999894	999822	999715	999562	999350	998685	997570	995820	993223
13.00	999987	999981	999973	999963	999933	999884	999813	999710	999563	999096	998295	997014	995073
13.50	999992	999989	999983	999977	999957	999925	999878	999808	999707	999381	998810	997876	996436
14.00	999995	999993	999990	999986	999973	999952	999921	999874	999805	999578	999173	998497	997434
15.00	999998	999998	999996	999995	999990	999980	999967	999946	999914	999806	999605	999256	998687
16.00	999999	999999	999998	999998	999996	999992	999987	999977	999962	999912	999814	999638	999339
17.00			999999	999998	999998	999997	999995	999991	999984	999961	999914	999826	999672
18.00				999999	999998	999999	999998	999997	999993	999983	999960	999918	999839

Table 3-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.3$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.25	300328	274699	251233	229749	210081	192079	175604	160527	146731	134108	122561	111999	102338
0.50	510458	474257	440482	408984	379623	352266	326787	303066	280990	260454	241356	223602	207103
0.75	657481	619130	582679	548068	515237	484121	454657	426780	400425	375529	352026	329854	308952
1.00	760349	724235	689275	655491	622897	591499	561296	532283	504446	477770	452236	427822	404500
1.25	832323	800441	769014	738117	707817	678167	649215	620999	593549	566890	541040	516011	491811
1.50	882681	855662	828546	801436	774424	747590	721009	694746	668859	643398	618408	593928	569988
1.75	917915	895653	872912	849799	826411	802837	779161	755461	731807	708263	684888	661735	638852
2.00	942568	924599	905921	886628	866810	846552	825936	805039	783932	762684	741358	720012	698702
2.25	959816	945540	930441	914597	898082	880970	863331	845236	826750	807937	788859	769572	750133
2.50	971885	960682	948630	935785	922205	907946	893067	877626	861677	845278	828480	811338	793902
2.75	980329	971626	962104	951800	940753	929006	916601	903582	889994	875881	861288	846259	830838
3.00	986237	979532	972072	963878	954974	945387	935146	924281	912826	900813	888277	875254	861779
3.25	990370	985241	979438	972971	965849	958088	949703	940716	931145	921016	910352	899180	887572
3.50	993263	989362	984876	979803	974145	967905	961091	953712	945780	937309	928314	918814	908827
3.75	995286	992334	988885	984928	980459	975473	969971	963953	957425	950391	942861	934846	926355
4.00	996702	994478	991838	988767	985255	981292	976874	971996	966655	960854	954593	947876	940709
4.25	997693	996024	994011	991638	988890	985756	982227	978293	973949	969191	964016	958423	952412
4.50	998386	997138	995609	993782	991641	989173	986366	983210	979694	975812	971558	966926	961915
4.75	998871	997941	996783	995381	993720	991784	989561	987038	984206	981054	977574	973759	969603
5.00	999210	998519	997645	996573	995287	993774	992020	990013	987740	985192	982358	979230	975801
5.25	999447	998935	998277	997459	996468	995288	993910	992318	990502	988450	986152	983599	980781
5.50	999613	999234	998740	998118	997355	996440	995359	994101	992655	991009	989153	987077	984771
5.75	999730	999449	999079	998607	998022	997313	996468	995477	994329	993014	991519	989838	987959
6.00	999811	999604	999328	998970	998523	997974	997316	996538	995629	994581	993382	992025	990499
6.25	999868	999716	999509	999239	998897	998475	997963	997353	996636	995803	994845	993753	992517
6.50	999908	999796	999642	999438	999178	998853	998456	997979	997415	996755	995991	995115	994118
6.75	999936	999853	999739	999586	999387	999138	998831	998459	998017	997495	996887	996186	995385
7.00	999955	999895	999810	999695	999544	999353	999116	998827	998480	998069	997587	997028	996385
7.25	999969	999924	999861	999775	999661	999515	999332	999108	998837	998513	998132	997687	997172
7.50	999978	999946	999899	999834	999748	999636	999496	999322	999111	998857	998556	998203	997792
7.75	999985	999961	999927	999878	999813	999728	999620	999485	999321	999122	998885	998606	998278
8.00	999989	999972	999947	999910	999861	999796	999714	999610	999483	999327	999141	998920	998660
8.25	999993	999980	999961	999934	999897	999848	999784	999704	999606	999485	999338	999164	998958
8.50	999995	999986	999972	999952	999924	999886	999838	999776	999700	999606	999491	999354	999191
8.75	999996	999990	999980	999965	999943	999915	999878	999831	999772	999699	999609	999501	999372
9.00	999998	999993	999985	999974	999958	999937	999908	999872	999827	999770	999700	999616	999514
9.25	999998	999995	999989	999981	999969	999953	999931	999903	999869	999824	999770	999704	999624
9.50	999999	999996	999992	999986	999977	999965	999948	999927	999901	999866	999824	999772	999709
9.75		999998	999995	999990	999983	999974	999961	999945	999925	999898	999866	999825	999776
10.00		999998	999996	999993	999988	999980	999971	999959	999943	999923	999897	999866	999827
10.50		999999	999998	999996	999993	999989	999983	999976	999967	999955	999940	999921	999898
11.00			999999	999998	999996	999994	999990	999986	999981	999974	999966	999954	999940
11.50				999999	999998	999996	999994	999992	999990	999985	999980	999973	999964
12.00					999999	999998	999997	999995	999994	999992	999989	999984	999979
12.50						999999	999998	999997	999997	999995	999994	999991	999988
13.00							999999	999998	999998	999997	999997	999995	999993
13.50								999999	999999	999999	999998	999997	999996
14.00											999999	999998	999998
15.00												999999	999999

Table 3-(b) Continue. (η=3.50~18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.25	85423	71281	59461	49586	34453	23912	16578	11482	7945	3793	1805	856	405
0.50	177541	152060	130123	111258	81146	59010	42797	30961	22346	11567	5942	3032	1537
0.75	270717	236857	206938	180556	136937	103378	77716	58200	43431	23955	13065	7055	3777
1.00	361027	321579	285900	253727	198848	154901	120009	92516	70998	41305	23687	13416	7515
1.25	445909	403315	363963	327753	264213	211464	168151	132925	104515	63688	38159	22530	13132
1.50	523837	480117	438926	400309	330759	271087	220562	178268	143213	90937	56654	34717	20968
1.75	594061	550802	509294	469697	396635	332007	275711	227312	186174	122687	79180	50185	31306
2.00	656387	614768	574143	534753	460399	392725	332190	278836	232407	158417	105595	69030	44360
2.25	711002	671847	633002	594754	520985	452014	388760	331686	280910	197502	135622	91231	60264
2.50	758344	722176	685737	649330	577660	508922	444371	384821	330719	239255	168881	116664	79068
2.75	798997	766098	732460	698382	629970	562744	498173	437333	380946	282962	204915	145114	100744
3.00	833619	804084	773457	742012	677691	612999	549508	488464	430799	327919	243213	176288	125185
3.25	862890	836675	809120	780464	720780	659397	597894	537603	479598	373452	283238	209832	152215
3.50	887477	864440	839907	814076	759332	701807	643008	584282	526778	418943	324450	245354	181602
3.75	908007	887942	866301	843243	793542	740223	684664	628166	571893	463840	366322	282432	213065
4.00	925059	907719	888789	868383	823675	774740	722791	669035	614605	507661	408354	320637	246288
4.25	939153	924275	907839	889922	850038	805525	757411	706773	654676	550008	450090	359544	280934
4.50	960750	938068	923893	908273	872961	832797	788617	741349	691961	590554	491119	398742	316653
4.75	960254	949506	937358	923828	892778	856807	816557	772802	726389	629053	531087	437846	353092
5.00	968012	958952	948601	936952	909821	877823	841419	801225	757958	665324	569692	476504	389909
5.25	974323	966725	957950	947975	924407	896122	863416	826752	786716	699252	606691	514400	426775
5.50	979439	973096	965694	957196	936834	911975	882773	849548	812757	730775	641893	551260	463384
5.75	983574	978302	972085	964880	947376	925646	899723	869797	836204	759883	675159	586852	499456
6.00	986907	982542	977343	971261	956284	937385	914495	887694	857203	786603	706396	620986	534742
6.25	989586	985985	981655	976541	963782	947423	927314	903439	875918	810997	735554	653512	569023
6.50	991733	988773	985179	980897	970073	955975	938391	917228	892519	833154	762619	684319	602117
6.75	993450	991025	988053	984480	975332	963233	947926	929255	907180	853180	787608	713334	633870
7.00	994820	992839	990389	987418	979715	969373	956103	939704	920074	871197	810565	740514	664163
7.25	995910	994298	992284	989822	983358	974549	963091	948748	931369	887337	831557	965845	692908
7.50	996777	995467	993817	991782	986376	978900	969044	956549	941226	901734	850665	789340	720043
7.75	997464	996403	995055	993378	988870	982547	974098	963254	949798	914528	867983	811033	745534
8.00	998007	997150	996052	994674	990926	985595	978377	968999	957227	925853	883617	830973	769369
8.25	998437	997746	996853	995724	992617	988135	981989	973906	963645	935843	897675	849226	791558
8.50	998775	998220	997496	996573	994004	990247	985030	978086	969171	944625	910268	865869	812125
8.75	999042	998596	998010	997258	995139	991998	987582	981636	973917	952320	921510	880986	831114
9.00	999251	998894	998421	997809	996066	993447	989720	984643	977980	959041	931512	894666	848576
9.25	999416	999130	998749	998252	996821	994644	991506	987183	981449	964895	940381	907004	864576
9.50	999545	999317	999011	998608	997436	995629	992995	989324	984404	969977	948222	918093	879182
9.75	999646	999464	999218	998893	997935	996440	994233	991125	986914	974379	955132	928028	892472
10.00	999725	999580	999383	999121	998339	997105	995261	992635	989041	978180	961204	936901	904523
10.50	999834	999743	999618	999448	998931	998094	996815	994955	992356	984268	971177	951819	925234
11.00	999901	999844	999764	999655	999316	998752	997874	996567	994706	988743	978757	963516	941958
11.50	999941	999905	999855	999785	999564	999188	998589	997679	996358	992002	984462	972593	955311
12.00	999965	999943	999911	999867	999724	999474	999068	998440	997510	994357	988717	979567	965862
12.50	999979	999966	999946	999918	999826	999661	999388	998958	998307	996043	991863	984876	974117
13.00	999988	999980	999967	999950	999891	999783	999600	999307	998856	997243	994170	988882	980515
13.50	999993	999988	999980	999969	999932	999861	999740	999542	999231	998090	995849	991880	985433
14.00	999996	999993	999988	999981	999958	999912	999832	999699	999486	998684	997061	994107	989180
15.00	999999	999998	999996	999993	999984	999965	999931	999871	999774	999385	998552	996950	994140
16.00		999999	999999	999997	999994	999986	999972	999946	999902	999718	999302	998456	996899
17.00				999999	999998	999994	999989	999978	999959	999873	999670	999234	998394
18.00						999998	999995	999991	999983	999944	999847	999627	999184

Table 4-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.4$. The lelt column shows ξ and the first row η.($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.25	340759	297873	260303	227402	198601	173398	151351	132071	115217	100487	87619	76380	66567
0.50	565402	507897	455800	408670	366093	327677	293058	261896	233876	208708	186122	165873	147735
0.75	713495	655667	601527	550997	503971	460319	419897	382549	348111	316418	287303	260600	236149
1.00	811125	759434	709458	661393	615385	571530	529886	490477	453301	418330	385523	354820	326152
1.25	875486	832171	788950	746165	704099	662990	623026	584363	547115	511371	477190	444610	413648
1.50	917915	883071	847212	810710	773894	737056	700450	664295	628779	594061	560270	527514	495876
1.75	945887	918636	889730	859499	828256	796286	763851	731189	698514	666015	633861	602199	571154
2.00	964326	943450	920637	896148	870238	843154	815130	786388	757135	727564	697852	668160	638635
2.25	976483	960740	943028	923526	902423	879908	856172	831400	805773	779466	752645	725468	698082
2.50	984496	972772	959197	943879	926938	908508	888726	867735	845680	822706	798957	774572	749688
2.75	989780	981135	970841	958943	945507	930611	914345	896809	878108	858354	837662	816147	793925
3.00	993262	986942	979203	970050	959500	947590	934368	919894	904238	887477	869695	850983	831431
3.25	995558	990969	985195	978209	969998	960563	949921	938099	925135	911076	895978	879905	862924
3.50	997072	993760	989479	984184	977841	970428	961937	952368	941736	930062	917377	903721	889139
3.75	998070	995691	992536	988547	983679	977896	971172	963490	954845	945237	934679	923189	910793
4.00	998728	997027	994712	991724	988010	983527	978239	972116	965140	957296	948581	938997	928554
4.25	999161	997951	996259	994031	991213	987757	983624	978776	973184	966827	959687	951756	943030
4.50	999447	998588	997357	995703	993575	990925	987712	983895	979442	974322	968514	961997	954759
4.75	999636	999028	998136	996912	995312	993289	990804	987816	984289	980191	975494	970174	964211
5.00	999760	999331	998686	997785	996586	995049	993136	990807	988029	984766	980991	976673	971792
5.25	999842	999540	999075	998413	997518	996355	994888	993082	990904	988320	985300	981816	977842
5.50	999896	999684	999350	998865	998199	997322	996202	994807	993107	991069	988666	985869	982651
5.75	999931	999783	999543	999189	998696	998036	997184	996111	994789	993190	991286	989051	986458
6.00	999955	999851	999679	999422	999057	998562	997916	997093	996070	994820	993318	991540	989460
6.25	999970	999898	999775	999588	999319	998949	998461	997832	997043	996069	994889	993480	991819
6.50	999980	999930	999842	999707	999509	999234	998866	998387	997780	997024	996100	994988	993667
6.75	999987	999952	999889	999792	999646	999442	999165	998802	998336	997751	997031	996156	995110
7.00	999992	999967	999922	999852	999746	999594	999387	999111	998756	998305	997744	997059	996233
7.25	999994	999978	999946	999895	999817	999705	999550	999342	999071	998724	998290	997755	997105
7.50	999996	999985	999962	999926	999869	999786	999671	999514	999308	999042	998706	998290	997779
7.75	999998	999990	999973	999947	999906	999845	999759	999641	999485	999282	999023	998700	998301
8.00	999999	999993	999981	999963	999933	999888	999824	999736	999618	999462	999264	999013	998702
8.25		999995	999987	999974	999952	999919	999872	999806	999717	999598	999446	999252	999011
8.50		999997	999991	999981	999966	999941	999907	999857	999790	999700	999584	999435	999247
8.75		999998	999993	999987	999976	999957	999932	999895	999845	999777	999688	999573	999429
9.00		999999	999995	999991	999982	999969	999951	999923	999886	999834	999766	999678	999567
9.25			999997	999993	999988	999978	999964	999944	999916	999876	999825	999758	999672
9.50			999998	999995	999991	999984	999974	999959	999938	999908	999869	999818	999752
9.75			999998	999997	999994	999988	999981	999970	999955	999932	999903	999864	999813
10.00			999999	999998	999995	999992	999987	999978	999967	999950	999928	999898	999859
10.50				999999	999998	999995	999993	999988	999983	999972	999960	999943	999920
11.00					999999	999998	999997	999994	999991	999985	999975	999969	999955
11.50						999999	999998	999997	999996	999992	999988	999983	999975
12.00							999999	999998	999998	999995	999993	999990	999986
12.50								999999	999999	999997	999996	999995	999992
13.00										999999	999998	999997	999996
13.50											999999	999998	999998
14.00												999999	999999

Table 4-(b) Continue. (η=3.50～18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.25	50526	38316	29032	21980	12570	7169	4077	2314	1310	417	132	41	13
0.50	116983	92426	72872	57343	35317	21610	13146	7956	4792	1716	606	211	73
0.75	193379	157812	128379	104129	67959	43930	28158	17913	11318	4438	1705	634	239
1.00	274601	230185	192175	159845	109470	74074	49594	32893	21633	9151	3774	1523	603
1.25	356565	305790	261015	221830	158345	111456	77490	53289	36289	16400	7196	3080	1290
1.50	436195	381541	332007	287520	212828	155106	111499	79180	55618	26663	12368	5578	2456
1.75	511331	455051	402735	354610	271098	203808	150967	110358	79719	40317	19670	9307	4290
2.00	580590	524590	471288	421149	331407	256230	195025	146371	108473	57614	29444	14562	7001
2.25	643215	589009	536254	485573	392176	311022	242671	186582	141564	78671	41974	21629	10815
2.50	698931	647644	596666	546706	452049	366902	292850	230228	178520	103466	57464	30770	15962
2.75	747815	700214	651940	603724	509918	422712	344515	276470	218748	131848	76034	42210	22670
3.00	790190	746734	701807	656113	564928	477446	396679	324450	261577	163550	97709	56122	31147
3.25	826533	787426	746243	703620	616462	530278	448451	373329	306300	198208	122428	72623	41578
3.50	857409	822659	785407	746201	664118	580559	499056	422321	352202	235384	150039	91762	54115
3.75	883419	852884	819585	783969	707679	627809	547852	470717	398595	274589	180317	113528	68866
4.00	905161	878599	849150	817153	747083	671708	594329	571902	444837	315305	212973	137842	85897
4.25	923208	900313	874517	846060	782389	712073	638106	563364	490353	357007	247664	164566	105224
4.50	938094	918522	896122	871045	813750	748839	678923	606691	534642	399181	284015	193508	126813
4.75	950300	933694	914398	892484	841384	782037	716626	647575	577284	441339	321626	224429	150585
5.00	960254	946263	929762	910759	865557	811774	751153	685800	617944	483030	360090	257054	176413
5.25	968331	956618	942603	926242	886557	838214	782519	721237	656365	523854	399006	291082	204132
5.50	974854	965106	953278	939283	904686	861560	810805	753829	692369	563460	437985	326194	233543
5.75	980099	972031	962106	950209	920244	882043	836136	783585	725844	601555	476666	362062	264418
6.00	984299	977656	969373	959317	933552	899905	858674	810565	756743	637903	514715	398361	296508
6.25	987649	982206	975329	966874	944795	915394	878605	834870	785068	672324	551839	434776	329551
6.50	990312	985872	980189	973117	954319	928753	896131	856631	810867	704689	587782	471004	363276
6.75	992421	988815	984140	978252	962328	940219	911459	876004	834222	734917	622329	506768	397414
7.00	994087	991169	987340	982459	969035	950011	924796	893157	855245	762972	655307	541814	431701
7.25	995397	993046	989922	985894	974626	958339	936346	908266	874064	788854	686584	575918	465882
7.50	996426	994538	991999	988687	979271	965389	946301	921510	890825	812595	716065	680887	499719
7.75	997231	995720	993664	990952	983114	971334	954844	933066	905680	834256	743690	640558	532992
8.00	997859	996654	994994	992782	986282	976328	962146	943104	918783	853917	769432	670802	565503
8.25	998348	997390	996055	994256	988886	980508	968362	951787	930290	871676	793293	699517	597077
8.50	998728	997969	996898	995439	991019	983993	973633	959267	940352	887641	815297	726634	627565
8.75	999023	998422	997566	996387	992761	986890	978088	965687	949115	901930	835491	752108	656839
9.00	999250	998777	998094	997145	994178	989291	981839	971177	956718	914664	853938	775918	684802
9.25	999426	999054	998511	997748	995329	991273	984987	975854	963288	925965	870713	798069	711375
9.50	999561	999269	998839	998228	996261	992906	987620	979825	968946	935955	885904	818581	736505
9.75	999665	999437	999096	998608	997013	994246	989817	983187	973802	944753	899603	837492	760159
10.00	999745	999566	999298	998909	997620	995343	991644	986023	977956	952472	911907	854853	782323
10.50	999853	999745	999578	999333	998497	996970	994411	990410	984508	965103	932734	885182	822213
11.00	999915	999850	999749	999596	999058	998045	996295	993479	989215	974635	949176	910152	856377
11.50	999951	999913	999851	999756	999414	998748	997563	995604	992559	981739	961982	930415	885191
12.00	999972	999949	999912	999854	999638	999204	998410	997061	994910	986972	971832	946640	909147
12.50	999984	999971	999949	999913	999777	999497	998970	998050	996546	990786	979320	959467	928799
13.00	999991	999983	999970	999949	999864	999685	999338	998716	997674	993536	984948	969488	944718
13.50	999995	999990	999983	999970	999917	999803	999577	999160	998445	995501	989136	977230	957459
14.00	999997	999995	999990	999983	999950	999878	999732	999455	998968	996892	992220	983148	967545
15.00	999999	999998	999997	999994	999982	999954	999894	999774	999554	998548	996100	990985	981566
16.00			999999	999998	999993	999983	999959	999909	999812	999339	998099	995317	989845
17.00					999998	999994	999985	999964	999923	999706	999097	997633	994563
18.00					999999	999998	999995	999986	999969	999872	999581	998833	997164

Table 5-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.5$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim 3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.25	393469	324351	267120	219789	180690	148425	121825	99919	81892	67072	54898	44905	36709
0.50	632120	545737	469869	403529	345746	295594	252207	214781	182585	154956	131302	111093	93863
0.75	776869	695906	620644	551314	487946	430417	378500	331894	290255	253210	220382	191392	165876
1.00	864665	797218	730988	666920	605703	547816	493562	443106	396499	353707	314629	279117	246989
1.25	917915	865245	810710	755461	700450	646447	594061	543757	495876	450652	408230	368678	332007
1.50	950213	910730	867698	822151	775015	727109	679138	631700	585289	540306	497063	455796	416671
1.75	969802	941030	908073	871703	832673	791695	749431	706479	663375	620584	578506	537477	497769
2.00	981684	961147	936459	908108	876618	842530	806382	768694	729960	690639	651147	611856	573093
2.25	988891	974462	956284	934597	909780	881973	851780	819533	785638	750496	714491	677985	641313
2.50	993262	983251	970049	953712	934368	912209	887477	860450	831431	800738	768692	735611	701807
2.75	995913	989037	979558	967406	952581	935144	915215	892955	868565	842272	814322	784974	754490
3.00	997521	992838	986096	977154	965927	952384	936548	918487	898309	876157	852202	826633	799657
3.25	998496	995329	990573	984054	975639	965238	952806	938341	921876	903482	883259	861333	837852
3.50	999088	996959	993627	988912	982661	974753	965098	953644	940371	925290	908445	889903	869759
3.75	999447	998023	995703	992318	987712	981750	974322	965345	954759	942534	928669	913182	896122
4.00	999665	998717	997110	994695	991325	986866	981200	974227	965865	956056	944764	931973	917692
4.25	999796	999168	998061	996347	993897	990586	986297	980925	974378	966579	957471	947012	935181
4.50	999877	999461	998702	997492	995721	993278	990054	985946	980860	974711	967429	958955	949247
4.75	999925	999652	999133	998282	997010	995217	992809	989689	985766	980955	975179	968371	960474
5.00	999955	999775	999422	998827	997916	996608	994820	992465	989460	985721	981174	975745	969373
5.25	999972	999855	999615	999200	998552	997602	996281	994514	992226	989340	985784	981486	976382
5.50	999983	999907	999744	999456	998996	998310	997339	996020	994287	992073	989309	985929	981869
5.75	999990	999940	999830	999631	999306	998812	998101	997122	995817	994127	991992	989350	986141
6.00	999994	999962	999888	999750	999521	999167	998649	997925	996948	995665	994024	991971	989449
6.25	999996	999975	999926	999831	999671	999418	999042	998509	997779	996810	995556	993969	991999
6.50	999998	999985	999951	999885	999774	999594	999322	998931	998390	997661	996707	995486	993954
6.75	999998	999990	999968	999923	999845	999717	999521	999236	998836	998290	997567	996632	995448
7.00	999999	999994	999979	999948	999894	999803	999663	999455	999160	998753	998208	997496	996584
7.25		999996	999986	999965	999928	999864	999763	999613	999396	999093	998684	998143	997445
7.50		999998	999991	999976	999951	999906	999834	999725	999567	999343	999036	998628	998194
7.75		999998	999994	999984	999966	999935	999884	999805	999690	999525	999296	998988	998583
8.00		999999	999996	999989	999977	999955	999919	999862	999779	999657	999487	999256	998949
8.25			999997	999992	999985	999969	999943	999903	999843	999753	999627	999455	999223
8.50			999998	999995	999990	999979	999961	999932	999888	999823	999730	999601	999427
8.75			999999	999996	999993	999985	999973	999952	999921	999873	999805	999709	999578
9.00				999997	999995	999990	999981	999966	999944	999909	999859	999788	999691
9.25				999998	999997	999993	999987	999976	999961	999935	999898	999846	999774
9.50				999998	999998	999995	999991	999983	999972	999954	999927	999888	999835
9.75				999999	999999	999997	999994	999988	999981	999967	999948	999919	999879
10.00						999998	999996	999992	999987	999977	999962	999941	999912
10.50						999999	999998	999996	999994	999988	999981	999970	999954
11.00							999999	999998	999997	999994	999990	999984	999976
11.50								999999	999999	999997	999995	999992	999988
12.00										999998	999998	999996	999994
12.50										999999	999999	999998	999997
13.00												999999	999999

Table 5-（b） Continue. (η=3.50～18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.25	24489	16302	10829	7181	3141	1365	590	254	109	20	4	1	
0.50	66743	47230	33275	23350	11374	5471	2603	1226	573	122	25	5	1
0.75	123888	91890	67732	49642	26266	13654	6991	3532	1764	427	100	23	5
1.00	192050	148064	113279	86066	48769	27046	14723	7887	4165	1120	289	72	17
1.25	267112	212828	168099	131719	79180	46438	26663	15028	8333	2456	690	187	49
1.50	345231	283050	229867	185061	117192	72224	43479	25644	14853	4755	1444	419	117
1.75	423131	355741	296089	244177	161992	104383	65584	40303	24286	8381	2731	848	253
2.00	498229	428284	364357	307018	212410	142522	93106	59409	37123	13728	4774	1577	498
2.25	568652	498549	432520	371590	267055	185934	125896	83167	53745	21193	7830	2739	914
2.50	633182	564928	498783	436084	324450	233688	163550	111574	74392	31147	12179	4496	1580
2.75	691154	626313	561748	498961	383142	284710	205457	144422	99149	43913	18113	7036	2596
3.00	742353	682040	620409	558993	441787	337869	250851	181329	127941	59745	25920	10566	4083
3.25	786894	731819	674124	615265	499208	392046	298871	221761	160544	78809	35868	15307	6180
3.50	825131	775650	722560	667164	554430	446192	348613	265074	196599	101176	48190	21484	9046
3.75	857566	813750	765641	714337	606691	499371	399181	310558	235638	126813	63074	29317	12850
4.00	884785	846487	803488	756657	655438	550784	449728	357467	277112	155591	80647	39012	17771
4.25	907404	874321	836365	794173	700314	559785	499485	405065	320417	187284	100973	50749	23990
4.50	926034	897760	864632	827071	741134	645884	547783	452647	364929	221590	124046	64675	31680
4.75	941253	917324	888710	855635	777859	688736	594069	499568	410025	258138	149789	80895	41007
5.00	953591	933522	909041	880206	810565	728135	637903	545258	455110	296508	178060	99469	52116
5.25	963525	946832	926071	901166	839421	763990	678965	589235	499631	336250	208653	120406	65128
5.50	971470	957693	940229	918902	864658	796314	717040	631106	543095	376897	241312	143664	80132
5.75	977786	966496	951918	933802	886551	825197	752012	670573	585078	417985	275735	169152	97187
6.00	982779	973589	961506	946231	905399	850793	783850	707424	625226	459066	311588	196729	116311
6.25	986704	979271	969322	956533	921510	873300	812595	741529	663263	499719	348518	226211	137485
6.50	989775	983789	975658	965020	935189	892949	838345	772831	698985	539561	386189	257379	160651
6.75	992166	987387	980765	971972	946731	909984	861243	801335	732254	578254	424148	289984	185711
7.00	994020	990218	984861	977635	956410	924657	881463	827101	762998	615508	462132	323747	212535
7.25	995450	992441	988130	982224	964481	937219	899201	850228	791198	651087	499777	358385	240959
7.50	996550	994179	990728	985926	971177	947910	914664	870848	816884	684802	536774	393601	270792
7.75	997392	995532	992782	988898	976701	956959	928064	889118	840123	716518	572847	429101	301823
8.00	998035	996582	994400	991273	981238	964577	939611	905207	861015	746144	607753	464598	333820
8.25	998523	997393	995669	993163	984946	970959	949507	919296	879684	773636	641285	499317	366545
8.50	998893	998018	996662	994661	987964	976280	957945	931564	896269	798984	673278	534504	399752
8.75	999173	998497	997434	995844	990409	980694	965104	942193	910922	822213	703600	568426	433196
9.00	999384	998863	998034	996775	992385	984342	971149	951354	923799	843378	732158	601376	466638
9.25	999542	999143	998497	997504	993970	987344	976231	959212	935059	862553	958893	633175	499847
9.50	999660	999355	998855	998075	995240	989803	980484	965921	944856	879833	783775	663673	532608
9.75	999749	999516	999129	998518	996254	991810	984029	971625	953340	895326	806804	692749	564723
10.00	999815	999638	999340	998863	997061	993442	986972	976452	960655	909147	828005	720310	596012
10.50	999900	999798	999623	999335	998205	995832	991411	983939	972301	932263	865115	770653	655507
11.00	999946	999889	999787	999615	998915	997380	994404	989179	980746	950165	895648	814472	710106
11.50	999972	999939	999880	999779	999351	998371	996394	992793	986777	963798	920316	851877	759184
12.00	999985	999967	999933	999874	999615	998997	997700	995253	991021	974017	939908	883229	802452
12.50	999993	999982	999963	999929	999774	999388	998548	996905	993969	981566	955223	909061	839911
13.00	999996	999990	999980	999960	999868	999630	999092	998002	995991	987064	967016	930007	871793
13.50	999998	999995	999989	999978	999924	999778	999437	998723	997361	991018	975969	946735	898494
14.00	999999	999997	999994	999988	999956	999868	999654	999190	998280	993825	982675	959904	920520
15.00		999999	999998	999996	999986	999954	999872	999683	999288	997164	991262	977975	952794
16.00			999999	999999	999996	999985	999954	999879	999715	998743	995755	988364	973062
17.00					999999	999995	999984	999955	999889	999461	998008	994071	985192
18.00						999998	999995	999984	999958	999775	999095	997079	992140

Table 6-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.6$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	117503	82626	58092	40836	28701								
0.10	221199	158963	114167	81946	58785								
0.15	312711	229417	168096	123017	89925								
0.20	393469	294382	219790	163781	121826								
0.25	464739	354230	269194	204012	154225	116316	87537	65746	49278	36883	27556	20555	15310
0.50	713496	588560	481732	391607	316418	254282	203352	161901	128379	101419	79847	62664	49034
0.75	846645	740737	640764	548854	466083	392771	328727	273428	226156	186098	152415	124286	100941
1.00	717915	838134	755461	673281	594061	519497	450652	388093	332008	282305	238704	200796	168099
1.25	956063	899734	835977	767874	698050	628640	561306	497272	437383	382160	331863	280544	246102
1.50	976481	938313	891330	837680	779466	718636	656904	595720	536254	479409	425842	375991	330109
1.75	987412	962273	928755	888011	841412	790415	736463	680909	624968	569687	515933	464396	415594
2.00	993262	977047	953713	923626	887477	846170	800738	752261	701807	650380	598890	548135	498783
2.25	996393	986101	970165	948439	921092	888547	851418	810452	766468	720313	672815	624756	576848
2.50	998069	991619	980905	965501	945237	920174	890573	856861	819586	779377	736909	692864	647913
2.75	998967	994965	987855	977100	962344	943411	920302	893175	862331	828176	791197	751934	710954
3.00	999447	996986	992319	984908	974322	960255	942535	921126	896122	867732	836259	802083	765641
3.25	999704	998201	995167	990118	982622	972319	958943	942328	922420	899264	873006	843872	812160
3.50	999842	998930	996973	993567	988319	980869	970910	958207	942603	924031	902505	878121	851049
3.75	999915	999365	998112	995835	992198	986871	979547	969961	957904	943228	925855	905778	883059
4.00	999955	999624	998827	997317	994819	991048	985722	978574	969373	957930	944105	927816	909041
4.25	999976	999778	999274	998279	996578	993933	990097	984824	977883	969068	958206	945166	929863
4.50	999987	999869	999552	998901	997751	995911	993174	989321	984140	977424	968988	958673	946358
4.75	999993	999923	999725	999301	998529	997259	995321	992532	988700	983635	977152	969084	959287
5.00	999996	999955	999831	999557	999042	998171	996810	994807	991998	988213	983279	977033	969322
5.25	999998	999974	999897	999720	999378	998785	997836	996409	994366	991562	987841	983050	977041
5.50	999999	999985	999937	999824	999598	999196	998539	997529	996055	993993	991211	987568	982927
5.75		999991	999962	999889	999741	999471	999018	998307	997251	995747	993682	990935	987382
6.00		999995	999977	999930	999834	999652	999343	998846	998094	997004	995483	993427	990728
6.25		999997	999986	999956	999893	999773	999562	999217	998684	997900	996787	995259	993224
6.50		999998	999992	999973	999932	999852	999709	999470	999096	998535	997725	996598	995073
6.75		999999	999995	999983	999956	999903	999807	999643	999381	998982	998397	997570	996436
7.00			999997	999989	999972	999937	999873	999761	999578	999296	998875	998272	997434
7.25			999998	999993	999982	999959	999916	999840	999713	999515	999214	998777	998161
7.50			999999	999996	999989	999974	999945	999893	999806	999667	999453	999138	998688
7.75				999997	999993	999983	999964	999929	999869	999772	999621	999394	999067
8.00				999998	999995	999989	999977	999953	999912	999845	999738	999576	999340
8.25				999999	999997	999993	999985	999969	999941	999895	999820	999705	999534
8.50					999998	999995	999990	999979	999961	999929	999876	999795	999673
8.75					999999	999997	999994	999986	999974	999952	999915	999858	999771
9.00						999998	999996	999991	999983	999968	999942	999902	999840
9.25						999999	999997	999994	999989	999978	999961	999933	999889
9.50							999998	999996	999993	999986	999974	999954	999923
9.75							999999	999998	999995	999990	999982	999969	999947
10.00								999998	999997	999994	999988	999979	999963
10.50								999999	999999	999997	999995	999990	999983
11.00										999999	999998	999996	999992
11.50											999999	999998	999997
12.00												999999	999998

Table 6-（b） Continue. （η=3.50～18.00）

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05													
0.10													
0.15													
0.20													
0.25	8460	4651	2546	1388	408	118	34	10	3				
0.50	29781	17913	10682	6321	2170	727	239	77	25	2			
0.75	65853	42402	26987	17000	6566	2459	897	320	112	13	1		
1.00	116277	79180	53177	35275	15028	6171	2456	952	360	49	6	1	
1.25	178904	127796	89878	62337	28910	12860	5522	2300	933	144	21	3	
1.50	250525	186582	136642	98566	49283	23539	10815	4805	2074	359	57	8	1
1.75	327513	253078	192130	143541	76788	39113	19107	9003	4111	790	139	23	3
2.00	406335	324450	254385	196160	111574	60269	31147	15491	7449	1580	305	54	9
2.25	483900	397857	321126	254826	153287	87395	47575	24876	12553	2919	613	118	21
2.50	557745	470716	390012	317659	201142	120544	68866	37728	19917	5046	1148	239	46
2.75	626098	540876	458854	382694	254014	159430	95275	54526	30031	8248	2026	454	94
3.00	687844	606691	525760	448050	310558	203465	126813	75615	43341	12850	3393	813	180
3.25	742446	667029	589213	512054	369330	251812	163251	101173	60219	19197	5430	1390	327
3.50	789826	721236	648106	573315	428900	303463	204132	131197	80927	27640	8348	2274	568
3.75	830252	769059	701719	630764	487932	357311	248813	165499	105597	38514	12385	3583	947
4.00	864223	810565	749683	683655	545258	412231	296508	203717	134220	52116	17798	5453	1523
4.25	892379	846059	791923	731545	599913	467136	346345	245343	166642	68689	24850	8047	2369
4.50	915424	876004	828588	774251	651155	521040	397414	289749	202571	88401	33801	11545	3578
4.75	934067	900955	859997	811805	698465	573084	448820	336231	241597	111337	44895	16143	5257
5.00	948991	921510	886578	844406	741529	622568	499719	384040	283208	137485	58347	22046	7532
5.25	960820	938264	908821	872374	780218	668954	549354	432426	326826	166743	74329	29463	10544
5.50	970110	951786	927240	896101	814555	711864	597077	480663	371825	898912	92961	38594	14446
5.75	977344	962601	942344	916025	844687	751075	642360	528083	417568	233713	114304	49626	19403
6.00	982932	971176	954618	932594	870848	786495	684892	574093	463427	270792	138354	62721	25581
6.25	987217	977921	946506	946250	893338	818148	724123	618189	508811	309741	165038	78011	33149
6.50	990480	983186	972409	957408	912491	846148	760158	659966	553178	350107	194220	95588	42268
6.75	992947	987267	978677	966454	928658	870682	792847	699117	596058	391419	225700	115502	53085
7.00	994801	990409	983613	973731	942193	891985	822213	735431	637050	433196	259223	173753	65729
7.25	996186	992813	987473	979543	953434	910326	848354	768787	675839	474970	294488	162293	80307
7.50	997215	994640	990473	984154	962701	925988	871424	799145	712186	516296	331159	189023	96893
7.75	997976	996022	992790	987789	907286	939260	891614	826533	745930	556765	368874	217797	115529
8.00	998535	997060	994570	990636	976453	950425	909147	851036	776983	596012	407258	248426	136221
8.25	998944	997837	995929	992854	981434	959751	924258	872784	805321	633725	445935	280684	158935
8.50	999242	998416	996961	994571	985433	967490	937189	891940	830974	669647	484537	314311	183603
8.75	999457	998844	997741	995893	988624	973871	948179	908691	854019	703574	522716	349025	210114
9.00	999613	999159	998328	996907	991157	979101	957459	923238	874570	735360	560147	384530	238325
9.25	999725	999391	998767	997680	993156	983361	965246	935787	892768	764912	596540	420517	268062
9.50	999806	999561	999094	998267	994726	986812	971740	946543	908775	792184	631640	456684	299122
9.75	999863	999684	999337	998710	995952	989594	977125	955705	922762	817171	665235	492731	331282
10.00	999903	999774	999516	999044	996906	991823	981566	963465	934909	839911	697150	528375	364301
10.50	999953	999885	999745	999480	998213	995012	988180	975470	954393	878935	755457	597424	431908
11.00	999977	999942	999868	999721	998983	997004	992544	983806	968593	910057	805970	662037	499916
11.50	999989	999971	999932	999852	999429	998227	995368	989479	978726	934306	848646	720892	566404
12.00	999995	999986	999965	999923	999683	998965	997164	993267	985813	952794	883862	773172	629692
12.50	999998	999993	999983	999960	999826	999404	998288	995754	990680	966604	912290	818530	688447
13.00	999999	999996	999991	999980	999906	999661	998979	997358	993963	976726	934767	857019	741724
13.50		999998	999996	999990	999950	999809	999399	998378	996143	984011	952196	889004	788977
14.00		999999	999998	999995	999973	999894	999650	999016	997568	989166	965463	915067	830018
15.00				999999	999992	999968	999885	999651	999067	995216	982692	952288	894171
16.00					999998	999991	999964	999882	999658	997988	991757	974564	937494
17.00					999999	999997	999989	999961	999880	999191	996256	987087	964877
18.00						999999	999997	999988	999960	999688	998373	993738	981168

Table 7-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.7$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	153518	89783	52472	30646	17887								
0.10	283469	173177	105540	64175	38942								
0.15	393469	250332	158497	99919	62745								
0.20	486583	321464	210769	137277	88889								
0.25	565402	386837	261896	175720	116983	77349	50832	33225	21610	13993	9024	5798	3712
0.50	811124	638125	490478	369913	274602	201118	145589	104319	74074	52172	36479	25337	17492
0.75	917915	792322	664295	543757	436195	343913	267112	204741	155106	116277	86347	63572	46438
1.00	946326	883355	786388	682994	580590	484333	397364	321215	256230	201955	157453	121543	92973
1.25	984496	935603	867735	786835	698931	609340	522296	440839	366903	301479	244829	196689	156448
1.50	993262	964947	919894	860450	790190	713137	633182	553717	477446	406335	341648	284041	233688
1.75	997072	981145	952368	910668	857410	794925	726038	653674	580559	509030	440942	377638	319982
2.00	998727	989961	972117	943897	905161	856766	800318	737882	671708	604005	536777	471715	410147
2.25	999447	994701	983896	965345	938095	901980	857566	806002	748839	687844	624824	561494	499371
2.50	999759	997225	990808	978901	960255	934124	900337	859273	811774	759034	702460	643543	583753
2.75	999895	998556	994808	987319	974854	956436	931459	899750	861560	817522	768565	715824	660541
3.00	999954	999254	997094	992465	984299	971606	953591	929749	899905	864223	823179	777508	728135
3.25	999980	999616	998387	995569	990313	981735	969019	951504	928754	900593	867124	828708	785928
3.50	999991	999804	999112	997418	994087	988391	979584	966979	950012	928299	901667	870172	834085
3.75	999996	999900	999515	998509	996426	992702	986704	977797	965389	948991	928258	903022	873300
4.00	999998	999949	999736	999146	997859	995458	991436	985245	976328	964173	948347	928538	904580
4.25	999999	999974	999858	999514	998728	997199	994539	990299	983993	975134	963267	948006	929067
4.50		999987	999924	999725	999250	998288	996550	993686	989291	982932	974176	962618	947910
4.75		999993	999960	999847	999561	998962	997840	995929	992905	988406	982041	973422	962184
5.00		999997	999979	999914	999745	999375	998658	997398	995343	992200	987637	981301	972842
5.25		999998	999989	999952	999853	999627	999173	998351	996970	994801	991570	986974	980695
5.50		999999	999995	999974	999915	999779	999494	998962	998044	996564	994303	991010	986408
5.75			999998	999986	999951	999870	999693	999352	998748	997748	996183	993850	990518
6.00			999999	999992	999972	999924	999815	999598	999204	998535	997463	995828	993442
6.25				999996	999984	999956	999889	999753	999497	999054	998326	997192	995502
6.50				999998	999991	999974	999934	999849	999685	999393	998904	998125	996938
6.75				999999	999995	999985	999961	999908	999803	999613	999287	998756	997932
7.00					999997	999919	999977	999945	999878	999755	999539	999181	998613
7.25					999998	999996	999987	999967	999925	999846	999704	999464	999076
7.50					999999	999998	999992	999980	999954	999903	999811	999652	999388
7.75						999999	999996	999989	999972	999940	999880	999775	999597
8.00							999998	999994	999983	999963	999924	999855	999737
8.25							999999	999997	999990	999977	999952	999907	999829
8.50								999998	999994	999986	999970	999941	999889
8.75								999999	999996	999992	999982	999963	999929
9.00									999998	999995	999989	999977	999954
9.25									999999	999997	999993	999985	999971
9.50										999998	999996	999991	999982
9.75										999999	999997	999995	999988
10.00											999998	999997	999993
10.50											999999	999999	999997
11.00													999999

Table 7-(b) Continue. (η=3.50～18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05													
0.10													
0.15													
0.20													
0.25	1508	606	241	95	14	2							
0.50	8203	3774	1708	762	146	27	5	1					
0.75	24263	12368	6171	3022	690	149	31	6	1				
1.00	53082	29444	15928	8428	2229	553	130	29	6				
1.25	96344	57464	33330	18860	5666	1585	418	105	25	1			
1.50	153712	97709	60269	36194	12179	3789	1104	305	80	5			
1.75	223047	150039	97783	61949	23093	7916	2529	761	217	16	1		
2.00	300969	212973	145861	97000	39701	14873	5171	1687	521	43	3		
2.25	383523	284015	203465	141428	63074	25651	9647	3393	1126	107	9	1	
2.50	466788	360090	268716	194499	93891	41211	16678	6293	2234	241	22	2	
2.75	547333	437985	339188	254783	132336	62370	27036	10900	4124	502	51	4	
3.00	622488	514715	412231	320346	178060	89690	41473	17798	7153	977	111	11	1
3.25	690433	587782	485261	388989	230214	123405	60643	27610	11751	1790	225	24	2
3.50	750170	655308	555989	458479	287544	163380	85031	40945	18403	3112	431	51	5
3.75	801395	716065	622568	526746	348518	209113	114890	58347	27623	5160	786	101	11
4.00	844347	769433	683657	592022	411468	259778	150213	80241	39917	8205	1368	192	23
4.25	879636	815298	738424	652928	474734	314296	190715	106887	55749	12559	2284	348	46
4.50	908096	853938	786496	708501	536774	371420	235853	138354	75497	18571	3674	606	86
4.75	930663	885904	827880	758180	596261	429837	284863	174497	99420	26611	5710	1017	155
5.00	948277	911907	862876	801761	652128	488249	336813	214966	127630	37052	8597	1651	270
5.25	961828	932734	891985	839330	703600	545458	390671	259223	160078	50243	12575	2598	456
5.50	972113	949175	915830	871197	750186	600419	445366	306573	196548	66492	17905	3969	745
5.75	979823	961982	935084	897822	791657	652282	499855	356209	236666	86041	24868	5904	.1183
6.00	985534	971832	950425	919755	828005	700406	553171	407258	279915	109046	33749	8563	1830
6.25	989718	979319	962496	937586	859404	744364	604467	458828	325669	135563	44826	12132	2760
6.50	992753	984948	971882	951902	886160	783927	653046	510057	373222	165539	58354	16815	4065
6.75	994932	989136	979101	963262	908667	819041	698369	560147	421824	198808	74550	22833	5857
7.00	996483	992220	984594	972178	927371	849800	740063	608395	470721	235100	93581	30410	8265
7.25	997576	994471	988733	979102	942737	876409	777910	654216	519185	274044	115551	39772	11437
7.50	998342	996100	991823	984426	955223	899158	811834	697150	566543	315190	140490	51134	15535
7.75	998873	997267	994108	988481	965265	918391	841878	736870	612202	358024	168351	64689	20735
8.00	999238	998098	995784	991543	973261	934477	868182	773173	655663	401994	199007	80598	27220
8.25	999488	998685	997004	993834	979569	947796	890964	805970	696528	446529	232253	98986	35176
8.50	999658	999097	997885	995535	984501	958716	910489	835276	734508	491063	267813	119924	44785
8.75	999773	999383	998516	996787	988323	967587	927059	861185	769415	535055	305348	143432	56217
9.00	999850	999581	998965	997703	991262	974730	940987	883862	801157	578005	344471	169470	69624
9.25	999902	999717	999282	998368	993503	980432	952587	903519	829728	619472	384756	197940	85132
9.50	999936	999810	999505	998847	995200	984947	962166	920399	855194	659078	425758	228684	102835
9.75	999958	999873	999661	999190	996475	988494	970008	934767	877679	696517	467028	261487	122790
10.00	999973	999916	999768	999434	997427	991259	976377	946891	897352	731558	508121	296089	145009
10.50	999989	999963	999894	999728	998652	995046	985616	965463	929095	793881	588134	369444	196066
11.00	999995	999984	999952	999872	999309	997255	991446	978082	952220	845566	662885	446007	255201
11.50	999998	999994	999979	999941	999653	998511	995027	986409	968557	887009	730224	522868	320920
12.00	999999	999998	999991	999973	999829	999209	997169	991757	979770	919209	788855	597271	391192
12.50		999999	999996	999988	999917	999587	998421	995104	987263	943500	838302	666880	463661
13.00			999998	999995	999960	999789	999136	997150	992145	961323	878772	729948	535899
13.50			999999	999998	999981	999894	999536	998372	995250	974063	910973	785391	605635
14.00				999999	999991	999947	999756	999087	997182	982947	935919	832759	670950
15.00					999998	999987	999935	999727	999060	993033	968661	904083	783052
16.00						999997	999984	999923	999706	997347	985751	948872	866792
17.00						999999	999997	999979	999914	999054	993947	974572	923642
18.00								999995	999976	999682	997588	988154	959016

Table 8-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.8$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	221199	91529	37718	15486	6337								
0.10	393469	180690	81892	36709	16302								
0.15	527633	265795	130711	63064	29954								
0.20	632120	345746	182585	93863	47230								
0.25	713495	419897	236149	128379	67959	35206	17913	8975	4438	2169	1049	503	239
0.50	917915	700450	495876	332008	212828	131720	79180	46438	26663	15028	8333	4554	2456
0.75	976482	856172	698081	536254	392176	275261	186583	122743	78671	49282	30252	18236	10815
1.00	993262	934368	831431	701807	564928	436084	324451	233687	163550	111573	74392	48588	31147
1.25	998070	971172	910793	819585	707679	587644	470717	364898	274588	201142	143785	100524	68866
1.50	999447	987712	954759	896122	813749	714338	606691	499371	399181	310558	235638	174714	126813
1.75	999842	994888	977842	942603	886557	811184	721236	623222	523854	428900	342561	267322	204132
2.00	999955	997916	989460	969373	933522	880207	810565	728135	637903	545258	455110	371329	296508
2.25	999987	999165	995109	984140	962328	926684	876004	811177	734917	651156	564295	478541	397414
2.50	999996	999670	997779	991999	979271	956534	921510	873300	812595	741529	663263	581452	499719
2.75	999999	999871	999011	996055	988886	974951	951787	917600	871676	814555	747944	674429	597077
3.00		999950	999566	998094	994178	985927	971177	947910	914664	870848	816884	754155	684802
3.25		999981	999813	999096	997013	992273	983187	967911	944753	912491	870619	819464	760158
3.50		999993	999920	999579	998496	995845	990410	980695	965104	942193	910922	870845	822213
3.75		999997	999967	999806	999256	997808	994641	988635	978453	962701	940130	909838	871424
4.00		999999	999986	999912	999637	998864	997061	993442	986972	976453	960655	938485	909147
4.25			999994	999961	999825	999421	998416	996285	992275	985433	974679	958921	937189
4.50			999998	999983	999917	999709	999160	997931	995502	991157	984020	973114	957459
4.75			999999	999992	999961	999856	999561	998866	997424	994726	990098	982733	971740
5.00				999996	999981	999930	999774	999388	998548	996906	993969	989105	981566
5.25				999998	999992	999967	999885	999674	999194	998213	996386	993240	988180
5.50				999999	999996	999985	999942	999828	999558	998983	997867	995871	992544
5.75					999998	999993	999972	999911	999761	999429	998759	997516	995368
6.00					999999	999998	999986	999954	999872	999684	999287	998526	997164
6.25						999999	999993	999977	999933	999827	999596	999137	998288
6.50							999997	999988	999965	999907	999774	999501	998979
6.75							999999	999994	999982	999950	999875	999715	999399
7.00								999997	999990	999974	999932	999839	999651
7.25								999998	999995	999986	999963	999910	999799
7.50								999999	999998	999993	999980	999951	999886
7.75									999999	999996	999990	999973	999936
8.00										999998	999995	999985	999964
8.25										999999	999997	999992	999980
8.50											999999	999996	999989
8.75												999998	999994
9.00												999999	999997
9.25													999998
9.50													999999
9.75													

Table 8-(b) Continue. (η=3.50～18·00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05													
0.10													
0.15													
0.20													
0.25	53	11	2										
0.50	690	187	49	12	1								
0.75	3642	1167	359	106	8	1							
1.00	12179	4496	1580	532	54	5							
1.25	30611	12771	5046	1901	239	26	3						
1.50	63074	29318	12850	5350	813	107	12	1					
1.75	112169	57431	27640	12597	2274	351	48	6	1				
2.00	178060	99469	52116	25794	5453	977	153	21	3				
2.25	258323	156137	88401	47199	11545	2375	423	67	9				
2.50	348518	226211	137485	78717	22046	5160	1040	184	29	1			
2.75	443162	306738	198912	121473	38594	10197	2306	457	81	2			
3.00	536774	393602	270792	175505	62721	18571	4686	1031	202	6			
3.25	624702	482259	350107	239688	95588	31509	8820	2145	461	16			
3.50	703600	568426	433196	311864	137754	50243	15519	4150	979	40	1		
3.75	771566	648595	516296	389155	189023	75843	25722	7532	1939	93	3		
4.00	828005	720310	596012	468361	248426	109046	40422	12908	3615	203	8		
4.25	873339	782220	669647	546358	314311	150126	60554	21010	6379	417	19	1	
4.50	908667	833959	735361	620424	384530	198808	86887	32635	10708	813	42	2	
4.75	935442	875931	792184	688453	456684	254267	119906	48587	17175	1505	89	4	
5.00	955223	909061	839911	749051	528375	315190	159730	69589	26428	2661	179	9	
5.25	969495	934558	878935	801520	597424	379902	206065	96207	39141	4507	344	19	1
5.50	979569	953724	910057	845769	662037	446529	258206	128768	55970	7336	634	39	2
5.75	986536	967819	934306	882183	720892	513159	315084	167305	77485	11511	1122	77	4
6.00	991262	977975	952794	911469	773172	578005	375349	211529	104111	17456	1913	147	8
6.25	994412	985153	966604	934522	818530	639528	437487	260834	136071	25642	3149	269	17
6.50	996475	990136	976726	952306	857019	696517	499935	314329	173351	36567	5015	477	33
6.75	997806	993537	984011	965765	889005	748127	561199	370901	215677	50722	7744	817	63
7.00	998652	995821	989166	975771	915067	793881	619946	429298	262522	68555	11618	1357	115
7.25	999181	997332	992755	983083	935911	833633	675076	488214	313131	90436	16962	2187	204
7.50	999509	998318	995216	988342	952289	867516	725765	546377	366571	116619	24135	3426	351
7.75	999708	998951	996879	992067	964942	895877	771474	602626	421785	147212	33519	5228	587
8.00	999829	999354	997988	994666	974564	919209	811937	655966	477664	182155	45499	7779	955
8.25	999900	999606	998717	996455	981769	938090	847130	705610	533111	221215	60440	11302	1514
8.50	999943	999762	999191	997671	987087	953131	877229	750997	587104	263984	78662	16052	2343
8.75	999967	999858	999495	998486	990958	964934	902560	791789	638744	309900	100419	22312	3541
9.00	999982	999916	999688	999026	993738	974063	923553	827859	687290	358273	125870	30386	5234
9.25	999990	999951	999809	999380	995710	981028	940697	859257	732180	408321	155068	40582	7574
9.50	999994	999971	999884	999609	997091	986272	954500	886181	773037	459212	187941	53203	10741
9.75	999997	999984	999930	999756	998047	990170	965464	908939	809663	510103	224292	68528	14939
10.00	999998	999991	999958	999849	998702	993033	974059	927909	842019	560186	263798	86795	20396
10.50		999997	999985	999944	999442	996602	985802	956184	894423	655058	350437	132802	36076
11.00		999999	999995	999980	999769	998403	992525	974400	932171	739153	443363	191720	59794
11.50			999998	999993	999907	999276	996207	985597	958047	809758	537365	262599	93366
12.00			999999	999998	999964	999682	998141	992183	974983	866108	627388	343022	138033
12.50				999999	999986	999865	999119	995901	985596	908991	709289	429407	194104
13.00					999995	999944	999595	997920	991980	940201	780292	517534	260749
13.50					999998	999978	999820	998977	995676	961978	839111	603176	335986
14.00					999999	999991	999922	999511	997740	976581	885790	682672	416893
15.00						999999	999986	999897	999434	991888	947439	813595	581667
16.00							999998	999980	999873	997494	978458	902095	728568
17.00								999996	999974	999303	992086	953862	840958
18.00								999999	999995	999824	997377	980402	915741

Table 9-(a) Conditional probability, $F(\xi|\eta)\times 10^6$, for two-variate exponential distribution for $\rho=0.9$. The left column shows ξ and the first row η. ($\eta=0\sim3.00$)

	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00
0.05	393469	67072	10829	1682	254								
0.10	632120	154956	33275	6577	1226								
0.15	776870	253210	67732	16105	3532								
0.20	864665	353707	113279	31398	7887								
0.25	917915	450652	168099	53177	15028	3907	952	220	49	10	2		
0.50	993262	800738	498783	254385	111574	43548	15490	5107	1581	463	130	35	9
0.75	999447	942534	765641	525760	310558	161574	75614	32373	12850	4780	1680	562	180
1.00	999955	985721	909041	749683	545258	351710	203717	107371	52116	23536	9976	3997	1523
1.25	999996	996810	969322	886578	741529	560877	384040	239659	137485	73130	36353	17006	7532
1.50		999342	990727	954618	870848	737341	574093	410625	270792	165584	94471	50597	25581
1.75		999873	997434	983613	942193	859464	735431	585660	433196	298153	191663	115601	65729
2.00		999977	999339	994570	976453	931844	851036	734934	596012	452817	322504	215853	136220
2.25		999996	999840	998327	991157	969681	923238	844704	735361	605430	470181	344411	238325
2.50		999999	999963	999516	996906	987502	963465	916062	839911	736415	614099	485767	364301
2.75			999992	999868	998982	995184	983806	957841	910057	836278	737905	622154	499917
3.00			999998	999965	999683	998252	993267	980191	952794	905015	833538	739704	629692
3.25				999991	999906	999399	997358	991240	976726	948284	900771	831499	741724
3.50				999998	999973	999803	999016	996334	989166	973451	944263	897191	830018
3.75				999999	999992	999938	999650	998542	995216	987093	970383	940681	894171
4.00					999998	999981	999881	999446	997988	994034	985056	967525	937494
4.25					999999	999994	999961	999799	999191	997368	992815	983076	964876
4.50						999998	999988	999930	999688	998889	996698	991578	981169
4.75						999999	999996	999976	999884	999549	998545	995986	990340
5.00							999999	999992	999959	999824	999384	998163	995247
5.25								999998	999986	999933	999748	999191	997751
5.50								999999	999995	999976	999901	999656	998975
5.75									999999	999991	999962	999859	999549
6.00										999997	999986	999944	999808
6.25										999999	999995	999978	999920
6.50											999999	999992	999968
6.75												999997	999988
7.00												999999	999995
7.25													999998
7.50													999999

Table 9-(b) Continue. (η=3.50～18.00)

	3.50	4.00	4.50	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	12.00	14.00	16.00	18.00
0.05													
0.10													
0.15													
0.20													
0.25													
0.50	1												
0.75	16	1											
1.00	194	21	2										
1.25	1280	184	23	3									
1.50	5611	1031	163	23									
1.75	18123	4150	810	138	3								
2.00	46153	12909	3057	626	18								
2.25	97193	32635	9234	2247	91	2							
2.50	175386	69589	23206	6629	363	13							
2.75	278803	128768	49978	16576	1211	56	2						
3.00	399274	211529	94422	35991	3446	206	8						
3.25	524853	314329	159492	69195	8548	652	33	1					
3.50	643505	429297	244740	119710	18794	1808	115	5					
3.75	746196	546377	345868	188933	37148	4456	351	19					
4.00	828327	655966	455581	275274	66815	9888	955	64	3				
4.25	889479	750997	565349	374161	110495	19960	2343	189	11				
4.50	932139	827859	667356	478945	169562	37000	5234	507	35				
4.75	960171	886181	755947	582336	243446	63503	10741	1239	102				
5.00	977606	927909	828238	677870	329452	101649	20396	2784	271	1			
5.25	987911	956184	883923	760941	423135	152754	36076	5789	659	4			
5.50	993722	974400	924582	829216	519070	216807	59794	11212	1487	11			
5.75	996857	985597	952826	882456	611822	292258	93367	20333	3126	30			
6.00	998480	992183	971551	921984	696801	376126	138033	34698	6154	78			
6.25	999289	995901	983436	950010	770833	464412	194104	55972	11397	189	1		
6.50	999678	997920	990675	969039	832344	552716	260749	85703	19936	428	3		
6.75	999858	998977	994917	981444	881219	636883	335986	125047	33067	916	9		
7.00	999939	999511	997314	989225	918452	713538	416893	174497	52193	1850	23		
7.25	999975	999773	998622	993931	945706	780408	499982	233688	78656	3542	55		
7.50	999990	999897	999313	996680	964915	836406	581668	301336	113525	6446	125	1	
7.75	999996	999955	999667	998235	977976	881516	658712	375325	157394	11186	270	3	
8.00	999998	999980	999843	999087	986558	916538	728568	452932	210205	18557	556	7	
8.25	999999	999992	999928	999540	992017	942787	789568	531153	271164	29506	1091	16	
8.50		999996	999967	999774	995382	961811	840957	607048	338763	45070	2047	37	
8.75		999998	999986	999892	997396	975163	882789	678055	410906	66284	3679	80	1
9.00		999999	999994	999950	998567	984250	915741	742216	485123	94061	6345	167	2
9.25			999998	999978	999230	990256	940893	798287	558836	129058	10526	335	5
9.50			999999	999990	999596	994114	959522	845745	629619	171554	16824	643	11
9.75				999996	999792	996526	972923	884696	695421	221355	25957	1188	24
10.00				999999	999896	997996	982300	915733	754716	277760	38719	2114	50
10.50					999975	999375	992926	957883	850619	405225	78371	6018	200
11.00					999994	999821	997404	980684	916289	540451	141251	15016	692
11.50					999999	999952	999122	991844	956762	668326	229346	33180	2088
12.00						999988	999725	996818	979368	776919	339262	65589	5574
12.50						999997	999920	998849	990880	860291	462276	117081	13269
13.00						999999	999978	999613	996255	918504	586571	190437	28401
13.50							999995	999878	998567	955673	700622	284731	55088
14.00							999999	999964	999488	977484	796165	394715	97553
15.00								999997	999947	995231	921588	625807	239527
16.00									999996	999211	976392	813072	444593
17.00									999999	999895	994384	925102	659695
18.00										999987	998931	975879	828078