

側面より風を受ける円筒形空気膜構造について

國枝 治郎・横山 良幸・荒川 正夫

CYLINDRICAL PNEUMATIC MEMBRANE STRUCTURES SUBJECT TO WIND

By Haruo KUNIEDA, Yoshiyuki YOKOYAMA
and Masao ARAKAWA

Synopsis

Since pneumatic membrane is usually flexible, wind loading on it should be determined in due consideration of the interaction between wind and the structure. Analytical method as interaction system is undertaken here, introducing some modelizations about wind. Some flow pattern models with due regard to the separation flow and wake were set herein in correspondence with the state of high Reynolds number and numerical calculations were carried out, applying them to solid cylinder first. It was depicted that numerical result with regard to one flow model shows quite good agreement with Roshko's experimental results. Thence, applying this flow model to the membrane, the interaction analysis was prosecuted, and some design charts about wind pressure distribution, deflections and stresses of the membrane were presented concerning to the several design parameters. Wind tunnel experimental results are also presented in order to verify the adequency of the modelization about wind. And moreover, the possibility of the representation of wind pressure distribution by a simple function is discussed.

1. 序

円筒形空気膜構造の設計に当って側面より風を受ける場合の応力，変形解析は必須不可欠のものであるが，現在に至るまで風圧評価の統一的手法は定められておらず経験や実験に基づくか，又は剛な円筒に対する風圧係数を用いて評価されるのが一般的である。しかし実験はレイノルズ数の適合性や模型製作上の制約が大ききく，又剛な円筒に於ける風圧係数の膜構造への適用は誤差の程度が不明確である。

風により膜構造は変形し，構造物周辺の風の流れはこの変形の影響を受け，従って風圧分布も変化すると考えられる。即ちそれ自身の曲げ剛性が極めて小さく従って外力に対して応答変形の極めて大きな膜構造の如き物の風圧算定に於いては，風～構造物連成系としての解析が必要である。

この様な観点から膜構造～風連成系解析を遂行し風圧分布を決めた研究は未だ見当たらない様である。風を受ける膜構造の解析に関する研究は E. W. Ross, Jr.¹⁾, D. Krajcinovic²⁾, 植村益次³⁾等のものがあるが，いずれも風圧分布として実験値をそのまま採用している。いずれにあっても風についての考察は深くなされていない。従ってここでは膜構造～風連成系解析を試み，風圧分布，変形状態，断面力等を種々の風速，内圧，半径・膜厚比下で明らかにする。

大変形をする膜構造に関する支配式は簡潔な形で与えられた Ross¹⁾ の変数表現を用いて取り扱う。風の解析的取り扱いを可能にするためには風を何らかの形にモデル化する事が必要である。風（流体）モデルをより現実に近付けるためには少なくとも剥離の影響を考慮せねばならず，それにはレイノルズ数の影響を無視出来ない。実際の構造物に自然風が作用する場合レイノルズ (Re) 数は相当に大きくなり，ほぼ超々臨界領域 (hyper critical region ; $Re > 1.5 \times 10^6$) の流体として取り扱い得る。この領域に於ける流体に対して

Achenbach⁴⁾, A. Roshko⁵⁾等が剛円柱を対象に実験を行っており, Roshko の結論によるとこの領域に於いてはもはや (例えば $Re=1.5 \times 10^6$ 点の様な) 顕著な遷移点はなく, 剥離点位置, 背圧係数, 抗力係数等も殆んど変化を示さないと結論している。この結論を flexible な膜構造に直ちに適用する事は飛躍がありすぎるであろう。唯, この結論は膜構造～風連成系解析に於ける流体の大胆な単純モデル化の可能性を示唆すると著者等は考える。連成系解析遂行により構造物に対する風圧分布特性を明確にした上で, 実設計用に一定の風圧分布を定め得るならば, それは極めて望ましい事である。

ここでは Re 数の極めて大なる場合を対象とする剥離及び wake を考慮した種々の流体モデルを考え, 先ず剛円柱周りの解析を行なって上述実験値と良く合致するモデルを選定し, この流体モデルを採用して連成系解析を行なう。

流体モデルの設定に於いて境界層流の出現点位置及び剥離流線形の仮定のみで, Roshko の実験結果⁵⁾ と風圧分布係数, 剥離点位置が極めて良く一致する流体モデルが示されるであろう。又, 無次元量或は現実的な諸設計数値に対して, 風圧分布, 変形, 断面力等が明らかにされ, 当該構造物の風圧作用時の設計資料が与えられるであろう。

これら理論解を実験的に検証することは Re 数, 供試体, 風洞等の制約の為に極めて困難である。従ってここでは理論解の傍証を目的に実験例を示す。 Re 数が小さい場合に適用し得る流体モデルを設定し理論解を求め, それを風洞実験で検証する事により, 上述理論解の傍証とする。又, 動的実験を遂行し, 理論解による結論の一部の傍証を試みる。

得られた理論解を直接に実設計に適用することはその表現の煩雑さから適当ではない。最後に上述理論解の数値結果に風圧分布係数の近似関数表示を与え, 設計の便に供したい。

2. 円筒膜の基本式

円筒膜は直線母線方向には一様であって, 風荷重はこの母線方向に直交する方向にのみ作用するものと仮定する。従って風の作用する平面内でのみ考察する。力の釣合式は変形後の状態に対して記述する。歪～変位関係式は Koiter の理論⁶⁾に従う。変形前後の膜面位置を表示するのに次の様な座標系を採用する。全ての母線方向座標値 z に対して

$$\text{変形前 } (A, \Phi); A = \text{const.}, \quad \text{変形後 } (R_0(\phi), \phi)$$

ここに ϕ, Φ は互いに一価関数であり次式で表わされるとする。

$$\Phi = \Phi(\phi), \quad \phi = \phi(\Phi) \quad \dots\dots(1)$$

2.1 力の釣合式

$$b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + P = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$$n^{\alpha\beta} \parallel_{\beta} + P^{\alpha} = 0, \quad 1; \phi, 2; z \quad \dots\dots(3)$$

但し $(\parallel)_{\beta}$ は変形後の座標による共変微分である。 $n^{\alpha\beta}$ は Euler 表示による断面力テンソルであるが, $\bar{n}^{\alpha\beta}$ を Lagrange 応力テンソルに対応する断面力テンソルとすると, 二次元化された当問題では $n^{\alpha\beta}(\phi) = \bar{n}^{\alpha\beta}(\Phi)$ ($\bar{n}^{\alpha\beta}(\Phi)$ は Φ 方向断面力テンソル) が成立する。従って N_{ϕ} を Φ 方向面内力 (物理量で Φ の関数) とし, (1)式を考慮し, 膜面の幾何学的基本量を求めて, (2)を書き換えると次式が得られる。

$$\frac{2(R_0')^2 + R_0''^2 - R_0 R_0''}{a\sqrt{a}} N_{\phi} = P, \quad ' = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \dots\dots(2)'$$

ここに $a = \det(a_{\alpha\beta})$ で, $a_{\alpha\beta}$ は第一基本量である。 P は法線方向外力 (外向きを正) であり次の様に決定される。

$$P = P_i - P_w, \quad P_i : \text{内圧}, \quad P_w : \text{風圧}$$

Ross に従って次の様な座標変数 ψ を導入する (Fig.1 参照)。

$$\phi = \phi - \arctan(R_0^{-1} R_0') \quad \dots\dots (4)$$

或は

$$R_0' = R_0 \tan(\phi - \phi) \quad \dots\dots (4)'$$

(4)' を用いると (2)' は次式の様に表示される。

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\phi}{d\phi'} N_{\phi} = P \quad \dots\dots (5)$$

ところで $|\phi - \phi| < \pi/2$ とすると定義より $\sqrt{a} = \sqrt{R_0'^2 + (R_0')^2} = R_0 \sec(\phi - \phi)$ が成立するので (5) は最終的に次の様に表現され得る。

$$\phi' = \frac{P}{N_{\phi}} R_0 \sec(\phi - \phi) \quad \dots\dots (5)'$$

他方 (3) は $P_{\phi} = P_{\phi} = 0$ とすれば物理量断面力を用いて次の様になる。但し $\phi = \partial/\partial\phi$ 。(1)を考慮すると

$$N'_{\phi} / \sqrt{R_0'^2 + (R_0')^2} + N_{\phi} = 0 \quad \dots\dots (6-a)$$

$$N'_{\phi} / \sqrt{R_0'^2 + (R_0')^2} + N_{\phi} = 0 \quad \dots\dots (6-b)$$

2.2 歪～変位関係式

N_{ϕ} に対応してここでは ϕ 方向歪を考察の対象とするが、表現を簡便ならしめるため、変形前の座標 ϕ を基準として表わす。 z 方向変位成分は無いとすると法線、接線方向変位成分は次の様になる。

$$u_{\phi} = R_0 \sin(\phi - \phi), \quad w_{\phi} = R_0 \cos(\phi - \phi) - A \quad \dots\dots (7)$$

歪の定義は Koiter に従う。

$$\left. \begin{aligned} 2\gamma_{\phi} A^2 &= \left(\frac{dR_0}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{d\phi'} \right)^2 + R_0 \left(\frac{d\phi}{d\phi'} \right)^2 - A^2 \\ \gamma_{\phi} &= \gamma_{\phi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (8)$$

2.3 材料法則

膜材料は弾性法則に従うものとする。(8) より $\gamma_{\phi} = \gamma_{\phi} = 0$ であるから

$$N_{\phi} / h = C_1 \gamma_{\phi}, \quad N_{\phi} / h = C_2 \gamma_{\phi}, \quad N_{\phi} = 0 \quad \dots\dots (9)$$

と表現されるとする。ここに h は膜厚。(1), (8) より γ_{ϕ} は ϕ のみの関数と見做せるので、(9) より N_{ϕ} , N_{ϕ} も ϕ のみの関数となり (6-b) は恒等的に満される。(6-a) より $N'_{\phi} = 0$ が、従って

$$N_{\phi} = \text{const.}, \quad \gamma_{\phi} = \text{const.}, \quad N_{\phi} = \text{const.} \quad \dots\dots (10)$$

が得られる。

2.4 境界条件

変形前後の座標系の原点及び方向を同一にとる。膜は境界で固定されているものとする、境界条件は次の様になる。

$$\left. \begin{aligned} \phi(\phi_0) &= \phi_0, & \phi(\phi_1) &= \phi_1, & \phi_0, \phi_1 &: \text{const.} \\ R_0(\phi_0) &= A, & R_0(\phi_1) &= A. \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (11)$$

2.5 無次元化

次の様な無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} r_0 &\equiv R_0/A, & n_{\phi} &\equiv N_{\phi}/Ch_1, & n_{\phi} &\equiv N_{\phi}/hC_1, & \mu &\equiv C_2/C_1 \\ q_1 &\equiv P_1 / \left(\frac{1}{2} \rho_a U^2 \right), & q_{\phi} &\equiv P_{\phi} / \left(\frac{1}{2} \rho_a U^2 \right), & \eta &\equiv (A \rho_a U^2) / (2hC_1) \end{aligned}$$

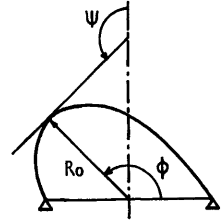


Fig. 1. Coordinate system.

ここに ρ_0 は空気密度, U は無限遠に於ける定常風速である。

(1), (4) を用いて (8) を書き換え, (10) を考慮して ϕ_0 から ϕ_1 まで積分すると

$$(1+2\gamma_0)^{-1} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r_0 \sec(\phi-\psi) d\phi = \phi_1 - \phi_0 \quad \dots (13)$$

γ_0 について解き直すと次の様に表現出来る。

$$\gamma_0 (=n_0) = \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{1}{\phi_1 - \phi_0} \int_{\phi_0}^{\phi_1} r_0 \sec(\phi-\psi) d\phi \right\}^2 - 1 \right] \quad \dots (14)$$

或は γ_0 が微小であると仮定すると

$$\gamma_0 (=n_0) = \frac{1}{\phi_1 - \phi_0} \cdot \int_{\phi_0}^{\phi_1} \{r_0 \sec(\phi-\psi) - 1\} d\phi \quad \dots (14)'$$

他方 (4) より

$$r'_0 = r_0 \tan(\phi-\psi) \quad \dots (15)$$

従って (5) は

$$\phi' = \eta(q_i - q_w) r_0 \sec(\phi-\psi) / n_0 \quad \dots (16)$$

(16) 中の n_0 は (14) 或は (14)' で与えられるので, q_i, q_w が与えられると変形は変数 ψ, r_0 を (11) の下に (15) 及び (16) を連立に解くことにより定まる。

3. 内外圧 q_i, q_w の決定

構造物の容量は十分に大きくそれに比して膜面の変位は小さいと考えられるので内圧 q_i は一定と見做すことが出来る。対して q_w は構造物周辺の流れの様相によって定まる。だが周辺での風の流れを正確に記述することは極めて困難である故, 流れの状態を簡単にパターン化する。本研究では剥離, wake を考慮した下記の如き3個の部分から成るパターンを考える。

3.1 流体のモデル化

前面に角縁を有さない構造物を過ぎる流れの様相は Re 数に大きく左右される。実構造物では Re 数は transcritical region ($>3.5 \times 10^6$) に入る場合が多いと思われる。この様な大なる Re 数に対して Roshko はもはや 1.5×10^6 に於ける遷移点に相当する様な流れの遷移点は存在しないだろうと結論している⁶⁾。即ち剥離点位置, 背圧係数, 抗力係数等も殆んど変化を示さない^{6),7)}。しかしこの Re 数の領域に於ける流れのパターンは複雑で, 不明確な点も多く, 厳密にはその状態を解析し得ない。

現在までに円筒を過ぎる流れに対して Roshko⁶⁾, Parkinson & Jandari⁹⁾ 等による剥離, 後流を考慮した流体モデルがあるが, いずれも剥離点は実験結果等から与えるものとして, 理論的には求めていない。又, 円筒は剛体で, 変形に伴う風圧分布の変化, 剥離点位置変化は考慮し得ない。

ここでは円筒構造物の変化に伴うこれ等の変化をも解析し得る次の様なモデル化を提案する。

流体を次の様に3個の部分に別ける (Fig. 2 参照)

(I) 理想流体部分, (II) 境界層流部分, (III) wake 部分

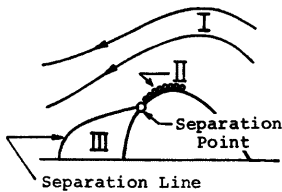


Fig. 2. Composition of flow model.

(I)の部分は速度ポテンシャル Ψ を有し, その境界は剥離点より上流では膜面, 下流では剥離線とする。(II)はその厚さが r_0 に比して無視し得る程に小さいと考える境界層流で, 唯, 剥離点を決定するためにのみ設定するものである。Navier-Stokes の方程式に基づく境界層運動或は運動量方程式を解くことによって剥離位置, 剥離線の発生方向を定める。(II)の部分の出現する始点を決定する事は困難なので, ここでは Re 数大なる場合に対しては, 膜面に沿う(I)の流れが主流に平行になる点を一種の特異点

と見做しこの点を始点と仮定する。ポテンシャル流理論に従えば膜の変形を考慮してもこの点付近で静圧力が最小、即ち流速が最大となり、これより下流では圧力上昇となる。この事もこの点を境界層流発生点と見做す根拠である。 Re 数が極めて小さい ($O(5)$) 場合に対しては(II)の始点は前縁とする。

剥離を生じた流れに対する必然的な部分 wake, (III), に於ける流れのパターンを決定する事は困難である。この部分を考慮した流体モデルがいくつか提案されているが、厳密に取り扱う事なく、殆んどの場合この部分の流れを無視し、背圧を一定としている。最も古典的なものとして良く知られた Helmholtz, Kirchhoff 等にはじまる死水理論に基づく自由流線法¹⁰⁾では背圧を零とするので、現実との相違は大きく、wake 幅が下流に行く程広がるという欠点を有する¹¹⁾。Riabouchinski の仮想鏡像法¹²⁾ (背圧係数は可変, wake は閉じる), Roshko の変形ホドグラフ法⁹⁾ (背圧係数可変, wake 幅有限), Parkinson & Jandali の wake source model⁹⁾ (背圧係数可変, wake 幅有限) 等の諸手法ではいずれも背圧係数, 剥離位置をあらかじめ与えておかねばならず、これ等を解析から求め様とする本研究の意図とは違ったものである。ここでは次の様な2種類のモデルを考える。その一は wake は大きな渦と見做すものであり、他は wake は静水状態と同じと仮定するものである。

3.2 ポテンシャル流の基礎式

ポテンシャル流(I)の速度ポテンシャル Ψ は次の連続の条件を満たす。

$$\Delta\Psi=0 \quad \dots\dots(17)$$

構造物表面での圧力は Bernoulli 式より求まる。

$$\left[\frac{1}{2}\rho_*u^2 + P_w \right]_{R=R_0} = \frac{1}{2}\rho_*U^2 + P_\infty \quad \dots\dots(18)$$

$$u^2 = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \right)^2 \quad \dots\dots(19)$$

ここに u, P_w は (R, ϕ) における流速, 静圧である。

(17)に対する境界条件を次の様に定める。

$$\left[\frac{1}{R} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \right]_{R=\infty} = U \sin\phi, \quad \left[\frac{\partial\Psi}{\partial R} \right]_{R=\infty} = -U \cos\phi, \quad \left[\frac{1}{R} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi} \right]_{\phi=\phi_0, \phi_1} = 0 \quad \dots\dots(20)$$

剥離点より上流に於いて(I)部分の(II)に接する部分は、(II)の厚層を小さいとしている事から膜面で置き換えるものとする。膜面形状を $F(R, \phi, t) \equiv R - R_0(\phi) = 0$ と与えると、この表面に於ける理想流体の境界条件は定常状態に於いて次式で与えられる。

$$\frac{DF}{Dt} = U_* \frac{\partial F}{\partial R} + \frac{U_\phi}{R} \cdot \frac{\partial F}{\partial\phi} = 0 \quad \dots\dots(21)$$

ここに U_*, U_ϕ は流速 u の R, ϕ 方向の成分である。

$$f \equiv \Psi/AU, \quad q \equiv u/U, \quad r \equiv R/A \quad \dots\dots(22)$$

を導入し、(17), (20), (21) より f は次の形で得られる。

$$f = A_0 \log r - r \cos\phi + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{-k} \cos k\phi \quad \dots\dots(23)$$

但し $A_k (k=0, 1, 2, \dots)$ は次式を満たさねばならない。

$$\frac{A_0}{r_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_0} \cdot \frac{dr_0}{d\phi} \sin k\phi - \cos k\phi \right) \frac{k}{r_0^{k+1}} A_k = \frac{1}{r_0} \frac{dr_0}{d\phi} \sin\phi + \cos\phi \quad \dots\dots(24)$$

(23), (24) より f が計算されると (18), (19) よりポテンシャル流に接する膜面上の外圧 q_w が計算される。

尚(I)が剥離流線に接する部分にあつては上記 $F(R, \phi, t)$ は剥離流線形で与えられ、(21)がその上の境界条件となるので、(24)の r_0, ϕ は剥離線上ではその座標値が用いられねばならない。剥離線の座標値は**3.4**

で与えられる。

3.3 剥離点位置の決定

境界層流部分(II)に於いて、次の Prandtl's Criterion によって剥離点位置が定められる。 n を厚き方向座標として

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{n=0} = 0 \quad \dots\dots (25)$$

境界層流に対して Navier-Stokes の方程式より適当な近似の下に次の Prandtl の境界層方程式を得る。

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + \nu \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{dP_w}{ds} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \quad \dots\dots (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \dots\dots (27)$$

u, v は膜の接線方向、法線方向における境界層流の速度成分、 s は弧長、 n は法線方向座標であり、 P_w は s のみの関数とする。解析は Pohlhausen 法¹³⁾に従う。既述の様にこの層厚 δ (δ は s の関数) は膜半径 R_0 に比して充分に小さいとしているので、層外のポテンシャル流については膜面を境界として解いているが、得られる膜面上での接線方向ポテンシャル流速度成分、静圧をもって $u_0 = u|_{n=0}$ 、 P_w と見做し得るとする。従って次式が成立する。

$$u_0 \frac{du_0}{ds} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_w}{ds} \quad \dots\dots (28)$$

他方(26)に $u|_{n=0} = v|_{n=0} = 0$ を考慮すると

$$-\frac{1}{\rho_s} \frac{dP_w}{ds} + \left[\nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right]_{n=0} = 0 \quad \dots\dots (29)$$

が得られる。境界条件 $[\partial u / \partial n]_{n=0} = 0$ を考慮すると (28), (29) より境界層流内速度分布を次の様に仮定することが出来る。 ν : 動粘性係数

$$u/u_0 = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{\lambda}{6} \zeta (1 - \zeta)^3 \quad \dots\dots (30)$$

ここに $\zeta \equiv n/\delta$ 、 $\lambda = (\delta^2/\nu) (du_0/ds) = -(\delta^2/\nu \rho_s u_0) (dP_w/ds)$ であって、 λ は Pohlhausen's λ と呼ばれるものであり、常に $\lambda < 12$ を満す。

(25) 及び (30) より $\lambda = -12$ を満す位置 s が剥離点位置であることは明白である。(26) に (30) を代入し、 n 方向に積分し、 $X = \delta^2/\nu$ と置くと、 X に関する次の1階常微分方程式を得る。但し下式で $\nu = d/ds$ とする。

$$X \nu = \frac{0.8[9072 - 1670.4\lambda + 47.4\lambda^2 + \lambda^3 + u_0 u_0'' (4.8 + \lambda) X^2]}{[213.12 - 5.76\lambda - \lambda^2] u_0} \quad \dots\dots (31)$$

(31) を X について解き、 $\lambda = u_0'' X = -12$ を満す点 s をさがす事により剥離点位置は定まる。但し X に関する境界条件は $X|_{s=0} = 0$ である。

3.4 剥離流線形と wake の圧力分布

3.2 で決定されるポテンシャル流は剥離流線とその境界の一部とする。従ってまず剥離流線の決定が重要となる。剥離点位置、流線形は Re 数に依存しその決定が容易でない事は衆知の事である。又、この剥離流線形が膜面上の風圧分布形状、大きさに影響を与える事も明白である。粘性を考慮して Navier-stokes 方程式を解くことによってこの形は決定されるが、この解を求めることは容易ではない。ところで実験結果¹⁴⁾によると Re 数の高い所では剥離流線形は殆んど直線か楕円形と見做せる様に思われる。

剥離流は一般に構造物表面とある角(剥離角)をなして剥離点から発生する。この角を決定することも容易ではないが、剛円柱に対する多くの実験結果を観察するとき、 Re 数の低い場合には境界接線の方向、 Re

数の大きい場合には主流に平行に発生すると考えても良い様に思われる。実際にはこの両者の中間であろうが、ここではこの両極端の場合について考察する。

剥離流線が主流に平行の場合、wake の圧力は一定と見做し得る。だが楕円形の場合にはその圧力分布は容易に決定出来ないで、次の2つの場合を考える。その一は wake 内の流体を大きな渦と見做し、膜面に及ぼす圧力は剥離点から等距離にある剥離線上のポテンシャル流の圧力を用いるものである。これは wake に於ける渦の動きが $u=0$ の線に対してほぼ対称と見做す事に対応する。他は高 Re 数域での実験結果を参照して、wake 内圧力は一定としその値は剥離点に於ける値に等しいと考えるモデルである。

剥離点位置が $x_s=r \cos \phi_s$, $y_s=r \sin \phi_s$ で与えられるとき、楕円形剥離流線は長・短径比 $a/b=m$ とおいて次式で与えられる。

(i) 剥離流線が主流と平行に出る場合

$$r = \frac{x_s \cos \phi + m \sqrt{\{y_s^2(1+m^2) - x_s^2 + \{y_s^2(1-m^2) + x_s^2\} \cos 2\phi\}}/2}{(1+m^2)/2 + \{(1-m^2) \cos 2\phi\}/2}$$

(ii) 剥離流線が膜面接線方向に出る場合

$$r = \frac{\bar{x} \cos \phi \pm m \sqrt{Y}}{(1+m^2)/2 + \{(1-m^2) \cos 2\phi\}/2}$$

$$Y = \frac{1}{2} \{y_s^2(1+m_2y_s^2)(1+m^2) - x_s^2 + \{y_s^2(1+m^2y_s^2)(1-m^2) + \bar{x}_s^2\} \cos 2\phi\}$$

ここに

$$\bar{x} = m^2 y_s y_s' + x_s, \quad y_s' = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{y=y_s} = \tan \left(\phi_s - \frac{\pi}{2} \right)$$

但し複号符合は $\bar{x}^2 - k^2 \leq 0$ のとき+, >0 のとき-をとる。尚 $k^2 = m^2 y_s^2 (m^2 y_s'^2 + 1)$ である。

境界層流の発生点は既述の通り2例を考える。

以上を要約すると流体パターンは次の5種類のモデルにまとめる事が出来る (Fig.3 参照)。

モデル1. 剥離流線は直線と主流に平行、背圧は一定

モデル2. 剥離流線は楕円形、wake は渦、剥離角は接線方向

モデル3. 剥離流線は楕円形、wake は渦、剥離角は主流に平行

モデル4. 剥離流線は楕円形、背圧は一定、剥離角は主流に平行

モデル5. 剥離流線は楕円形、wake は渦、剥離角は接線方向、境界層流は前縁より発生

モデル1~4にあっては境界層流は構造物表面の接線が主流と平行になる点より出現とする。モデル5は後述の風洞実験値と比較する為のものである。

膜構造の様に flexible な構造物が風圧を受けて変形する場合の実験結果は見当らない様である。従ってここでは既往の多くの実験結果と比較する為に剛円柱についてまず上述5個の流体モデルを適用して数値計算を遂行し最適と思われるモデルを選定して、それを用いて変形し得る円筒形空気膜まわりの風圧分布を求めらる。

4. 数値計算の手順

以上に示された本問題に関する諸微分方程式を連立して解析解を得ることは困難なので、数値計算法により必要な結果を得る。数値計算の手順は煩雑なので流れ図を Fig.4 に併せ示す。

先ず P_1 のみが作用するとして膜構造の初期形状を (14) 或は (14)', (15), (16) より求め、剥離点位置を仮定して (23) を計算する。この場合 A_k は有限個のみ考えるものとして Point Matching 法により (24) から決定する。ポテンシャル流が解かれると (31) を解いて新たな剥離点位置が定まる。この剥離点に対して剥離流線が計算される故、初期の膜形状及び剥離流線を境界として再びポテンシャル流を解いて膜面に対する風圧分布を計算する。この風圧及び内圧を外力として、再び膜形状を決定し、上述の計算手順を再度遂

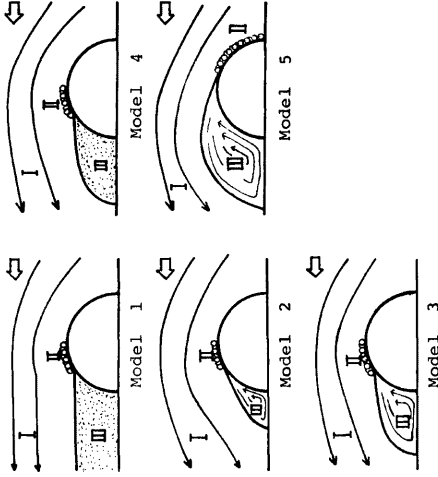


Fig. 3. Flow models considered in this paper.

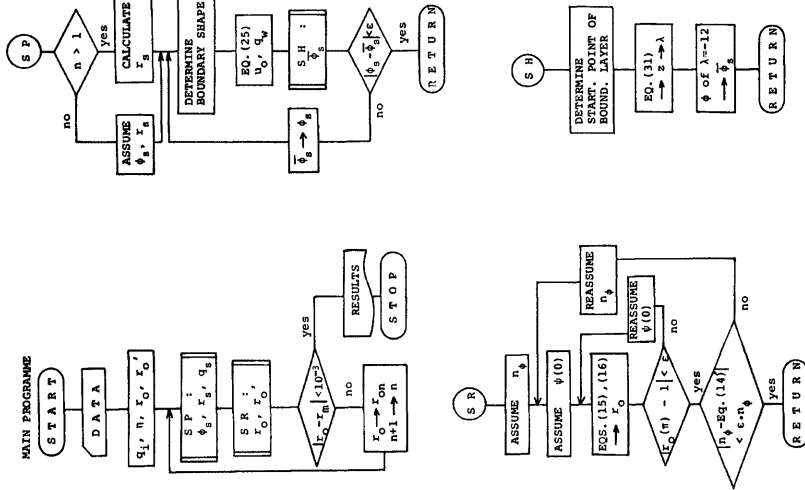


Fig. 4. Flow chart of numerical calculation.

行する。以上の計算を結果が収斂する迄必要回数繰り返す。収束判定の対象変数として R_0 を採用している。

5. 半円形剛円筒周りの計算結果

$\phi_0=0, \phi_1=\pi$ として剛円柱に 3. に示した 5 個の流体モデルを適用した結果を Fig. 5 に与える。本論で示した解析法では境界層発生点を与えているので、直接的には Re 数には関係しないが、実構造物の Re 数 (0(6)~0(7)) を考慮してここでは Roshko の実験結果⁹⁾ ($Re=8.4 \times 10^3$) を比較の対象とする。

モデル 1, 4 は傾向として実験結果とよく合致する。モデル 2 は Fig. 3 から推察される様にポテンシ

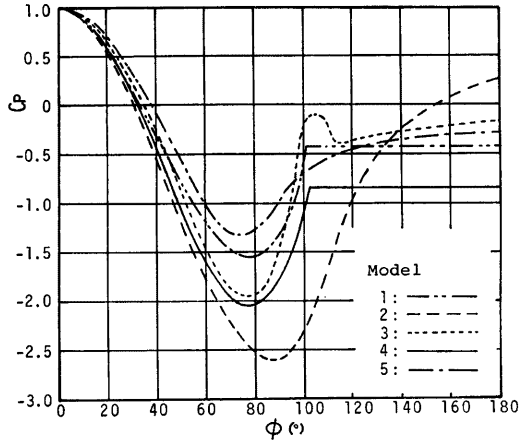


Fig. 5. Comparison of pressure distribution of various flow models around solid cylinder.

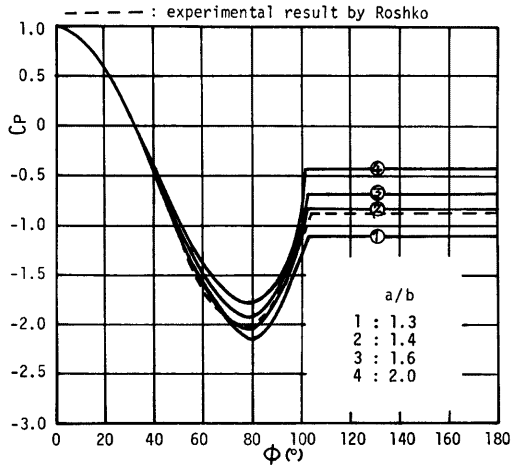


Fig. 6. Influences of major-minor axes ratio of model 4 on pressure distribution.

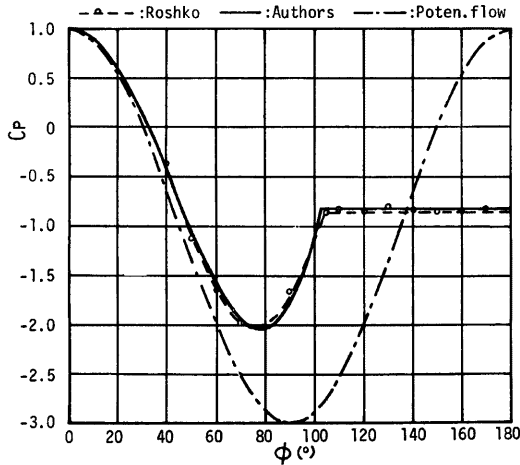


Fig. 7. Comparison of pressure distribution of analysis result with experimental result after Roshko.

ャル流理論解に近い。モデル3は剝離点より前方では実験値と良く合う傾向を示すが、wake部での圧力が小さくなり適当とは思われない。モデル5は全体として圧力が小さくなり過ぎるので Re 数の大きな場合には不適当である。

モデル4が実験値と傾向を同じくする事が示されたので、次に楕円形である剝離流線形の長・短径比 m を変化せしめて実験値に良く一致するものを求めると $m=1.4$ の場合が良好であることが Figs. 6, 7 に示される。換言すれば Roshko の実験値と合致せしめるためには $m=1.4$ を採用すれば良いという事であるが、ここで注目したいのはこの風圧分布決定に当って予め与えたものは境界層流出点と m 値のみである点である。

$m=1.4$ 時の解析値： $|C_p|_{max}=2.05$, $\phi_s=102.1^\circ$, $C_{ps}=-0.83$

Roshko の実験値： $|C_p|_{max}=2.01$, $\phi_s=104^\circ$, $C_{ps}=-0.86$

上記の如く良き一致を見る。この流体モデルは幾つかの仮定に立脚するとはいえ、風圧分布計算という視点は立つ限り、良く実状を表現したモデルと云い得るのではなからうか。

ここに与えられた結果は剛円柱に対するものであってこの流体モデル（モデル4で $m=1.4$ の場合）が膜構造に適用可能である保証はない。しかし構造物の変形が十分に小さい場合には適用可能であろう。高い Re 数領域での膜構造に対する実験検証は現時点では著者等には不可能である。

6. 半円筒形空気膜構造の解析結果及び考察

数値計算は無次元量について遂行されたが、実構造に対する理解の助けとするために一部現実的物理量に換算して併せ結果を図示する。この場合次の値を採用する。

$$C_1=3 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \mu=0.3, \rho_s=1.25 \text{ kg/m}^3$$

Fig. 8 に変形後の膜面形状と風圧分布形状の一例を示す。破線で示した原形とは内圧のみが作用している場合の構造物の形状である。 $|A\tau_0|_{max}$ として図中に示した位置は風速、内圧、 A/h に応じて当然変るものである。

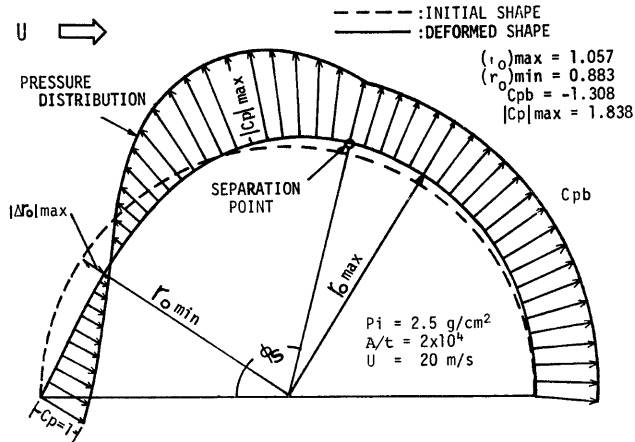


Fig. 8. An example of pressure distribution and deformation.

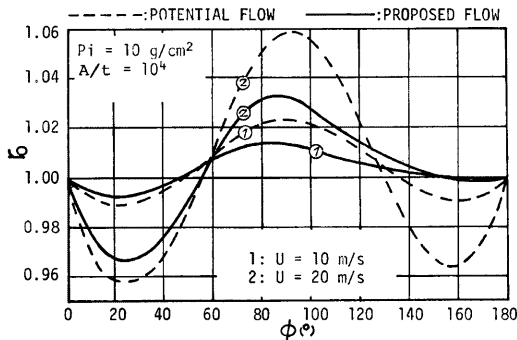
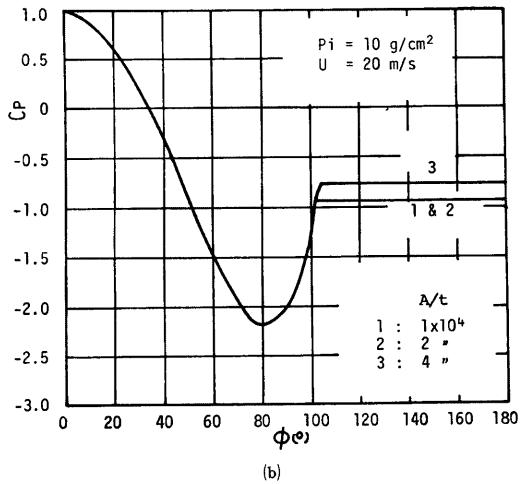
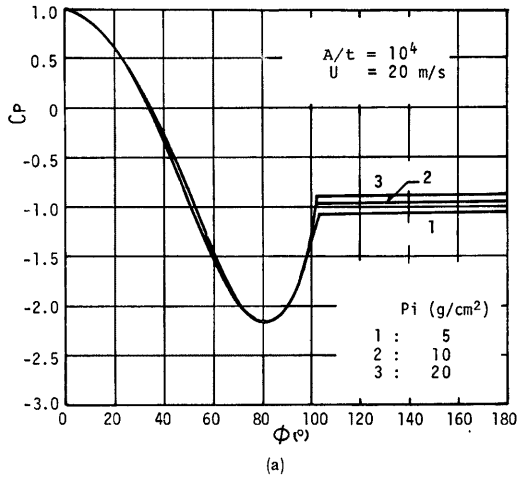


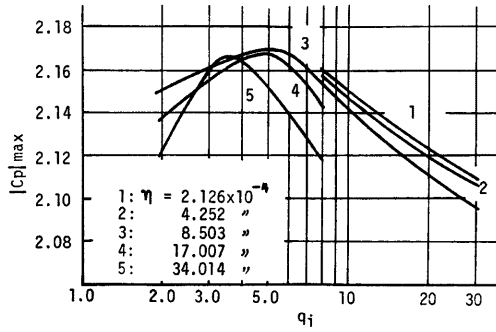
Fig. 9. Comparison of deflections with respect to separated flow and potential flow.

Fig. 9 に剥離の生じないポテンシャル流として解析をした場合との比較を变形状態について示している。剥離流を考慮しない場合には考慮した場合に比して变形が極めて大きくなり、その差異は風速の増加と共に増大し、顕著になる。従って前者の場合には風圧の影響を過評価仕過ぎることは明らかである。尚剥離流を考慮しない場合であっても膜の变形の影響で風圧分布は対称形にはならず、従って变形図も対称形ではない。

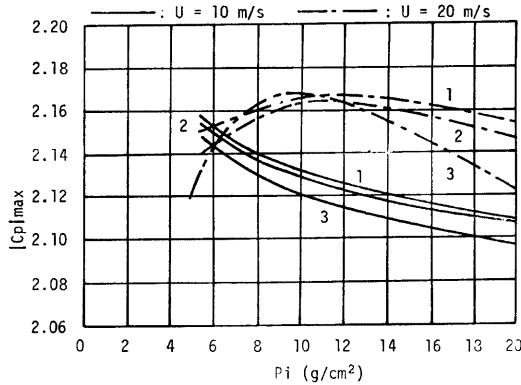
Fig. 10-a に内圧変化に従う風圧分布の変化の一例を、Fig. 10-b に半径・膜厚比 A/h の変化に従うその一例を示す。両者共前縁より剥離点までの風圧分布は殆んど変化なく、wake の圧力が内圧或は A/h の増加によって減少する傾向にある。 η , q_i と $|C_p|_{max}$ との関係を示したのが Fig. 11-a で、風速を固定し、 A/h をパラメータとして $|C_p|_{max}$ と内圧 P_i との関係を示したのが Fig. 11-b である。風速が小さい場合は A/h 及び P_i の $|C_p|_{max}$ に及ぼす影響は明確であるが、風速が増すと構造物の变形が大きくなる為にそれらの影響は複雑となる。風速が増すと(或は q_i が小さくなると) $|C_p|_{max} \sim P_i$ 関係に於いて $|C_p|_{max}$ に極大値が現われる事が判り興味あるが、变形に基づく形状変化に起因するのであろう。 $|C_p|_{max}$ が風速に



Figs. 10. Influence of inner pressure and radius-thickness ratio on pressure distribution.



(a)

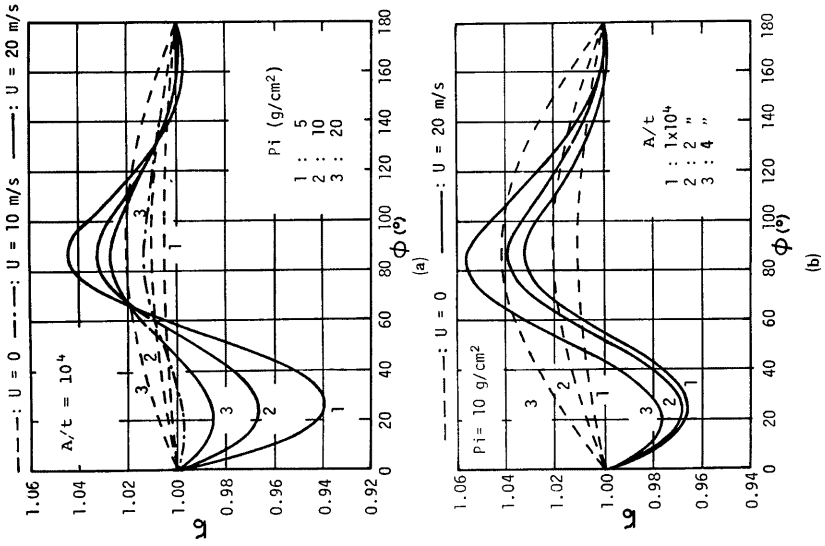


(b)

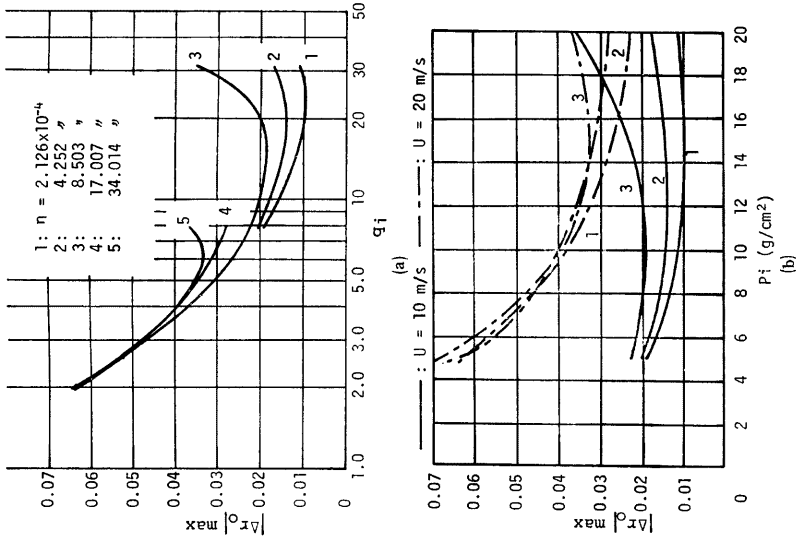
Figs. 11. Variation of $|C_p|_{\max}$ due to some design parameters.

よって変化することに留意せねばならないが、Fig. 11-b に示す範囲の例ではその変化量は重要視されねばならない程には大きくない。

Figs. 12-a, b は風速増加に従う構造物形状変化の推移を内圧及び A/h をパラメータとしてそれぞれ示したものであり、 A/h に比して内圧の変形に及ぼす影響の大きい事が判る。又、Fig. 12-a には1例だが風速増加に伴う形状変化の例が示されている。風速の小さい場合と大きい場合では変形後形状様相にかなりの差異が見られる。Figs. 12-a, b をより明確にするために変形量の絶対最大値のみに注目し描いたのが Figs. 13 であり、a に η をパラメータとして $|dr_0|_{\max} \sim q_i$ 関係を、b に具体的な量として風速、 A/h をパラメータとし $|dr_0|_{\max} \sim P_i$ 関係を示している。風速が大になると Fig. 11-b の場合と同様にその特性が一樣でない事が判る。 $|dr_0|_{\max}$ は全て内側への撓みになっている。Fig. 13-b によると内圧が高くなると $|dr_0|_{\max}$ は減少から増加へ遷移する傾向にある。これは $|dr_0|_{\max}$ となる位置 ϕ が内圧の増加と共に次第に大きくなり、局所的な変形はむしろ減少するが全体として内側に移動する傾向が強くなるためである。これは特に A/h が大きくなると顕著になる。この点に関しては Fig. 14 を参照すれば明らかである。Fig. 14 は $\phi = 90^\circ$ 点の変形量の例であり、変形が内圧の増加に従って減少する事が示される。即ち内圧の低い場合



Figs. 12. Influence of inner pressure and radius-thickness ratio on deflection.



Figs. 13. Variation of maximum deflection due to some design parameters.

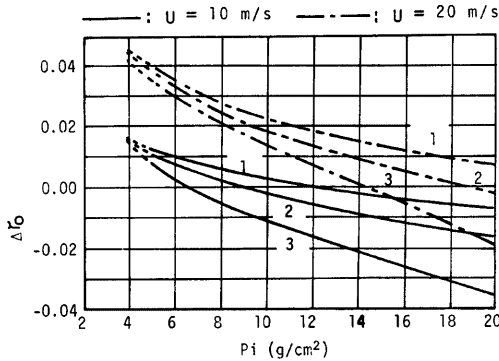


Fig. 14. Examples of deflection at $\phi=90^\circ$ due to inner pressure. (1: $A/h=1 \times 10^4$, 2: $A/h=2 \times 10^4$, 3: $A/h=4 \times 10^4$)

には ϕ が比較的小さい位置で内側への変形量が大きくなるが、同時に $\phi=90^\circ$ 近辺では大きな負圧により外側へ大きく変形する。だが内圧が増加すると初期形状としての円筒形からの偏差が大となるため、風速が増しても全体として内側に撓む傾向が強くあらわれることになり局所的な相対変形量は減少する。

最後に風速の増加に伴う断面力の変化を内圧との関係に於いて示したのが Fig. 15 で、 A/h によって風圧による断面力増加の様相に少し差異のあらわれる事が判る。 A/h が大きい場合は初期断面力が支配的であり、風圧による附加断面力は、内圧が極めて低い場合を除いて内圧に殆んど関係なく一様である。 A/h が極めて大きいか、極めて小さい場合には風圧による附加断面力は初期断面力に比して充分に小さいと云えるが、Fig. 15 の 2 の場合にはこの附加断面力は無視し得ないであろう。

図示はしていないが上記諸パラメータの数値の範囲内にあっては剥離点位置 ϕ_s は 101.8° ($U=10\text{m/s}$),

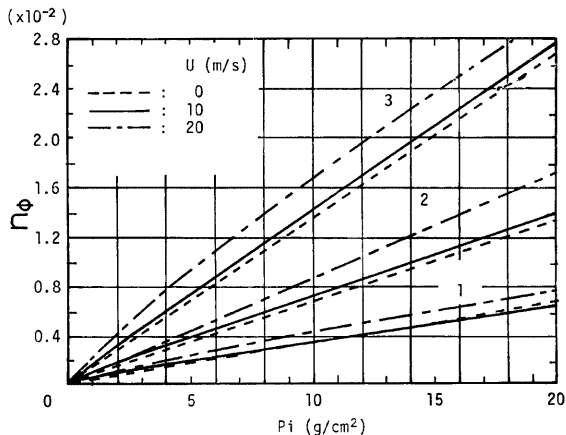


Fig. 15. Variation of stress resultant of the membrane. (1: $A/h=1 \times 10^4$, 2: $A/h=2 \times 10^4$, 3: $A/h=4 \times 10^4$)

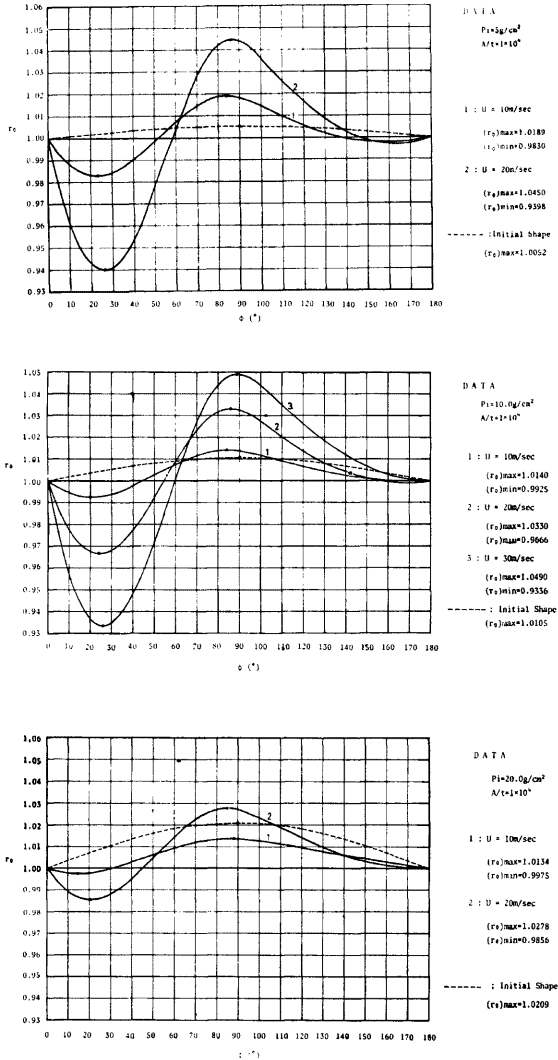
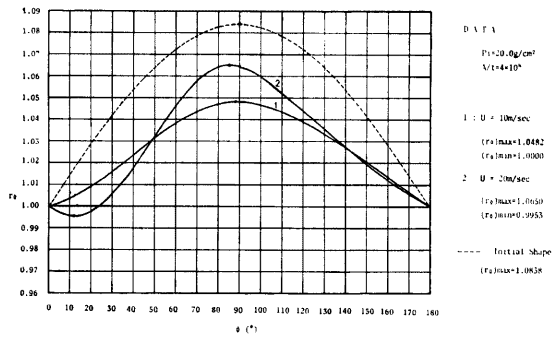
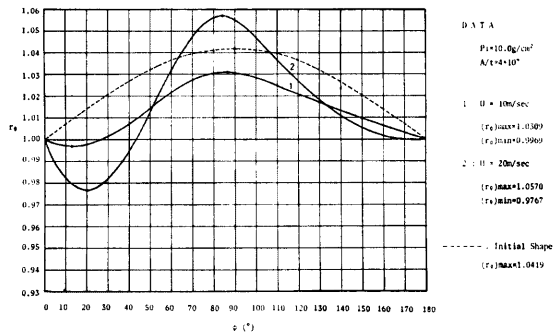
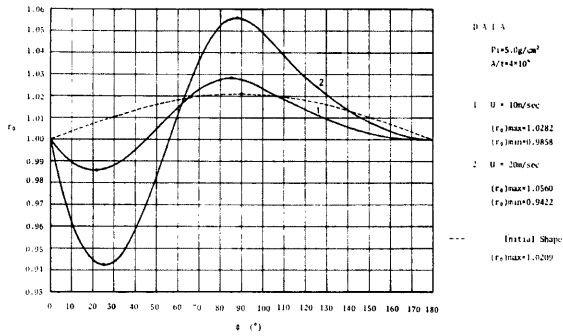


Fig. 17. Examples of



calculated deformation.

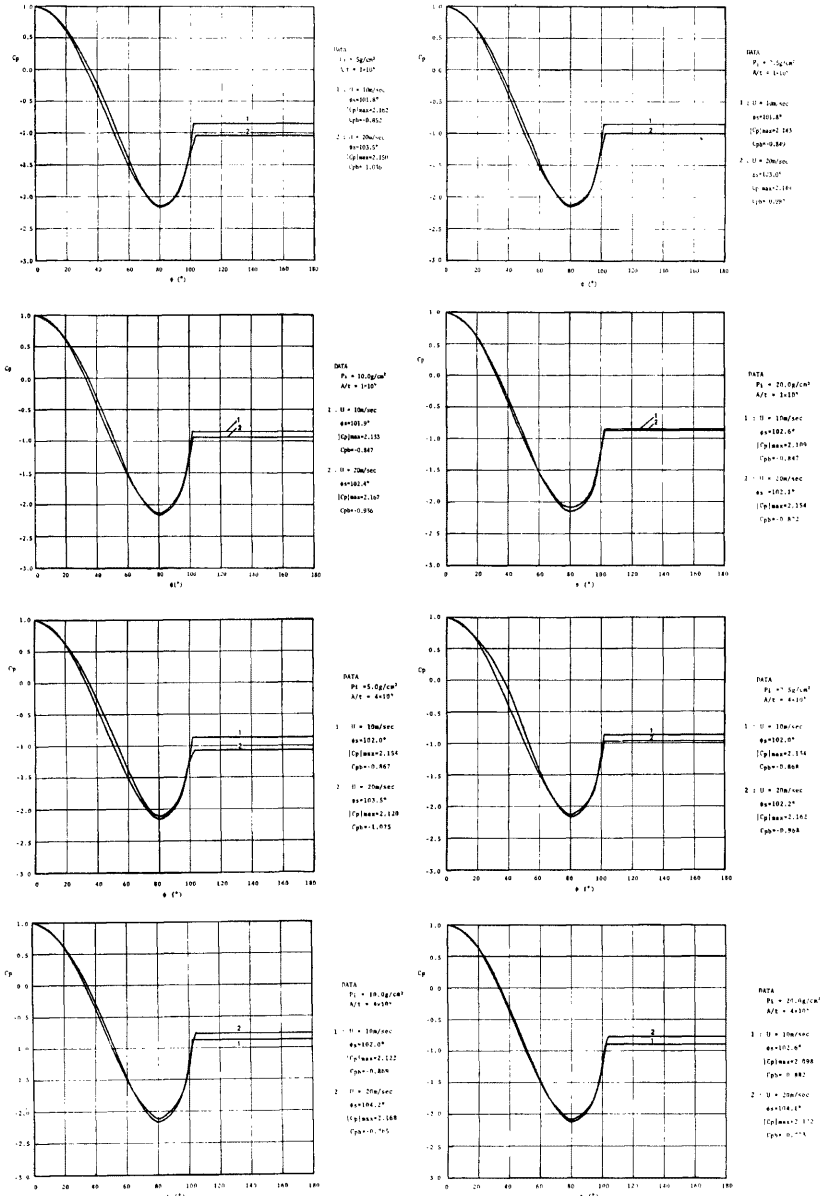


Fig. 16. Examples of calculated wind pressure distribution.

$P_1=5\sigma^*/cm^2$ から 101.1° ($U=20\sigma^*/cm^2$, $P_1=20\sigma^*/cm^2$) の間にあり、 A/h の影響は殆んど見られず、風速の影響が最大の様である。いずれにしても ϕ_s の変化量は充分に小さく、従って上記諸パラメータに関係なく一定値をとることも可と考えられる。

C_{ps} の値は ϕ_s に応じて大きく変化する。 η が小で q_i が大なる範囲では $C_{ps} \approx -0.850 \sim -0.880$ 程度でほぼ一定と見做し得るが、 η が大で q_i が小なる範囲では規則性は見い出せず、 $-1.10 \sim -0.760$ の範囲で大きく変動する。しかしながら C_{ps} のこの範囲での値の変化は膜構造の断面力算定に及ぼす影響は極めて小さく、従って C_{ps} を一定値と仮定する事も可能で、この場合 ϕ_s 及び $|C_{ps}|_{max}$ の変動幅の小さい事を考慮すると η 及び q_i に無関係に風圧分布及びその係数を設定することが可能であり、断面力及び変形計算に於ける連成系解析の不必要性によってこの種構造物の設計を極めて容易ならしめる。

7. 風洞実験結果

以上に示された理論解を実験的に検証する事の困難さは既述の通りである。ここでは Re 数が小さい場合に対する風洞実験を遂行し、対応する流体モデルに基づく理論解と比較する事により、上記理論解及びその結果の妥当性を傍証する事を試みる。

7.1 実験概要

実験は静的及び動的の2種類より成るが、使用された供試体は同一である。flexible なビニールシートにより作成された半円筒形空気膜構造模型を風洞内に設置し、膜の変形が生じ得る場合の風圧分布を内圧、風速の関係で求め、又、固有振動数を計測する。風圧分布に関する既往研究は剛模型に対するものが多いが、その理由の主たるものは、1. 膜面に測定管を取り付ける困難さ、2. 測定補助具の剛性、3. 空気漏れ、であろうと考えられる。これら諸点に対して可能な限りの対処を施して風圧分布係数を求める。

動の実験は全体的変形モードによる固有振動数を求めることを主たる目的とするが、膜面が flexible なビニールシートであるため市販のピックアップを取り付ける事は不可である。ここでは抵抗線式歪ゲージを貼付け(4点)、定内圧、定風速下での動歪を記録し、この記録よりパワースペクトルを求め、ピーク値(数個ある)の周波数を読みとる事により各測点の固有振動数と考え、各測定点(4点)に共通の周波数を取り出すことによって全体的振動に対する系の固有振動数と見做し、内圧及び風速変化に伴う固有振動数の変化を追跡した。

尚両実験とも2次元モデル化している。

模型寸法：半径 15cm, 膜面 0.15mm, 長さ 60cm

7.2 静的実験結果

膜面に於ける静圧測定値を一樣流の動圧で除した値を Fig. 18 にその一例として示す。上記理論解では考察していない前縁前方水平板(地表面相当)の影響で、前縁近傍では測定値と理論値には当然の事として差異が生じる。各図より、風圧分布係数に及ぼす内圧、風速の影響は小さいと考えても可の様に思われる。風速、内圧共に異なっているが、3.4 に於けるモデル5による理論解と実測値の比較を Fig. 19 に示す。

7.3 動の実験結果

動歪計で得られた信号記録について、ローパスフィルターにより 160 Hz 以上の信号をカットし、パワースペクトルより求めた結果を Fig. 20 に示す。図中◎印は最大ピーク値に対応する周波数である。Fig. 20 においてゲージ位置 1~4 に関係なくほぼ一定と見做せる周波数は全体的振動に対する固有振動数であろう。

風の乱れ、模型寸法、測定法等の適合性の不充分さの故に結果 Fig. 20 は現象に対する充分な情報は与え得ないが、全体的傾向として内圧、風速の影響の小さい事を結論し得るのではなからうか。

8. 理論風圧分布の関数近似

既述の理論解法を実設計時に適用するのは必ずしも望ましい事ではない。又、動的解析時にはこの様な連成系解析適用は殆んど数値計算を不可能にする。

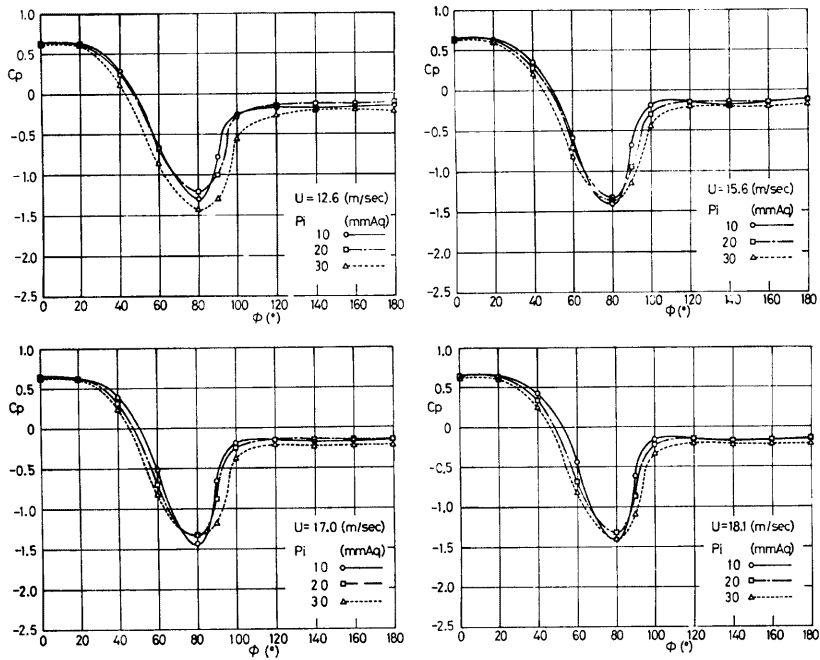


Fig. 18. Experimental results of wind pressure distribution.

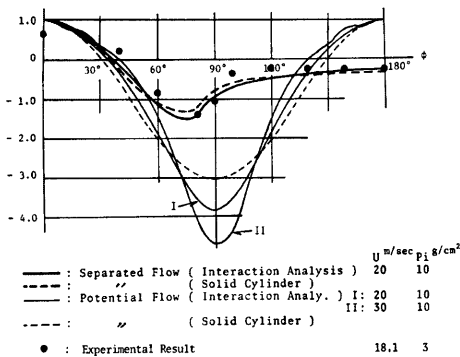


Fig. 19. Comparison of theoretical and experimental results in wind pressure distribution.

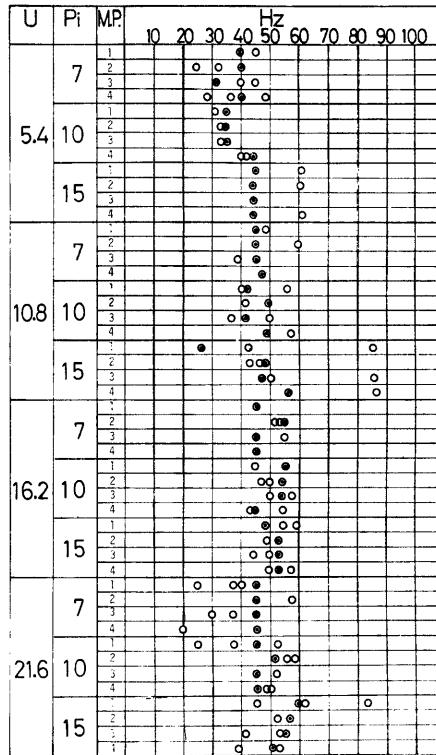


Fig. 20. Distribution of frequencies with regard to peaks in power spectrum of the response of the model in wind tunnel test. (U: wind velocity m/sec, P_i: inner pressure mmHg, M. P.: measuring point)

ところで本論に於ける今までの数値計算結果をそのまま近似関数で表現出来れば実用計算は容易になる。関数が内圧、風速の変化に対して明瞭な形で追従出来るものが望ましいが、今のところそこまでは至っていない。

風圧分布は風速、内圧、半径・膜厚比等によって変化し、その変化に規則性を見出す事は難しい。しかし、静動の実験等をも併せ考え、これら諸パラメータの影響は十分に小さいと見做せれば、単一式で表現可能となろう。

ここでは剥離点を 102° 点に固定し、(i) 近似式の係数に諸パラメータの影響の規則性はないか、(ii) 理論解を十分に表現出来るかの2点を考慮しつつ関数近似を行ない次の結果を得た。

Fourier 級数近似は展開区間3種について検討を行なったが、係数に諸パラメータの規則性はなく、又、 $|C_p|_{max}$ 、 C_{p0} での誤差が大きい。3次及び4次式の通常の多項式近似は誤差が大きい。最も良好なものは係数を最小2乗近似法により決める次の4次式近似である。

$$C_p = a_4 X^4 + a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$$

$$X = \text{radi.}(\phi)$$

Table 1. Approximate representation of wind pressure distribution by polynomials.

DATA NO.	DATA						係 數					近 似 値	
	Pi (g/cm ²)	A/t (×10 ⁴)	U (m/s)	Cp max	Cpb	S. Point (°)	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	Cp max (80°)	Cpb (102°)
1	5	1	10	2.162	-0.852	101.8	1.0	-0.5999	-0.7155	-2.5450	1.5740	2.181	-0.886
2	5	1	20	2.150	-1.036	103.5	1.0	-0.3757	-2.8046	0.0033	0.7445	2.154	-1.061
3	7.5	1	10	2.143	-0.849	101.8	1.0	-0.2556	-2.6465	-0.3974	0.9115	2.134	-0.929
4	7.5	1	20	2.149	-0.997	103.0	1.0	-0.2936	-1.8302	-1.3817	1.2107	2.140	-0.958
5	10	1	10	2.133	-0.847	101.9	1.0	-0.1700	-3.0331	-0.0053	0.7988	2.129	-0.922
6	10	1	20	2.167	-0.936	102.4	1.0	-0.2675	-1.9872	-1.2553	1.1870	2.153	-0.934
7	15	1	10	2.120	-0.847	102.5	1.0	-0.1413	-3.1860	0.2071	0.7185	2.114	-0.964
8	15	1	20	2.170	-0.871	102.4	1.0	-0.2160	-2.3915	-0.8192	1.0609	2.162	-0.930
9	20	1	10	2.109	-0.847	102.6	1.0	-0.1062	-3.3077	0.3310	0.6832	2.099	-0.942
10	20	1	20	2.154	-0.872	102.1	1.0	-0.3451	-2.1477	-0.9624	1.0871	2.157	-0.932
11	5	2	10	2.159	-0.857	101.8	1.0	-0.2498	-2.6151	-0.4653	0.9373	2.151	-0.943
12	5	2	20	2.138	-1.049	103.4	1.0	-0.4881	-1.1950	-1.8812	1.3162	2.139	-1.051
13	7.5	2	10	2.140	-0.855	101.9	1.0	-0.1030	-3.1658	0.1390	0.7440	2.110	-0.959
14	7.5	2	20	2.145	-0.848	102.5	1.0	-0.2781	-1.8519	-1.4066	1.2356	2.131	-0.889
15	10	2	10	2.129	-0.855	101.9	1.0	-0.2821	-2.7579	-0.2113	0.8495	2.117	-0.902
16	10	2	20	2.164	-0.938	102.4	1.0	-0.3400	-1.8687	-1.2800	1.1753	2.136	-0.945
17	20	2	10	2.109	-0.859	102.7	1.0	0.0043	-3.6300	0.6573	0.5809	2.074	-0.954
18	20	2	20	2.146	-0.882	102.7	1.0	-0.1539	-2.6568	-0.4960	0.9514	2.128	-0.936
19	5	4	10	2.154	-0.867	102.0	1.0	-0.2393	-2.5028	-0.6219	0.9906	2.142	-0.917
20	5	4	20	2.120	-1.075	103.5	1.0	-0.5144	-1.1057	-1.9289	1.3202	2.117	-1.043
21	7.5	4	10	2.134	-0.868	102.0	1.0	-0.5069	-2.3837	-0.3892	0.8631	2.134	-0.984
22	7.5	4	20	2.162	-0.968	102.2	1.0	-0.3039	-1.0894	-2.3324	1.5109	2.165	-0.977
23	10	4	10	2.122	-0.869	102.0	1.0	-0.1199	-3.0147	0.0086	0.7747	2.085	-0.951
24	10	4	20	2.168	-0.765	104.2	1.0	-0.5962	-1.9113	-2.1858	1.4688	2.171	-0.846
25	20	4	10	2.098	-0.882	102.6	1.0	0.0309	-3.4677	0.4311	0.6517	2.067	-0.958
26	20	4	20	2.122	-0.773	104.1	1.0	-0.2673	-2.1646	-1.0113	1.1111	2.123	-0.882

内圧，風速，半径・膜厚比に応じて計算した理論結果を基に a_i を求めて **Table 1** に示す。 a_i に於ける諸パラメータに対する規則性はこの表からは見出し得ないが，この表より近似的にせよ単一式の表現にまとめられれば実用上極めて望ましい事であろう。だがそれは実設計に従事する技術者に於ける問題であり，著者等の為すべき事ではない。

謝 辞

本研究の一部は昭和52，53年度文部省科学研究費補助金（総合研究 A（代表者 田治見 宏日大教授））によって為された。坪井善勝東大名誉教授，川村純夫大阪市大教授はじめ研究班メンバーから理論解法，風洞実験法等について多くの有益な御教示，御指導を受けた。又，本論の実験，関数近似の計算等の遂行に当っては卒論用研究の学生瀬古口芳実，山中昌之両君の多大の助力を得た。風洞実験には当研究所耐風構造部門の助力を得た。

本報告を閉じるに当って上記諸先生方，両君及び耐風構造部門技官杉政和光氏に深く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Ross, Jr., E. W. : Large Deflection of An Inflated Cylindrical Tent, J. Appl. Mech., 1970
- 2) Karjcinovic, D. : Semimembrane Analysis of Cylindrical Shell Subject to Wind Loading, J. Appl. Mech., 1970
- 3) 植村益次 : Membrane Tension and Deformation in Cylindrical Pneumatic Structures Subject to Wind Loading, IASS Symp. Tokyo, 1971
- 4) Achenbach, E. : Distribution of Local Pressure and Skin Friction Around A Circular Cylinder in Cross Flow up to $Re=5 \times 10^6$, J. Fluid Mech., 1968
- 5) Roshko, A. : Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Very High Reynolds Number, J. Fluid Mech., vol. 10, 1961
- 6) Koiter, W. T. : On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells, Proc. Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen-Amsterdam, 1966
- 7) 松井辰彌 : 円柱を過ぎる流れの剥離，日本航空宇宙学会誌“剥離流特集” 1972
- 8) Roshko, A. : A New Hodograph for the Free Stream Line Theory, NACA TN-3168, 1954
- 9) Parkinson, G. V. and Jandari, T. : A Wake Source Model for Bluff Body Potential Flow, J. Fluid Mech., 1970
- 10) Lamb, H. : Hydrodynamics, Cambridge University Press, 1932
- 11) 中口博 : Bluff Body の空力特性と後流，日本航空宇宙学会誌“剥離流特集” 1972
- 12) Riabouchinski, D. : On steady fluid motions with free surface, Proc. London Math. Soc., 1920
- 13) 藤本武助 : 流体力学，養賢堂，1970
- 14) 日本航空宇宙学会誌“剥離流特集” 1972