

# 球形液体貯槽の地震応答解析

國 枝 治 郎・中 西 啓 二

## RESPONSE ANALYSIS OF LIQUID STORAGE SPHERICAL TANKS SUBJECT TO EARTHQUAKE

By Haruo KUNIEDA and Keiji NAKANISHI

### Synopsis

In order to confirm the safety of the strength of the large liquid-storage spherical tanks subjected to earthquake, the response behavior of them should be analyzed in consideration of the interactions among the liquid, tank and supporting structure. Analytical method as interaction system is undertaken here, introducing a modelization about the inner liquid. The inner liquid is treated as the combination of hemi-spherical part and the rest which can be divided into some thin circular disks. Representing the spatial mode shapes of the spherical tank in a feasible form as finite series of Legendre bi-polynomials, which satisfy boundary conditions and orthogonal condition, analytical solutions of the interaction system are given. Thence, prosecuting the numerical calculation of these solutions, some characteristics of the response behavior of the system subject to sinusoidal and real earthquake are discussed.

### 序

液体貯槽はますますその規模が大きくなり、またその用途上からその安全性の社会的重要性が急速に増大している。規模の拡大に伴ない、その安全性にしろ耐震安全性の要素が極めて大きくなっている事は良く知られている。

円筒形貯槽はその形状の単純さから耐震性検討のための研究は比較的容易で、Housner<sup>1)</sup>、Senda & Nakagawa<sup>2)</sup>、Baron & Skalak<sup>13)</sup>、柴田・曾我部<sup>3)</sup>、堀・谷・田中<sup>4)</sup>等数多くの優れた成果が与えられているが、球形貯槽にあっては全く不十分な状態にあるのが現状である。支持構造物を含む液体貯槽としての球形貯槽の地震応答解析法の確立されたものは未だに無く、従って実設計は極めて安易な方法によっている。球形貯槽に関する Budiansky の解<sup>5)</sup>は内部液量がある限られた状態に関するものであり、曾我部の方法<sup>6)</sup>は全内部液体を薄層円板近似したものであるが、いずれも球形容器は剛体とされ、又、支持構造物は含まない。

したがって本論文では支持構造物～球形容器～内部液体の連成を考慮した地震応答解析法を与える。支持構造物は柱とし、容器は連続体として弾性理論に基づき、液体は理想流体として微小変形範囲内で取り扱う。

実設計されている液体貯槽は通常は柱材で直接に支持されているが、貯槽即ち薄肉球形シェルから云ってもシェル面に集中荷重の作用するこの様な支持法は耐震性から考えても決して望ましい支持法とは云えない。当然のこととして支持柱、シェル接合部にはリング状梁をめぐらせて、それを支持する方式にすべきと考えられる。故にここでは球形貯槽の赤道部に剛なリングを周らせて、柱状体でこれを支持する形式の球形貯槽を解析の対象とする。

本論文の目的は一般厳密解を求めるのではなく、実用的な解析法の確立にあるので、比較的数値計算の容易な、しかし精度の良い実用近似解を用いるようにつとめた。

数値計算例として中規模程度（半径 10m）貯槽に対する正弦波地動に対する応答計算、既往の振動台上

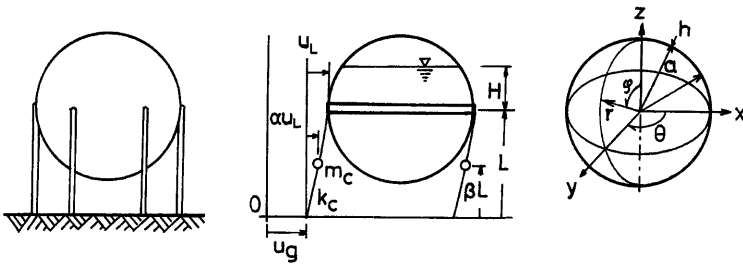


Fig. 1. Real spherical tank and analysis model

模型実験報告書<sup>10)</sup>における模型とは同一寸法(半径 3.3m)モデルに対する実地震応答計算等を遂行し、上述の解の数値計算可能性を調べると共に、当構造の地震応答挙動の一端を明確にした。応答数値計算モデルは実構造物寸法とは随分かけ離れているとは云え、形状寸法パラメータの解中での含まれ方から、実構造物規模のものへの応答特性を類推するのは容易である。

1. 解析モデル

実際に設計されている Fig. 1-a の様な支持柱を有する球形液体貯槽を対象として解析を行なう。

本論文では簡単化のため Fig. 1-b の様なモデルに置換する。既述の様に支持柱と貯槽の接合部には剛体リングを仮想する。支柱は質量  $m_c$ 、バネ係数  $k_c$  の質点系と見做す。また質量の位置を支柱の高さの  $\beta(0 < \beta < 1)$  倍とし、柱頭相対変位  $u_L(t)$  は剛体リングのそれと等しいとする。地動変位は  $u_g(t)$  で表わす。貯槽は薄肉球形シェルとし、内部液体は非圧縮性理想流体とする。

2. 球形貯槽の直交振動モード

微小変形、微小歪下での球形シェルの一般自由振動時の支配式は通常シェルの解析に用いられる諸仮定の下に応力関数  $F$  を導入して筆者等により既に導びかれている [7]。本論文では球形シェルの法線方向変位成分による慣性項のみを考慮することになると無減衰状態に対してその支配式は次の様に簡単化される。

$$\frac{K}{a^3} H_2 H_2(w) - \frac{1}{a^3} H_2(F) + m \ddot{w} = 0 \quad \dots\dots\dots(1-a)$$

$$\frac{1}{Eh} H_2 H_1(F) - \frac{1-\nu}{Eh} \frac{K}{a} H_2 H_2(w) + a H_2(w) = 0 \quad \dots\dots\dots(1-b)$$

ここに  $w$ : 法線方向変位成分(内向き正),  $a$ : 半径,  $h$ : 板厚,  $K$ : 板剛度,  $H_1(\cdot), H_2(\cdot)$ : 文献 [7] 参照。

自由振動時厳正解および近似解は既に [7] [8] に与えられているが、厳正解は複素または非整数ルジャンドル陪関数で表現され、近似解も同様関数および指数関数で表現されるため、本論文の如き地震応答のモード重ね合せ法解析には必ずしも適当な解表現とはなっていない。

したがってここでは実用性を考えて解をルジャンドル陪多項式の線形結合であらわすことにする。この方法の適用可能性は筆者等によって既に確かめられている [9], [10],

本稿では地震応答解析を目的としているため、逆対称形振動モードのみを対象として次の様に変数分離を行なう。

$$w(\varphi, \theta, t) = w(\varphi, t) \cos \theta, \quad F(\varphi, \theta, t) = F(\varphi, t) \cos \theta \quad \dots\dots\dots(2)$$

さらに  $w(\varphi, t), F(\varphi, t)$  は変数分離を行ない、 $\varphi$  に関する関数形は有限個の直交モードの線形結合として表現する。

$$\left. \begin{aligned} w(\varphi, t) &= \sum_j x_j(t) w_j(\varphi), & w_j(\varphi) &= h \sum_i G_{ij} P_i^1(\cos \varphi) \\ F(\varphi, t) &= \sum_j x_j(t) F_j(\varphi), & F_j(\varphi) &= \frac{h}{a} K \sum_i D_i G_{ij} P_i^1(\cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

ここに  $P_i^1(\cos \varphi)$  はルジャンドル陪多項式であり  $G_{ij}$  は未定係数である。 $D_i$  は(3)式を(1-b)式に代入することにより下式の様に定められる。

$$D_i = \frac{(1-\nu)\{2-i(i+1)\} - \kappa}{1-\nu-i(i+1)}, \quad \kappa \equiv \frac{12(1-\nu^2)a^2}{h^2} \dots\dots\dots(4)$$

2.1 境界条件

$\varphi = \varphi_0$  で剛体リングにより支持されているものとすれば、境界条件は次の様に設定され得る。

$$w = w' = u = v = 0|_{\varphi=\varphi_0} \dots\dots\dots(5)$$

変位成分  $u, v$  は応力関数  $F$  より次の様に計算される<sup>9)</sup>。

$$u = -\frac{1+\nu}{Eha} F^\circ(\varphi, \theta, t), \quad v = -\frac{1+\nu}{Eha} \frac{1}{\sin \varphi} F'(\varphi, \theta, t) \dots\dots\dots(6)$$

ここに  $\circ = \partial/\partial\varphi, ' = \partial/\partial\theta$ 。

したがって(5)式は(3)式を用いて次の表現となる。

$$w_j(\varphi) = w^\circ_j(\varphi) = F_j(\varphi) = F^\circ_j(\varphi) = 0|_{\varphi=\varphi_0} \dots\dots\dots(5)'$$

2.2 直交モード作成

境界条件および直交条件を満足する法線方向変位モードを有限個作成する手順を以下に示す。

- i) a) 最初のモード (第2次モード) を次の様に仮定する。

$$\tilde{W}_2(\varphi) = \sum_{i=1}^5 B_{2i} P_i^1(\cos \varphi)$$

$B_{21} = 1.0$  として(5)'式より  $B_{2i}(i=2\sim 5)$  を決定する。

- b) 第  $k-1$  番目のモード (第  $k$  次モード) を次の様に仮定する。

$$\tilde{W}_k(\varphi) = \sum_{i=1}^{k+3} B_{ki} P_i^1(\cos \varphi) \quad \text{且つ} \quad \int_0^\pi \tilde{W}_j \cdot \tilde{W}_k \cdot \sin \varphi \, d\varphi = 0 \quad (j=2\sim k-1)$$

$B_{k1} = 1.0$  とし、上記直交条件および(5)'式より  $B_{ki}(i=2\sim k+3)$  を決定する。

- ii)  $w(\varphi, \theta, t) = \sum_{j=2}^N a_j(t) \tilde{W}_j(\varphi) \cos \theta$  (第N次モードまで採用)

として(1-a)式に代入し、(3)、(4)式を考慮し、Galerkin法を適用すると  $M$  個 ( $M \leq N-1$ ) の実数固有円振動数  $\omega_s$  および固有ベクトル  $(a_j)_s$  を決定することができる。したがって

$$w_j(\varphi) = \sum_{i=2}^N (a_i)_j \tilde{W}_i(\varphi) = \sum_{s=1}^{N+3} G_{sj} P_i^1(\cos \varphi) \quad (j=2\sim M) \dots\dots\dots(7)$$

ここに  $G_{sj} = \sum_{i=2}^N (a_i)_j B_{is}$

- iii) 逆対称振動時の最低変位モード (第1次モード) は剛体移動形に近いものであるが、この振動モードは応力関数表示の支配式がそれに担当する解を含まない<sup>10)</sup>ため上述の方法からは得られない。だが応答解析上必要とされるので、上述の諸モードとは直交しないが文献〔8〕より次の近似解を採用する。

$$w_1(\varphi) = c_1 A_1 P_1^1(\cos \varphi) + \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} e^{-\tau_1 \bar{\varphi}} \{ (\rho A_2 - q A_3) \cos \gamma_2 \bar{\varphi} + (\rho A_3 + q A_2) \cos \gamma_2 \bar{\varphi} \}, \quad \bar{\varphi} = \varphi_0 - \varphi \dots\dots\dots(8)$$

上式中の諸記号の内容の計算は **Appendix I** を参照されたい。なお式(8)は厳正解<sup>11)</sup>による結果との比

較によりその誤差が無視できる程度に小さいことを確認の上採用している。

3. 内部液体の速度ポテンシャル

内部液体のシュルに及ぼす影響の取り扱い、基本的には Housner によって円形タンクについてなされた取り扱い、即ち液体の影響を衝撃圧 (Impulsive pressure) と振動圧 (Convective pressure) 部分に分ける方法に準拠しているが、Housner は円形タンクを剛体と見做しているが、本論文では球形貯槽を弾性体として取り扱う。

次の様な基本仮定を用いる。

- i) 液体は非圧縮性、非粘性、渦なしの理想流体
- ii) 液体内部には速度ポテンシャル場の設定可能
- iii) 液体はシュルとの境界において、シュルの法線方向変位成分のみにより連成の影響を受ける。

したがって内部液体に対して速度ポテンシャル  $\Psi$  を定義することができる。ここでは  $\Psi$  は次の様に3部分より構成されると仮定する。但し水平方向剛体移動による部分は別途考慮する。

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \tag{9}$$

$\Psi_1$ : シュルの変形に追随する部分

$\Psi_2$ : シュルの変形とは無関係にスロッシングする部分

$\Psi_3$ :  $\Psi_1$  を補正する部分

$\Psi$  は液体の連続の条件

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{in } V \tag{10}$$

を満たさなければならないが、ここでは  $\Psi_i (i=1\sim 3)$  についても各々(10)式を満たすものとする。 $\Psi_i$  に対する境界条件は次の通りとする。

$$\Psi_1: -\frac{\partial}{\partial r} \Psi_1(r, \varphi, \theta, t) = -\dot{w} \quad \text{on } S \tag{11}$$

$$\Psi_2: -\frac{\partial}{\partial r} \Psi_2(r, \varphi, \theta, t) = 0 \quad \text{on } S \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \Psi_2(r, \varphi, \theta, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Psi_2(r, \varphi, \theta, t) = 0 \quad \text{on } S_f \tag{13}$$

$$\Psi_3: -\frac{\partial}{\partial r} \Psi_3(r, \varphi, \theta, t) = 0 \quad \text{on } S \tag{14}$$

さらに  $\frac{\partial}{\partial z} \{\Psi_1(r, \varphi, \theta, t) + \Psi_3(r, \varphi, \theta, t)\} = 0 \quad \text{on } S_f \tag{15}$

ここに  $S$ : 液体とシュルが接する境界,  $S_f$ : 液体の自由表面。

上記諸式より  $\Psi_i$  が一意的に求まれば、 $\Psi$  は  $S$  での連成の条件、自由表面での圧力一定の条件および内部連続条件を全て満たして定まることになる。

球座標下で任意液深の場合に自由表面の境界条件を満たすような速度ポテンシャルを決定することは極めて困難である。他方、半球形液体の場合は全球 Neumann 関数と鏡像法の組合せで容易に速度ポテンシャルは求まること、および自由表面での液体の挙動表現には円筒座標系の採用の方が望ましいこと等は自明のことである。故に  $\Psi_2, \Psi_3$  については Fig. 2 の様な半球形液体とその上の分割薄

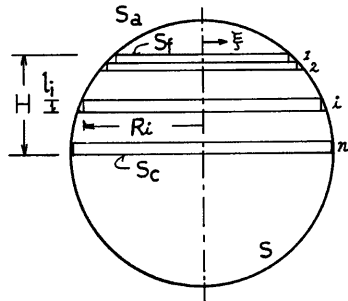


Fig. 2. Notations of inner fluid model

層円筒形液体の構成を考え、各構成要素の変位および圧力の連続を満すようにして決定する。

本論文における取り扱いには微小線形理論に基づいているのでモード重ね合せ法が適用される。故に  $\Psi_1$ ,  $\Psi_3$  はシェルの変位モードに対応して定め、 $\Psi_2$  はスロッシングの各モードに対して求めれば  $\Psi$  は次の様に表わされる。

$$\Psi(r, \varphi, \theta, t) = \sum_{j=1}^M \{j\Psi_1(r, \varphi, \theta, t) + j\Psi_3(r, \varphi, \theta, t)\} + \sum_{i=1}^{\overline{M}} i\Psi_2(r, \varphi, \theta, t) \quad \dots\dots\dots(16)$$

液体の速度成分は  $\Psi$  より次の様に表わされる<sup>11)</sup>。

$$v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad \dots\dots\dots(17)$$

3.1  $\Psi_1$  の決定

$\Psi_1$  のシェルの第  $j$  次変位モードに対応する部分  $j\Psi_1$  は(7), (10), (11)式より次の様に求められる。

$$j\Psi_1 = h \cdot a \sum_{i=1}^{N+3} \frac{1}{i} G_{ij} \left(\frac{r}{a}\right)^i P_{1i}(\cos \varphi) \dot{x}_j(t) \cos \theta \quad \dots\dots\dots(18)$$

3.2  $\Psi_2$  の決定

既述の様に  $\Psi_2$  を半球部と薄層円板形集合部に分割する。即ち

$$\Psi_2 = \Psi_2^s + \Psi_2^c$$

とする。 $\Psi_2^s$  は半球部のものであり下式を満す。

$$\nabla^2 \Psi_2^s = 0 \text{ in } V, \quad -\frac{\partial}{\partial r} \Psi_2^s = \frac{\partial}{\partial n} \Psi_2^s = 0 \text{ on } S, \quad -\frac{\partial}{\partial z} \Psi_2^s = \frac{\partial}{\partial n} \Psi_2^s = f(r, \varphi, \theta, t) \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}}$$

ここに  $n$  は内向き法線であり、 $f(r, \varphi, \theta, t)$  は既知関数とする。従って  $\Psi_2^s$  は次式の様に与えられる。 $S_c$ : 半球上面

$$\Psi_2^s(r, \varphi, \theta, t) = \int_S \Psi_2^s(r', \varphi', \theta', t) \cdot C dS - \int_{S_c} N\left(r', \frac{\pi}{2}, \theta'; r, \varphi, \theta\right) \cdot f\left(r', \frac{\pi}{2}, \theta'\right) dS_f \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに  $r', \varphi', \theta'$  は  $S, S_c$  上における座標値である。(19)式中の関数  $N(r', \pi/2, \theta'; r, \varphi, \theta)$  は全球 Neumann 関数<sup>12)</sup>より次の様に与えられる。

$$\begin{aligned} N\left(r', \frac{\pi}{2}, \theta'; r, \varphi, \theta\right) &= 2H\left(r', \frac{\pi}{2}, \theta'; r, \varphi, \theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}} P_n(\cos \gamma) + \frac{C_0}{r'} \right\} + \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \dots |r/r'| < 1 \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \gamma) \dots |r/r'| > 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

ただし  $P_n(\cos \gamma) = P_n(0)P_n(\cos \varphi) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(0)P_n^m(\cos \varphi) \cos m(\theta - \theta')$  .....(21)

ここで考えている液体挙動は円周方向に対して逆対称形であることから、全ての関数は  $\theta$  に関して次の様に変数分離できる。

$$\{f, \Psi_2^s, N\}(r, \varphi, \theta, t) = \{f, \Psi_2^s, N\}(r, \varphi, t) \cos \theta$$

他方  $\cos \gamma = \sin \varphi \cos(\theta - \theta')$  より関数  $N$  として  $\theta = 0$  点で考察を行なってもその特異性は変わらない。上式および(20), (21)式に  $\theta = 0$  を用いて(19)式に代入すると

$$\begin{aligned} \Psi_2^s(r, \varphi) \cos \theta &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Psi_2^s(a, \varphi') \cos \theta' C a^2 \sin \varphi' d\varphi' d\theta' \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \int_0^a N\left(r', \frac{\pi}{2}, \theta'; r, \varphi\right) \cos \theta' f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta' r' dr' d\theta' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^r \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) dr' + \int_r^a \left(\frac{r}{r'}\right)^n f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) dr' + \frac{n+1}{n} \right. \right. \\
 &\quad \left. \int_0^a \frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}} \cdot f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) r' dr' \right\} \left\{ P_n(0) P_n(\cos \varphi) \cos \theta' + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right. \\
 &\quad \left. P_n^m(0) P_n^m(\cos \varphi) \cos \theta' \cos \theta' \right\} + (1+C_0) \cos \theta' \int_0^a f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) dr' \Big] \cos \theta \cdot d\theta' \\
 &= -\cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(0) P_n^1(\cos \varphi) \cdot G_n(r) \quad \dots\dots\dots(22)
 \end{aligned}$$

$$\text{ただし } G_n(r) \equiv \int_0^r \left(\frac{r'}{r}\right)^{n+1} f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) dr' + \int_r^a \left(\frac{r}{r'}\right)^n f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) dr' + \frac{n+1}{n} \int_0^a \frac{r^n r'^n}{a^{2n+1}} f\left(r', \frac{\pi}{2}\right) r' dr' \quad \dots\dots\dots(23)$$

従って  $f\left(r', \frac{\pi}{2}\right)$  が与えられると  $\Psi_2^c$  は計算され得る。

$\Psi_2^c$  は曾我部等<sup>3)</sup>により用いられたと同様の手法で以下の様に定められる。

半球形より上部の液体を  $n$  層の円板形液体要素の集合とし、各要素は円筒座標系で表示する。第  $i$  層（最上部を第1層とする）の速度ポテンシヤル  ${}_i\Psi_2^c$  は支配式

$$\nabla^2 {}_i\Psi_2^c = 0 \quad \text{in } V_i, \quad \frac{\partial}{\partial r} {}_i\Psi_2^c \Big|_{r=R_i} = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial z} {}_i\Psi_2^c \Big|_{z=i} = h^u(r), \quad -\frac{\partial}{\partial z} {}_i\Psi_2^c \Big|_{z=0} = h^l(r)$$

より次の形で求まる。但し、 $h_i$  は第  $i$  層の層厚とする。

$${}_i\Psi_2^c(r, z, \theta, t) = \dot{T}(t) {}_i\Psi_2^c(r, z) \cos \theta$$

$$\text{として } {}_i\Psi_2^c(r, z) = J_1\left(\varepsilon_s \frac{r}{R_i}\right) \{ {}_sA_i \cosh(s k_i z) + {}_sB_i \sinh(s k_i z) \} \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここに  $J_1$ : 第一種ベッセル関数,  $s k_i = \varepsilon_s / R_i$

$\varepsilon_s$ :  $J_1'(\varepsilon) = 0$  の第  $s$  番目の正根

分割した各円筒要素の上面の変動圧, 変位を下面のそれらに伝達する要素伝達行列および隣接要素への節点伝達行列を導びき、これらを用いて系の最上面（自由表面）の状態を最下端下面に伝達する系の伝達行列を導びく。

i) 要素伝達行列

第  $i$  要素の上面, 下面の変位は  $V$  を変位振幅とすれば次の様にあらわされる。

$$h^u(r) = {}_sV_i^u J_1\left(\varepsilon_s \frac{r}{R_i}\right), \quad h^l(r) = {}_sV_i^l J_1\left(\varepsilon_s \frac{r}{R_i}\right)$$

(24)式を用いれば  ${}_sA_i, {}_sB_i$  は  ${}_sV_i^u, {}_sV_i^l$  で表わされる。

他方動水圧の振幅を  $P$  で表わすと動水圧は次の様に置ける。

$$p(r, z, \theta, t) = P(z) J_1\left(\varepsilon_s \frac{r}{R_i}\right) \dot{T}(t) \cos \theta$$

$p = \rho_L \cdot \dot{\Psi}$  を用いると  $P(z)$  の上・下面での値  ${}_sP_i^u, {}_sP_i^l$  は  ${}_sV_i^u, {}_sV_i^l$  と次の関係で結ばれる。

$$\begin{Bmatrix} {}_sP_i^l \\ {}_sV_i^l \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_i \begin{Bmatrix} {}_sP_i^u \\ {}_sV_i^u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cosh(s k_i l_i), & (\rho_L / s k_i) \sinh(s k_i l_i) \\ (s k_i / \rho_L) \sinh(s k_i l_i), & \cosh(s k_i l_i) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(25)$$

ii) 節点伝達行列

第  $i$  層と第  $i+1$  層間の液体の流出, 流入が等しいことより

$${}_sV_i^l = \left(\frac{R_{i+1}}{R_i}\right)^2 {}_sV_{i+1}^u$$

また, 両要素接触面で動圧が等しい条件を近似的に次式で表わす。

$$\frac{d}{dr} \left\{ {}_sP_i J_1\left(\varepsilon_s \frac{r}{R_i}\right) \right\} \Big|_{r=0} = \frac{d}{dr} \left\{ {}_sP_{i+1} J_1\left(\varepsilon_s \frac{r}{R_{i+1}}\right) \right\} \Big|_{r=0}$$

従って  ${}_s P_i^l = \frac{R_i}{R_{i+1}} {}_s P_{i+1}^u$

以上により

$$\begin{Bmatrix} {}_s P_{i+1}^u \\ {}_s V_{i+1}^u \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_i \begin{Bmatrix} {}_s P_i^l \\ {}_s V_i^l \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} (R_{i+1}/R_i), & 0 \\ 0, & (R_i/R_{i+1})^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(26)$$

故に自由表面での  $({}_s P_i^u, {}_s V_i^u)$  と最下端での  $({}_s P_n^l, {}_s V_n^l)$  の関係は

$$\begin{Bmatrix} {}_s P_n^l \\ {}_s V_n^l \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{Bmatrix} {}_s P_1^u \\ {}_s V_1^u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_n \mathbf{B}_{n-1} \mathbf{A}_{n-1} \dots \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 \quad \dots\dots\dots(27)$$

ところでスロッシング第  $p$  次モードに対する円筒形液体の速度ポテンシャル  $\psi_p$  は

$$\psi_p(\xi, z, \theta, t) = \dot{y}_p(t) h \cdot \cos \theta J_1 \left( \varepsilon_p \frac{\xi}{R} \right) \{ {}_p A \cosh(\rho k z) + {}_p B \sinh(\rho k z) \} \quad \dots\dots\dots(28)$$

と表わされるからこれを上記  $\Psi_2^c$  に用いて  ${}_p A, {}_p B$  を半球部と接続の条件より決定することになる。

$\Psi_2^s$  と  $\Psi_2^c$  は半球部上面および円板部最下面での速度および動圧の連続より接続される。

a) 鉛直方向速度成分の連続

$$-\frac{\partial}{\partial z} \Psi_2^s \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -\frac{\partial}{\partial z} \Psi_2^c \Big|_{z_n=0}$$

に(28)式を用いると(23)式中の関数  $f(\xi, \pi/2)$  は

$$f(\xi, \pi/2) = h \cdot {}_p V_n J_1 \left( \varepsilon_p \frac{\xi}{R_n} \right) \quad \dots\dots\dots(29)$$

と求められるので最終的に  $\Psi_2^s$  は次の形で与えられる。

$${}_p \Psi_2^s(r, \varphi, \theta, t) = -\dot{y}_p(t) h \cdot \cos \theta {}_p V_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_n^l(0) P_n^l(\cos \varphi) {}_p \bar{G}_n(\xi) \quad \dots\dots\dots(30)$$

ここに  ${}_p \Psi_2^s$  はスロッシング第  $p$  次モードに対応するもので

$${}_p \bar{G}_n(\xi) = \int_0^{\xi} \left( \frac{\xi'}{\xi} \right)^{n+1} J_1 \left( \varepsilon_p \frac{\xi'}{a} \right) d\xi' + \int_{\xi}^a \left( \frac{\xi'}{\xi} \right)^n J_1 \left( \varepsilon_p \frac{\xi'}{a} \right) d\xi' + \frac{n+1}{n} \int_0^a \frac{\xi^n \xi'^{n+1}}{a^{2n+1}} J_1 \left( \varepsilon_p \frac{\xi'}{a} \right) d\xi' \quad \dots\dots\dots(31)$$

である。

b) 動圧の連続

同様に動圧の連続を求めると下式が得られる。

$$\frac{{}_p P_n^l}{{}_p V_n^l} = -\frac{\rho_L \sum_{n=1}^{\infty} \{1/n(n+1)\} \{P_n^l(0)\}^2 {}_p \bar{G}_n(\xi)}{J_1 \left( \varepsilon_p \frac{\xi}{a} \right)} \equiv A$$

$A$  は  $\xi$  の関数となり取り扱い上不都合である。真値(一定値)を  $A, \xi = \xi_i$  における値を  $A_i$  と記して

$$\sum_{i=1}^m (A_i(\xi_i) - A)^2$$

を最小ならしめる  $A$  を求めると  $A = \left\{ \sum_{i=1}^m A_i \right\} / m$

${}_p V_i^u$  を  $\dot{y}_p(t)$  に含めることにすると(27)式より  ${}_p P_i^u$  は計算され、 ${}_p \Psi_2^c$  中の全ての  $A_i, B_i$  は決定されることになる。なおスロッシングの固有円振動数は

$$\omega_p = \sqrt{-\rho_L g / {}_p P_1^u} \quad \dots\dots\dots(32)$$

と与えられる。

### 3.3 $\Psi_3$ の決定

既述の様に  $\Psi_3$  を半球部と薄層円板形集合部に分割する。即ち

$$\Psi_3 = \Psi_3^s + \Psi_3^e$$

$\Psi_3^s, \Psi_3^e$  は 3.2 で用いたと全く同様の手順で決定する。シェルの第  $j$  次モードに対応する円筒部の  $\Psi_3^e$  を次の形で表現する。

$${}_j\Psi_3^e(\xi, z, \theta, t) = \dot{x}_j(t) h \cdot \cos \theta \sum_s D_{sj} J_1\left(\varepsilon_s \frac{\xi}{R}\right) \{ {}_sA^j \cosh({}_s k z) + {}_sB^j \sinh({}_s k z) \} \dots\dots\dots(33)$$

ここに  $D_{sj}$  は境界条件(15)式を満たすように決定される。

(18), (33)式を(15)式に代入すれば次式が成立する。

$$\sum_s D_{sj} J_1\left(\varepsilon_s \frac{\xi}{R}\right) - \sum_i G_{ij} \frac{i+1}{i} \left( \frac{\sqrt{\xi^2 + H^2}}{a} \right)^{i-1} P_{1i-1}\left( \frac{H}{\sqrt{\xi^2 + H^2}} \right) = 0 \dots\dots\dots(34)$$

ここに  $H$  は円筒体置換部分の液深である。(34)式の  $\xi$  について多点で Point Matching 法を適用すれば  $D_{sj}$  が決定される。 ${}_sA^j, {}_sB^j$  は 3.2 と同じ手法により求める。

${}_j\Psi_3^e$  に対応する  $\Psi_3^s$  を  ${}_j\Psi_3^s$  と記し次の様に置く。

$${}_j\Psi_3^s(r, \varphi, \theta, t) = \dot{x}_j(t) h \cos \theta \sum_s D_{sj} {}_s\bar{\Psi}_3^s(r, \varphi) \dots\dots\dots(35)$$

#### a) 鉛直方向速度成分の連続

(33), (35)式より(23)式中の関数  $f$  は

$$f\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) = J_1\left(\varepsilon_s \frac{\xi}{a}\right) {}_sV_n^t$$

と定まるので(35)式は次の様に書き換えられる。

$${}_j\Psi_3^s(r, \varphi, \theta, t) = -\dot{x}_j(t) h \cdot \cos \theta \sum_s D_{sj} {}_sV_n^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} P_{1n}(0) P_{1n}(\cos \varphi) {}_s\bar{G}_n(\xi) \dots\dots\dots(36)$$

${}_s\bar{G}_n(\xi)$  は(31)式で与えられている。

#### b) 動圧の連続

${}_sV_1^u$  を  $D_{sj}$  に含めることにすれば, (27)式を用いて  ${}_sP_1^u$  は下式より計算される。

$$\begin{aligned} \sum_s D_{sj} \left[ a_{11} J_1\left(\varepsilon_s \frac{\xi}{a}\right) + \rho_L a_{21} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \{ P_{1n}(0) \}^2 {}_sP_1^u \right] \\ = - \sum_s D_{sj} \left[ \rho_L a_{22} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \{ P_{1n}(0) \}^2 {}_s\bar{G}_n(\xi) + a_{21} J_1\left(\varepsilon_s \frac{\xi}{a}\right) \right] \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

ここに  $a_{ij}$  は系の伝達行列  $A$  の要素である。(37)式中の  $\xi$  について多点で Point Matching 法を適用すれば  ${}_sP_1^u$  を解くことができ,  ${}_sA^j, {}_sB^j$  は決定される。

以上によって  $\Psi_3$  は計算されるので, シェルの挙動と連成し, また, スロッシング状態を含む液体の挙動は解析され得る。

## 4. 連成系運動方程式の誘導

支持柱, 球形貯槽, 液体の連成系の運動方程式は Lagrange の方程式に基づいて導びく。

球形貯槽の法線方向相対変位成分を

$$w(\varphi, \theta, t) = \sum_{j=1}^M x_j(t) \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{N+3} G_{ij} P_{1i}(\cos \varphi) \cdot \cos \theta \dots\dots\dots(38)$$

絶体変位成分を



$$\left. \begin{aligned} w_s(\varphi, \theta, t) &= w(\varphi, \theta, t) - \{u_g(t) + u_L(t)\} \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ v_s(\varphi, \theta, t) &= v(\varphi, \theta, t) - \{u_g(t) + u_L(t)\} \sin \theta \\ u_s(\varphi, \theta, t) &= u(\varphi, \theta, t) + \{u_g(t) + u_L(t)\} \cos \varphi \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

とし、水平地動がない場合の速度ポテンシャル  $\Psi$  は(16)式であらわされているとする。

4.1 系の運動エネルギー

系の運動エネルギーを次の様に表わす。

$$K = K_s + K_L + K_c \dots\dots\dots(40)$$

$K_s, K_L, K_c$  は各々 シェル, 液体, 支柱の運動エネルギーである。

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{1}{2} m \int_{S_a} \{\dot{w}_s^2 + \dot{v}_s^2 + \dot{u}_s^2\} dS_a \\ &= \frac{1}{2} m \left[ \sum_{j=1}^M \dot{x}_j^2(t) \int_{S_a} W_j^2(\varphi, \theta) dS_a - 2 \{u_g + u_L\} \sum_{j=1}^M \dot{x}_j(t) \int_{S_a} W_j(\varphi, \theta) \sin \varphi \cdot \cos \theta dS_a \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} M_s (\dot{u}_g + \dot{u}_L)^2, (u, v \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$m$ : シェルの単位面積当り質量,  $M_s = m \int_{S_a} dS_a$

$$\begin{aligned} K_L &= \frac{1}{2} \rho_L \int_V \left[ \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \Psi + \dot{u}_g + \dot{u}_L \right\}^2 + \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} \Psi \right\}^2 + \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} \Psi \right\}^2 \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \rho_L \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dot{x}_i \dot{x}_j \int_S \{i\psi_1 + j\psi_3\} W_j dS + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dot{y}_i(t) \cdot \dot{x}_j \int_S i\psi_2 W_j dS \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dot{y}_i \dot{x}_j \int_{S_f} \{j\psi_1 + i\psi_3\} \left( \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 \right) dS_f + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dot{y}_i \dot{y}_j \int_{S_f} i\psi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} j\psi_2 dS_f \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} M_L \{\dot{u}_g + \dot{u}_L\}^2 - \rho_L (\dot{u}_g + \dot{u}_L) \left[ \sum_{j=1}^M \dot{x}_j \int_V \frac{\partial}{\partial x} \{j\psi_1 + j\psi_3\} dV + \sum_{i=1}^M \dot{y}_i \int_V \frac{\partial}{\partial x} i\psi_2 dV \right] \end{aligned}$$

なお  $\psi_i$  は  $\Psi_i$  の空間座標に関する項であり、 $\psi_i \equiv \psi_i(r, \varphi, \theta)$  である。また、 $M_L$ : 液体全質量。

$$K_c = \frac{1}{2} m_c \{\dot{u}_g + \alpha \dot{u}_L\}^2, \quad m_c: \text{支柱の全質量。}$$

4.2 系のポテンシャルエネルギー

系のポテンシャルエネルギーを次の様に表わす。

$$P = \bar{P}_s + P_s + P_L + P_c$$

ここに  $\bar{P}_s = -2m(\dot{u}_g + \dot{u}_L)x_j(t) \int_{S_a} W_j(\varphi, \theta) \sin \varphi \cos \theta dS_a$

$$P_s = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M j P_s x_j^2(t), \quad j P_s: \int_{S_a} [(1-a) \text{式左辺}] W_j(\varphi, \theta) dS_a \text{ の } x_j \text{ の係数部。}$$

液体のポテンシャルエネルギー変化には自由表面における変位に基づくものと、容器変形に伴う液体移動に基づくものがある。

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} \rho_L g \int_{S_f} \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} \Psi \right\}^2 dS_f + \frac{1}{2} \rho_L g \int_S \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} \Psi \right\}^2 \cos \varphi \cdot dS \\ &= \frac{1}{2} \rho_L g \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \dot{y}_i \dot{y}_j \int_{S_f} \left( \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} j\psi_2 \right) dS_f + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M x_i \cdot x_j \int_S W_i W_j \cos \varphi dS \right] \end{aligned}$$

$$P_c = \frac{1}{2} k_c u_L^2, \quad k_c: \text{支柱全剛性。}$$

4.3 運動方程式

一般化座標を  $x_j, y_i, u_L$  として Lagrange の方程式を適用すると運動方程式は次の様に求められる。

$$[\tilde{M} + \tilde{M}_a]\{\ddot{Q}\} + [\tilde{K} + \tilde{K}_a]\{Q\} = -\{m_0 + m_{0a}\} \ddot{u}_g \dots\dots\dots(41)$$

但し,  $\{Q\} = \{x_1, x_2, \dots, x_M; u_L; y_1, y_2, \dots, y_{\bar{M}}\}^T$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} C_1(i, i) & 0 \\ i=1 \sim M & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{K} = \begin{bmatrix} C_5(i, i) & 0 \\ i=1 \sim M & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{M}_a = \begin{bmatrix} C_2(i, j) & C_8(1) & C_3(p, q) \\ i=1 \sim M & \vdots & p=1 \sim M \\ j=1 \sim M & C_9(M) & q=1 \sim \bar{M} \\ \{C_{13}\}^T & C_{10} & \{C_9\}^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ [C_3]^T & C_9(1) & C_4(s, t) \\ \vdots & \vdots & s=1 \sim \bar{M} \\ C_9(\bar{M}) & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \tilde{K}_a = \begin{bmatrix} C_6(i, j) & & \\ i=1 \sim M & 0 & 0 \\ & 0 & C_{11} & 0 \\ & & & C_7(s, t) \\ & 0 & 0 & s=1 \sim \bar{M} \end{bmatrix}$$

$$\{m_0\} = \{C_{13}(1), C_{13}(2), \dots, C_{13}(M); 0 : 0\}^T$$

$$\{m_{0a}\} = \{C_{14}(1), C_{14}(2), \dots, C_{14}(M); C_{12}; C_9(1), \dots, C_9(\bar{M})\}^T$$

$$C_1(j) = m \int_{S_a} W_j^2 dS_a, \quad C_5(j) = 4.2 \text{ における } jP_s$$

$$C_2(j, l) = \frac{1}{2} \rho_L \int_S \{i\psi_1 + i\psi_3\} W_j + \{j\psi_1 + j\psi_3\} W_l dS$$

$$C_3(i, j) = \frac{1}{2} \rho_L \left[ \int_S i\psi_2 W_j dS + \int_{S_f} \{j\psi_1 + j\psi_3\} \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 dS_f \right]$$

$$C_4(i, l) = \frac{1}{2} \rho_L \int_{S_f} \left\{ i\psi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 + i\psi_2 \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 \right\} dS_f$$

$$C_6(i, l) = \rho_L g \int_S W_i W_l \cos \varphi dS, \quad C_7(i, l) = \rho_L g \int_{S_f} \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} i\psi_2 dS_f$$

$$C_8(j) = - \left[ 3m \int_{S_a} W_j \sin \varphi \cos \theta dS_a + \rho_L \int_V \frac{\partial}{\partial x} \{j\psi_1 + j\psi_3\} dV \right]$$

$$G_{13}(j) = C_8(j) + 2m \int_{S_a} W_j \sin \varphi \cos \theta dS_a$$

$$C_9(i) = -\rho_L \int_V \frac{\partial}{\partial x} i\psi_2 dV,$$

$$C_{10} = M_s + M_L + \alpha^2 m_c, \quad C_{11} = k_c$$

$$C_{12} = M_s + M_L + \alpha m_c \quad \alpha: \text{Fig. 1 参照}$$

$$C_{13}(j) = -3m \int_{S_a} W_j \sin \varphi \cdot \cos \theta dS_a$$

$$C_{14}(j) = -\rho_L \int_V \frac{\partial}{\partial x} \{j\psi_1 + j\psi_3\} dV$$

上記諸係数の積分に関しては **Appendix II** を参照されたい。

最終的に得られた(41)式は連立して解かれねばならないが系の固有ベクトルを求めて一般化座標  $\{q_i(t)\}$  に関する非連成化運動方程式に変換し、下式の様に新たに減衰項を加える。

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = -\alpha_i \ddot{u}_g(t) \quad (i=1 \sim M + \bar{M} + 1) \dots\dots\dots(42)$$

応答解析は(42)式による  $q_i$  と系の固有ベクトルにより  $x_j(t), u_L(t), y_i(t)$  を求めて行なう。

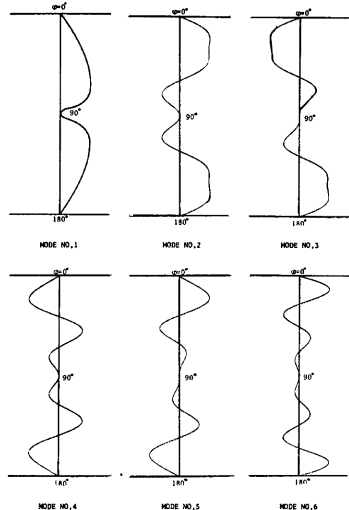


Fig. 3. Spatial mode shapes of tank

## 5. 数値解析例

### 5.1 動特性について

Fig. 3 には  $\theta=0$  におけるシェルの法線方向変位モード  $W_i$  を示している。2, 4, 6, 8次モードは3, 5, 7, 9次モードとそれぞれ  $\varphi=90^\circ$  に対して対称形および逆対称形となるが、変形形状はきわめて類似しており、したがって固有周期も互いに極めて近い値を示している。Fig. 4 には採用するルジャンドル関数の項数による直交モードの変化を示しており、Fig. 5 はこの項数による固有円振動数の変化を示したもので、これらよりルジャンドル関数は10項以上採用すればモード形および固有振動数は収束することがわかる。

Fig. 6 は  $\Psi_1, \Psi_3$  のみを考慮した場合、即ちスロッシングの無い場合の液深変化によるシェルの直交モードの形状変化を示しており、モード次数の低いもの程液深変化の影響を受け易く、液深の増加につれて大きく変化することがわかる。Fig. 7 は  $\Psi_1$  のみを考慮した場合のシェル半径、板厚比をパラメータとして液深によるシェルの固有周期の変化を示している。この図より低次モードのもの程液深が増すにつれて固有周期が長くなり、また半径、板厚比  $a/h$  が大きい程、即ち相対的に薄肉シェルの方がこの傾向は顕著にあらわれる。

Fig. 8 はスロッシングの直交モード形を示す。本論文では半球上載部を分割円筒近似をしているため、液深によるモード形変化はない。スロッシング周期は同一液深においても当然ながら分割円筒近似のその分割数に依存し、その変化の度合いは液深が大なる程大きい、 $H/a=0.8$  の状態で約50分割でほぼ一定値に収斂する。

Fig. 9 は全液体内接円筒近似、全液体分割円筒近似および本論文の手法の3方法によるスロッシング固有周期を示したもので、本論文手法と全液体分割円筒近似との差異は  $H/a=0.2$  即ち半球上載部が少ない場合は明確であるが、液深が大になるとその差は充分に小さくなる。Fig. 10 はシェルの剛体とした場合と、弾性体とした場合についてのスロッシングの固有円振動数を比較したもので、シェルの弾性体とするとスロッシングの振動周期はわずかであるが短くなる。

一方 Fig. 11 はスロッシングを考慮する場合と、考慮しない場合のシェルの固有円振動数を比較したもので、Fig. 10 と同様にスロッシングを考慮するとシェルの固有振動数が高くなる傾向にある。即ちシェル

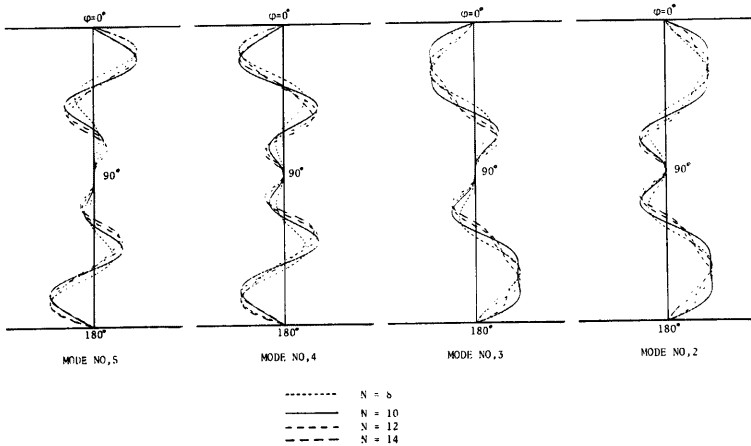


Fig. 4. Variation of mode shapes due to the number of the terms in the series of Legendre polynomials

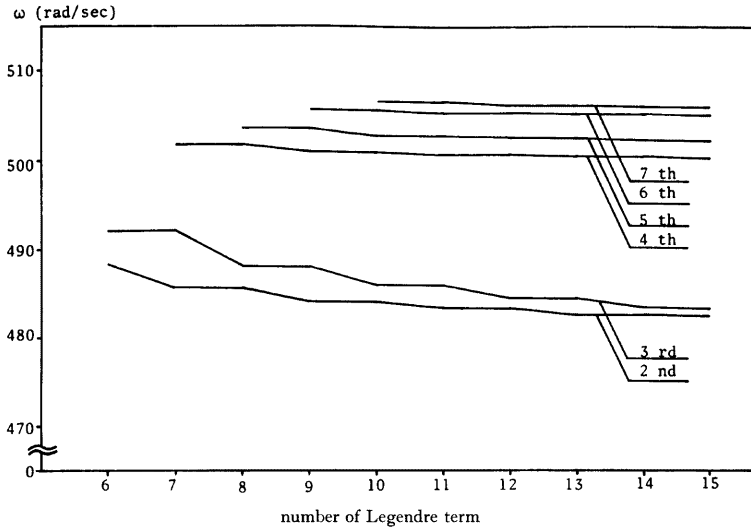


Fig. 5. An example of variation of natural frequency due to the number of the terms in the series of Legendre polynomials

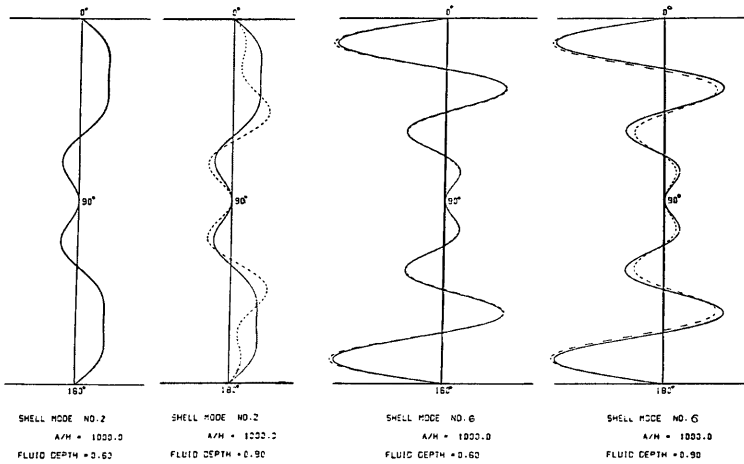


Fig. 6. Variation of mode shapes of tank due to fluid depth

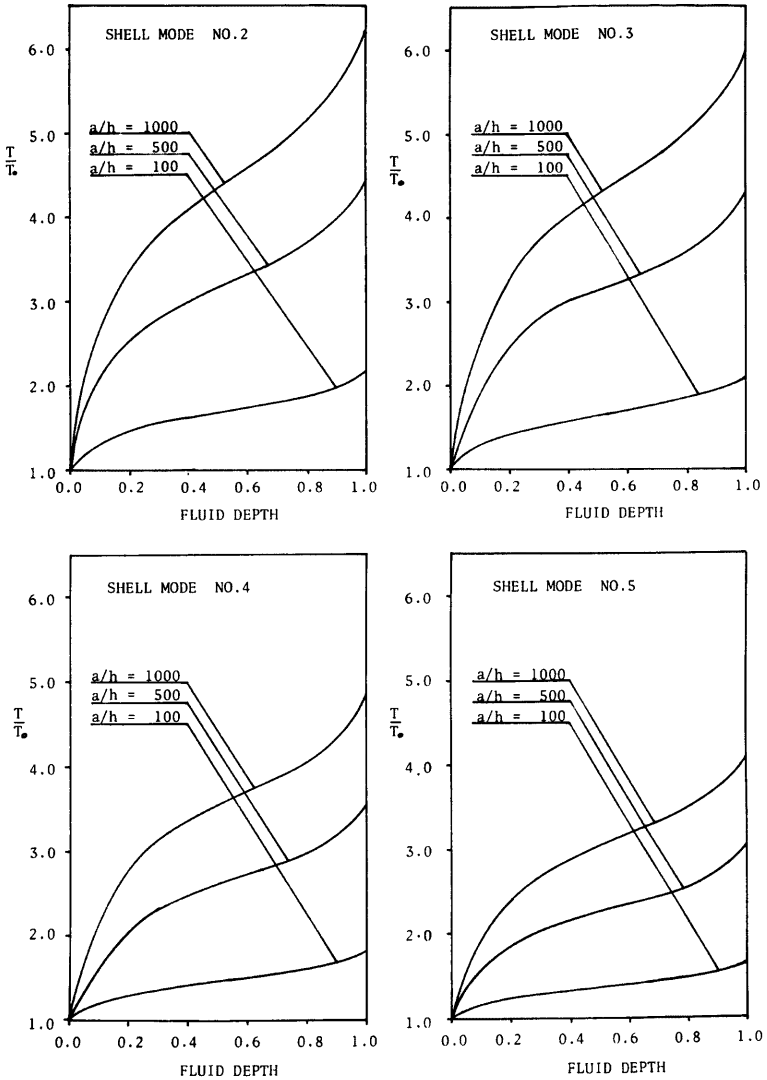


Fig. 7. Ratio of natural period of tank in fluid filled versus empty cases

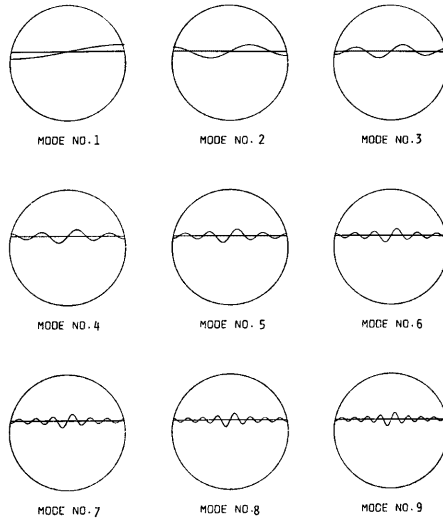


Fig. 8. Mode shapes of sloshing

はスロッシングにより影響を受けるが、スロッシングはシェルの振動の影響を受けることは少ないと思われる。

## 5.2 正弦波地動に対する応答

系の応答特性を明らかにするため、地動として正弦波を与え、その加速度を一定として応答挙動を調べた。例として  $a=10\text{ m}$ ,  $h=1\text{ cm}$ ,  $L=12\text{ m}$ ,  $H/a=0.8$ ,  $\rho_L=0.000585\text{ kg/m}^3$  柱20本 (外半径 60.96 cm, 内半径 57.0 cm),  $\beta=0.5$  を用いた。ブレースはない。地動正弦波の円振動数として次の5種類に対する応答を Fig. 12 に示す。

- $\omega_{g1}$ : スロッシング第1次固有円振動数の約1/2
- $\omega_{g2}$ : スロッシング第1次固有円振動数の近傍
- $\omega_{g3}$ : 支持柱の固有円振動数の近傍
- $\omega_{g4}$ : シェル第1次固有円振動数の近傍
- $\omega_{g5}$ : シェル第2, 3次固有円振動数の中間

Fig. 12-a には系の各固有円振動数と外乱の5個の  $\omega_{gi}$  の分布を示す。Fig. 12-b は各  $\omega_{gi}$  に対する諸応答値の最大を示した。(1)の長周期加振および(5)の短周期加振では応答値が小さいが、(2), (3), (4)では各応答値がかなり大きくなることからわかる。ここに図示はしないが、時刻歴応答でみるとその応答の成長は  $\omega_{g2}$ ,  $\omega_{g3}$  に於いて極めて著しい。また(2)の場合自由表面液高は極めて大きくなるが、シェルの変位応答は小さく、動圧分布はスロッシングによる振動圧が卓越する。他方(3)の場合柱の変位、シェルの変位および自由液面高の応答は非常に大きくなるが、動圧分布はシェルの変形による衝撃圧が卓越している。また(4)の場合には自由液面高はさして大きくはならず、動圧分布は衝撃圧が卓越することになる。

以上より特に支持柱およびスロッシングの固有周期に近い周期を有する加振 (この例の場合 0.2~2 秒) の工学的意味の大なること、特に支持柱の共振点近傍での加振は全ての応答値を最大ならしめることが判る。

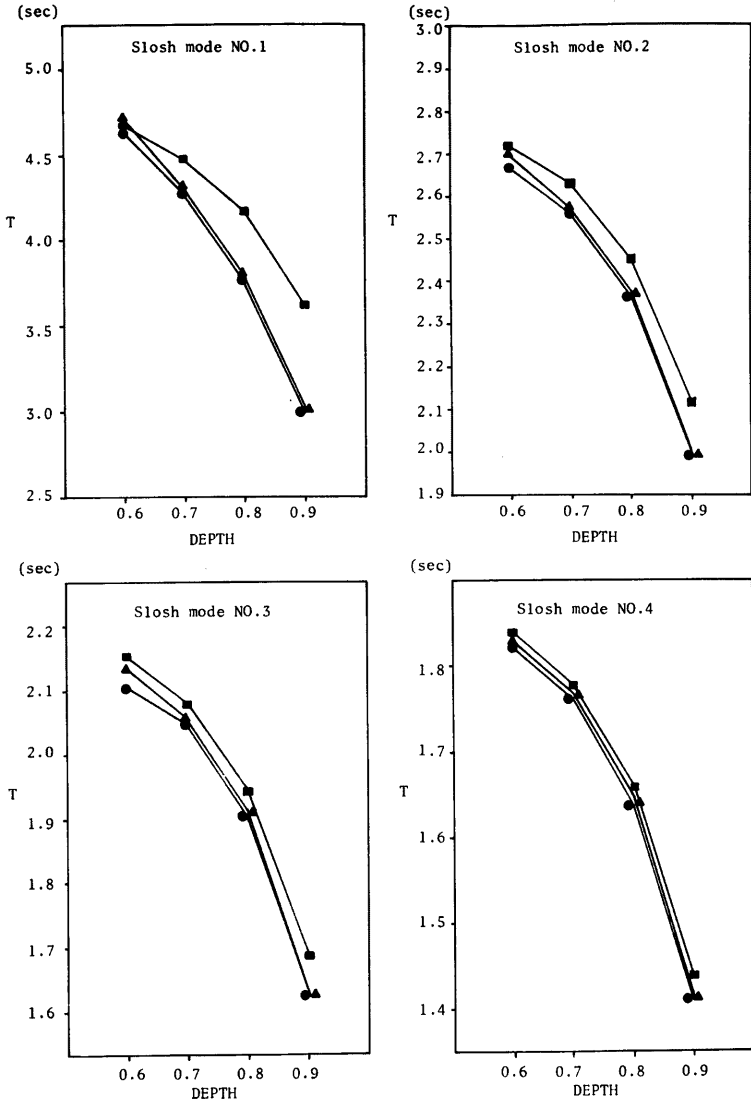


Fig. 9. Comparison of sloshing periods due to authors' method and other approximation method: ■ one cylinder replacement, ▲ all divided circular disks replacement, ● authors' method

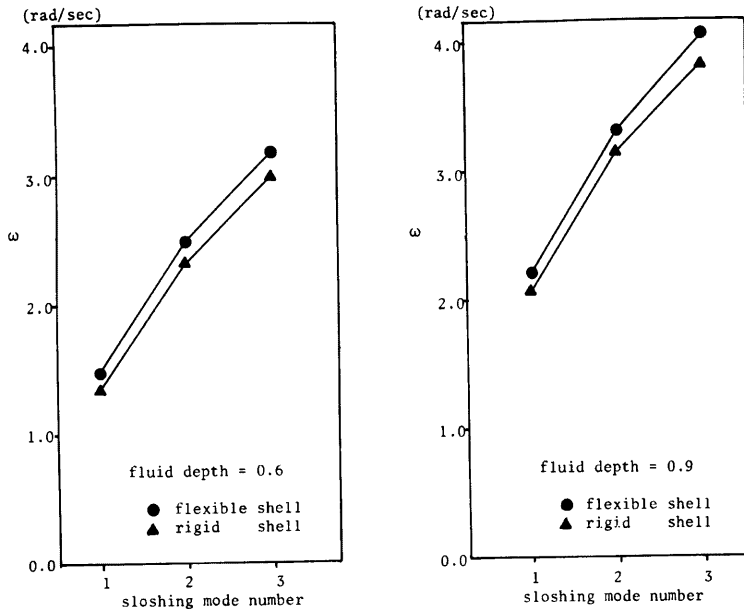


Fig. 10. Comparison of sloshing frequency of flexible and rigid tank

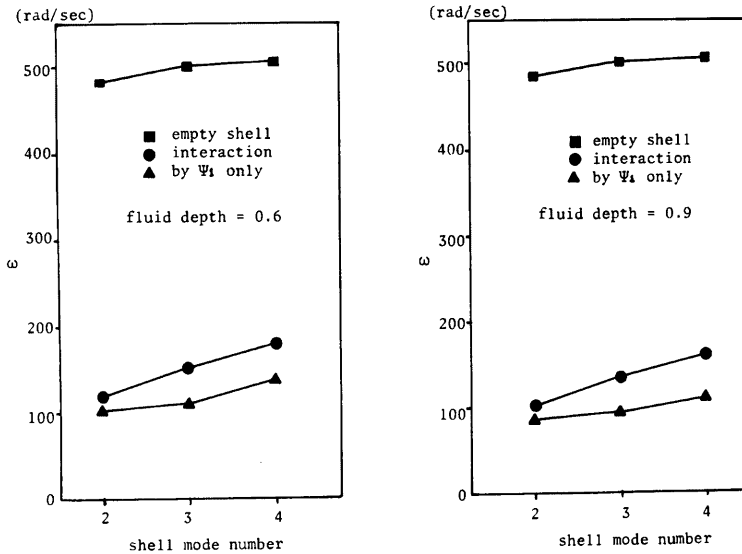


Fig. 11. Comparison of natural frequency of tank in three cases



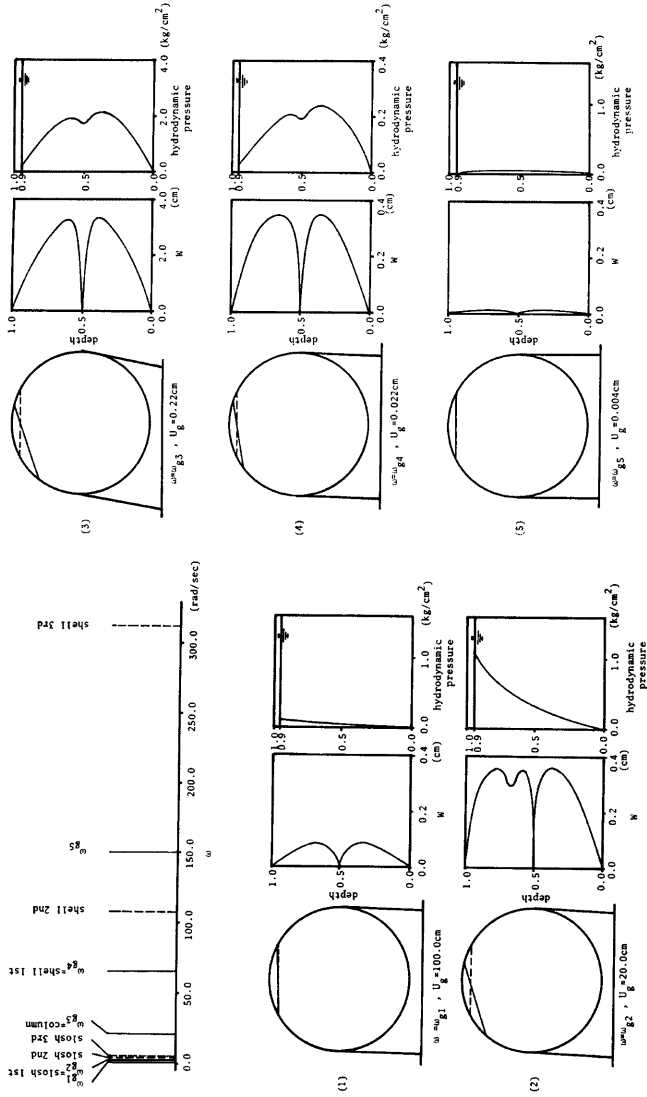


Fig. 12. Examples of response of the system subject to sinusoidal earthquake with different circular frequencies

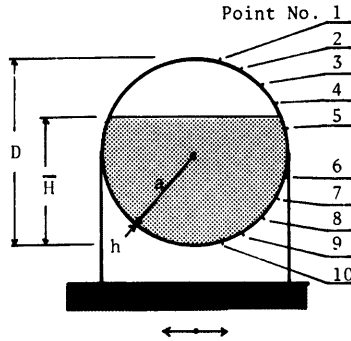


Fig. 13. Response analysis model:  $a=330\text{cm}$ ,  
 $\rho_L=0.000585\text{ kg/cm}^3$ ,  $a/h=400$ (Type  
 A),  $a/h=1000$ (Type B), column  $330.0$   
 $\phi \times 12$ ,  $L=363\text{ cm}$

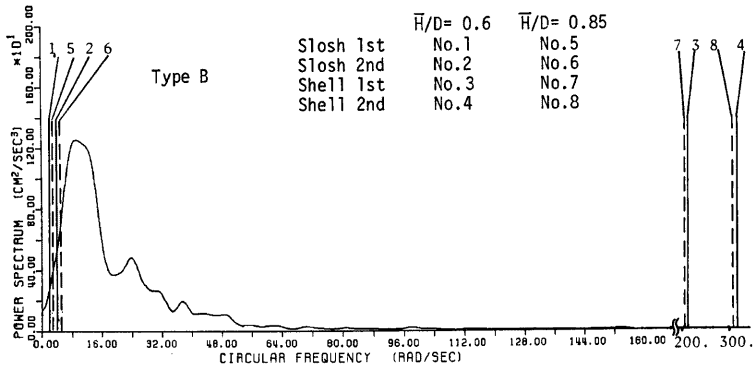
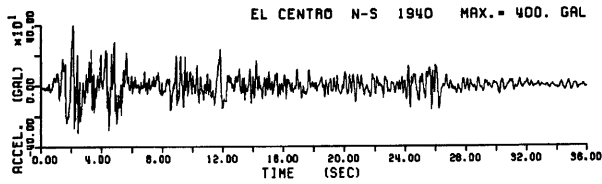


Fig. 14. Power spectrum of real earthquake and distribution of natural frequencies

5.3 実地震波応答解析

Fig. 13 のモデル ( $a=330$  cm, 但し, 柱外半径 16.5 cm 12本,  $L=36.3$  cm)<sup>15)</sup> に El Centro '40 NS をピーク値 400 gal,  $\zeta=1\%$  として入力し, 応答計算を行ない, 下記パラメータの影響を調べた。

1.  $a/h$
2. 液深
3. シェルの剛性
4. 支柱の有無

Fig. 14 は地震波のパワースペクトルと各モードの固有円振動数分布を示しており, スロッシング固有周期が地震波のパワースペクトルの主要領域に含まれていることがわかるので, 大きな応答が予想される。

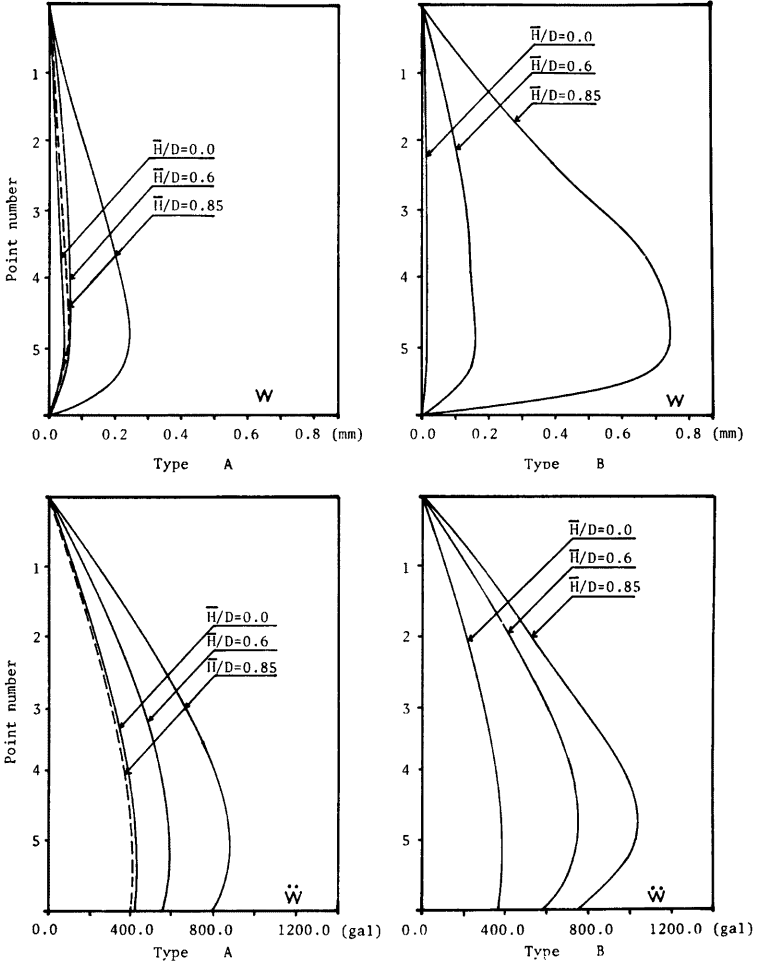


Fig. 15. Variation of maximum displacement  $w$  and maximum absolute acceleration  $\ddot{w}$  due to fluid depth: dash line represents no column case

Fig. 15 はシェルの変位および加速度応答の最大値を示したもので、これより次の事が云える。

- 液深が大なる程応答値は大きくなる。
- $a/h$  が大きい程応答値は大きくなる。
- 支柱を含めると応答値は大きくなる。

各応答の時刻歴を Fig. 16, 17 に示す。液体が存在することによりシェル面の変位、応答加速度はかなり大きくなる傾向をよく示している。スロッシングの液面高は容器を剛体と見做した場合との差異は特に type A モデルではごくわずかである。Fig. 18 は動的応答の最大値を示したもので、スロッシングによる

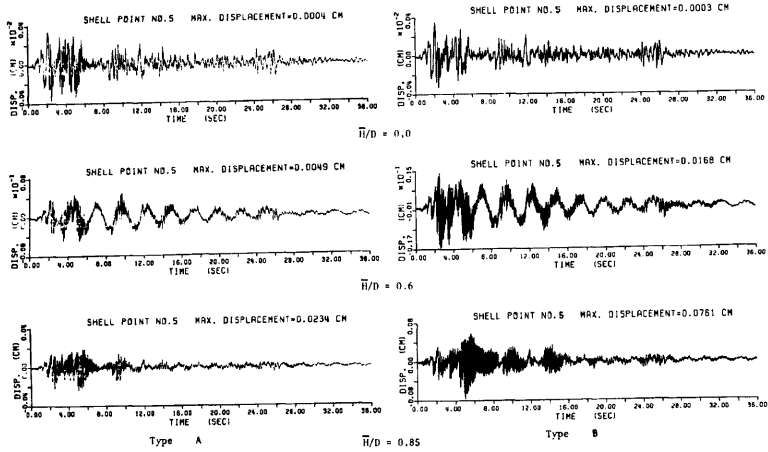


Fig. 16. Time history of response displacement at point 5

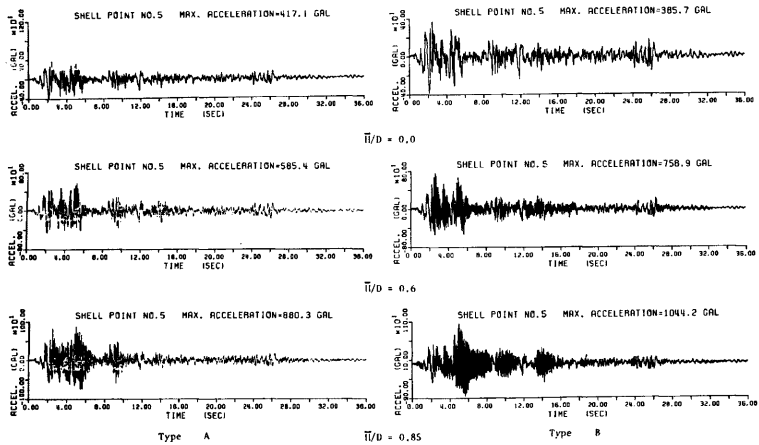


Fig. 17. Time history of response absolute acceleration at point 5

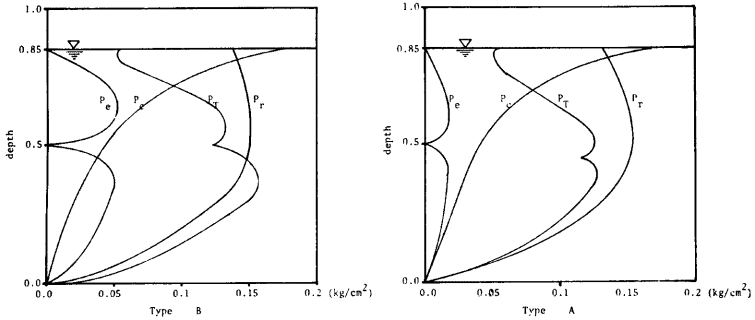


Fig. 18. Maximum hydrodynamic pressure

動圧  $P_c$  とシェルの剛体移動による動圧  $P_r$  はほとんど変わらないが、シェルの弾性変形によって生じる衝撃圧  $P_e$  は変位応答の大きい  $a/h$  の大きい方が大きく、したがって全動圧  $P_T$  もかなり大きくなる。

Table 1 は  $a/h$  について 2 種類の場合における刺激係数を比較したもので、スロッシングについての刺激係数にはほとんど差がないが、支柱およびシェルの変位モードについては若干の違いが認められ、シェル 1 次については液深に係わらず 2 倍にも変化する。なお、当モデルは実在貯槽の 1/5~1/10 程度の寸法であるが、本結果より実在貯槽規模の応答特性もある程度推定可能である。

5.4 人工地震波に対する応答

基盤にパワースペクトル密度  $S_0$  のホワイトノイズが入力する場合の地盤加速度のパワースペクトル

$$S\ddot{u}_g\ddot{u}_g(\omega) = \sum_{i=1}^N \alpha_i S_0 \frac{\omega^2}{(\omega_{gi}^2 + \zeta_{gi}^2 \omega^2)^2 + 4\zeta_{gi}^2 \omega^2}$$

において  $\omega_{gi}, \zeta_{gi}$  を適当に定めて得られた  $S\ddot{u}_g\ddot{u}_g$  に基づく人工地震波に対する系の時刻歴応答を求め、 $S\ddot{u}_g\ddot{u}_g$  が容器の第 1 次固有周期より短い点にピークを有するように  $\omega_{gi}$  を定めた場合に比して、それ以下の点にピークを有するように定めた場合の方が、全ての応答値がかなり大きくなることを確かめている (Fig. 19, Fig. 20)。

周波数領域解析に基づく自乗平均応答についてその適用可能性の検討を行なう。系の減衰は小さいとしているので、入力波  $S\ddot{u}_g\ddot{u}_g$  による一般化力の異なるモード間の連成は無視出来るので、クロス項は用いなくてもよい。したがって変位応答の自乗平均値は

$$\bar{w}^2(\varphi, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} M_i^{*2} \alpha_i^2 |H_i(\omega)| S\ddot{u}_g\ddot{u}_g(\omega) d\omega$$

$$|H_i(\omega)|^2 = 1 / \{ M_i^{*2} (\omega_i^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_i^2 \omega_i^2 \omega^2 \}$$

$M_i^*$ : 非連成運動方程式における等価質量。

絶対加速度応答を

$$\ddot{w}_S = \sqrt{\ddot{w}^2 + \ddot{u}_g^2 + \ddot{u}_r^2}, \quad \ddot{u}_g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S\ddot{u}_g\ddot{u}_g(\omega) d\omega$$

Table 1. An example of modal participation factors

|           | Type A | Type B |
|-----------|--------|--------|
| H/D=0.6   |        |        |
| slosh 1st | 5.75   | 5.75   |
| slosh 2nd | 1.00   | 1.00   |
| slosh 3rd | 0.49   | 0.49   |
| column    | 5.44   | 4.97   |
| shell 1st | 0.72   | 1.54   |
| shell 2nd | 0.05   | 0.02   |
| shell 3rd | 0.15   | 0.13   |
| H/D=0.85  |        |        |
| slosh 1st | 5.06   | 5.06   |
| slosh 2nd | 0.71   | 0.71   |
| slosh 3rd | 0.32   | 0.32   |
| column    | 7.97   | 7.62   |
| shell 1st | 0.96   | 1.76   |
| shell 2nd | 0.02   | 0.10   |
| shell 3rd | 0.03   | 0.10   |

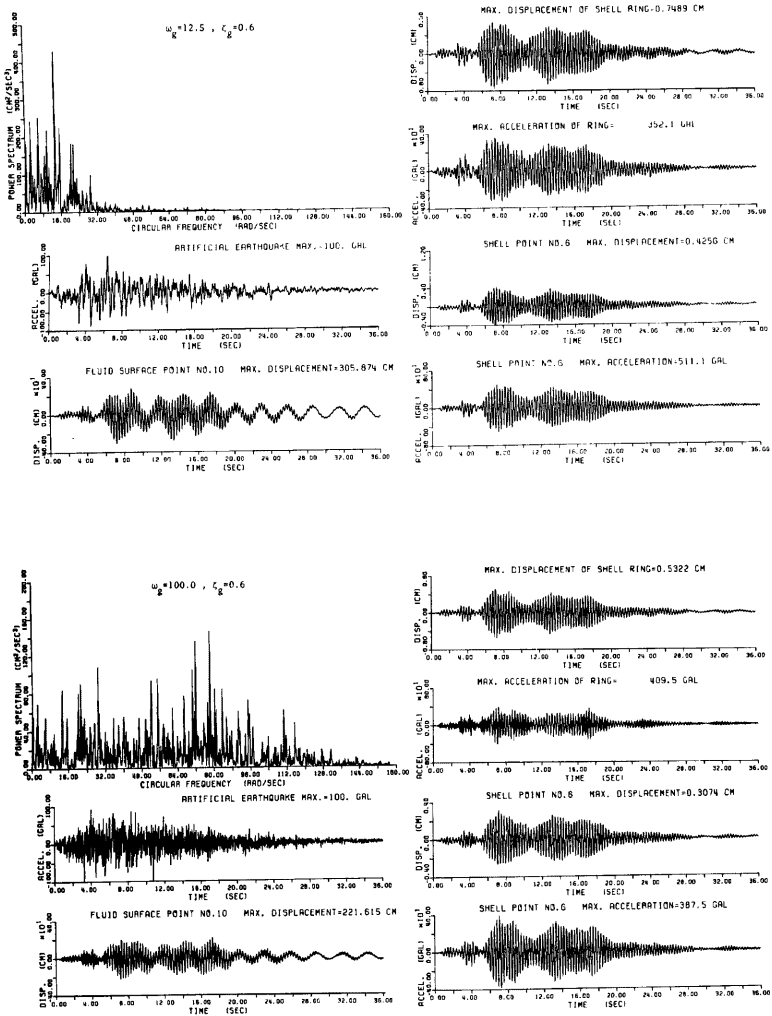


Fig. 19. Examples of time history of responses subject to artificial earthquakes

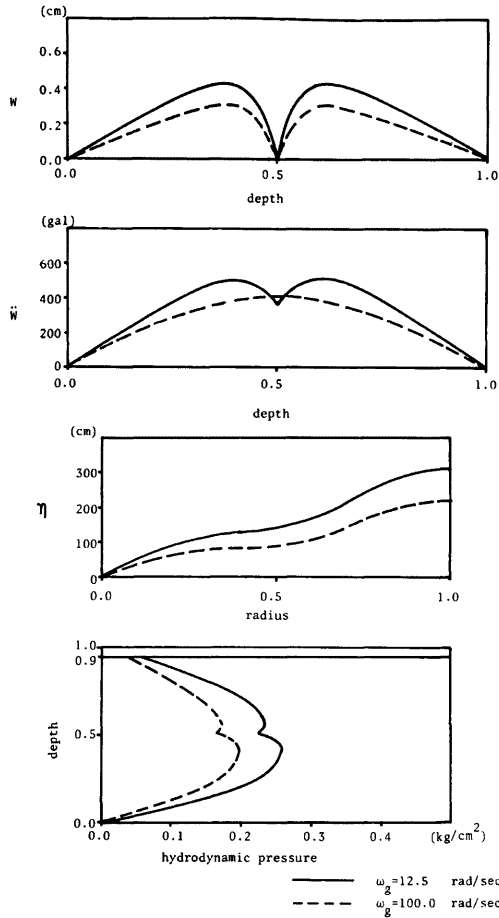


Fig. 20. Comparison of responses subject to two kinds of artificial earthquakes

として評価する。

Fig. 21 に実地震波による応答と本方法による応答の比較を示した。実地震は Fig. 14 に示すパワースペクトルをもつ El Centro 波であり、このパワースペクトル分布と同傾向の周波数特性をもつように金井一多治見式<sup>14)</sup>において

$$S_0 = 22.0 \text{ cm}^2/\text{sec}^3, \quad \omega_g = 12.5 \text{ rad/sec}, \quad \zeta_g = 0.6$$

として得られた  $S\ddot{u}_g\ddot{u}_g$  を用いている。

Fig. 21 には実地震波による各最大応答値およびパワースペクトルを用いて得られた応答値を比較しているが、応答の傾向は比較的に似ているが、値は必ずしも近いものではない。なおここでは実地震波は最大加

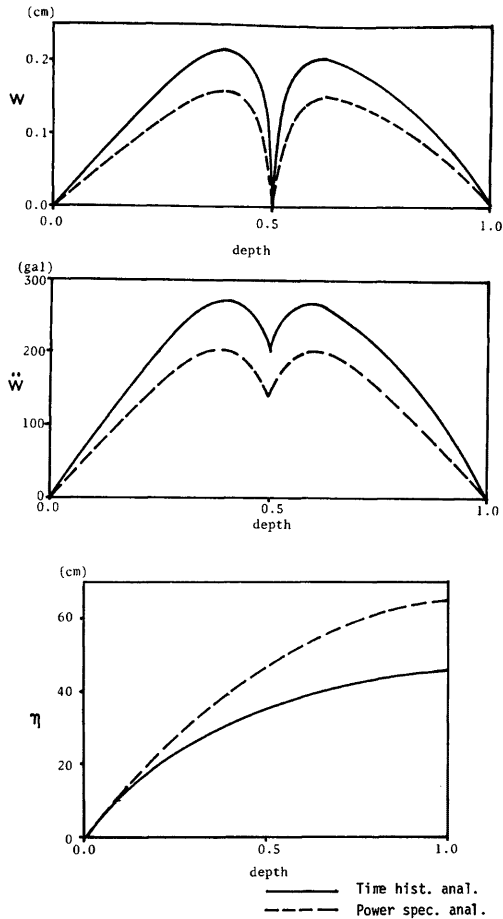


Fig. 21. Comparison of responses due to time history analysis and power spectrum analysis

速度を 100 ガルとし、人工パワースペクトルのピーク値が実地震波のその約 1/2 となるようにしている。

## 6. 結 語

本論文は球形液体貯槽の振動特性、特にシェルの振動と内部液体のスロッシングによる連成効果を明らかにすること、連成効果を考慮した地震応答解析法を示すことを目的とした。数値解析結果をも考慮して次のことが結論づけられる。

### 1. 解析法について

取り扱いが非常に困難であった球形貯槽に対し、液体の一部に分割円板層なる近似を導入したが、系全体



を連続体としてのモーダルアナリシス地震応答解析の解析解が示され、実数値計算に耐えることが検証された。

## 2. 動特性について

- (i) シェル振動に及ぼす液体の効果は、質量の大幅な増加と剛性のわずかな低下という形で現われ、液体の満杯時のシェル固有周期は中空時の数倍にもなり、またこの固有周期増加の傾向は  $a/h$  が大なる程著しい。
- (ii) シェルへスロッシングの連成効果を考慮した場合のシェルおよびスロッシングの固有周期はそれぞれの単独の固有周期よりもいずれも若干短くなるが、その割合はシェルの方が大きく、連成効果はシェル振動に大きく現われると云える。
- (iii) 本論文で用いた液体の（半球部+分割円筒）近似は分割円筒部分について半径を50分割する程度で十分な収束性を示すので、結果は良き精度を有すると考えられ、実用的に有用と考えられる。
- (iv) 外乱に正弦波を用いた応答解析により、スロッシング1次近傍共振加振の場合にはシェルの応答は小さいが液面変位応答の成長が著しく、シェルに対する動圧は振動圧が支配的であるのに対して、支柱共振加振の場合は全ての応答量が大きくなり、動圧は衝撃圧が支配的となること、これらより充分な長周期加振、或は短周期加振は工学的には重要性は低いと思われること等が判明した。
- (v) El Centro 波を用いた実地震応答解析により、全応答値を大きくさせる要因として次のものがあげられる。
  - 液量の増加
  - $a/h$  の増加
  - 支柱剛性の低下

- (vi) 最大液面変位応答は地震波の主要動から数秒遅れて現われ、それ以後は小さな減衰を伴った1次スロッシングモードで自由振動を行なう。
- (vii) 低振動数と高振動数にパワースペクトルのピークを有する2種の人工地震波に対する応答計算により、スロッシングおよび支持体の固有振動数をパワースペクトルの主要領域に含むような低振動数域にピークを有する地震波に対する応答の方が変位、加速度、動圧において数十パーセント大きな値を示す。

## 参 考 文 献

- 1) G. W. Housner: Dynamic Pressure on accelerated Containers, Bull. on Seismol. Soc. Ame. 47(1) January, 1957
- 2) K. Senda and K. Nakagawa: On the Vibration of an Elevated Water Tanks, Tech. Rep. of Osaka Univ. 4, 117
- 3) 曾我部 潔・重田達也・柴田 碧：液体貯槽の耐震設計に関する基礎的研究，東大生研報告 Vol. 26, No. 7, March, 1977
- 4) 堀 直人・谷 資信・田中弥寿雄：液体の入った円筒シェルの動的解析，日本建築学会論文報告集第282号，昭54.8
- 5) B. Budiansky: Sloshing of Liquids in Circular Canals and Spherical Tanks, J. Aero/Space Socie., Vol. 27, No. 3, 1960, pp.161~173.
- 6) 曾我部 潔：軸対称液体貯槽の液面動揺の固有周期計算法に対する一提案，生産研究，東大生研，第26巻7号，1974.7
- 7) 横尾義貫・松岡 理・國枝治郎：球殻振動時の一般解（その1），日本建築学会論文報告集，第83号，昭38.3. pp. 7~14
- 8) 横尾義貫・松岡 理，國枝治郎：球殻振動時の一般解（その2），日本建築学会論文報告集，第84号，昭38.4 pp. 22~29.
- 9) 國枝治郎・村田潤一・作本好文：非偏平球殻の逆対称応答振動特性，第25回構造工学シンポジウム，

昭54.2, pp. 93~104.

- 10) 國枝治郎：上下地震動を受ける球形ドームについて，第17回自然災害科学総合シンポジウム，昭55.10, pp. 561~564.
- 11) H. Lamb: Hydrodynamics, 6th edn., Cambridge Univ. Press, 1932.
- 12) 寺澤寛一：自然科学者のための数学概論，岩波書店，昭29.
- 13) M. L. Baron and R. Skalak: Free Vibration of Fluid-filled Cylindrical Shells, Proc. ASCE, EM 3, 1962.
- 14) H. Tajimi: A Statistical Method of Determining the Response of a Building Structure during an Earthquake, Proc.3rd WCEE, 1960
- 15) 建設省建築研究所：振動実験によるタンクの強度に関する研究—実験結果報告書，「LPG 大型タンクの耐震性に関する研究」

### Appendix I 球形シェル逆対称固有振動数（最低次）の計算

最低次自由振動は剛体移動，回転の性状が卓越するので，全変位成分慣性項を含めて考える。文献[7],[8]より必要な諸式を導びく。

$$\lambda^3 + \{4 + (1 - \nu^2)\varrho^2\}\lambda^2 + \{4 + 2(1 - \nu^2)\varrho^2 + k(1 - \varrho^2)\}\lambda + k\{2 + (1 + 3\nu)\varrho^2\} - (1 - \nu^2)k\varrho^4 = 0 \quad \dots\dots\dots(a)$$

但し  $\varrho^2 = \frac{m a^2}{E h} \omega^2, \quad k = 12(1 - \nu^2) \frac{a^2}{h^3}$ .

最低次固有振動の場合 (a) 式の根  $\lambda_i$  は1個の小さい実数（負数， $\lambda_1$  と記す），2個の複素数（ $\lambda_2, \lambda_3$  と記す）となる<sup>8)</sup>。変位成分は境界  $\varphi = \varphi_0$  で次の様に表わされる（但し頂点は閉じているとする）。

$$w = \left[ C_1 A_1 P_{\mu}(\cos \varphi_0) + \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi_0}} (p A_2 - q A_3) \right] \cos \theta$$

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \left[ C_1 A_1 \{ \mu \cos \varphi_0 P_{\mu}'(\cos \varphi_0) - (\mu + 1) P_{\mu-1}(\cos \varphi_0) \} \frac{1}{\sin \varphi_0} + \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi_0}} \right. \\ \left. \left\{ A_2 \left( p \gamma_1 - q \gamma_2 - \frac{1}{2} p \cot \varphi_0 \right) + A_3 \left( -p \gamma_2 - q \gamma_1 + \frac{1}{2} p \cot \varphi_0 \right) \right\} \right] \cos \theta$$

$$u = -\frac{(1 + \nu)}{E h a} \left[ A_1 \{ \mu \cos \varphi_0 P_{\mu}'(\cos \varphi_0) - (\mu + 1) P_{\mu-1}(\cos \varphi_0) \} \frac{1}{\sin \varphi_0} + \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi_0}} \right. \\ \left. \left\{ A_2 \left( \gamma_1 - \frac{1}{2} \cot \varphi_0 \right) - \gamma_2 A_3 \right\} + A_4 \frac{1}{\sin \varphi_0} P_{\mu_4}'(\cos \varphi_0) \right] \cos \theta$$

$$v = \frac{(1 + \nu)}{E h a} \cdot \frac{1}{\sin \varphi_0} \left[ A_1 P_{\mu}'(\cos \varphi_0) + \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi_0}} A_2 - \right. \\ \left. \{ \mu_4 \cos \varphi_0 P_{\mu_4}'(\cos \varphi_0) - (\mu_4 + 1) P_{\mu_4-1}(\cos \varphi_0) \} \right] \sin \theta$$

ここに

$$\mu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_1}, \quad \mu_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{2\frac{1}{4} + 2(1 + \nu)\varrho^2}$$

$\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$  とし

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\alpha - n}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha - n)^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{-\frac{\alpha - n}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha - n)^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}}}$$

$$n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cot^2 \varphi_0 - \frac{1}{\sin^2 \varphi_0}$$

$$C_1 = \frac{1}{E h a} \frac{\lambda_1 + (1 - \nu) + (1 - \nu^2)\varrho^2}{(1 - \nu)(\lambda_1 + 2)/k - 1}$$

$$\rho \pm iq = \frac{1}{Eka} \frac{\lambda_{2,3} + (1-\nu) + (1-\nu^2)\Omega^2}{(1-\nu)(\lambda_{2,3} + 2)/k - 1}$$

固定境界条件  $w = u = v = \partial w / \partial \varphi = 0$  に上式を代入し、 $A_i$  が一意的に定まる条件として  $\Omega$  が求まる。なお最低次固有振動数では  $\mu, \mu_1$  は充分に小さい値なので、非整数ルジャンドル関数  $P_{\mu}(\cos \varphi_0)$ ,  $P_{\mu_1}(\cos \varphi_0)$  の計算は容易である。 $\Omega$  が求まれば固有ベクトル  $A_i$  が定められるので、第 1 次の変形モードは決定される。

## Appendix II 運動方程式の係数に含まれる積分

シエルの第 1 次モードの記述に用いられる非整数ルジャンドル陪関数は次の公式によりルジャンドル陪多項式に置き換えるものとする。

$$P_{\mu}(\cos \varphi) = \frac{\mu(\mu+1)\sin \mu \pi}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i(i+1)} \left( \frac{1}{\mu-i} - \frac{1}{\mu+i+1} \right) P_{i}(\cos \varphi)$$

また、指数関数部分は  $\gamma_1, \gamma_2$  が大きいいため<sup>8)</sup>、境界よりの減衰が極めて速いので、 $P_{\mu}(\cos \varphi)$  の項のみを考慮する。

$$C_1(1) = 2\pi m h^2 a^2 \sum_i \sum_k G_{ii} G_{k1} S_{14}(i, k)$$

$$C_1(j) = \pi m h^2 a^2 \sum_i (G_{ij})^2 \frac{2i(i+1)}{2i+1} \quad (j \neq 1)$$

$$C_2(1,1) = \pi \rho_L h^2 a^3 \sum_i \sum_k G_{ii} G_{k1} \{S_{15}(i, k) + S_{14}(i, k)\} / i + \pi \rho_L h^2 a^2 \sum_i G_{ii}$$

$$\left\{ \sum_s D_{s1} J_1(\varepsilon_s) \sum_k S_{10}(1, i, s, k) - \sum_s D_{s1} {}_s V_n^l \sum_{k=1}^{\infty} P_{k'}(0) {}_s \bar{G}_k(a) S_{16}(i, k) / k(k+1) \right\}$$

$$C_2(1, l) = \frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a^3 \sum_i \sum_k \{G_{ij} G_{k1} S_{15}(i, k) + G_{ii} G_{k1} S_{16}(i, k)\} \frac{1}{i} + \frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a^2 \sum_i \sum_s$$

$$\left[ \sum_k J_1(\varepsilon_s) \{G_{ij} D_{s1} S_{10}(l, i, s, k) + G_{ii} D_{s1} S_{10}(1, i, s, k)\} \right.$$

$$\left. - {}_s V_n^l \sum_{k=1}^{\infty} P_{k'}(0) {}_s \bar{G}_k(a) \{G_{ij} D_{s1} S_{16}(i, k) + G_{ii} D_{s1} S_{16}(i, k)\} / k(k+1) \right]$$

$$C_2(j, l) = \frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a^3 \sum_i \sum_k \{G_{ij} G_{k1} + G_{ii} G_{kj}\} S_5(i, k) / k + \frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a^2 \sum_i \sum_s$$

$$\left[ \sum_k J_1(\varepsilon_s) \{G_{ij} D_{s1} S_{10}(l, i, s, k) + G_{ii} D_{sj} S_{10}(j, i, s, k)\} \right.$$

$$\left. - (G_{ij} D_{s1} + G_{ii} D_{sj}) {}_s V_n^l \sum_{k=1}^{\infty} P_{k'}(0) {}_s \bar{G}_k(a) S_1(k, l) / k(k+1) \right] \quad (j \neq 1)$$

$$C_3(1, i) = -\frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a \sum_k G_{k1} S_7(i, k) / k - \frac{\pi}{2} h^2 \sum_s D_{s1} {}_s P_1^u \cdot S_6(i, s) + \frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a^2 \sum_i G_{ii}$$

$$\left\{ \sum_k J_1(\varepsilon_i) S_{11}(l, k, i) - i V_n^l \sum_{k=1}^{\infty} P_{k'}(0) {}_i \bar{G}_k(a) S_{16}(l, k) / k(k+1) \right\}$$

$$C_3(j, i) = -\frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a \sum_k G_{kj} S_7(i, k) / k - \frac{\pi}{2} h^2 \sum_s D_{sj} {}_s P_1^u \cdot S_6(i, s) + \frac{\pi}{2} \rho_L h^2 a^2 \sum_k G_{kj}$$

$$\left\{ J_1(\varepsilon_i) \sum_n S_{11}(k, i, n) - i V_n^l \sum_{q=1}^{\infty} P_{q'}(0) {}_i \bar{G}_q(a) S_1(q, k) / q(q+1) \right\} \quad (j \neq 1)$$

$$C_4(i, l) = -\frac{\pi}{2} h^2 (i P_1^u + l P_1^u) S_6(l, i)$$

$$C_5(1) = C_1(1) \cdot \omega_1^2 \quad \text{但し } \omega_1: \text{シエルの第 1 次固有円振動数}$$

$$C_5(j) = E h^3 \pi \sum_k (G_{kj})^2 \frac{2k(k+1)(2-k^2-k)}{2k+1} \left\{ \frac{1}{1-\nu-k^2-k} - \left( \frac{h}{a} \right)^2 \frac{k(k+1)(2-k^2-k)}{12(1-\nu^2)(1-\nu-k^2-k)} \right\} \quad (j \neq 1)$$

$$C_6(1, l) = \pi \rho_L g h^2 a^2 \sum_i \sum_k G_{ii} G_{k1} \{S_{17}(i, l) + S_{18}(i, l)\}$$

$$C_6(j, l) = \pi \rho_L g h^2 a^2 \sum_i \sum_k G_{ij} G_{kl} S_4(i, l) \quad (j \neq 1)$$

$$C_7(i, l) = \pi \rho_L g h^2 S_6(l, i)$$

$C_8, C_9$  の積分において

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x} \Psi(r, \varphi, \theta, t) dV = \int_0^{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\pi} \Psi(a, \varphi, \theta, t) \sin^2 \varphi \cos \theta a^2 d\varphi d\theta$$

に注意すると

$$\begin{aligned} C_8(1) = & -6\pi m h a^2 \sum_i G_{i1} S_{14}(i, 1) - \pi \rho_L h a^3 \sum_i G_{i1} S_{15}(i, 1) / i \\ & - \pi \rho_L h a^3 S_{14}(i, 1) - \pi \rho_L h a^2 \sum_s D_{s1} J_1(\varepsilon_s) \sum_k S_3(1, s, k) \\ & + \pi \rho_L h a^2 \sum_s D_{s1s} V_n' \sum_{k=1}^{\infty} P_k'(0)_s \bar{G}_k(a) S_1(k, 1) / k(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8(j) = & -3\pi m h a^2 \sum_i G_{ij} S_{12}(i) - \pi \rho_L h a^3 \sum_i G_{ij} S_3(i, 1) / i \\ & - \pi \rho_L h a^2 \sum_s D_{sj} \left\{ J_1(\varepsilon_s) \sum_k S_{10}(i, 1, k, i) - {}_s V_n' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} P_k'(0)_s \bar{G}_k(a) S_1(k, 1) \right\} \quad (j \neq 1) \end{aligned}$$

$$C_9(i) = -\pi \rho_L h a^2 \left\{ J_1(\varepsilon_i) \sum_k S_{11}(1, k, i) - i V_n' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} P_k'(0)_s \bar{G}_k(a) S_1(k, 1) \right\}$$

ここに  $x_0 = \cos \varphi_0$  とすると

$$\begin{aligned} S_3(i, k) = & \int_{\varphi_0}^{\pi} P_i'(\cos \varphi) P_k'(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ = & \frac{1}{k(k+1) - i(i+1)} \{ (i-k)x_0 P_i' P_k' - i P_k' P_{i+1}' + k P_i' P_{k+1}' \} \quad (i \neq k) \\ = & i(i+1) \left[ P_i(x_0 P_i - P_{i+1}) + \frac{\cos(2i+1)\varphi_0 - 1}{2i+1} - \sum_{q=1}^i \frac{1}{3q} \{ (i-q) P_{i+q}' + q P_{i-q}' \} \right. \\ & \left. - (i+q) P_{i+q+1}' P_{i-q} + 2q x_0 P_{i+q}' P_{i-q}' \right] \quad (i=k) \end{aligned}$$

$$S_1(i, k) = S_3(i, k) |_{\varphi_0 = \pi/2}$$

$$\begin{aligned} S_4(i, k) = & \int_{\varphi_0}^{\pi} P_i'(\cos \varphi) P_k'(\cos \varphi) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ = & \frac{1}{k^2 - i^2} \left[ -x_0 \{ (k-i)x_0 P_i' P_k' + i P_{i+1}' P_k' - k P_{k+1}' P_i' \} - i S_3(i+1, k) + k S_3(i, k+1) \right] \quad (i \neq k) \\ = & \text{数値積分} \quad (i=k) \end{aligned}$$

$$S_6(i, k) = \int_0^R J_1\left(\varepsilon_i \frac{\xi}{R}\right) J_1\left(\varepsilon_k \frac{\xi}{R}\right) \xi d\xi = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ \frac{R}{2} (1 - 1/\varepsilon_i^2) J_1^2(\varepsilon_i) & (i=k) \end{cases}$$

以上諸積分結果中  $P_n' \equiv P_n'(x_0)$ ,  $P_n \equiv P_n(x_0)$  である。

$$\begin{aligned} S_7(i, k) = & \int_0^R J_1\left(\varepsilon_i \frac{\xi}{R}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^k P_k'(\cos \varphi) \xi d\xi \\ = & R^2 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{H^2 + (Rt)^2}}{a}\right)^k P_k' \left(\frac{H}{\sqrt{H^2 + (Rt)^2}}\right) J_1(\varepsilon_i t) t dt \quad \text{数値積分} \end{aligned}$$

$$S_{10}(j, n, k, i) = \int_{i_{\text{間}}} \{ {}_k A_i{}^j \cosh({}_k k i z) + {}_k B_i{}^j \sinh({}_k k i z) \} P_n'(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$\eta = \cos \varphi$ ,  $z = (\eta - \eta_i) \cdot a$ ,  $\bar{\eta}_i = l_i / a$  として次式を数値積分する。

$$= \int_{\eta_i}^{\eta_i + \bar{\eta}_i} \left[ {}_k A_i{}^j \cosh\left\{ \frac{a \varepsilon_k}{R_i} (\eta - \eta_i) \right\} + {}_k B_i{}^j \sinh\left\{ \frac{a \varepsilon_k}{R_i} (\eta - \eta_i) \right\} \right] P_n'(\eta) d\eta$$

$$S_{11}(n, k, i) = \int_{i_{\text{間}}} \{ {}_k A_i \cosh({}_k k i z) + {}_k B_i \sinh({}_k k i z) \} P_n'(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$S_{10}$  と同様に行う。

$$S_{12}(i) = \int_0^\pi P_i^1(\cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{4}{3} & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$$

$$S_{14}(i, k) = \int_0^{\pi/2} P_i^1(\cos \varphi) P_k^1(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi: S_3(i, k) \text{ より求まる。}$$

$$S_{15}(i, k) = \int_{\pi/2}^\pi P_i^1(\cos \varphi) P_k^1(\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi: S_3(i, k) \text{ より求まる。}$$

$$S_{16}(i, n) = \int_{\pi/2}^\pi P_n^1(\cos \varphi) P_i^1(\cos(\pi - \varphi)) \sin \varphi d\varphi = (-1)^i S_1(i, k)$$

$$S_{17}(i, k) = \int_{\pi/2}^\pi P_i^1(\cos \varphi) P_k^1(\cos \varphi) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi: S_4(i, k) \text{ より求まる。}$$

$$S_{18}(i, k) = \int_{\pi/2}^\pi P_i^1(\cos \varphi) P_k^1(\cos(\pi - \varphi)) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = (-1)^k S_4(i, k)|_{\varphi_0=\pi/2}$$

また

$$\begin{aligned} s\bar{G}_n(a) &= \int_0^a \frac{r'^{n+1}}{a^{n+1}} J_1\left(\varepsilon_s \frac{r'}{a}\right) dr' + \frac{n+1}{n} \int_0^a \frac{r'^{n+1}}{a^{n+1}} J_1\left(\varepsilon_s \frac{r'}{a}\right) dr' \\ &= \frac{2n+1}{n} \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^a r'^{n+1} J_1\left(\varepsilon_s \frac{r'}{a}\right) dr' \end{aligned}$$

ところで

$$S(n) \equiv \int_0^a \frac{x^{n+1}}{a^{n+1}} J_1\left(\varepsilon \frac{x}{a}\right) dx = \frac{a}{\varepsilon} \left\{ J_2(\varepsilon) + \frac{n-1}{\varepsilon} J_1(\varepsilon) \right\} - \frac{n^2-1}{\varepsilon^2} S(n-2)$$

$$S(0) = \frac{2a}{\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\varepsilon) - \frac{a}{\varepsilon} J_0(\varepsilon)$$

$$S(1) = \frac{a}{\varepsilon} J_2(\varepsilon)$$

である。

### Appendix III 液体貯槽の断面力

シェルの断面力は第1次シェルモードを除いて下式で与えられる。第1次モードによる断面力は文献 [8] 参照。

$${}_j N_\theta(\varphi, \theta, t) = \frac{Kh}{a^3} x_j(t) \cos \theta \sum_i G_{ij} \{ \lambda_i \{ P_i^2(\cos \varphi) - 3 \cot \varphi P_i^1(\cos \varphi) \} - (2-i-i^2) P_i^1(\cos \varphi) \} + X$$

$${}_j N_\varphi(\varphi, \theta, t) = -\frac{Kh}{a^3} x_j(t) \cos \theta \sum_i G_{ij} \{ \lambda_i \cot \varphi \cdot P_i^2(\cos \varphi) + (2-i-i^2) P_i^1(\cos \varphi) \} + X$$

$${}_j N_{\theta\varphi}(\varphi, \theta, t) = -\frac{Kh}{a^3} x_j(t) \sin \theta \sum_i G_{ij} \lambda_i \frac{1}{\sin \varphi} P_i^2(\cos \varphi)$$

$${}_j Q_\theta(\varphi, \theta, t) = \frac{Kh}{a^3} x_j(t) \sin \theta \sum_i G_{ij} (2-i-i^2) \frac{1}{\sin \varphi} P_i^1(\cos \varphi)$$

$${}_j Q_\varphi(\varphi, \theta, t) = -\frac{Kh}{a^3} x_j(t) \cos \theta \sum_i G_{ij} (2-i-i^2) \{ \cot \varphi \cdot P_i^1(\cos \varphi) - P_i^2(\cos \varphi) \}$$

$${}_j M_\theta(\varphi, \theta, t) = \frac{Kh}{a^2} x_j(t) \cos \theta \sum_i G_{ij} \{ \nu P_i^2(\cos \varphi) - (3\nu+1) \cot \varphi \cdot P_i^1(\cos \varphi) \} + \frac{h^2}{12a} {}_j N_\theta(\varphi, \theta, t)$$

$${}_j M_\varphi(\varphi, \theta, t) = \frac{Kh}{a^2} x_j(t) \cos \theta \sum_i G_{ij} \{ P_i^2(\cos \varphi) - (3+\nu) \cot \varphi \cdot P_i^1(\cos \varphi) \} + \frac{h^2}{12a} {}_j N_\varphi(\varphi, \theta, t)$$

$${}_j M_{\theta\varphi}(\varphi, \theta, t) = \frac{(1-\nu)Kh}{a^2 \sin \varphi} x_j(t) \sin \theta \sum_i G_{ij} P_i^2(\cos \varphi) + \frac{h^2}{6a} {}_j N_{\theta\varphi}(\varphi, \theta, t)$$

ここに

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \lambda_i = \frac{(1-\nu)(2-i-i^2) - Eha^2/K}{1-\nu-i-i^2}, \quad X = ma(\ddot{u}_g + \ddot{u}_L) \sin \varphi \cos \theta$$