

琵琶湖湖流の三次元的な解析

岩佐義朗・井上和也・劉 樹坤・阿部 徹

NUMERICAL SIMULATION OF FLOWS IN LAKE BIWA BY MEANS OF A THREE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL

By *Yoshiaki IWASA, Kazuya INOUE, Shu-kun LIU and Toru ABE*

Synopsis

The objective of this study is to establish a three-dimensional mathematical model to simulate the lake currents in Lake Biwa. Under the assumption of a hydrostatic pressure distribution, three flow equations and the diffusion equation accounting for the density variation due to water temperature are transformed into a system of finite difference equations in the three-dimensional mesh space. The validity of the numerical method is examined by a case study. Further examinations of the computational processes are necessary for the flow cases during the stratification or destratification periods.

1. 緒 言

琵琶湖（貯水量約 $2.75 \times 10^{10} \text{ m}^3$ ，湖面積約 $6.80 \times 10^2 \text{ km}^2$ ）の湖流に関しては、従来より観測による調査が主として行われてきている。その結果、北湖北部に比較的安定した反時計回りの環流が存在することや北湖中央部や南部にも環流がありうることなどが報告されている。環流は、湖流をきわだてて特徴づける流れであり、また物質輸送の面からみれば実際的にも重要であるので、その成因や消長が注目されてきた。今里¹⁾は、この点に関して風によるせん断応力に主眼を置いた研究を行い、2次元1層モデルを用いた数値解析による検討から、風によるせん断応力に抵抗する水平方向の圧力こう配（水面こう配）が水深によって異なることが環流の発生要因であるとした。一方、大西²⁾は、水面を通して行われる熱交換による水温変化が水深によって異なり、そのため生ずる水平方向の密度の不均衡によって環流が生ずることを、水深方向に3層位に分割したモデルを用いた数値解析の結果から導いている。

本研究は必ずしも環流およびその成因論に限ることなく、北湖から南湖への恒流や強風時の静振による流れなども含めて、比較的時間スケールの大きい（波浪の時間スケールより長い）琵琶湖の湖流の特性を解析することを最終的な目的としたものであり、また筆者らが南湖だけを対象にして行った検討³⁾を琵琶湖全域に拡張しようとするもので、本報では、まずその第一段階として、解析手段である数値計算の手法の確立を目指すことにする。すなわち、解析の基礎式として流れを支配する運動方程式と連続式、および密度分布を支配する密度保存則をとるとともに、これを差分式によって3次元の格子分割のもとで解くための計算法を導き、その適用例を示すことにする。なお、本報では、鉛直方向には運動方程式に代って、これを静水圧分布式で近似しているが、水深方向にも差分格子の分割を行うので、慣用に従いこのような方法も3次元の解析法の範囲に含めうるとしておく。

2. 基礎式とその積分

2.1 基礎式

本研究で扱う流れには、周期の短い波浪などは含まれないとする。このような流れに限れば、空間ス

ケールはかなり大きく、現象は比較的緩慢であるとみなして差支えないであろう。したがって、対象をこのようにとれば、流れの鉛直方向の加速度は重力の加速度に比べて小さく、鉛直方向の圧力分布は静水圧分布によって近似されよう。さらに、成層に関しては水温成層のみを考えることにし、密度の非一様性の影響に対して、Boussinesq の近似が成立するものとする。以上の2つの仮定にたてば、基礎式は以下のように記述される (Fig. 1)。

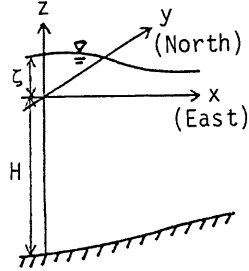


Fig. 1 Definition Sketch.

運動方程式

$$x \text{ 方向: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$y \text{ 方向: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A_h \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$z \text{ 方向: } 0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{連続式 } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに座標軸は Fig. 1 に示される通り、基準面内 (本研究では TP. 84. 500m にとる) の東向きに x 軸、北向きに y 軸がとられ、基準面に直交する鉛直軸の上向きに z 軸がとられている。また、t: 時間、u, v および w: x, y および z 軸方向の流速、f: Coriolis の因子、p: 圧力、ρ: 密度、ρ₀: 基準密度 (ρ₀=1 gm/cm³ とする)、A_h: 水平面内の混合に関する渦動粘性係数、A_v: 鉛直方向の渦動粘性係数である。

(3)式より、圧力の静水圧分布式が導かれる。いま、基準面から水面までの高さ (基準面からの水位) を ζ とし、さらに ρ=ρ₀-Δρ (Δρ=ρ₀-ρ: 本研究では密度偏差とよぶ) と置けば、(3)式より

$$p = \int_z^{\zeta} \rho g dz = \int_z^{\zeta} \rho_0 g dz + \rho_0 g \zeta - \int_z^{\zeta} \Delta \rho g dz \dots\dots\dots (5)$$

が得られる。右辺の第一項は、静止状態 (ζ≡0) のときの基準密度 ρ₀ による圧力で、同一の z に対しては x および y に依らない一定の値をとり、(1)および(2)式中の ∂p/∂x および ∂p/∂y には何の貢献もしない。したがって、p からこの項を取り除くことにし、圧力 p を改めて、

$$p = \rho_0 g \zeta - \int_z^{\zeta} \Delta \rho g dz \dots\dots\dots (6)$$

で定義する。いうまでもなく、右辺の第1項は水位が静止状態 (ζ≡0) から移動したときの基準密度による圧力であり、第2項は密度偏差による圧力である。

密度偏差に関してはつぎの拡散式が成立するとする。

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} = q + K_h \left(\frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial y^2} \right) + K_v \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial z^2} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、q: 輻射熱による密度偏差の生成項、K_h: 水平面内の渦動拡散係数、K_v: 成層が安定なとき (∂Δρ/∂z = -∂ρ/∂z > 0) のときの鉛直方向の渦動拡散係数である。成層が不安定なときには、水面 ζ から次式で定義される z_m:

$$\int_{z_m}^{\zeta} \Delta \rho dz = (\zeta - z_m) \Delta \rho (z_m) \dots\dots\dots (8)$$

まで瞬時に対流混合が生ずるとする。

つぎに、境界条件をまとめておく。

- (1) 水面 (z=ζ) での境界条件

$$\text{運動学的条件: } w_s = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \zeta}{\partial y} \dots\dots\dots (9)$$

$$\text{水面におけるせん断応力 } \rho_0 A_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\tau_{sx}, \tau_{sy}) \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{水面における熱交換: } K_v \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} = \frac{\alpha Q_0}{c_p} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、添字 s は水面における量を表わし、 τ_{sx}, τ_{sy} : 風による表面摩擦応力の x, y 方向成分、 α : 水の膨脹率、 Q_0 : 水面で単位時間に吸収される単位面積あたりの熱量、 c_p : 水の比熱である。

(2) 湖底 ($z=z_b$) での境界条件

$$\text{運動学的条件: 湖底は時間的に変化しないとする。すなわち, } w_b = u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + v_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{湖底におけるせん断応力: } \rho_0 A_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\tau_{bx}, \tau_{by}) \dots\dots\dots (13)$$

湖底における熱交換: ないとする。すなわち,

$$K_v \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここに、添字 b は湖底における量を表わし、 z_b : 湖底の座標、 τ_{bx}, τ_{by} : 湖底におけるせん断応力の x, y 方向成分である。

(3) 河川の流出・入のない湖岸での境界条件

$$\text{湖岸の流れ: 湖岸に直角な方向の流速成分を 0 とする。すなわち, } v_n = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{湖岸における熱交換: ないとする。すなわち, } K_n \partial \Delta \rho / \partial n = 0 \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 n : 湖岸に立てた法線である。

(4) 河川の流入・出のある湖岸での境界条件

$$\text{湖岸の流れ: 河川の流入・出流量に相当する流速に等しいとする。すなわち, } u_n = u_R \dots\dots\dots (17)$$

湖岸における熱交換: 流入河川では流入水温に対応する密度偏差のフラックスが流入するとし、流出河川では流出点の湖内の密度偏差がフラックスとして流出するとする。すなわち,

$$u_n \Delta \rho - K_n \partial \Delta \rho / \partial n = u_R \Delta \rho_R \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 u_R : 河川の流量に対応する流速、 $\Delta \rho_R$: 河川における密度偏差である。

2.2 基礎式の積分

(1), (2), (4) および (7) 式を差分式に改める基礎として、これらを Fig. 2 に示されるような control volume について積分する (i および j は、それぞれ x および y の増加する方向に、 k は z の減少する方向につけられている)。

上記の諸式はいずれもつぎの形式:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uc + \frac{\partial}{\partial y} vc + \frac{\partial}{\partial z} wc = X + E_x \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + E_v \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \dots\dots\dots (19)$$

にまとめられる。たとえば、連続式 (4) は上式で $c \equiv 1, X = 0$, ならびに E_x, E_v を考える必要のない場合である。したがって、ここでは (19) 式を用いて上記の積分を行うことにする。

(1) 水面を含む control volume の場合

(9) 式を用いて、(19) 式を積分した結果はつぎのようである。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c dV = \int_V X dV - (uc - E_x \frac{\partial c}{\partial x}) A_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - (vc - E_x \frac{\partial c}{\partial y}) A_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} - (wc - E_v \frac{\partial c}{\partial z}) A_z \Big|_{z_{k+1}}$$

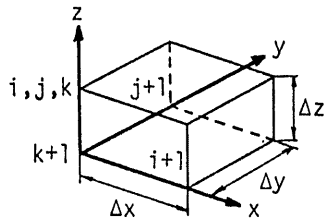


Fig. 2 Control Volume.

$$+ \left(E_h \cos(n, x) \frac{\partial c}{\partial x} + E_h \cos(n, y) \frac{\partial c}{\partial y} + E_v \cos(n, z) \frac{\partial c}{\partial z} \right) A_z \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 V : control volume の体積, A_x, A_y, A_z : control volume の x, y, z 軸に垂直な面の面積, A_z : 自由表面の面積, n : 水面に立てた外向き法線であり, また $h \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = h(x_{i+1}) - h(x_i)$, $h \Big|_{z_{k+1}} = -h(z_{k+1})$ を表わす。右辺の第 5 項は、水面における c の交換を表わす項であるが、その機構は物理量によっては必ずしも明確ではない。本研究では、この項は水面における境界条件(10)および(11)式によって記述されるものとしておく。

(20)式をそれぞれの物理量について具体的に表わすと次のようになる。

i) x 方向の運動方程式(1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV = & f \int_V v dV - \frac{1}{\rho_0} \int_{A_x} p dA_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \left(uuA_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + uvA_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} + uwA_z \Big|_{z_{k+1}}^{z_{k+1}} \right) \\ & + \left(A_h \frac{\partial u}{\partial x} A_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + A_h \frac{\partial u}{\partial y} A_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} + A_v \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_{k+1}} \right) + \frac{1}{\rho} \tau_{xx} A_x \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

右辺の第 1 項を Coriolis 項, 第 2 項を圧力項, 第 3 項を移流項, 第 4 項を拡散項, 第 5 項をせん断応力項とよぶことにする。第 5 項では、水面こう配が小さいとして $A_x \cong A_z$ としている。なお、 y 方向の運動方程式(2)も同様に積分されるが省略する。

ii) 連続式(4)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_z} \zeta dA_z = -uA_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - vA_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} - wA_z \Big|_{z_{k+1}} \dots\dots\dots (22)$$

iii) 密度偏差の拡散式(7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \Delta \rho dV = & \int_V q dV - \left(u \Delta \rho A_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + v \Delta \rho A_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} + w \Delta \rho A_z \Big|_{z_{k+1}} \right) \\ & + \left(K_h \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} A_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + K_h \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} A_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} + K_v \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} \Big|_{z_{k+1}} \right) + \frac{\alpha Q_0}{c_p} A_s \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

右辺第 1 項を生成項, 第 2 項を移流項, 第 3 項を拡散項, 第 4 項を水面吸収項とよぶことにする。

(2) 水面も湖底も含まない中間の control volume の場合

(19)式を積分した結果はつぎのようである。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V c dV = \int_V X dV - \left(uc - E_h \frac{\partial c}{\partial x} \right) A_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \left(vc - E_h \frac{\partial c}{\partial y} \right) A_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} - \left(wc - E_v \frac{\partial c}{\partial z} \right) A_z \Big|_{z_{k+1}}^{z_{k+1}} \dots\dots\dots (24)$$

それぞれの物理量についての具体的な表現は、(21)~(23)式と同様であるので省略する。

(3) 湖底に接する control volume の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V c dV = & \int_V X dV - \left(uc - E_h \frac{\partial c}{\partial x} \right) A_x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \left(vc - E_h \frac{\partial c}{\partial y} \right) A_y \Big|_{y_j}^{y_{j+1}} - \left(wc - E_v \frac{\partial c}{\partial z} \right) A_z \Big|_{z_k}^{z_k} \\ & - \left\{ E_h \left(\cos(n, x) \frac{\partial c}{\partial x} + \cos(n, y) \frac{\partial c}{\partial y} \right) + E_v \cos(n, z) \frac{\partial c}{\partial z} \right\} A_b \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここに、 n : 湖底に外向きに立てた法線であり, $h \Big|^{z_k} = h(z_k)$ を表わす。変形にあたっては、(12)式が用いられている。右辺の第 5 項は、湖底における交換を表わす項で、湖底での境界条件(13)および(14)式によって記述されるとする。すなわち、この項は、 x 方向の運動方程式にあっては τ_{bx}/ρ_0 , y 方向の運動方程式にあっては τ_{by}/ρ_0 , 密度偏差の拡散式にあっては 0 に、それぞれ等しいとして表わされる。各式の具体的な表現は省略する。

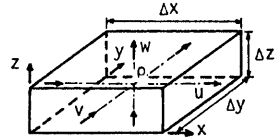
3. 差分式および計算法

後述する計算では、琵琶湖を水平面内には x および y 方向に 1 km の大きさの差分格子に分割し ($\Delta x = \Delta y = 1$ km), 水深方向には基準面 (TP. 84.5 m) より 50 m 以浅では 2.5 m, 以深では 10 m の大きさの差分格

子に分割する ($\Delta z=2.5\text{m}$ または 10m)。以後、簡便のため、水平面内の分割で得られた水深を高さとする水柱 ($\Delta x \times \Delta y \times \text{水深}$) を column とよび、column を上のように鉛直方向にさらに分割した最小単位 ($\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$) を cell とよぶことにする。

3.1 差分式

各変量の定義位置をつぎのように定める。まず、水位 ζ は column 上面の中心において、圧力 p は cell の上、下面の中心において、密度偏差 ρ は cell の中心において、それぞれ定義する。また、流速 u, v および w は、各 cell の yz 面および上、下面のそれぞれ中心において定義する (Fig. 3)。その結果 ζ, p, ρ および w の定義位置は同一鉛直線上に、 u および v は同一水平面上に存在することになる。このような変数の配置は、筆者ら³⁾ が琵琶湖南湖を 2 次元 1 層モデルによって計算したときの配置を 3 次元に拡張したものである。



- $u : x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2$
- $v : x+\Delta x/2, y, z+\Delta z/2$
- $w : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z$
- $\rho : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2$
- $p : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z$
- $\zeta : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2$

Fig. 3 Arrangement of Variables.

各 column の最上層の cell ($\zeta=0$ のとき、上面が基準面に一致する cell) を第 1 層、これより鉛直下方に k 番目の cell を第 k 層とよぶことにし、 h_i^k, j の表示によって $x=i\Delta x, y=j\Delta y$ の鉛直線上の第 k 層上面における時刻 $t=n\Delta t$ での h の値を表すことにする。

以下においては、水面も湖底も含まず、また湖岸にも接しない cell についてのみ、差分化の結果を示す。差分化には、2-level の方法、すなわち、 $t=n\Delta t$ および $t=(n+1)\Delta t$ での状態を既知として、 $t=(n+2)\Delta t$ での状態を求める leap-frog 法を適用する。なお、湖面を含む cell では層厚が水位の変化によって時間的にも場所的にも変化することを考えて、第 k 層の層厚にも添字を附すことにし、 $\Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2}$ (中心線が $x=(i+1/2)\Delta x, y=(j+1/2)\Delta y$ にある column の第 k 層の時刻 $n\Delta t$ における層厚) と表すことにする。

(1) x 方向の運動方程式

水面も湖底も含まない cell について、Fig. 2 の control volume を x 方向に $\Delta x/2$ だけずらせて (21) 式に相当する式を導き、これをつぎのように差分化する (Fig. 4)。

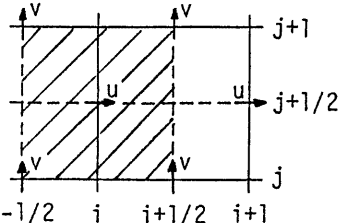


Fig. 4 Difference Scheme for x -wise Momentum Equation.

$$\frac{u_{i,j+1/2}^{k+1/2, n+2} - u_{i,j+1/2}^{k+1/2, n}}{2\Delta t} \Delta V_{i,j+1/2}^{k+1/2, n+1} = \text{Coriolis 項} + \text{圧力項} + \text{移流項} + \text{拡散項} \dots (26)$$

ここに、 $\Delta V_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1} = \Delta x \Delta y \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2}$ とするとき、 $\Delta V_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1} = (\Delta V_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1} + \Delta V_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1})/2$ である。上式の右辺の各項はつぎのようである (各項の表示には、添字 i, j, k を括弧書きする)。

(i) Coriolis 項 u_{co} 。

$$u_{co}(i, j+1/2, k+1/2) = \frac{f}{4} (v_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1} + v_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1} + v_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1} + v_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1}) \Delta V_{i, j+1/2}^{k+1/2, n+1} \dots (27)$$

(ii) 圧力項 u_p 。

$$u_p(i, j+1/2, k+1/2) = -\frac{1}{\rho_0} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{p}_{i+1/2, j+1/2}^k + \bar{p}_{i+1/2, j+1/2}^{k+1}) \Delta y \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2} - \frac{1}{2} (\bar{p}_{i-1/2, j+1/2}^k + \bar{p}_{i-1/2, j+1/2}^{k+1}) \Delta y \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2} \right\} \dots (28)$$

上式中の \bar{p} は(6)式を差分化した次式より求めるものとする。

$$\bar{p}_{i+1/2, j+1/2} = \rho_0 g \{ (1-\theta) \zeta_{i+1/2, j+1/2} + \theta \zeta_{i+1/2, j+1/2} \} - \sum_{m=1}^{k-1} \Delta \rho_{i+1/2, j+1/2}^{m+1/2, n+1/2} \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^m g \dots (29)$$

ここに、 $\theta (0 \leq \theta \leq 1)$ は加重平均のパラメータである。(29)式で明らかのように、 ζ には ndt および $(n+2)dt$ の値の加重平均が用いられている。 ζ^{n+2} は未知量であるから、 $\theta \neq 0$ のときには implicit な解法となり、後述するように ζ についての繰り返し計算が必要とされる。

(iii) 移流項 u_{conv}

上流側差分を表わす次式を定義する。

$$(u, v_m, \theta)_{m=i+1}^{m=i+1} = u v_{i+1/2} + \theta |u| (v_i - v_{i+1}) / 2 \dots (30)$$

ここに、 θ は上流側差分の程度を示すパラメータ⁴⁾で、 $\theta = 0$ なら中央差分、 $\theta = 1$ なら通常の上流差となる。すなわち $v_{i+1/2} = (v_i + v_{i+1}) / 2$, $\theta = 1$ とするとき、

$$u > 0 \text{ では、 } (u, v_m, 1)_{m=i+1}^{m=i+1} = u v_i$$

$$u < 0 \text{ では、 } (u, v_m, 1)_{m=i+1}^{m=i+1} = u v_{i+1} \dots (31)$$

である。さて、この記号を用いて移流項を差分化した結果はつぎのようである。

$$\begin{aligned} u_{conv}(i, j+1, k+1/2) = & -(u_i^{k+1/2, n+1/2}, u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}, \theta_n)_{m=i+1}^{m=i+1} \Delta y \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{m+1/2} \\ & + (u_i^{k+1/2, n+1/2}, u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}, \theta_n)_{m=i-1}^{m=i-1} \Delta y \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{m+1/2} \\ & - (v_{i+1/2, j+1}^{k+1/2, n+1/2}, u_{i, m}^{k+1/2, n}, \theta_n)_{m=j+3/2}^{m=j+3/2} \Delta x \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{m+1/2} / 2 \\ & - (v_{i+1/2, j+1}^{k+1/2, n+1/2}, u_{i, m}^{k+1/2, n}, \theta_n)_{m=j+1/2}^{m=j+1/2} \Delta x \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{m+1/2} / 2 \\ & + (v_{i-1/2, j+1}^{k+1/2, n+1/2}, u_{i, m}^{k+1/2, n}, \theta_n)_{m=j+1/2}^{m=j+1/2} \Delta x \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{m+1/2} / 2 \\ & + (v_{i-1/2, j+1}^{k+1/2, n+1/2}, u_{i, m}^{k+1/2, n}, \theta_n)_{m=j+3/2}^{m=j+3/2} \Delta x \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{m+1/2} / 2 \\ & - (w_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}, u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}, \theta_v)_{m=k+1/2}^{m=k+1/2} \Delta x \Delta y \\ & + (w_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}, u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}, \theta_v)_{m=k+3/2}^{m=k+3/2} \Delta x \Delta y \dots (32) \end{aligned}$$

ここに、 θ_n, θ_v はそれぞれ水平方向および鉛直方向の上流側差分のパラメータである。また、Fig. 3 の変数の定義位置にない量が参照される場合は、次式で求めるものとする。

$$u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2} = (u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2} + u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n+1/2}) / 2 \dots (33)$$

$$w_{i, j+1/2}^{k, n+1/2} = (w_{i, j+1/2}^{k, n+1/2} + w_{i+1/2, j+1/2}^{k, n+1/2}) / 2 \dots (34)$$

(iv) 拡散項 u_{diff}

$$\begin{aligned} u_{diff}(i, j+1/2, k+1/2) = & A_h \left[\frac{1}{\Delta x} \{ (u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} - u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}) \Delta y \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} \right. \\ & \left. - (u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} - u_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n}) \Delta y \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} \right] \\ & + \frac{1}{\Delta y} \{ (u_{i, j+3/2}^{k+1/2, n} - u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}) \Delta x \Delta z_{i, j+1/2}^{k+1/2, n} - (u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n} - u_{i, j-1/2}^{k+1/2, n}) \Delta x \Delta z_{i, j}^{k+1/2, n} \} \\ & + A_v \left\{ \frac{1}{(\Delta z_{i, j+1/2}^{k+1/2, n} + \Delta z_{i, j+1/2}^{k-1/2, n}) / 2} (u_{i, j+1/2}^{k-1/2, n} - u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n}) \Delta x \Delta y \right. \\ & \left. - \frac{1}{(\Delta z_{i, j+1/2}^{k+1/2, n} + \Delta z_{i, j+1/2}^{k+3/2, n}) / 2} (u_{i, j+1/2}^{k+1/2, n} - u_{i, j+1/2}^{k+3/2, n}) \Delta x \Delta y \right\} \dots (35) \end{aligned}$$

ここに、

$$\Delta z_{i, j+1/2}^{k+1/2, n} = (\Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} + \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n}) / 2, \dots (36)$$

$$\Delta z_{i, j}^{k+1/2, n} = (\Delta z_{i+1/2, j-1/2}^{k+1/2, n} + \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} + \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2, n} + \Delta z_{i-1/2, j-1/2}^{k+1/2, n}) / 4 \dots (37)$$

である。

y 方向の運動方程式は、Fig. 2 の control volume を y 方向に $\Delta y/2$ だけずらせて同様に差分式に改められるが、省略する。

(2) 連続式

cell を control volume に採れば、つぎのように差分化される。

$$\frac{u_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} - u_{i,j+1/2}^{k+1/2,n+2}}{\Delta x} + \frac{v_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} - v_{i+1/2,j}^{k+1/2,n+2}}{\Delta y} + \frac{w_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+2} - w_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}}{\Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+2}} = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

(3) 密度偏差の拡散式

cell を control volume に採れば、つぎのように差分化される。

$$\frac{\Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+2} - \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}}{2\Delta t} \Delta V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} = \text{生成項} + \text{移流項} + \text{拡散項} \quad \dots\dots\dots (39)$$

(i) 生成項 ρ_q

$$\rho_q(i+1/2, j+1/2, k+1/2) = q_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \Delta V_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \quad \dots\dots\dots (40)$$

(ii) 移流項 ρ_{conv}

$$\begin{aligned} \rho_{conv}(i+1/2, j+1/2, k+1/2) = & -(u_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}, \Delta \rho_{m,j+1/2}^{k+1/2,n+1}, \theta_h)_{m=i+1/2} \Delta y \Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \\ & + (u_{i,j+1/2}^{k+1/2,n+1}, \Delta \rho_{m,j+1/2}^{k+1/2,n+1}, \theta_h)_{m=i-1/2} \Delta y \Delta z_{i,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \\ & - (v_{i+1/2,j}^{k+1/2,n+1}, \Delta \rho_{i+1/2,m}^{k+1/2,n+1}, \theta_h)_{m=j+1/2} \Delta x \Delta z_{i+1/2,j}^{k+1/2,n+1} \\ & + (v_{i+1/2,j+1}^{k+1/2,n+1}, \Delta \rho_{i+1/2,m}^{k+1/2,n+1}, \theta_h)_{m=j-1/2} \Delta x \Delta z_{i+1/2,j+1}^{k+1/2,n+1} \\ & - (w_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}, \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2,m}^{k+1/2,n+1}, \theta_v)_{m=k+1/2} \Delta x \Delta y \quad \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

(iii) 拡散項 ρ_{diff}

$$\begin{aligned} & \rho_{diff}(i+1/2, j+1/2, k+1/2) \\ & = K_x \left[\frac{1}{\Delta x} \{ (\Delta \rho_{i+3/2,j+1/2}^{k+1/2,n} - \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n}) \Delta y \Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \right. \\ & \quad \left. - (\Delta \rho_{i+1/2,j+3/2}^{k+1/2,n} - \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n}) \Delta y \Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \right] \\ & + \frac{1}{\Delta y} \{ (\Delta \rho_{i+1/2,j+3/2}^{k+1/2,n} - \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n}) \Delta x \Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \\ & \quad \left. - (\Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n} - \Delta \rho_{i+1/2,j-1/2}^{k+1/2,n}) \Delta x \Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} \right] \\ & + K_v \left\{ \frac{1}{\Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}} (\Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n} - \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}) \Delta x \Delta y \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}} (\Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n} - \Delta \rho_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1}) \Delta x \Delta y \right\} \quad \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

ここに、

$$\Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} = (\Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n+1} + \Delta z_{i+1/2,j+1/2}^{k+1/2,n}) / 2 \quad \dots\dots\dots (43)$$

である。

3.2 計算法

(28) および (29) 式より明らかなように、 $\theta \neq 0$ とすればここでの差分法は未知数 ζ^{n+2} について implicit な形式となっている。これは、計算の安定性の条件を緩和させ計算の時間間隔 Δt を大きくしうることを目指した結果であるが、その反面、計算法は以下のように $\theta = 0$ とした explicit 法より複雑になる。

本研究で行った 1 ステップの計算法はつぎのようである。

- ① まず、 $n\Delta t$ および $(n+1)\Delta t$ の既知量から計算される諸量を求める。すなわち、Coriolis 項、圧力項のうち ζ^{n+2} に関係しない項、生成項、移流項、拡散項である。
- ② column についての連続式 (同一 column に属する cell について、(38) 式を湖底から水面まで加えた式に他ならないが、これを計算の都合のため少し改めている。後述の (45) 式) を用いて ζ^{n+2} を求める。この計算式には最終的には隣接する column の ζ^{n+2} も含まれる (後述の (50) 式) ので、結局全 column の ζ^{n+2} についての連立一次方程式を解くことになる。
- ③ (26) 式および v^{n+2} についての同様の式より、 u^{n+2} および v^{n+2} を求める。
- ④ (38) 式より、 w^{n+2} を湖底より水面に向かって順に求める。ただし、湖底では $w^{n+2} = 0$ である。
- ⑤ $\Delta \rho^{n+2}$ を (39) 式より求める。

以下, ②を中心に述べる。いま 1 つの column を, (22)式の誘導にあたっての control volume にとり, 湖底での条件(12)式を考えれば, (22)式より次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{A_s} \zeta dA_s = -uA_x \Big|_{x_l}^{x+1} - vA_y \Big|_{y_j}^{y+1} \dots\dots\dots (24)$$

上式をつぎのように差分化する。

$$\frac{\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2} - \zeta_{i+1/2, j+1/2}^n}{2\Delta t} = -\Sigma \bar{u}_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} + \Sigma \bar{u}_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \\ - \Sigma \bar{v}_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} + \Sigma \bar{v}_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \dots\dots\dots (45)$$

ここに, 総和は水面から湖底までとられ, $\Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2}$ などは(36)式で計算される。また \bar{u} は,

$$\bar{u}_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} = (1-\theta)u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} + \theta u_{i+1/2, j+1/2}^{k+3/2} \dots\dots\dots (46)$$

とする (\bar{v} についても同様)。すなわち, (29)式と同様の加重平均をとることとする。いま, (29)式において,

$$p_{i+1/2, j+1/2}^k = \rho_0 g(1-\theta)\zeta_{i+1/2, j+1/2}^k - \sum_{m=1}^{k-1} \Delta \rho_{i+1/2, j+1/2}^{m+1/2} \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{m+1/2} g \dots\dots\dots (47)$$

とおけば, (26)式より次式が導かれる。

$$u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} = u_{i+1/2, j+1/2}^k - g\theta \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2} \\ - \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2} \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+2}) / \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \dots\dots\dots (48)$$

ここに,

$$u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} = u_{i+1/2, j+1/2}^k + \frac{2\Delta t}{\Delta V_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2}} [u_{co}(i, j+1/2, k+1/2) + u_{cono}(i, j+1/2, k+1/2) \\ + u_{atf}(i, j+1/2, k+1/2) - \frac{1}{2\rho_0} \{(p_{i+1/2, j+1/2}^k + p_{i+1/2, j+1/2}^{k+1}) \Delta y \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \\ - (p_{i-1/2, j+1/2}^k + p_{i-1/2, j+1/2}^{k+1}) \Delta y \Delta z_{i-1/2, j+1/2}^{k+1/2}\}] \dots\dots\dots (49)$$

である。(48)式を(46)式に代入して得られる \bar{u} (および同様の \bar{v}) を, さらに(45)式に代入すれば, 目的とする ζ^{n+2} に関する連立一次方程式が導かれる。すなわち,

$$\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2} = \zeta_{i+1/2, j+1/2}^n + g \left(\frac{2\theta \Delta t}{\Delta x} \right)^2 [(\eta_{i+1, j+1/2} + \zeta_{i+3/2, j+1/2}^{n+2}) \zeta_{i+3/2, j+1/2}^{n+2} \\ + (\eta_{i, j+1/2} + \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+2}) \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+2} - (\eta_{i+1, j+1/2} + \eta_{i, j+1/2} \\ + 2\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2}) \zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2}] + g \left(\frac{2\theta \Delta t}{\Delta y} \right)^2 [(\eta_{i+1/2, j+1} + \zeta_{i+1/2, j+3/2}^{n+2}) \zeta_{i+1/2, j+3/2}^{n+2} \\ - (\eta_{i+1/2, j+1} + \zeta_{i+1/2, j-1/2}^{n+2}) \zeta_{i+1/2, j-1/2}^{n+2} + (\eta_{i+1/2, j+1} + \eta_{i+1/2, j} + 2\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2}) \zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+2}] \\ \dots\dots\dots (50)$$

である。ここに,

$$\zeta_{i+1/2, j+1/2}^* = \zeta_{i+1/2, j+1/2}^n - \frac{2\Delta t}{\Delta x \Delta y} [\Delta y \Sigma \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \{(1-\theta)u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} + \theta u_{i+1/2, j+1/2}^{k+3/2}\} \\ - \Delta y \Sigma \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \{(1-\theta)u_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} + \theta u_{i+1/2, j+1/2}^{k+3/2}\} + \Delta x \Sigma \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \{(1-\theta)v_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \\ + \theta v_{i+1/2, j+1/2}^{k+3/2}\} - \Delta x \Sigma \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} \{(1-\theta)v_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2} + \theta v_{i+1/2, j+1/2}^{k+3/2}\}] \dots\dots\dots (51)$$

であり, また η は $\Sigma \Delta z$ より生ずる項である。すなわち, 湖底に凹凸があるとき, (48)式をそのまま適用すれば, 浅い方の column のすでに底に達した cell と, 深い方の column のまだ底に達していない同じ高さの cell との間に, 実際には生じえない流れが計算されてしまうが, η はこのようなことを除くために導入される量で, 次式で定義される。

$$\eta_{i, j+1/2} = \min (H_{i-1/2, j+1/2}, H_{i+1/2, j+1/2}) \dots\dots\dots (52)$$

ここに, $H_{i-1/2, j+1/2}$ は中心線が $((i-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta y)$ にある column の基準面からの深さである。上式を用いて, (50)式の誘導にあたって現われる, たとえば $\Sigma \Delta z_{i+1/2, j+1/2}^{k+1/2}$ は $\eta_{i, j+1/2} + \zeta_{i-1/2, j+1/2}^{n+1}$ に等しいとされている。上に得られた(50)式は未知数 ζ^{n+2} に関する連立一次方程式であるが, 楕円型偏微分方程式

の差分式と類似な構造を有しているので、本研究では(50)式を解くのにSOR法⁵⁾を適用する。

以上が1ステップの計算法である。これを対象とする計算の時間の範囲で繰り返すが、ここで用いたleap-frog法では、計算の進行に伴い周期が $2\Delta t$ の計算上の変動が発生することが認められている。これを防ぐには、以下に述べる松野が開発した方法⁶⁾を用いればよいとされている。いま、 $n\Delta t$ での解を S^n と表わすとき、ここで計算法は S^n および S^{n+1} から、 S^{n+2} を Δt の間隔で求めることになっている。これを、 $(S^n, S^{n+1})_{\Delta t} \rightarrow S^{n+2}$ と表わすとき、松野の方法では、 $(S^{n+1}, S^{n+1})_{\Delta t/2} \rightarrow S'$ 、 $(S^{n+1}, S')_{\Delta t/2} \rightarrow S^{n+2}$ として S^{n+2} が求められる。後述の計算では、初期値からの出発および計算ステップ(n)の適当な間隔ごとにこの方法を挿入している。

4. 湖流解析の例

4.1 琵琶湖への適用

(1) 差分格子

基準面をTP. 84.500mにとる。琵琶湖全域を水平面内の x 軸、 y 軸方向にそれぞれ1kmごとに分割し、鉛直方向には、水深50m以浅では2.5m間隔、以深では10m間隔に分割する(その結果、最大水深のcolumnでは24層となった)。湖底においては、実際の湖底がcellの中心点より上方にあるときにはcellの上面を湖底と近似し、逆に実際の湖底がcell中心点より下方にあるときはそのcellの下面を湖底とした。

(2) 外力項

i) f (Coriolisの因子): $f = 2\omega \sin \varphi$

ω は地球自転の角速度、 φ は緯度である。 $\varphi = 35^\circ 15'$ として $f = 8.39 \times 10^{-5}$ rad/secとした。

ii) τ_{xx}, τ_{yy} (風による湖面でのせん断応力):

$$\tau_{xx}, \tau_{yy} = \gamma_s^2 \rho_a (W_x, W_y) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \dots \dots \dots (53)$$

とする。ここに、 ρ_a : 空気の密度、 W_x, W_y : 風速の x, y 方向成分、 $\gamma_s^2 = 1.3 \times 10^{-3}$ とした。

iii) τ_{bx}, τ_{by} (湖底でのせん断応力):

$$(\tau_{bx}, \tau_{by}) = \gamma_b^2 \rho_0 (u, v) \sqrt{u^2 + v^2} \dots \dots \dots (54)$$

とする。ここに、 u, v : columnの最下層のcellにおける流速、 $\gamma_b^2 = 2.6 \times 10^{-3}$ とした。

iv) 輻射熱の扱い⁷⁾

湖面に進入する太陽の輻射熱 Q_s は全日射量を Q_{s0} とすると、つぎのように表わされる。

$$Q_s = (1 - a_r) Q_{s0} \dots \dots \dots (55)$$

ここに、 a_r : アルベド(水面反射率)である。 Q_s のうち、 βQ_s が水面で吸収され、残りが湖面下に達する。表面から深さ $(-z)$ に達する熱は

$$Q_z = (1 - \beta) Q_s \exp(-\kappa(-z)) \dots \dots \dots (56)$$

とされる。ここに、 κ : 減衰定数である。

一方、水面からの熱損失 Q_L は、蒸発による損失 Q_e 、伝導による損失 Q_c 、逆放射による損失 Q_{ra} とから成り、

$$Q_L = Q_e + Q_c + Q_{ra} \dots \dots \dots (57)$$

と表わされる。 $Q_e + Q_c$ および Q_{ra} についてはそれぞれ経験式、

$$Q_e + Q_c = (0.000308 + 0.000185 W) \rho (e_s - \phi e_a) \times \left\{ L_e + c_p T_s + \frac{269.1(T_s - T_a)}{e_s - \phi e_a} \right\} \dots \dots \dots (58)$$

$$Q_{ra} = 0.97K \{ T_w^* - 0.937 \times 10^{-5} T_w^* (1 + 0.17C^2) \} \dots \dots \dots (59)$$

がある。ここに、 $Q_L, Q_e + Q_c, Q_{ra}$ の単位として kcal/m²/dayを用いるとき、 W : 水面上15cmの風速(m/sec)、 ρ : 水の密度(kg/m³)、 e_s : 表面水温に対する飽和蒸気圧(mmHg)、 e_a : 気温に対する飽和蒸気圧

(mmHg), ϕ : 相対湿度 (100%で1), L_v : 蒸発の潜熱 (kcal/kg), c_p : 水の比熱 (kcal/kg/°C), T_s : 表面水温 (°C), T_a : 気温 (°C), K : Stefan-Boltzman 定数 ($K=1.171 \times 10^{-6}$ kcal/m²/day/°K), T_w : 表面水温 (°K), T_a : 気温 (°K), C : 雲量 (100%で1) である。

以上から境界条件 (11) 式の熱交換量 Q_0 には

$$Q_0 = \beta Q_s - Q_L \dots\dots\dots (60)$$

を用い, (7) 式の熱による密度偏差の生成項 q には,

$$q = -(dQ_s/dz)\alpha/c_p \dots\dots\dots (61)$$

を用いることにした。(α: 体膨張率 (1/°C))。また定数とみなしうる量にはつぎの値, $a_r=0.06, \beta=0.5, \kappa=0.2, L_v=590$ kcal/kg を採り, さらに温度 (T : °C) と飽和蒸気圧 (e : mmHg) との関係には経験式,

$$e = 0.418T^2 - 0.6216T + 13.0 \dots\dots\dots (62)$$

を適用した。

v) 水の物性: 水温の関数⁸⁾として Table 1 を内挿する。

Table 1 Properties of Water.⁸⁾

T (°C)	4.0	6.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
$d\rho$ (kg/m ³)	0.0	0.032	0.272	0.873	1.766	2.923	4.322
C (kcal/kg/°C)	1.00	0.9988	0.9970	0.9955	0.9946	0.9940	0.9937
α (1/°C)	0.00021						

vi) 流入・流出河川

琵琶湖からの流出河川は瀬田川と琵琶湖疏水のみであるが, 流入河川は相当数存在する。ここではこれら

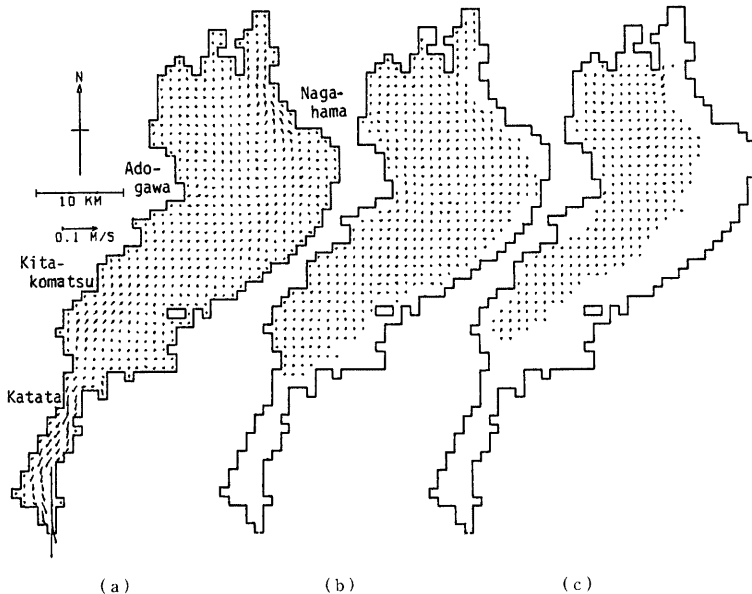


Fig. 5 Velocity Field (at 12:00 pm, March 31, 1981) (a) 1st layer (b) 5th layer (c) 20th layer.

の河川をいくつかにまとめ、水位と流出流量より求められた逆算流入流量を流域面積比で配分して各河川の流入流量とした。流入河川の水温は資料が乏しいので後の計算では姉川のそれを代表して全河川に用いた。

vii) 風

彦根气象台で観測された風が全湖一様に吹くものとして取り扱った。

(3) 定数

上で述べた以外の定数にはつぎの値を与えた。

i) A_h, A_v (渦動粘性係数): $A_v = 0.001 \text{ m}^2/\text{sec}$, $A_h = 30.0 \text{ m}^2/\text{sec}$

ii) K_h, K_v (渦動拡散係数): $K_v = 0.0001 \text{ m}^2/\text{sec}$, $K_h = 1.0 \text{ m}^2/\text{sec}$

また、計算のための定数 $\theta_h, \theta_v, \theta$ は、 $\theta_h = \theta_v = 0.8$, $\theta = 0.5$ とした。

4.2 計算結果の一例

湖流解析の例として、昭和56年3月1日～同3月31日の間の水理、気象資料を用いて数値解析を行った(資料の間隔は風:時, 全日日射量, 雲量, 湿度, 気温:日)。初期値には全湖の水位が基準面に一致する水位で静止した状態を想定した。また、水温は全湖にわたって一様に 4.8°C と与えた。上記の期間の外的条件の平均値を示せば、風:東西方向に 0.90 m/sec (東風), 南北方向に 1.07 m/sec (南風), 全流入流量: $304 \text{ m}^3/\text{sec}$, 瀬田川の流出流量: $157 \text{ m}^3/\text{sec}$, 琵琶湖疏水の取水流量: $9.4 \text{ m}^3/\text{sec}$, 雲量: 0.69 , 全日日射量: $13.32 \text{ mega joule/m}^2/\text{day}$ ($=0.0367 \text{ kcal/m}^2/\text{sec}$), 湿度: 72% , 気温: 6.5°C , 流入河川水温: 10.5°C である。

Fig. 5 は計算から求められた湖流の分布の一例(3月31日24時の結果)で、(a)は第1層、(b)は第5層(基準面より $10\sim 12.5 \text{ m}$ の深さ)、(c)は第20層(基準面より $47.5\sim 50 \text{ m}$ の深さ)のものである。(b)および(c)で流速が示されていない点は、湖底に達した部分である。第1層の湖流分布の特徴として、北湖の北部に極めて弱いながら環流がみられることおよび南湖では瀬田川への流出の影響が強く南下する一方向の流れになってしまっていることが挙げられる。このときの風の条件は、Fig. 5の40時間前ぐらい(30日未明)までは北西の $4\sim 5 \text{ m/sec}$ の風であったが、その後は $0\sim$ 北西 2 m/sec になり、ほぼ静止した状態となっている。すなわち Fig. 5 は風に関してはほぼ静穏時の結果と考えられるが、今里¹⁾の一層モデルによる計算では風の影響は数日間を残るとされているから、(a)のように北湖で流速が減衰して極めて小さくなり、また従来より比較的安定して明瞭に認められる北湖北部の環流も極めて弱くなっていることは、計算の方に問題が残されているようである。(a)では、さらに、北湖北東部(長浜沖)や北湖南西部(北小松沖)にやや大きい北上流が現われていること、南北湖の境界(堅田)をはさんで南湖では南下流になり、北湖では北上流となっているように、流向が逆転していることなどが問題点として挙げられる。第5層の(b)では、北湖北東部の湖底との境界の部分で、流速がやや大きくなっている点が注目されるが、全体には流速は 1 cm/sec 以下と小さくなっている。また流向は第1層とほとんど変わっていない。第20層の(c)では、流向は(a)および(b)とは異なるが、流速の大きさは(b)とほぼ同じ程度となっている。琵琶湖の深部における流速の観測例はほとんどないので、(c)の結果のような大きさの流速が発生することの妥当性は分からないが、上述のような表層の結果についての検討課題とともに、計算法の詳細な検討がまず必要と考えている。

Fig. 6 は最深部(安曇川河口北東沖)の水温分布の時間的な変化を示したものである。初期値 (4.8°C) で与えられた一様な水温が、一旦冷却されて 4.2°C まで低下した後徐々に成層が発達していく過程が計算で現われている点が注目されよう。3月初旬において水温が低下しているのは、全日日射量

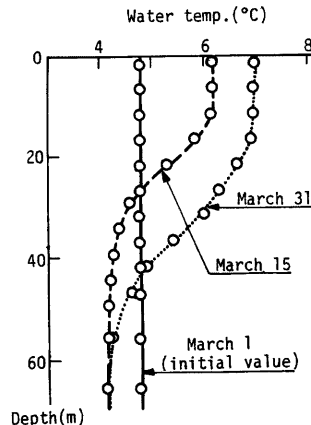


Fig. 6 Water Temperature Distribution.

がやや小さく(約 10 mega joule/m²/day), 水面からの熱損失の方が大きくなったからである。一方, 成層の発達をみると, 31日間の計算で表層の水温が約 3°C 上昇し, また水温の変化が約 50m の深さにまで及んでいるように, その速さがやや大きすぎるようである。表層水温の上昇の一因として, 3月下旬から全天日射量が上昇している(約 16.0 mega joule/m²/day)ことや河川からの流入水温(10.5°C)が初期値で与えた水温よりかなり高いという計算上の問題が挙げられるが, 成層の深部への発達は鉛直方向の流速による移流および鉛直方向の拡散によっているから, この流速や拡散係数についても検討が今後必要と思われる。なお, 計算された北湖北部における水温分布は水平面内にはつねにほぼ一様(差は 1°C 未満)となっているので, 水平面内の水温の非一様性による流れの発生は, ここの計算ではほとんどなかったと考えられる。

5. 結 言

本研究は, 琵琶湖の湖流の特性を 3 次元的に解析することを目的として, その第一段階として数値計算の手法を開発しようとしたものである。まず, 基礎式として, 水平面内の 2 方向の運動方程式, 連続式, 鉛直方向の運動方程式の近似である圧力についての静水圧分布式および密度の保存式を採り, ついでこれらを連立して解くことを目指して, 差分式を導くのに必要な control volume についての基礎式の積分を行った後, 3次元の格子分割のもとでの差分式を, 計算の安定性を考慮して implicit な形式で導いた。さらに, 差分式を解く手順および implicit な形式にしたことから生ずる水位の取東計算について詳述して計算法を明らかにした。最後に, 琵琶湖の湖流解析に適用するにあたって必要とされる各種の資料を例示するとともに解析結果の例を示した。その結果, 本報で述べた方法により, 湖流の 3次元的な解析が一応可能であることが分ったが, 一方安定して存在するとされている環流がきわめて弱くしか現われないことや理解しにくい湖流が部分的に生じていることなどの数値解析上のもと思われる検討課題, さらにには比較的深部にもやや大きい流速が認められることや成層の発達が少し速すぎるなど観測結果との比較を通じて検討しなければならない点など, 多くの問題点が見い出された。今後はこれらの諸点について検討を加えるとともに, 計算時間の短縮なども含めて計算法の改良を図り, さらに, 現地への適用を進めて湖流の特性について考察を行う予定である。

最後に, 本研究の計算ならびに作図に多大の援助をいただいた大学院学生松岡隆之氏に感謝の意を表します。なお, 本研究の一部は, 昭和57年度文部省科学研究費補助金(試験研究(2)), 代表者 岩佐義朗)によって行われたものである。また計算は京都大学大型計算機センターによったことを附記する。

参 考 文 献

- 1) 今里哲久・金成誠一・国司秀明: 琵琶湖の水の流動に関する数値実験的研究, 京都大学 防災研究所年報, 第14号 B, 1971, pp. 451~464.
- 2) 大西行雄: びわ湖環流の成因に関する研究, 京都大学理学研究科修士論文, 1974.
- 3) 岩佐義朗・井上和也・足立敏之: 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学 防災研究所年報, 第21号 B-2, 1978, pp. 293~305.
- 4) 杉ノ原伸夫・大西行雄: 環境科学としての海洋学 2, 数値解析(第15章), 堀部純男編, 東京大学出版会, 1978, pp. 234~271.
- 5) 土木工学における数値解析(基礎編), 土木学会編, サイエンス社, 1974, pp. 62~65.
- 6) 松野太郎: Numerical Integrations of the Primitive Equations by a Simulated Backward Difference Method, Jour. of the Meteorological Society of Japan, Ser. II, Vol. 44, No. 1, 1966, pp. 76~84.
- 7) 安芸周一: 貯水池濁水現象, 水工学シリーズ 75-A-1, 土木学会水理委員会, 1975.
- 8) 理科年表(昭和57年), 東京天文台編纂, 丸善.