

円筒屋根の振動特性及び神戸地震(JMA)応答性状

國枝 治郎・北村 幸嗣・大家 貴徳

FREE VIBRATIONS AND JMA-EARTHQUAKE RESPONSES OF CYLINDRICAL ROOFS

By *Hario KUNIEDA, Koji KITAMURA and Takanori OHYA*

Synopsis

This paper clarifies the free vibrational and response characteristics, mainly response to KOBE-JMA earthquakes, of cylindrical roofs. As the first step, the kinematic equations of cylindrical roof shells subject to up-down and horizontal earthquakes are derived and the calculation of eigen values and modes are executed. And, the response characteristics of cylindrical roof shells subject to KOBE earthquake will be revealed in mathematically analytic method. Followingly, FEM results will be shown in order to confirm the mathematically analytic result. In the final stage the response characteristics of latticed cylindrical roofs to the same earthquake will be given.

1. 序

1995. 1. 17 早朝の兵庫県南部地震は巨大近代都市直下の大地震として多くの死者と全半壊建物を出したが、教育施設体育館や市民体育館など所謂シェル・空間構造物の被害は他の建築物に比して意外と思えるほどに軽微であった。これら構造物は震災後避難所として使用され、都市施設としてこの種構造物の重要性が改めて認識され、これらの適切な配置が防災に強い都市の形成に欠かすことの出来ないものと都市計画上考えられるに至っている。ところでこの度の地震に対して概ね十分な耐震性を示したが、実は体育館に多い円筒形シェル屋根の振動特性、地震応答特性を一般的に明らかにした研究は殆ど見当たらないようである。もちろん空間構造に関する耐震規定は日本に存在しない。従って、現設計が耐震的に強すぎるのか否かも明確ではない。より耐震安全性を明確にし、構造工学的信頼性を確保するためにもここでは屋根型円筒形空間構造について振動特性、地震応答特性を解明する。2章ではシェル形式構造についての解析的研究、3章では同構造のFEM解析、4章では立体骨組み形式構造についての解析を報告する。FEM解析は解析解の検証のため行っている。シェル形式構造では裏面で単純支持、直線母線方向裾端では単純支持および固定支持の2つの境界条件の場合を取り扱い、立体骨組(ラチス)形式構造では節点が剛接合の場合を取り扱っている。いずれの場合も神戸海洋気象台で採録された地震波を用いて上下動および水平動応答解析を遂行した。

2. シェル形式構造の解析的研究

ここでは先ず自由振動時の解を求め、固有振動数および固有モードを境界条件、形状・材料に関するパラメータの関連において明らかにし、固有モードを用いてモード重畳法により線形応答解析を遂行する。使用する記号はFig. 1に与えている。

2.1 基礎方程式

گرانベールの原理を用いると屋根型円筒シエルの運動方程式は次式で表される。

$$u'' + \frac{1-\nu}{2}u'' + \frac{1+\nu}{2}v'' - \nu w' + \kappa \left\{ \frac{1-\nu}{2}u'' + w''' - \frac{1-\nu}{2}w'' \right\} + \frac{a^2}{B}X = 0 \dots\dots(1-a)$$

$$\frac{1+\nu}{2}u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2}v'' - w' + \kappa \left\{ \frac{3(1-\nu)}{2}v'' + \frac{3-\nu}{2}w'' \right\} + \frac{a^2}{B}Y = 0 \dots\dots(1-b)$$

$$\nu u' + v' - w + \kappa \left\{ \frac{1-\nu}{2}u'' - u'' - \frac{3-\nu}{2}v'' - w''' - 2w'' - w'' - 2w'' - w \right\} + \frac{a^2}{B}Z = 0 \dots\dots(1-c)$$

ここに

$$a : \text{半径}, \quad ' \equiv a \frac{\partial}{\partial x}, \quad \circ \equiv \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad N_{\phi x} = N_{x\phi}, \quad M_{\phi x} = M_{x\phi}$$

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \kappa = \frac{D}{Ba^2} = \frac{h^2}{12a^2}$$

この屋根が地震動を受けるとき、上式中の外力項は次式で置き換えられる。

$$X = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u + \bar{U}), \quad Y = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(v + \bar{V}), \quad Z = -\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(w + \bar{W}) \dots\dots(2)$$

そして

$$\bar{W} = W \cos\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) + V \sin\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) \dots\dots(3-a)$$

$$\bar{V} = -W \sin\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) + V \cos\left(\frac{\phi_0}{2} - \phi\right) \dots\dots(3-b)$$

W：上下地震動変位， V：円弧方向の水平地震動変位

ただし，直線母線方向の水平地震動の影響は極めて小さいとして無視した。

2.2 自由振動時の解

2.2.1 全周囲が単純支持の場合（以後，S.S.の場合と呼ぶ）

境界条件を満たす次の解を(1)式に代入すると固有振動数，固有モードは極めて容易に計算される。

$$u = \sum u_{mn} \cos \lambda \xi \sin \eta \phi e^{i\omega t} \dots\dots(4-a)$$

$$v = \sum v_{mn} \sin \lambda \xi \cos \eta \phi e^{i\omega t} \dots\dots(4-b)$$

$$w = \sum w_{mn} \sin \lambda \xi \sin \eta \phi e^{i\omega t} \dots\dots(4-c)$$

これらの式中の記号は次の通りである。

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{n\pi a}{L_x}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

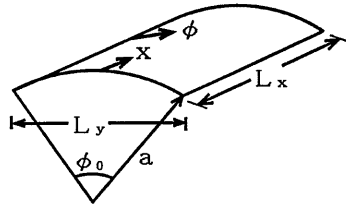


Fig. 1 Geometry and Notations.

$$\eta = \frac{m\pi}{\phi_0}, \quad \text{対称状態 } m = 1, 3, 5, \dots$$

$$\text{逆対称状態 } m = 2, 4, \dots$$

2.2.2 円弧表端で単純支持，直線裾端で固定支持の場合（以後，F.S.の場合と呼ぶ）
変位成分を次のように置く。

$$u = \sum u_n(\phi) \cos \lambda \xi e^{i\omega t} \dots\dots\dots (5-a)$$

$$v = \sum v_n(\phi) \sin \lambda \xi e^{i\omega t} \dots\dots\dots (5-b)$$

$$w = \sum w_n(\phi) \sin \lambda \xi e^{i\omega t} \dots\dots\dots (5-c)$$

ここに u_n, v_n, w_n は次の形で表される。

$$u_n = Ee^{m\phi}, \quad v_n = Fe^{m\phi}, \quad w_n = Ge^{m\phi} \dots\dots\dots (6)$$

特性値 m は次式で表される多項式の根である。

$$D_0 m^8 + D_1 m^6 + D_2 m^4 + D_3 m^2 + D_4 = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$D_0 - D_4$ は ω^2 の関数であり，次式となる。

$$\begin{aligned} D_0 &= \kappa A_1, \quad D_1 = C_1^2 - A_1 C_3 + \kappa(A_1 A_3 + A_2 + B_1^2) \\ D_2 &= A_3 C_1^2 + 2B_2 C_1 - A_1 B_3 - C_3(A_1 A_3 + A_2) - 2B_1 C_1 C_2 - B_1^2 C_3 - A_1 C_2^2 + \kappa A_2 A_3 \\ D_3 &= 2B_2 A_3 C_1 + B_2^2 - A_2 A_3 C_3 - B_3(A_1 A_3 + A_2) - 2B_1 B_2 C_2 - B_1^2 B_3 - A_2 C_2^2 \\ D_4 &= A_3(B_2^2 - A_2 B_3) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} A_1 &= (1 - \nu)(1 + \kappa)/2, \quad A_2 = \Omega^2 - \lambda^2, \quad A_3 = \Omega^2 - \lambda^2(1 - \nu)(1 + 3\kappa)/2 \\ B_1 &= \lambda(1 + \nu)/2, \quad B_2 = -\lambda(\nu + \kappa\lambda^2), \quad B_3 = -(1 - \Omega^2) - \kappa(1 + \lambda^4) \\ C_1 &= -\kappa\lambda(1 - \nu)/2, \quad C_2 = -1 - \kappa\lambda^2(3 - \nu)/2, \quad C_3 = -2\kappa(1 - \lambda^2) \\ \Omega^2 &= \frac{\rho a^2}{B} \omega^2 = \frac{(1 - \nu^2)\rho a^2}{Eh} \omega^2 \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

特性値 m の値に応じて u_n, v_n, w_n の表現は3タイプに分けられる。

1) $m^2 \equiv$ 実正值, $|m| = \alpha$ と置いて

$$(w_n, u_n, v_n) = (P_1, Q_1, R_1)e^{-\alpha\phi} + (P_2, Q_2, R_2)e^{-\alpha\phi}$$

そして

$$Q_1 = \delta P_1, \quad Q_2 = \delta P_2, \quad R_1 = \mu_1 P_1, \quad R_2 = -\mu_2 P_2$$

2) $m^2 \equiv$ 実負値, $|\sqrt{-m^2}| = \beta$ と置いて

$$(w_n, u_n, v_n) = (P_1, Q_1, R_1)\cos\beta\phi + (P_2, Q_2, R_2)\sin\beta\phi$$

そして

$$Q_1 = \delta P_1, \quad Q_2 = \delta P_2, \quad R_1 = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2, \quad R_2 = -\mu_2 P_1 + \mu_1 P_2$$

ここに記号 $\mu \equiv \mu_1 + i\mu_2$ (μ :後述) が用いられている。

3) $m^2 \equiv$ 複素数値, $m = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta > 0$) と置いて

$$\begin{aligned}w_n &= e^{-\alpha\bar{\phi}}(P_1\cos\beta\bar{\phi} + P_2\sin\beta\bar{\phi}) + e^{-\alpha\phi}(P_5\cos\beta\phi + P_6\sin\beta\phi) \\u_n &= e^{-\alpha\bar{\phi}}(Q_1\cos\beta\bar{\phi} + Q_2\sin\beta\bar{\phi}) + e^{-\alpha\phi}(Q_5\cos\beta\phi + Q_6\sin\beta\phi) \\v_n &= e^{-\alpha\bar{\phi}}(R_1\cos\beta\bar{\phi} + R_2\sin\beta\bar{\phi}) + e^{-\alpha\phi}(R_5\cos\beta\phi + R_6\sin\beta\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_{1,5} &= (\delta_1P_{1,5} - \delta_2P_{2,6}), \quad Q_{2,6} = (\delta_2P_{1,5} + \delta_1P_{2,6}) \\R_1 &= (\mu_1P_1 - \mu_2P_2), \quad R_2 = (\mu_2P_1 + \mu_1P_2) \\R_5 &= -(\mu_1P_5 - \mu_2P_6), \quad R_6 = -(\mu_2P_5 + \mu_1P_6)\end{aligned}$$

これらの方程式で $\bar{\phi}$, δ と μ は次の様に与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \phi_0 - \phi \\ \delta &= \frac{c_2b_1 - c_1b_2}{a_1b_2 + b_1^2}, \quad \mu = \frac{-c_1b_1 - c_2a_1}{a_1b_2 + b_1^2}\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_1 + i\delta_2 \quad (\delta_2 > 0) \quad (m^2 \equiv \text{複素数値の時}, \beta > 0) \\ \mu &= \mu_1 + i\mu_2 \quad (\mu_2 > 0) \quad (m^2 \equiv \text{実正値でないとき}, \beta > 0)\end{aligned}$$

$$a_1 = -(\lambda^2 - \Omega^2) + \frac{1-\nu}{2}(1+\kappa)m^2$$

$$b_1 = \frac{1+\nu}{2}\lambda m, \quad b_2 = m^2 - \left\{ \frac{1-\nu}{2}(1+3\kappa)\lambda^2 - \Omega^2 \right\}$$

$$c_1 = -\nu\lambda - \kappa\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2}\kappa\lambda m^2, \quad c_2 = -\left(1 + \frac{3-\nu}{2}\kappa\lambda^2\right)m$$

i.e. $\delta: m^2, m^4, \dots$ の関数, $\mu: m, m^3, \dots$ の関数

未知積分常数 $P_1 \sim P_8$ は裾端に置ける齊次境界条件(9)式より決められるが, 自由振動時この未知常数が一意的に決まるためには(9)式の係数行列の行列式が零であるという条件より固有振動数は決まる。ただ, 特性値が固有振動数の関数であるため, 行列式の根として固有振動数を求めるためには, 試行錯誤法を用いねばならない。

$$\left[(a_{ij}) \right] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_7 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

2.3 固有振動数と固有モード

屋根型円筒シェルの固有値と固有モードの例を **Tables 1, 2** および **Fig. 2** に与える。

2.4 地震応答解析

ここに示される応答解析は神戸海洋気象台で収録の地震波 (KOBE-JMA) を用いる。最大加速度は上下動 331 gal, 水平動 (NS 成分) 817 gal である。**Tables 1, 2** に示されるごとく, 対称振動の固有振動数は逆対称の場合のそれらと極めて近く, また, 低次域では地震波の卓越周期域とほぼ重なる。従って, 上下地震動に対する応答解析が必要不可欠である事が見て取れる。また, 固有振動数がお互いに極めて接近しており, 通常の建築骨組構造の場合とは異なる解析上の注意が必要である事も判明する。すなわち, 応答スペクトルを用いての SRSS 法による最大応答加速度の推定は不可である。

Table 1 Eigen values Ω in the case F.S. $a/h = 500$, $L_y/L_x = 0.50$.

1) Axi-symmetric mode in traverse direction

n	$\phi_0 = 60.0^\circ$								
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.0824	0.1577	0.2889	0.4637	0.6777	0.8752	0.9697	1.2522	1.5919
2	0.2128	0.3069	0.4722	0.6842	0.8932	0.9814	1.2579	1.5979	1.9814
3	0.1831	0.3641	0.4910	0.6952	0.9009	0.9883	1.2656	1.6054	1.9887
4	0.2331	0.3115	0.4330	0.5280	0.7113	0.9081	0.9965	1.2761	1.6157
5	0.2865	0.3505	0.4778	0.5820	0.7327	0.9154	1.0072	1.2895	1.6288
6	0.3383	0.3970	0.5126	0.6340	0.7587	0.9227	1.0212	1.3056	1.6446
7	0.4476	0.5479	0.6777	0.7877	0.9299	1.0386	1.3246	1.6633	2.0459
8	0.4378	0.4983	0.5860	0.7154	0.8176	0.9369	1.0594	1.3464	1.6847
9	0.4879	0.5476	0.6267	0.7500	0.8475	0.9441	1.0836	1.3710	1.7089

n	$\phi_0 = 90.0^\circ$								
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.0554	0.0867	0.1324	0.2075	0.3034	0.4183	0.5515	0.7018	0.8414
2	0.1266	0.2433	0.3140	0.4236	0.5553	0.7055	0.8657	0.9334	1.0744
3	0.1569	0.2129	0.2976	0.3730	0.4411	0.5630	0.7111	0.8714	0.9411
4	0.1589	0.2428	0.3159	0.4173	0.4990	0.5793	0.7195	0.8780	0.9448
5	0.1952	0.2877	0.3410	0.5471	0.6167	0.7314	0.8858	0.9477	1.0912
6	0.2327	0.3224	0.3819	0.4548	0.5696	0.6629	0.7480	0.8950	1.0995
7	0.2996	0.3503	0.4238	0.4827	0.5876	0.6983	0.7692	0.9049	0.9545
8	0.3045	0.3375	0.3804	0.4559	0.5193	0.6070	0.7241	0.7924	0.9152
9	0.3406	0.4148	0.5570	0.6294	0.7455	0.8146	0.9248	0.9662	1.1330

n	$\phi_0 = 120.0^\circ$								
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.0930	0.1219	0.1720	0.2358	0.3106	0.3960	0.4919	0.5979	0.7131
2	0.0881	0.1186	0.1677	0.2248	0.2670	0.3193	0.4003	0.4948	0.6004
3	0.0966	0.1192	0.1541	0.1858	0.2396	0.3097	0.4295	0.5030	0.6052
4	0.1465	0.2651	0.3217	0.4009	0.4871	0.5445	0.6155	0.7258	0.8485
5	0.1563	0.2060	0.2489	0.3501	0.4130	0.5014	0.5933	0.6471	0.7347
6	0.1865	0.2056	0.2400	0.2731	0.5130	0.6102	0.6909	0.7494	0.8621
7	0.2345	0.2666	0.3075	0.3481	0.4156	0.4781	0.5302	0.6221	0.7187
8	0.2656	0.2922	0.3780	0.4334	0.5595	0.6351	0.7356	0.7959	0.8807
9	0.2951	0.3216	0.3614	0.4118	0.4550	0.5287	0.5937	0.6514	0.7493

2) Anti-symmetric mode in traverse direction

n	$\phi_0 = 60.0^\circ$								
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.0929	0.1901	0.2656	0.3843	0.5755	0.8128	1.0926	1.4104	1.4384
2	0.1316	0.2174	0.3568	0.4729	0.5962	0.8219	1.0993	1.4201	1.7831
3	0.1878	0.2518	0.3803	0.5493	0.6568	0.8373	1.1092	1.4287	1.7912
4	0.2376	0.3071	0.4070	0.5780	0.7205	0.8578	1.1216	1.4397	1.8017
5	0.2848	0.3637	0.4462	0.7630	0.8804	1.1363	1.4532	1.8149	2.2191
6	0.3342	0.4110	0.4960	0.6289	0.7935	0.9024	1.1534	1.4694	1.8306
7	0.5469	0.6600	0.9236	1.1729	1.4882	1.8492	2.2531	2.6993	3.1873
8	0.4980	0.5944	0.6943	0.9451	1.1950	1.5098	1.8705	2.2743	2.7204
9	0.4886	0.5434	0.6384	0.7306	0.8641	0.9682	1.2200	1.5343	1.8946

n	$\phi_0 = 90.0^\circ$								
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.0497	0.0925	0.1583	0.2793	0.3652	0.4866	0.6287	0.7897	0.9685
2	0.1238	0.1719	0.2528	0.3542	0.4588	0.5201	0.6372	0.7948	0.9735
3	0.1221	0.2176	0.2714	0.3655	0.4841	0.6077	0.6771	0.8043	0.9794
4	0.1601	0.1920	0.2551	0.3214	0.3848	0.4955	0.6293	0.7386	0.8208
5	0.2299	0.2796	0.3619	0.4286	0.5115	0.6418	0.8428	0.9957	1.1899
6	0.2314	0.3119	0.3854	0.4758	0.5393	0.6555	0.7923	0.8636	1.0054
7	0.2678	0.3018	0.3518	0.4100	0.5061	0.5792	0.6722	0.8079	0.8805
8	0.3049	0.3345	0.4410	0.6180	0.6928	0.8229	0.8943	1.0276	1.2195
9	0.3691	0.4222	0.4772	0.5524	0.6500	0.7168	0.8383	0.9061	1.0404

n	$\phi_0 = 120.0^\circ$								
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
1	0.0566	0.0913	0.1392	0.1967	0.2882	0.3560	0.4449	0.5455	0.6567
2	0.0906	0.1263	0.1561	0.2052	0.2723	0.3508	0.4372	0.5059	0.5586
3	0.1179	0.1484	0.2470	0.2878	0.3585	0.4461	0.5441	0.6418	0.6939
4	0.1802	0.2160	0.2751	0.3838	0.4555	0.6585	0.8077	0.9244	1.0645
5	0.1754	0.2108	0.2502	0.2922	0.3608	0.4818	0.5613	0.6668	0.7765
6	0.2069	0.2346	0.2822	0.3251	0.3766	0.4554	0.5290	0.5801	0.6760
7	0.2365	0.2648	0.3041	0.3607	0.4033	0.4700	0.5566	0.6156	0.6881
8	0.2641	0.2968	0.3296	0.4400	0.4888	0.5726	0.6507	0.7051	0.8871
9	0.2932	0.4048	0.5165	0.5878	0.6759	0.7275	0.8195	0.8969	0.9649

Table 2 Eigen values Ω in the case S.S. $a/h = 500$, $L_y/L_x = 0.50$.

1) Axi-Symmetric mode in traverse direction

n	$\phi_0 = 90.0^\circ$								
	M = 1	3	5	7	9	11	13	15	17
1	0.199	0.037	0.059	0.113	0.187	0.279	0.390	0.519	0.667
2	0.489	0.116	0.075	0.117	0.190	0.282	0.392	0.522	0.669
3	0.677	0.223	0.114	0.129	0.195	0.286	0.396	0.525	0.673
4	0.781	0.335	0.171	0.151	0.205	0.292	0.402	0.531	0.678
5	0.838	0.437	0.236	0.183	0.220	0.302	0.409	0.537	0.685
6	0.872	0.524	0.303	0.223	0.241	0.314	0.419	0.546	0.693
7	0.893	0.597	0.369	0.268	0.267	0.331	0.431	0.557	0.703
8	0.908	0.655	0.431	0.315	0.297	0.351	0.446	0.569	0.715
9	0.918	0.703	0.489	0.363	0.331	0.374	0.464	0.584	0.728

2) Anti-symmetric mode in traverse direction

n	$\phi_0 = 90.0^\circ$								
	M = 2	4	6	8	10	12	14	16	18
1	0.067	0.041	0.083	0.148	0.231	0.332	0.452	0.591	0.748
2	0.218	0.078	0.091	0.151	0.233	0.335	0.455	0.593	0.750
3	0.381	0.146	0.112	0.158	0.238	0.339	0.458	0.597	0.754
4	0.517	0.228	0.148	0.172	0.246	0.344	0.464	0.602	0.759
5	0.621	0.312	0.195	0.194	0.257	0.353	0.471	0.609	0.765
6	0.696	0.393	0.249	0.223	0.273	0.364	0.480	0.617	0.774
7	0.751	0.466	0.304	0.257	0.293	0.378	0.491	0.627	0.783
8	0.792	0.531	0.360	0.296	0.317	0.394	0.505	0.640	0.795
9	0.823	0.587	0.414	0.337	0.345	0.414	0.521	0.653	0.808

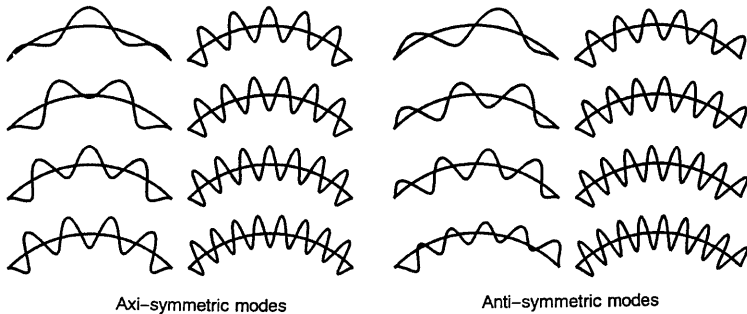


Fig. 2 An example of eigen modes in the case of F.S. with $\phi_0 = 90.0^\circ$, (a) axi-symmetric modes (b) anti-symmetric modes.

ここでの応答解析には 24 個の固有モードを採用している：直線母線方向に 4 個の対称形モードと円弧方向に 6 個の対称形（上下動の場合）あるいは逆対称形（水平動の場合）モード。すなわち、

$$\ddot{T}_{ij} + 2\zeta\omega_{ij}\dot{T}_{ij} + \omega_{ij}^2 T_{ij} = F_{ij}(t) \dots\dots\dots (10)$$

$$i = 1, 3, 5, 7 \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

(10) 式中の時刻関数 $T_{ij}(t)$ は Nigam-Jennings 法により直接数値的に計算された。入手の原記録は 0.02 秒の時間刻みであるため、さらに 20 分割を行い (0.001 秒間隔) 応答計算に用いた。新データは原データから内挿した。減衰定数は $\zeta = 0.02$ としている。

$$a/h = 500, L_y/L_x = 0.5, 1.0, 2.0, \phi_0 = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$$

の場合の応答解析結果を **Fig. 3-6** に与える。これらの図はその発生位置、時刻に関係なく面上での法線方向変位 w の加速度応答の最大値（絶対値）を形状・材料パラメータに対してプロットしたものである。プロットした応答加速度の発生時点での面上の応答加速度の分布状態の例を **Fig. 7** に示す。これらの図より今回の阪神大震災において社会・教育施設体育館等の円筒形屋根のほとんどが大きな損傷を受けなかった理由が見て取れる。

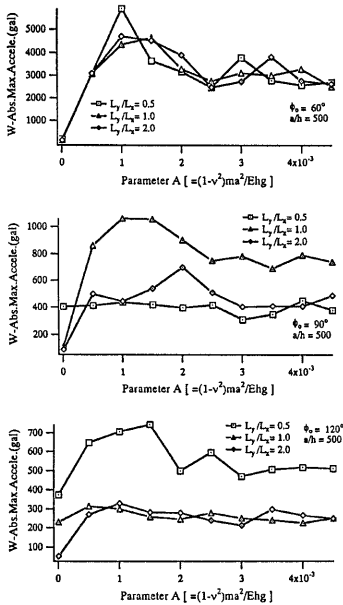


Fig. 3 Maximum response acceleration for JMA-UD, the case F.S..

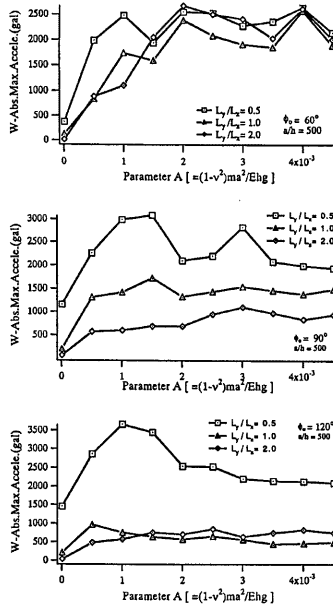


Fig. 4 Maximum response acceleration for JMA-NS, the case F.S..

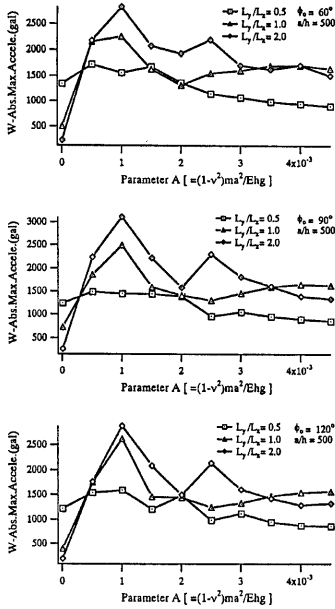


Fig. 5 Maximum response acceleration for JMA-UD, the case S.S.

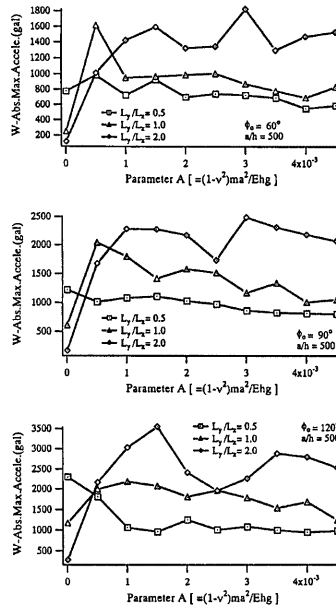


Fig. 6 Maximum response acceleration for JMA-NS, the case S.S.

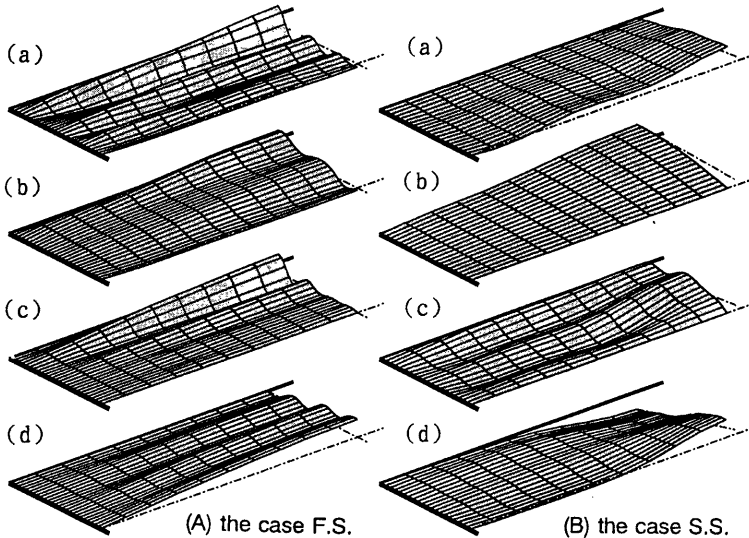


Fig. 7 An example of the distribution of the response acceleration on the surface.

(a) \ddot{w} ; UD (b) \ddot{v} ; UD (c) \ddot{w} ; NS (d) \ddot{v} ; NS

3. シェル形式構造の有限要素解析

本章では屋根型円筒シェルの地震応答を有限要素法により扱う。これは前章の解析結果の検証のためでもある。両者の比較により互いの結果を保証しあえる。まずマトリクスによる MCK 型の運動方程式を導く。次に固有値解析により自由振動性状を把握し、続いて実地震波を用いた線形応答解析を行なう。地震動は水平動と上下動がそれぞれ単独に作用する場合と2方向同時に作用する場合をも考える。水平動は母線方向に直角な方向（円弧方向）に作用するものとする。

3.1 運動方程式

有限要素には Megard による4節点円筒シェル要素¹⁾を用いる (Fig. 8)。曲面要素では変位関数に剛体モードを含むことが解の収束のために必要であるが、この要素ではその剛体モードが正確に考慮されている。また自由度が20自由度であり四辺形シェル要素でもっとも少なく取り扱いに便利である。要素剛性マトリクス k_e 、要素質量マトリクス m_e は次式の標準的な方法²⁾により導かれる。

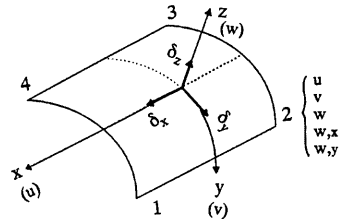


Fig. 8 Cylindrical shell element.

$$k_e = \int_{area} B^T D B dA, \quad m_e = \int_{area} N^T \rho N dA \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで B は歪み～節点変位マトリクス、 D は応力～歪みマトリクス、 N は形状関数、 ρ は単位面積当たり密度である。式(11)で剛性マトリクスを導く際、剛体変位モードはひずみを生じないことから剛体変位モードに関する部分は零となる。質量マトリクスは整合質量 (consistent mass) として求める。また、式中の領域積分は数値積分によらず数式処理によって求める。

各要素マトリクスの重ね合わせにより全体系の剛性、質量マトリクスを得る。減衰マトリクスは Rayleigh 型とする。最終的に境界条件を考慮した全体系の運動方程式は

$$M\dot{d} + C\dot{d} + Kd = -\ddot{x}_h f_h - \ddot{x}_v f_v \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここに M, C, K はそれぞれ質量、減衰、剛性マトリクス、 d は相対節点変位ベクトル、 \ddot{x}_h, \ddot{x}_v はそれぞれ水平、上下地動加速度、 f_h, f_v は水平、上下地動時に対応する外力分布ベクトルである。

3.2 固有振動数, 固有モード

応答解析に先立ち、屋根型円筒シェルの固有振動数, 固有モードを把握するために固有値解析を行なう。解析モデルの形状は2章と同様に、 $a/h, \phi_0, L_y/L_x$, そして境界条件の4つのパラメータにより表す (Fig. 1)。解析モデルは Table 3 の6種類で、S.S. は全周単純支持を、また、F.S. は裾境界は固定支持で妻境界は単純支持であることを示す。固有値解析の計算モデルでは対称性は用いず、要素分割は全体モデルに対して 30×30 の等分割とした。固有振動数は無次元量で算出され、無次元固有振動数 Ω と実固有振動数 ω の関係は(8)式で与えられている。

Table 4 はDタイプの1次から40次までの無次元固有振動数、モード波形の円弧方向、母線方向の半波数及び水平動、上下動に対する刺激係数を示したものである。Table 5 は各タイプの1次と刺激係数が大きいモードについてのそれらの値を示している。Fig. 9 にDタイプの固有モード例を示す。これらの表から各固有振動数の値は互いに近接していることがわかる。刺激係数に着目すると必ずしも低次のモードの場合

Table 4 Non-dimensional frequencies, numbers of half-waves and response participation factors for type D roof.

モード	Ω	半波数		刺激係数	
		円弧方向	母線方向	水平入力	上下入力
1	0.067	5	1	-0.000	0.001
2	0.068	4	1	-0.001	-0.000
3	0.100	6	1	-0.012	-0.000
4	0.113	7	1	-0.001	0.040
5	0.115	6	2	0.000	-0.004
6	0.118	7	2	-0.000	-0.000
7	0.151	7	2	-0.002	0.000
8	0.155	8	2	-0.000	0.011
9	0.156	8	1	*-0.024	-0.001
10	0.159	7	1	-0.002	*0.117
11	0.163	7	3	-0.000	0.000
12	0.165	6	3	0.001	-0.000
13	0.197	8	3	0.002	-0.000
14	0.199	9	3	-0.001	0.001
15	0.199	9	3	0.002	0.000
16	0.204	9	1	0.001	*-0.101
17	0.209	8	4	0.000	-0.002
18	0.210	9	4	-0.001	0.000
19	0.212	10	2	0.000	-0.007
20	0.229	10	1	*-0.044	-0.000
21	0.240	10	4	0.001	-0.000
22	0.243	10	4	0.000	-0.000
23	0.244	10	3	-0.000	-0.000
24	0.252	9	5	0.000	-0.001
25	0.254	8	5	0.000	0.001
26	0.254	9	3	-0.000	0.005
27	0.257	10	2	-0.000	-0.002
28	0.270	11	2	0.003	0.000
29	0.276	11	1	0.000	*0.062
30	0.280	10	5	0.001	-0.000
31	0.285	11	5	0.000	-0.000
32	0.288	11	4	0.002	-0.000
33	0.292	10	4	-0.000	-0.000
34	0.295	10	6	-0.000	0.000
35	0.295	9	6	-0.000	-0.000
36	0.300	11	3	-0.000	0.006
37	0.310	12	1	*0.091	0.000
38	0.314	12	3	-0.002	-0.000
39	0.321	11	6	-0.002	-0.000
40	0.322	12	2	0.000	-0.002

Table 3 Model parameters.

	a/h	ϕ_0	L_y/L_x	Bound.Cond.
Type A	500	60°	0.5	S.S.
Type B	500	60°	0.5	F.S.
Type C	500	120°	0.5	S.S.
Type D	500	120°	0.5	F.S.
Type E	500	120°	1.0	F.S.
Type F	500	120°	2.0	F.S.

Table 5 Non-dimensional frequencies, number of half-waves and response participation factors for specific modes of each model type.

タイプ	モード	Ω	半波数		刺激係数	
			円弧方向	母線方向	水平入力	上下入力
A	1	0.097	3	1	-0.025	-0.133
	2	0.114	2	1	-0.120	0.021
	3	0.149	4	1	-0.056	0.013
	6	0.226	5	1	0.019	0.075
	12	0.344	1	1	0.101	0.468
B	1	0.144	3	1	-0.001	0.018
	5	0.272	4	1	-0.000	0.018
	14	0.443	6	1	-0.202	-0.000
	29	0.627	8	1	0.110	0.001
41	0.743	9	1	-0.003	-0.024	
C	1	0.052	4	1	-0.140	0.033
	2	0.062	5	1	-0.014	-0.062
	3	0.067	3	1	0.024	0.114
	4	0.084	6	1	0.088	-0.017
9	0.133	2	1	-0.331	0.060	
D	1	0.067	5	1	-0.000	0.001
	10	0.159	7	1	-0.002	0.117
	16	0.204	9	1	0.001	-0.101
	20	0.229	10	1	-0.044	-0.000
	37	0.310	12	1	0.091	0.000
E	1	0.115	6	1	0.001	-0.000
	8	0.213	10	1	-0.017	0.001
	33	0.434	13	1	0.003	-0.115
	41	0.493	15	1	-0.001	0.104
49	0.528	16	1	0.030	0.000	
F	1	0.207	8	1	-0.002	0.000
	13	0.428	13	1	0.001	-0.022
	17	0.494	15	1	-0.000	-0.017
	30	0.610	16	1	-0.040	0.002
	35	0.675	18	1	0.026	-0.001

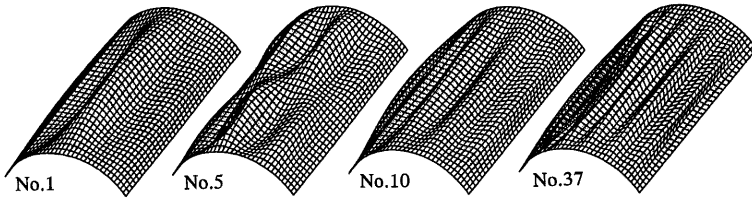


Fig. 9 Some mode shapes of type D roof.

が大きいとは限らず、49次でのそれが最大となるものもある。また、刺激係数が大きいモードの形状は母線方向に半波数が1で、対称形のものであることがわかる。逆に、母線方向に逆対称形のモードは刺激係数が小さい。Table 3のD、E、Fタイプの結果から L_y/L_x が大きいほど固有振動数が大きくなり、また刺激係数の大きいモードは円弧方向に波数の多い形状となることが分かる。

3.3 応答解析

(12)式をNewmark- β 法 ($\beta = 0.25$)により直接逐次積分し、地震応答を計算する。解析モデルはTable 3のA~Dの4種類とする。前節から母線方向に対称形のモードが応答に大きく寄与することがわかるので、計算には母線方向に1/2の領域のモデルを用いる。減衰定数は1次と2次のモードに2%を与える。地震動データはKOBE-JMA波のうちNS、UD成分の主要部10秒を用いる。応答計算の時間刻みは0.002秒(原記録の0.02秒間隔を10分割に補間)とした。

Fig. 10とFig. 11は全節点を対象にして法線方向の最大加速度応答、最大速度応答を求めて各タイプご

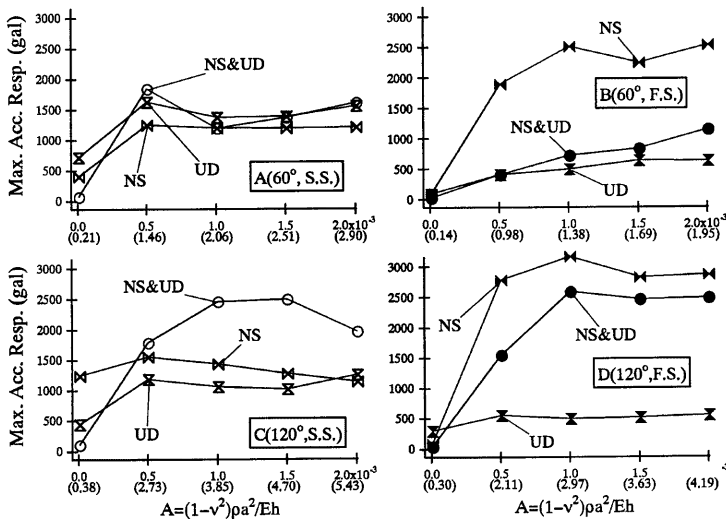


Fig. 10 Maximum acceleration response to JMA-NS&UD.

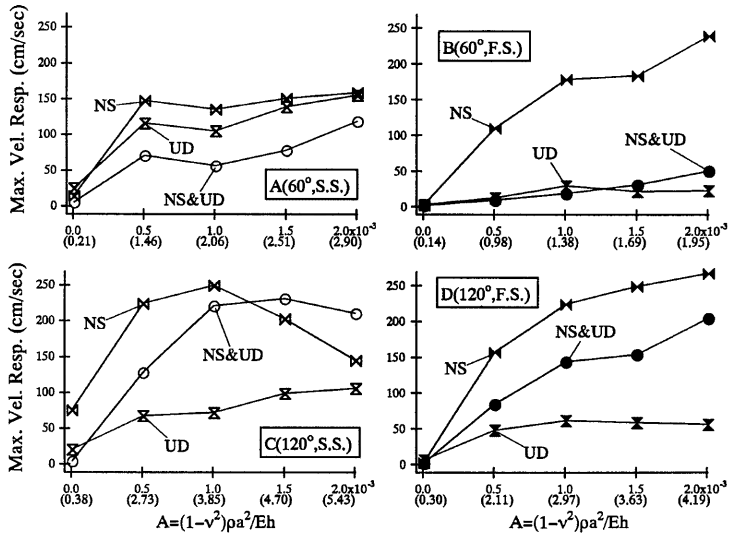


Fig. 11 Maximum velocity response to JMA-NS&UD.

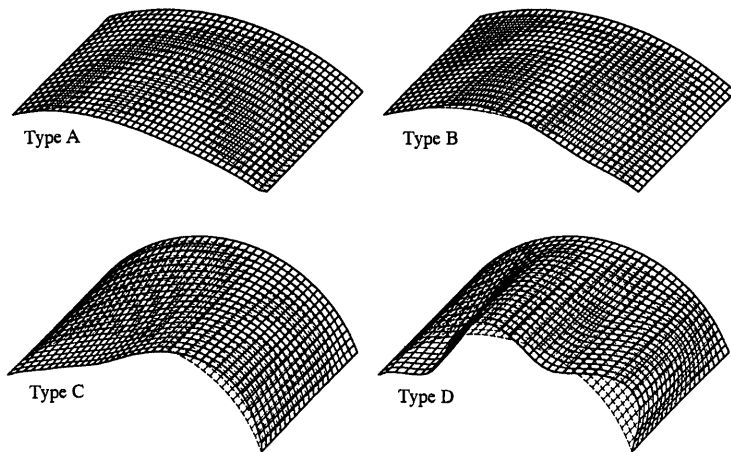


Fig. 12 Distribution of acceleration response at the time the maximum response induced.

とにそれぞれ示したもので、横軸にパラメータ A をとり、参考として対応する 1 次固有周期 (秒) を括弧内に示した。これらの図から全体にパラメータ A が $O(10^{-5})$ のオーダーだと応答は小さいが、それ以上のオーダーだと比較的大きな応答を示すといえる。これは阪神・淡路大震災で、空間構造物の構造体自身にはほとんど被害がなかった一因と考えられる (通常に使用される屋根型円筒シェルでは A が $O(10^{-5})$ のオーダー)。また、水平動と上下動を同時に入力した場合の最大応答はそれぞれ単独に入力した場合のそれらを大きく上回るものもあれば下回るものもある。このことからこのような構造物にとって、水平動と上下動がそれぞれ応答に大きな影響を与えることが分かる。Fig. 12 は各タイプについて最大値をとる時点での加速度応答値の分布を母線方向に 1/2 の領域に対して示したものであり、応答には小数のモードが卓越することを示唆している。母線方向中央の円弧線上での変位、速度、加速度の各応答の時刻歴応答をアニメーションで見ると、例えば A タイプでは、各応答は水平入力が大い時は一時的に半波数 2 波の非対称モードが卓越するが、時間中つねに半波数 1 波の対称モードが支配的である。B, C, D タイプでは、各応答とも全般に半波数 2 波、4 波の非対称モードが卓越している。このように形状、境界条件、入力動の大きさに応じて、応答にはいくつかのモードが卓越することがわかる。

4. ラチス形式構造の地震応答性状

ここでは、部材剛接合屋根型円筒形ラチス構造の線形地震応答解析結果について述べる。解析において特に重点をおいたのは次の項目である。

- 1) 入力地震波の相違 2) 境界条件の影響 3) 形状の違いの影響

4.1 解析モデルと解析手法

4.1.1 解析モデル

日本建築学会空間骨組小委員会内の屋根型円筒ラチスシェルの構造作業委員会が、ベンチマークモデルとして提案している 2 つのモデルについて解析を行った⁵⁾。境界条件は、全周固定、全周ピン支持、隅角部ピン及び境界辺ローラー支持の 3 種類のケースを考える。また自重の算定に当たって、屋根主構造部材については整合質量マトリクスで、屋根ふき材重量については単位面積当たり 200 kgf/m^2 として支配面積を考慮した集中質量として各部材接合点に載荷する形で評価した。

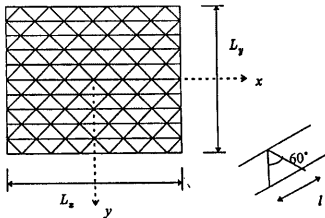


Fig. 13 Lattice geometry.

Table 6 Sizes.

	Type A	Type B
$L_x (m)$	21.00	42.00
$L_y (m)$	29.97	
$a (m)$	57.90	
$\phi_0 (deg)$	30.0	
$h (m)$	1.973	
$d \times t (mm)$	165.2 × 7.0	
$l (cm)$	350.	
$E (kgf/cm^2)$	2.1×10^6	
ν	0.3	

4.1.2 解析手法

応答解析の手法としては、屋根型円筒形ラチス構造を、一般的な立体骨組に対するマトリクス法、つまり梁要素による有限要素法で定式化することによる離散化の手法を用いた。

地震荷重が作用する場合の構造物の運動方程式は、

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{x}_g \dots\dots\dots (13)$$

但し \ddot{x}_g は地動加速度ベクトル

で表される。

全体に曲面状をなすシュールの構造物では、静的載荷状態で、かなり大きな面内圧縮力または部材軸圧縮力が生じている場合があり、このときには動的問題において初期部材軸力 N_0 による剛性低下が無視できなくなることがある。そこで、

$$K = K_L + K_G(N_0) \dots\dots\dots (14)$$

として、改めて K を評価し直し、動的解析を行うことが必要となる。ここに $K_G(N_0)$ は、幾何剛性マトリクスと呼ばれるものである^{3,6,7,8)}。ここでは、初期部材軸力を考慮しない場合 L と考慮する場合 LG の両方の解析を行う。

まず、自重及び屋根ふき材重量の載荷による静的解析ならびに線形座屈解析を行い、初期部材軸力 N_0 を求め、この荷重下での座屈の有無を調べたところ、Type B~R.S. の初期部材軸力が線形座屈荷重及び弾性範囲を越えていたため、応答解析は行っていない。静的解析の結果を用いて $K_G(N_0)$ を作成するが、その際せん断ひずみは無視し、直ひずみのみを考慮した。各ケースについて、解法として直接積分法の1つである Newmark- β 法を用いての直接数値解析法を採用する。ここでは、 $\beta = 1/4$ とする平均加速度法によっている。減衰マトリクスは Reyleigh 型の比例減衰マトリクスを用い、1次と2次の減衰定数を $h_1 = h_2 = 0.02$ とした。

4.1.3 入力地震波について

解析に使用した地震波は Kobe-JMA, ElCentro'40, Taft の UD 及び NS 成分であり、加速度のピーク値を 100 gal に変更して入力する。これは、この解析が線形応答解析であることと異なる周波数特性を持つ地震波に対するの構造物の応答特性を把握しやすくするためである。各地震波とも、入力継続時間は 10 秒で計算の際の時間の刻み幅は、0.002 秒とし、UD 成分は $-z$ 方向に、NS 成分は y 方向 (円弧方向) に入力している。

4.2 解析結果

Figs. 14, 15 は最大応答加速度及び最大応答変位を縦軸に、横軸に1次固有周期をとり示したものである。線形座屈解析を行った結果、自重載荷の時点で Type B~R.S. は線形座屈荷重を越えていたので、 $K = K_L + K_G$ として評価する方法では、固有周期を得ることができなかった。Type B~S.S. についても、自重載荷時において線形座屈値の9割近い荷重がかかっていることになり、振動開始時の剛性の低下が著しく、1次固有周期も $K = K_L$ としたときの2倍以上の長さとなっている。このような場合には静的解析及び振動解析において幾何学的非線形性を考慮して評価をしなければより正確なデータは得られないと思われる。

入力地震波の周波数特性の影響を見るために、最大加速度を 100 gal に揃えて入力したのであるが応答には違いがみられる。実地震波の大きさを考えると、El Centro'40 入力では安全が確認される場合でも、KOBÉ-JMA 入力では危険となる場合も有り得る。また、

Table 7 Eigen values (Period).

		Eigen Period			
		$K = K_L$		$K = K_L + K_G$	
		1st	2nd	1st	2nd
Type A	F.E.	0.563	0.552	0.721	0.669
	S.S.	0.617	0.560	0.816	0.708
	R.S.	0.691	0.588	0.979	0.930
Type B	F.E.	0.882	0.765	1.376	1.345
	S.S.	0.928	0.909	2.678	1.364
	R.S.	1.213	1.001	-	-

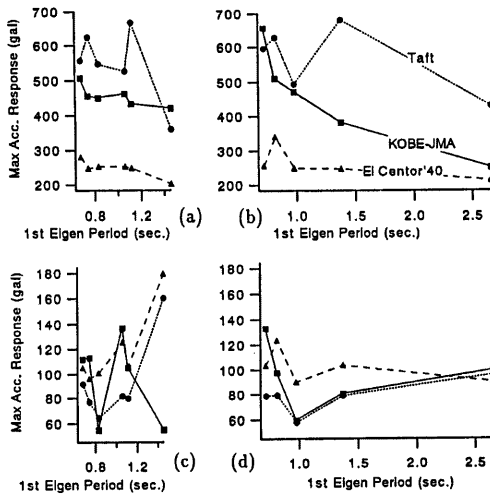


Fig. 14 Maximum response acceleration for earthquake motions.

(a) L, UD (b) LG, UD (c) L, NS (d) LG, NS

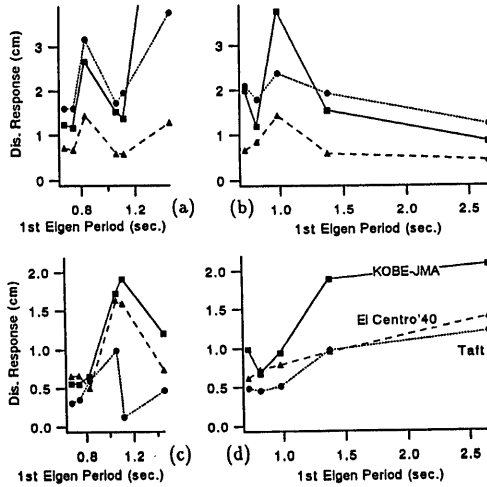


Fig. 15 Maximum response displacement for earthquake motions.

(a) L, UD (b) LG, UD (c) L, NS (d) LG, NS

剛性の低下によって固有周期が全体に長くなることも考慮にいれる必要がある。母線方向の長さは、上下地震動の場合には余り影響が見られず、水平方向入力の際に影響が見られる、母線方向に長い Type B の方が大きな変位応答を生じている。境界条件の影響は、F.S. と S.S. の場合の間にはそれほど目立った差は見られない。しかし、R.S. の場合においては他の境界の場合とは違う結果が得られた。

実際の設計において屋根型円筒形という形態ではアーチ方向 (y 方向) の水平のスラストをどう処理するかというのが問題になるところである。これは、上下地動が入力された場合も同じであり、母線境界が y 方向に可動なローラーで支持された R.S. タイプでは、 z 方向の荷重によるスラストにあまり抵抗しないた

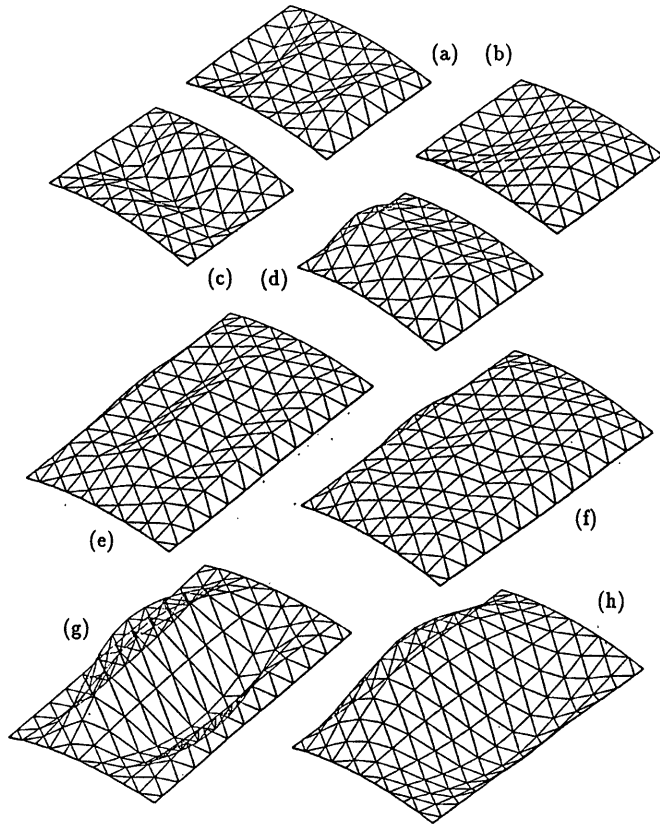


Fig. 16 Distribution of the response displacement in case of S.S. (LG) for Kobe-JMA at the time the maximum response displacement or axial force induced.

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) Type A, UD, Disp., 5.82 (sec.) | (b) Type A, UD, Axi. force, 2.10 (sec.) |
| (c) Type A, NS, Disp., 4.86 (sec.) | (d) Type A, NS, Axi. force, 7.48 (sec.) |
| (e) Type B, UD, Disp., 2.92 (sec.) | (f) Type B, UD, Axi. force, 2.58 (sec.) |
| (g) Type B, NS, Disp., 5.22 (sec.) | (h) Type B, NS, Axi. force, 6.56 (sec.) |

め、鉛直方向の変位は大きなものとなる。逆に、 y 方向の拘束が無いため、円筒中央部では NS 入力に対して剛体変位的な挙動を示し、ほかの境界条件の場合よりも相対変位応答が小さく或いは同程度となっていると思われる。Type A-R.S.-KOBÉ-JMA において大きめの変位応答が出ているのは、母線方向の境界部分が短いと境界部の剛性が他の境界条件の場合に近くそのためそれらに近い挙動を示しているためと思われる。

参考として、Fig. 16 に最大変位及び最大軸力発生時の全体形状を示す。

4.3 この章のまとめ

今回の解析で用いたモデルは半開角 15 度という低ライズの構造である。ドームや円筒形の屋根においては低ライズの場合、水平地震を入力しても最大応答は鉛直方向で生じる事が多い。本解析でも水平地震入力の際求められた最大応答はほとんどのケースで鉛直方向であった。このような結果から、低ライズの屋根面を設計する際には鉛直地震動のみではなく、水平地震動に対する配慮、及び鉛直・水平両地震動の同時入力（または重ね合わせ）による挙動の安全性の検討が必要であると思われる。また、固有周期との関係から入力地震波としてどの地震波を採用するかということも問題になる。

KOBÉ JMA **IIS KOBEnet**

参考文献

- 1) Megard, G. : Planar and Curved Shell Elements, *Finite Element Methods in Stress Analysis*, ed. Holland, I. & Bell, K., TAPIR, pp.255-286, 1969.
- 2) 例えば矢川, 半谷 : 有限要素法の基礎, 朝倉書店, pp.105, 1994.
- 3) 日本建築学会 : シェル・単層ラチス構造の振動解析, pp.95-117, 1993.
- 4) 日置興一郎 : 妻壁で単純に支持された円筒シャーレの振動, 日本建築学会論文報告集 52 号, pp.49-55, 1956.
- 5) 日本建築学会空間骨組小委員会屋根型円筒ラチスシェル構造作業委員会 : 屋根型円筒ラチスシェル構造の解析・設計, 日本建築学会.
- 6) J.S. シェムニスキー : マトリックス構造解析の基礎理論, 培風館.
- 7) Ray W. Clough and Joseph Penzien : 構造物の動的解析, 科学技術出版会.
- 8) 西岡隆 : 土木工学基礎シリーズ 4 構造振動解析, 培風館.