フィルダムの力学的挙動に関する解析的研究

昭和49年

青　山　咸　康

フィルダムの力学的挙動に関する解析的研究

昭 和 4 9 年

青　山　咸　康

目　　次

第一章　本研究の意義と目的

§ 1・1　フィルダムのとらえかた　1
1・1・1　本研究の目的　1
1・1・2　数値解析の意義　2

§ 1・2　本研究の構成　4
1・2・1　従来の研究の概観　4
1・2・2　静力学的解析　5
1・2・3　動力学的解析　5
1・2・4　すべり面法と応力解との関係　6

第二章　従来の研究の概観

§ 2・1　フィルダム工学一般の系譜　7

§ 2・2　静的解析に関する研究　8
2・2・1　線形弾性論の応用による研究　8
2・2・2　応力－ひずみ関係の非線形性を取り入れた解析　10

§ 2・3　動的なフィルダムの解析について　11
2・3・1　線形な動的解析　11
2・3・2　非線形なまたはレオロジカルな動的解析　13

§ 2・4　フィルダムの安全性に関する研究　13

第三章　静的解析

§ 3・1　手法についての概説　16

3・1・1　二次元有限要素法について　16
3・1・2　数値解析法について　27

§ 3・2　堤体内応力および地盤内応力に関する線形解析　32
3・2・1　堤体の一般応力解析　33
3・2・2　築造進行に伴う増分解析　52
3・2・3　堤体下の地盤内応力分布　59

§ 3・3　弾塑性解析　68
3・3・1　弾塑性解析の手法　68
3・3・2　深山ダムにおける実例　79

§ 3・4　堤体の材料力学的安定性に対する応力分布の影響　86
3・4・1　破壊のパラメーターの定義　87
3・4・2　有限要素法への適用　88
3・4・3　A-2型式のダムにおける実例　89

第四章　動 的 解 析

§ 4・1　固有モード　95
4・1・1　固有モードの算定法　95
4・1・2　剛性基礎上の堤体の固有モード　100
4・1・3　地盤一堤体系の固有モード　107
4・1・4　結　　論　114
4・1・5　その他の型式の堤体の固有モードについて　115

§ 4・2　地震応答　117
4・2・1　応答諸量の算定法　118
4・2・2　定常加振による応答　120
4・2・3　El.CentroとTaft地震による応答　127

4・2・4　人工地震加速度による応答　134
4・2・5　堤体の極限つりあいの問題　140
4・2・6　動的震度の問題　142
4・2・7　結　　論　145

第五章　すべり面法と応力解

§　5・1　応力解と円形すべり面法　147
5・1・1　すべり面法に対応する安全率　152
5・1・2　比：Sから導かれる安全率　156

§　5・2　地震時の安全率　159

あとがき　167

引用文献ならびに参考文献　169

第一章　本研究の意義と目的

§１・１　フイルダムのとらえかた

１・１・１　本研究の目的

フイルダムまたはアースダム，ロックフイルダムなどという言葉で今日呼ばれている土木構造物は，人類の歴史のもっとも古い部分から存在したであろう治水，利水のための巨大土木構造物である。すなわち土砂岩塊などを山形に積みあげることにより河川をせきとめ貯水する構造物である。また，これとまったく同じ考えで作られる構造物も堤防という違った構造物にもそのまま応用できるのである。このようなフイルダムという構造物の農業生産に対する意義はきわめて大であり，元来人類が農耕定住生活を開始し，その生産性の向上に勤めたときもっとも重要なかんがい用水の確保のためにフイルダムを建造したのであろう。特に稲作農業を基本とする我国においては，古来多数のフイルダムが建造されており，農業土木においてとりあつかう主要な構造物であることには疑いがない。

今日，科学技術の進歩により，コンクリートから成る種々の形式の貯水ダムの建造が可能であり，これ等に比べれば，フイルダムはいわば原始的発想からなる貯水ダムともいえよう。ところが近時，種々の観点からフイルダムの有用性が再検討されて，フイルダムのダム全体に対する影響が大きくなっている。たとえば最近（１９６３～６５年に完成または建造中）の我国において建造されたダムの件数は次の通りである(47)。フイルダム９０個，フイルダム以外１２０個でフイルダムは全対の４２％を占め，このうち堤高が３０ｍ以上のダムはフイルダム２４個，フイルダム以外１０１個でフイルダムの割合は１９％となる。いわゆるダム工学といった広い観点からすれば，フイルダムについての他のダム形式との得失が議論されるであろうが，上にも述べたように近時フイルダムが再評価されている理由の一つは，施工の容易さと解析技術の進歩および実観測技術の発達により，堤体の挙動が以前（第二次大戦前）に比べ的確に把握できるようになったことであろう。このようなことが，大規模なフイルダムの建造を促し，米国におけるＯｒｏｖｉｌｌｅ ダム（北部カリフオルニア州，堤高２３５ｍ，堤長１７１０ｍ，堤体積5.85×10^{7}㎥）や，我国において建造が予定されている奥多々良木発電所における黒川ダム（兵庫県朝来郡，堤高９７.５ｍ，堤長３２０ｍ，堤体積3.54×10^{6}㎥），さらに農業土木技術者

によって完成が急がれている，深山ダム（栃木県西那須野町，堤高７４.５ m，堤長３２４ m，堤体積1.８５×１０^{6} m^3，総貯水量2.6×１０^{7} m^3）などの大型ダムの建造が可能となっている。このような大型フイルダムの建造を可能にした最大の理由は，上にも述べたように施工技術の進歩と，解析，観測技術の進歩である。しかし現状は，大型のフイルダムを作る必要に迫られていろいろな解析法がこれを追いかけているという状態であり，解析技術のたちおくれによって詳細な堤体の挙動を予知することが困難である。フイルダムは，ダム工学の上から再評価されるべき種々の利点を有しているが，これが土質力学，水理学，弾性学，塑性学などの総合された知識をもってしなければ，解析不可能である点が，設計者にとってもっとも困難な点であろう。

フイルダムにおける解析の主なる二つの対象は，(1)力学的な堤体の安全性にかんする問題と，(2)止水構造物としての堤体の機能の問題である。

本研究はもっぱら第１の問題点である堤体の力学的挙動に関する問題をとりあげるものである。フイルダムの解析はもち論両者が相まって始めて有効なものとなるのであるが，特に力学的諸問題の解明に関する部分に多くの問題が残されていることは事実である。したがってこの分野における技術的な手法の革新がもつ意義は重大である。

本研究においてはこの力学的諸問題の解明に対してもっぱら解析的なとりあつかいをおこない，その手法として数値解析を用いる。このような研究の正当性は，現実のダムの観測データと詳細に照合されて確立されるわけであるが，フイルダムの力学的諸量の実観測に関する技術とそのデータ　の収集解析の問題は，これだけで一つの研究対象となるぼう大な問題である。

したがって，この点について子細な検討は本研究の範囲外であるとするものであるが，今日確立されつつある種々の実測データ　による定性的挙動についての事実を十分に解析に際して取り入れてゆくこととした。

１・１・２　数値解析の意義

前項にも述べたように，本研究で用いられる手法は一貫して数値解析法である。数値解析法のもつ威力と効用は自然，社会科学のあらゆる分野において在来の研究手法を革新しつつある。農業土木学の分野においてもこのことは真実である。構造解析，水理計算，水文統計データーの処理という部門に数値解析の占める割合は大となってきている。

このことは近年（特に１９６０年代以後）における電子計算機の普及と，電子計算機そのものの機能の急速な拡大にうらうちされた現象である。農業施設工学の分野における構造解析にだけ問題を限ってみても，従来，微分方程式だけ与えられて，数学的な意味の解析解が得られないという問題は莫大であり，こうした微分方程式系で与えられているものの実体を知るために数値解法が有効であることが知られていても，現実的に人力による計算力ではその実行が不可能であったのである。たとえば種々な境界条件下での浸透場を支配するラプラスの微分方程式を解くにはＳｏｗｔｈｗｅｌｌ－Ｓｈａｗ 等によって開発された差分方程式を解くための数値解析法である緩和法：Ｒｅｌａｘａｔｉｏｎ Ｍｅｔｈｏｄ(80) を用いれば良いことが分っていた。しかし数学的な解析解のような，連続的な解は，原理的に得られぬとしても，工学的に十分といえる程度に稠密な解の分布を得ようとすれば，人力でおこなうにはあまりに莫大な計算量があったのである。電子計算機の発達はこのような計算力を解析者に与えたのである。
現在（１９７０年代において）卓上電子計算機と，いわゆる中型電子計算機の扱う情報処理速度は10^5倍異なるというデーターがあることからしても，その計算力によって明らかになった分野の広いことが分るであろう。
このような一般的な電子計算機の進歩による数値解析法の効用の増大という現象からして，従来のような理論解析と，この結果を裏づけする実験結果の対応により，研究の正統性を主張するという研究のパターンが尊重されなければならないということは，必ずしもいえなくなっていると考える。　何故なら，本研究でとりあげるような種々な材料力学的非均質性，非等方性を満足するような，静力学的，または動力学的な実験モデルを作りあげ，現実をシミュレートする外的条件を，モデルに作用させる実験を実施することが，近時の有効な数値解析法たとえば有限要素法：Ｆｉｎｉｔｅ Ｅｌｅｍｅｎｔ Ｍｅｔｈｏｄなどに比べれば，非常に困難であるし，そのような実験によって得られる情報の質も常に数値解析によるものより優れたものであるとは言い得ない。逆に有限要素法のような数値解析法は従来の厳密な意味での抽象化された理論体系－たとえば弾性論－によって要求される理論的な条件を完全には満足しないけれど，工学的に有効な範囲内でこれ等を満足させ，且つ従来もっとも困難視されていた材料の非等方性，非均質性，とりあつかう領域の形状に関する制限を取りはずすことなど，非線形問題，動的問題等々の問題を容易に解決できるのである。
このような意味において数値解析は，理論体系と純粋な意味における実験とい

うものの間に位置ずけることができる。本研究における数値解析はこうした数値実験という色彩のものである。本研究においてとりあげる“フイルダム”とは上に述べたようにアースダム：Earth Dam（土えん堤），アースロックダム：Earth Rock Dam，ロックフイルダム：Rock Fill Dam，フイルダム：Fill Damという言葉で呼ばれている構造物のすべてをさすこととする。

§1・2　本研究の構成

前節に述べたような事項について検討するために以下に示す項目を設ける。

1・2・1　従来の研究の概観

前節にも述べたように，フイルダムが長い歴史的経過をもつ構造物であるだけに，これに関する研究の蓄積も大きい。このようなものの上に近時のめざましい解析法も存在し得るわけであり，現代流の解析法で見落されている点がこれ等の研究の中にあるかも知れない。このような意味で在来の－1930年代以後－の力学的な堤体の挙動に関する解析手法の概観を試みてみる。
このようなものの古典的研究態度に共通なものは，まず第一に実際に建造された多数のダムの事例を子細に検討することである。してこのような事例がいかに合目的であるか否かを種々の観点から論ずることであり，いわば現象学的態度である。その評価の基準になっているのは，マクロな意味においてのダムに関する物理諸量と施工方法に関する項目である。たとえばJustin(52)によれば，フイルダムの設計において満足さるべき条件としてあげられるのは，次の6項目である。

① 堤体を越流することのないように，余水吐に十分な容量のあること。
② 浸潤線が下流堤シ内に入ること。
③ 上，下流斜面のノリこう配は使用する材料の物性により，あらゆる条件下で安定：stable であること。
④ 堤体の下流面へ上流から水が流れる可能性が絶無であること。
⑤ 堤体内部や，堤体下を浸透する水流は，これが自由水面に達するとき流速が，堤体や，堤体下を構成している土粒子の移動を生ぜしめるほど大とならないこと。
⑥ 余裕高：Free boad は波高によって堤体を越流することがないよう

にとること。
この項目からみても分るように，この時代においては，本質的な本研究に取りあげるべき点について指摘されているのは，第３の項目のみであり，堤体そのものの力学的挙動については解析的な研究がなく，安定：ｓｔａｂｌｅ という条件が経験的な事例と施工法にもとずく上下流こう配の範囲を規定することにより満足されるものとされていた。
その後土質力学の発展により，一面せん断試験により，堤体材料の破壊：ｆｒａｃｔｕｒｅ がモール・クーロンの破壊規準：Ｍｏｈｒ－Ｃｏｕｌｏｍｂ’ｓ Ｙｉｅ－ｌｄ ｃｒｉｔｅｒｉａ に従うという考えが一般に認められる至り，より定量的な扱いがおこなわれるに至った。　このような考えが発展し，堤体の安全性に関し，現在でも最も広く用いられ，且つ主要な意義をもっている円形すべり面法：Ｓｗｅｄｉｓｈ ｓｌｉｐ ｃｉｒｃｌｅ ｍｅｔｈｏｄ が１９４０年代に開発された。現在でもフイルダムの設計はどちらかと言えば，土質試験と，円形すべり面法の２本立てと考えられているほどであり，本法からフイルダムの安全率：ｓａｆｅｔｙ ｆａｃｔｏｒを決定し，それが最も主要なダムの指数となっている。このような安定性に関する研究とは別に，弾性論または塑性論による堤体内または，地盤内の応力分布から堤体の挙動を解明する研究も１９３０年代以後ゆるやかに進められていたが，近時急速にこの方面の研究が発展し，本研究も，この方面の研究に属するものである。この章では，このような歴史的な経緯のなかで，本研究の意義づけをおこなうものとする。

１・２・２　静力学的解析

フイルダムの解析は，前節に述べられたように今日大別して静的解析と動的解析に分けられる。このことで第二章であきらかにすることは，堤体および堤体下に発生する内部応力，変形量の決定，施工の進行に伴う沈下量の推定，応力分布をもとにした堤体の安全性についての検討である。このような問題については従来有効な方法がなかったが，有限要素法の適用により，非常に合理的に種々の現実的条件を取り入れつつ弾性解，または弾塑性解を得ることができる。このような問題について，その手法と実例を示し数値解がいかに堤体の挙動を説明するかを示す。

１・２・３　動力学的解析

動的な解析は地震の多発地帯である我国のような場合，フイルダムのように重要な構造物に対して不可欠である。従来この方面の研究は１９３６年の物部の研究以来発展し，今日線形振動論を用いる限りあらゆる地震加速度記録について，堤体の挙動を静的解析におけるのと同じ程度にあきらかにすることができる。本章ではそのための線形多自由度振動系の解析手法を説明し，これによって得られる動力学的なフイルダムの挙動についての知見を述べる。ここに示す動的解析は，静的解析結果と合体されて真に堤体が地震を受けたときに生ずる内部状態を与えることになるので，この状態を調べることにより，地震力の効果を明らかにしてみたい。元来円形すべり面方法などにおいても，震度：ｓｅｉｓｍｉｃ　ｃｏｅ－ｆｆｉｃｉｅｎｔという概念で地震力をとりあげることが可能であるが，この震度はこの章で示した動的な振動系の応答によって得られるものとは根本的に異なる単純な概念でしかないのである。

１・２・４　すべり面法と応力解との関係

１・２・１にも述べたように円形すべり面法の持っている説得力は大であり，堤体の崩壊に関する指数を安全率という概念で与え得るこの方法の価値は当面消滅しそうにはない。もち論円形すべり面法も，その原形から発展し，種々に改良された方法が用いられているわけだが，その根本的発想は不変である。しかしこのような円形すべり面法におけるスライス法で定義ずけられる安全率のみが，真に堤体に関する安全率を与えているかは疑問であり三，四章において材料の破壊規準にもとずいたところの安全率が定義される。ここで提案された安全率はもち論スライス法で得られる安全率の概念とは異なるが，スライス法で定義されるような安全率も本質的には，２次元または３次元の応力解をもとに，あるすべり面に作用するせん断力の決定と，許容最大せん断力を決定するのが最も合理的と考えられる。このような意味において，三，四章において示した応力解は，すべり面法と無縁ではない。そこで二章に示した応力解をもとにして，このような方法による安全率の決定をおこない安全率と応力解の関係を明らかにした。

第二章　従来の研究の概観

§２・１　フイルダム工学一般の系譜

１・２・１でも述べたように１９００〜１９３０年における フイルダム工学の方法は，多くの実例から（特に崩壊したダムの経歴を追求することから）施工法と関連した設計の基準を確立することにあったといえよう。特に当時のフイルダムの施工法は今日と異なり，水締め工法が多かった。これは有効な締固め機械がなかったことによるのである。そして解析的といえる研究の大半はフイルダムの止水機構に関するものであり，堤体である多孔質物体：p-ourous material 中の浸透流の解析に関するものである。
たとえばJustin の有名な著書“Earth Dam Project”(53) の第6章はこの問題について述べている。すなわちDarcy 則（H. Darcy 1856）によって決まる浸透水量の大ざっぱな計算法が示されている。浸透水量の推定を正確におこなうにはダムの断面における流断面の形状を一すなわち浸潤線の形状を一正確に決定する必要がある。このためには今日でも最も利用価値の高いCasagrande の式(8)が発表された。解析的にこの問題をあつかうには浸透場を支配する方程式が，ラプラス型の方程式であることから，種々の流れの場の境界の形状を解析に十分とり入れたり，現実の浸透土層がそうであるように直交異方性を解析にとり入れるために，フローネット法や，電気アナログ法が考えられたりした。(18)しかしこのようにして決定された浸潤線の位置や，透水量が堤体の安全性にどのように影響するのかは直接的には明瞭でなく，前章１・２・１に述べた６項目の判定規準の第２項を満足させることぐらいであった。
一方堤体の力学的挙動に関する研究はまったく土質力学の発達に依存している。最も重要な設計上の規準となっていたのは築堤材料の粒度分布と透水係数であり，このような土の物理定数の測定方法などに研究の目的が置かれていた。
これ等の基準も施工法との関連で論ぜられ，水締ダムと，転圧ダムのそれぞれの場合について，粒土分布の範囲を決定する試みがなされた。(53)
Mohr の破壊理論(65)が提唱され，これが実験的事実によってMohr-Coulomb の破壊規準という形態になり，さらにはこれが，塑性論における，最大せん断力によって破壊が支配されるという理論：Von-Mieses やTresca の規準と綿密な関係にあることが確認され(59)，塑性論との関連が土材料につい

ても確認された。そしてMohr−Coulomb の破壊規準またはその変形した形のものが実際の土の力学的性質をほぼ忠実に表現していることが多くの実験的事実により確められた。[98] 従ってこのMohr−Coulomb の破壊規準は1940年頃から一貫してフイルダムの崩壊に関する最も主要な規準となっている。
上のような事実が確認されるには，土質力学において土のせん断試験の方法が発展したことがあげられねばならない。すなわち直接せん断試験：direct shear test により破壊ほう絡線を決定すること，さらにせん断中の主応力間の関係が明確であり且つ試料の体積変化や間隙水圧の測定，排水条件の制御等が可能な三軸試験技術の急速な発達があったのである。[5]
このような土質力学の成果をフイルダム工学は徐々に取り入れ，Mohr−Coulomb の破壊規準を用いて堤体の滑動安定性に関する問題に適用した。
たとえばJustin によれば[19] フイルダムのクサビ形断面をクレストを通る鉛直線によって上流側三角形と下流側三角形に分け，それぞれの底面におけるせん断安全率を算定する方法が示されている。一様な土層から成る斜面の安定性に関する研究が発展し平面すべり面における安全率の研究がなされ[89] 同時にスエーデンにおける莫大な地すべりの観測により1916年Peterson によっていわゆる円形すべり面法：Swedish slip circle method が提案された。
この方法はFellenius[25] によって整理された形になったが，一般にスライス法：method of slice[35]と呼ばれ得る一貫した特性をもつ方法であった。この方法の詳細については後に述べる。このようにして今日フイルダム設計上最も有効な手段となっているスベリ面法の基礎が確立されたが，他方フイルダムを弾塑性的に取りあつかったものの数は以外に少ない。

§2・2　静的解析に関する研究

2・2・1　線形弾性論の応用による研究

堤体および堤体下の地盤の応力成分に関する古典的な研究はTölke の著書および Jürgerson の研究に示される。[92][51] 前者は二次元弾性論の応力の釣り合い方程式を極座標表示で数学的に解いたものである。したがって材料は均質等方であり，且つダムはクレストを頂点とする半無限クサビ体として表現されているのである。後者は堤体下の地盤に発生する応力の問題をとりあげるために半無限弾性地盤に三角形分布荷重が作用した場合の数学的解析解をBoussinesque 式の積分により得たものである。この場合にも地盤は均

質等方であるとされている。これ等の研究においては材料の等方性が仮定されていることが，現実的ではないという指摘がある。

Jürgenson の解の非現実的な点は，実際にはダムと地盤は異質な弾性体であって，これが接触面において，変位と応力の連続条件を満足しつつ，応力の釣り合いを満たしているという現実を，一方の弾性体を分布荷重とみなしたことにある。この欠陥を除くためにMiddlebrooks は堤体を数個の水平細片に分割して表現する解析をおこなった。[64]これによればJürgenson の解では得られなかった，堤体と地盤の接触の効果がある程度表現されることになった。さらに現実をより良く表現するために堤体と地盤が同一の弾性的性質を持つとした場合の弾性半無限領域についてAiry の応力関数の数値解を緩和法：relaxation method によって得ることがBishopによってなされた。[6]

これ等の三者の結果を比較すればBishopのものが最も合理的であるし，最大せん断応力の分布がJürgenson のものとは大きくかけ離れていることが分る。[81]Bishopの解においても，堤体と地盤との弾性的性質が一般的には異なるという条件を含めてはいない点に注目すべきである。このような一連の研究はコンクリート重力ダムにおいてなされた接触問題のフイルダムにおける展開であると考えられ，コンクリートダムのように地盤と堤体の弾性的性質の相異が，フイルダムの場合では顕著ではないとみなされていたと考えられる。

多方1950年代の後半から特に航空機の解析，設計者の間から新しい解析法すなわち種々な部材（はり，柱，板，曲りバリ，曲面板）から構成される二，三次元構造物の応力解析が要求されていたのに対し，エネルギー法から出発する新しい構造解析が誕生し，応力法，変形法という二種類の解析法が完成した。[4],[94] 今日この方法は確立し，マトリックス構造解析というジャンルを形成するに至った。このような構造解析の展開の過程において，Argyris等が用いた二，三次元的広がりをもつ任意形状の構造要素を変形法で解く解析法が，有限要素法：Finite Element Methodと呼ばれるものになった。

この方法を土木工学の面で最初に活用し，その利用分野を拡大したのはClo-ughとZienkiewicz等[15][104] によって代表される多くの研究者であった。Zienkiewiczの最初の著書においては，この方法の多方面にわたる活用性が述べられている。すなわち，二次元線形弾性問題への応用，薄い板の曲げ問題への応用，場の問題（ポテンシャル論によるもの－浸透流，熱伝導）への応用，三次元弾性論への応用，応力－ひずみ関係の非線形な問題への適用，大

変形問題への適用，固有値問題（固有モード，座屈問題）への適用，動的弾性問題への適用等である。この方面における研究の発達は今日も続いており大きな体系を形づくっている。有限要素法の他の解析法に無い特徴は次の通りである。

◎　領域の形状がどんなに複雑なものであっても任意の精度でこれを表現できる。

◎　領域内において，得たい解析点の密度を自由に変化させること一言い換えれば任意に詳しく解析できること。

◎　領域の性質が非均質，非等方であっても，解析の方法に基本的な変更が不要なこと。

◎　非線形問題が比較的取りあつかい易すいこと。

◎　力学問題においては，従来得難かった変位解が容易に得られること。

このような特徴を有する有限要素法は土木，機械系の解析に一早く取り入れられたが，フイルダムの建造に伴う沈下解析に本法を駆使し，その有効性を示したのはClough(16)であった。ここにおいては上に述べた有限要素法の特徴であるところの，変位解が容易に得られるという事実を応用し，実測例との対比がなされた。

また彼の研究においては，いわゆる増分解析法 incremental procedure が述べられ現実のダムのまき出し輾圧による施工状態を考慮したり，土材料のもつ応力ーひずみ関係の非線形性をとりいれる試みもなされた。この increm－ental procedure の基本的発想は，応力解については既にGoodman によって得られたものである。(27)ここに示された多くの方法は，世界の研究者によって大幅に利用されている。近時の有限要素法の利用によるフイルダムの解析の大半は何等かの非線形関係を含んだ解析であるので次項にこれ等を述べる。

2・2・2　応力ーひずみ関係の非線形性を取り入れた解析

フイルダムのような構造物の沈下量や内部応力を決定しようとすると，線形弾性論に示されているような応力ーひずみの線形な関係が土材料について，あてはまらないことに気付く。特に現代のフイルダムは，薄い層状のまき出し後，強い圧力で輾圧する施工法をとるから，線形弾性論は変形量の推定に際してこの効果を表現することはできない。上に述べたClough の研究は(16) そのための方策を示したものであった。また応力ひずみ関係の非線形性ということだ

けにとどまらず，広く土材料の物理的性質を表現するのにはレオロジーモデルを用いる試みもなされ始めた。(28)
また有限要素法による弾塑性体の解析によって，斜面の安定性やフイルダムの沈下量を決定しようとする試みもなされている。(31)(76)(57)
こうした方法の難点は現実の土材料の非線形な応力－ひずみ関係の正確な測定技術と，測定事実を既にある弾塑性論における破壊または，ひずみ硬化の理論といったものに如何に理論的に結びつけてゆくかにあり，金属材料における場合と異なった土材料特有の難しさが含まれておりこれ等が今後の研究にゆだねられている。またこれとは全く異った視点からフイルダムの経時的沈下を論じたものに山口等の研究がある。(100) ここでは中心コア型のダムにおけるコアの一次元圧密による沈下をとりあげ施工中および施工後のコアの沈下の状況をV字型のコアの断面について解析した。このような研究も，その緒についたばかりである。

§２・３　動的なフイルダムの解析について

２・３・１　線形な動的解析

フイルダムについて動的な解析が必要なのは地震という現象があるからである。したがって地震の発生しないような地帯においては，この問題について大きな努力を払う必要はないのであるが，環太平洋地震帯にある，我国や，米国や，南米においては重要な問題である。したがってこのような問題意識がもっとも早く我国の研究者によって取りあげられたのも当然といえよう。この問題について最初に合理的な解明を与えたのは，物部，松村(６６)等である。
これは堤体を，三角形断面を有する堤軸方向の長さ無限大のはりとみなして，堤軸に直角な断面で一次元の弾性振動系（セン断振動モデル）を用いて連続体表現による直交函数系解析（modal analysis）をおこなったものである。
この結果と模型による実験結果とは固有振動数，振動モードにおいて一致をみることができるため，このセン断振動モデルは長く用いられたモデルである。
この方法の欠陥は，振動が，一次元振動であって，当然予想される上下流方向における変位の分布が得られないということであり，地震波を表わすものとして，定常調和振動を用いたことである。
この第一の欠陥は，石崎，畠山等(46) によって除去された。すなわち，弾性体の二次元運動方程式を堤体を意味する三角形領域内で差分表示し，これから

数値的に定常解を得た。これによれば堤体は無視できないオーダーで上下運動を発生し，堤体の同一エレベーションにおいても表面付近と中心部では，応力分布にもかなりの相異のあることが認められ，堤体の二次元的な振動形態が認識されるに至った。また地震工学の分野における発展から，従来のように地震波を近似する定常調和震動を，解析に用いるのではなく，既往の著名な個々の地震の加速度（または，速度，変位）の時間的な記録を解析に用いるようになった。このことはより現実的に地震時の応答を把握しようとする傾向である。このことは地震波観測技術の進歩に依存しており，古くは直記式地震計，又は電磁オシロ上に記録された波形をサンプリングすることにより，加速度波形の（または速度，変位）数値化（ digital 化） データーを得ていたが，近年は，地震計そのものが何等かの電気的トランスデューサーとなり，これの記録を磁気テープ上にアナログ方式で書いたり，あるいは直接デイジタル化したデーターを記録するに至っている。このような技術の発展により，地震加速度記録の正確な記録が可能可能になり，その統計的な構造に関する研究も多くなされた。(41)(42)(44) それはHousner による速度応答スペクトルの概念に始まり，強震記録の構造応答を考えることにより，地震波の一般的な統計的性質を抽出しようとするものであった。さらに不規則過程論の成果を受けて設計に用いる地震波形というものを，設計者の側で目的に応じて発生させるのが合理的であるという考えかたから，定常不規則過程論から出発したHousner の方法(43)，非定常不規則過程論から出発したAmin や篠塚の方法(2),(84)が提案され現在に至っている。このような地震工学上の発展を受け，今日地震応答解析は大抵の場合，実際の地震加速度記録を用いるのであるが，線形系においては，このためには，数値化された加速度記録を重畳積分（ convolusion integr－al）する必要がある。これを実施するにはR・K・G法やNewmark のβ法(71)等の数値計算法によらざるを得ず，この分野において数値解析が必要欠くべからざるものであることが分る。さて前項２・２・１にも述べたように１９６０年代に入って有限要素法が本格的に活用され始めると，動的解析にも同じ特徴がそのまま生かせることから，フイルダムの解析にもこの方法がとり入れられるに至った。この最初のものはやはりClough によるものであった。(17)ここにおいては有限要素法により，多自由度系：multi－degrees－of－freed－om－system に置換され，フイルダムの系の固有モードを求めることから実地震時の応答を得，応答応力，応答変位を得た。本研究は今日の線形な動的解析

の基礎を成すものとなり，多くの解析例が，これと本質的に同じ方法を用いている。[11]そしてより明確にせん断振動モデルの欠陥が指摘されるに至った。
またこうした解析を通じて現在も耐震設計中に最大の地位を占めている震度法の概念の不合理性が，地震応答解析を通じて 述べられるに至った。[11],[78]
また林はフイルダムのような構造物では三次元的な振動を考えるべきであるとして三次元の固有モードを得ている。[32]
このような近年のフイルダムの線形な動的解析法の要約は第四回地震工学会の一文によくまとめられている。[10]

2・3・2　非線形なまたはレオロジカルな動的解析

土材料の非弾性的な挙動を示すモデルとして用いられたのが，レオロジーモデルであった。我国の研究者はいちはやくこの方面の研究に着手し，特に動的な問題においてこうした研究が進められた。畑野[29]は粘弾性体の運動方程式の解析解を得て，線型振動との相違を明らかにした。すすんでフイルダムの材料にMaxwell−Kelvin 体の表現を用いこの定数を多数の土質試験から定め，粘弾性体の応力の釣り合い方程式の差分解析が示された。[30] これによれば定常加振を受ける場合でも堤体は非定常な応答を示すことが明らかにされた。今日基本的には同じ考えを，有限要素におけるステイフネス行列に表現しなおして不均質性を取り入れた解析も示された。[95],[62]これ等の難しさは，運動方程式中にレオロジーモデルで表現される粘性係数に関する微分演算が入るのでこれをどのように処理するかという問題と，レオロジーモデルにおける定数の決定に際し，多数の実験が必要であるという点である。数値解析もこの段階までくれば，これは完全に数値実験ないしは，シミュレーションという意味あいで評価されるものになっている。

§2・4　フイルダムの安全性に関する研究

2・1でも述べたようにフイルダムの安全性に関する研究は最も古い歴史をもっているわけである。スライス法自身の様々な角度からの検討という方向の他に塑性論からの崩壊のメカニズムの追求もなされた。すなわち最も整った体系をなしているものは二次元弾性体の釣り合い方程式とMohr−Coulomb の破壊条件を解析的に解こうとするSokolovsky の解法である。[36]
これによれば問題は特性曲線法によって解ける形となりある半無限領域に分布

荷重が作用した場合の塑性域を明確に知ることができるが，この方法を斜面の安定問題へ適用することも試みられている。この方法によれば極限つりあいにおけるスベリ線を唯一つ求めることが可能である。この方法は非常に有効なものであるが，安全率といった概念とどう結びつけるかに問題がある。

土質材料における破壊のメカニズムを塑性論における破壊の理論と関連ずけるための理論的研究もなされ，Drucker[20]によっていくつかの研究がなされた。すなわち降伏関数の形を，応力不変量と，土の強度定数cとφで与えたのであった。こうした方法により一般の土質力学的問題により土の崩壊に関しては有効な手段を与えているといえるが，そのままの形でこれ等の方法が，フイルダムにおける斜面の安定性の解析に使えるとは限らなかった。

この方面においても有限要素法が登場して以来，破壊領域の発達のもようを研究することが可能になった。すなわち破壊領域というものは，最初のある荷重条件で，わずかな領域について発生し，これが荷重の増加に伴って（ヒズミ速度に伴って）だんだん発達してゆくのであるが，このありさまの追跡が可能になった。[33],[105] このような解析を通じて破壊に達する応力状態にどれだけ材料が近ずいているかを示す数として，安全度をあらわす数を用いることも提案された。[31],[76]同じ発想は赤井[1]による弾性解の応用においても既にみられた。

元来構造の安全率の概念は非常に多義であるが，フイルダムの場合すべり面法によって算出される安全率が，設計者にとって最も重要な量とされている。安全率の概念そのものについて広い立場から見れば高瀬[85]のいうようなものになるが，土質力学上のこの概念についてはフロリーン：Florin：が三つの定義を行なっている。[22]いずれにせよ土のせん断抵抗との兼合いにおいて論ぜられる安全率が最も重要であることが，一般に確信せられている。

安全率を決定する際，すべり面法は主要なものとなるが，すべり面法自体が初期のものから今日に至るまで，いろいろな変化をとげている。すなわち三軸試験技術の発達により，間隙水圧の認識が高まり，斜面の安定に関する諸力も有効応力でとりあつかうべきことが示された。[7] このことを実行するためには，特に粘土コアーのような不透水性部分における間隙圧の分布を決定するという問題が残された。このような点を考慮して，スベリ面法を利用し易すい形にまとめることも為された。またいわゆるスライス法では，各スライス側壁間の力が考慮されていないが，わずかながらもこの効果を取り入れ，またせん断抵抗

にかんする安全率の定義から出発する安定解析が考えられ，これは修正フエレニウス法と呼ばれている。[82]
この側壁間の力を考慮し，かつ各スベリ面上で発揮される内部摩擦角が一定でないという条件をとり入れた解析が近年開発された。[67]
今日，存在するもっとも進んだ斜面のスベリに関する研究は，これ等の方法であるが，これ等を電子計算機にとって，使い易すい形にし，利用度を高める試みが多く為されているのが現状である。[97][83]

第3章　静 的 解 析

§3.1　手法についての概説

第一章で述べたように本研究では数値計算法，特に有限要素法とその応用による数値解析をおこない，専ら二次元弾性体，または二次元弾塑性体の解析をおこなうものである。本方法についての書籍，論文は数多くあるが，本研究で使用する方法についてここで略述する。

3.1.1　二次元有限要素法について

A）要素：Element

有限要素法はマトリックス構造解析で用いられる変形法の一分野であり，二、三次元要素についての研究の総合されたものである。本法についての系統的な記述，およびきわめて最近までの研究成果の記述は，Zienkiewiczの二冊の著書にある。[104][106] また国内的にも系統だてられた教科書がある。[68] 二次元弾性問題における要素：Elementとは次の属性をもった物理モデルである。

① 任意の形状を有する多角形，または曲線でかこまれた図形領域の弾性体である。

② 要素内部ではヒズミが連続的に変化する。

③ 要素の頂点や辺，稜上の点を節点：Nodal Pointとすることができる。

④ 要素の弾性的性質をあらわすのに，節点における力ベクトル $\{p\}$ と変位ベクトル $\{\delta\}$ を関連ずける要素の剛性行列，stiffness matrix で表現するとする。すなわち次式である。

$$\{p\}=[k]\{\delta\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.1)$$

要素の剛性行列［ k ］を決定するには一般に次の手順をとる。

① 変位函数を仮定する

この函数は要素内の座標（local coordinate）の函数であり，多くが多項式である。そして多項式の次数が高いほど精度が向上する。そしてその係数は節点における変位，および要素の幾何学的諸元により決まるものである。このことを行列表示すれば，

$$\{f\}=[N]\{\delta\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.2)$$

ここに

$\{f\}$: 変位函数のベクトル〔二次元問題の場合直交する二方向の変位成分から成る。$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}$ 〕

$\{\delta\}$: 節点変位のベクトル（たとえば三角形三節点要素では一節点あたりの自由度 — 変位成分の数 — が2であるから6個の成分から成る。）

$[N]$: 係数行列（三角形三節点では 2 × 6 の大きさをもつ。）

② （ 3.2 ）の結果から要素のひずみを定義する，平面応力においては弾性学から

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\ ;\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\ ;\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

なる関係が得られる。これに（ 3.2 ）式を代入した結果を次のように行列表示する。

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}\quad ;\quad \{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

すなわち〔 B 〕は行列〔 N 〕を微分操作することによって得られる。

③ 応力 — ひずみ関係を定式化する

弾性学によれば平面問題における応力 — ひずみの関係が，弾性係数，ポアソン比を用いて明確に規定される。すなわち一般に次式である。

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}\quad ;\quad \{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

〔 D 〕行列は有限要素法の中でも重要な位置を占めるものである。以下にいろいろな場合の〔 D 〕行列を列挙する。

◎等方性物体

平面応力

$$[D]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu^2)\cdot G/E\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4a)$$

平面ひずみ

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\begin{bmatrix}(1-\nu) & \nu & 0\\ \nu & (1-\nu) & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)\cdot(1+2\nu)\cdot G/E\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4b)$$

◎直交異方性物体

平面応力

$$[D]=\frac{E_2}{(1-n\nu_2^2)}\begin{bmatrix}n & n\nu_2 & 0\\ n\nu_2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-n\nu_2)\cdot G/E\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4c)$$

平面ひずみ

$$[D]=\frac{E_2}{(1+\nu_1)\cdot(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}\begin{bmatrix}n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2\cdot(1+\nu_1) & 0\\ n\nu_2\cdot(1+\nu_1) & (1+\nu_1) & 0\\ 0 & 0 & (1+\nu_1)\cdot(1-\nu_1-2n\nu_2^2)G/E\end{bmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4d)$$

この式で

E：弾性係数　　ν：ポアソン比　　G：せん断弾性係数

異方性物体については添字の1が直交異方体の一つの主軸に関する弾性係数，ポアソン比であり，添字が2のものはこれに直交なもう一つの主軸に関する弾性係数とポアソン比である。また $n=E_1/E_2$ である。

直交異方性物体をとりあつかう場合に生ずる問題はこの異方性の主軸が用いる系の座標（global coordinate）の方向と一致しないことが生ずることである。ひずみ，応力は二次のテンソルであるから次に示す変換が必要である。

X－Y系を材料の主軸の座標系，変位U，V，ひずみ $\{\varepsilon\}'$ をX－Y系

での定義とし，x－y系を系の座標系，変位u，v，ひずみ$\{\varepsilon\}$ をx－y系での定義とする。（図3.1参照）

両座標系の成す角をβとすると次の関係がなりたつ。

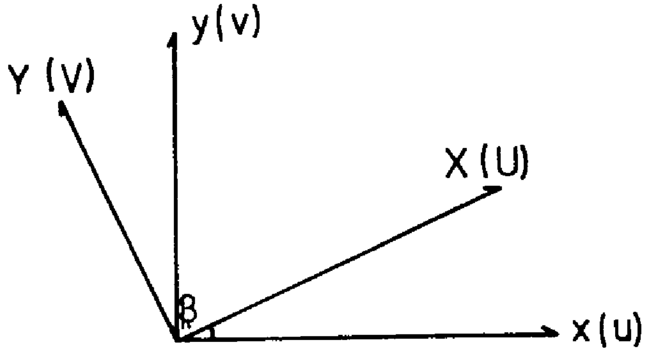


図3.1　座標系の回転

$$x = X\cdot\cos\beta - Y\cdot\sin\beta \ ; \ \ y = Y\cdot\cos\beta + X\cdot\sin\beta$$
$$U = u\cdot\cos\beta + v\cdot\sin\beta \ ; \ \ V = v\cdot\cos\beta - u\cdot\sin\beta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

ひずみの定義式に（3.5）式を用いると

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial U}{\partial X} = \cos\beta\frac{\partial u}{\partial X} + \sin\beta\frac{\partial v}{\partial X}$$

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial V}{\partial Y} = \cos\beta\frac{\partial v}{\partial Y} - \sin\beta\cdot\frac{\partial u}{\partial Y}$$

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = \cos\beta\cdot\frac{\partial u}{\partial Y} + \sin\beta\cdot\frac{\partial v}{\partial Y} + \cos\beta\cdot\frac{\partial v}{\partial X} - \sin\beta\cdot\frac{\partial u}{\partial X}$$

を得る。さらに

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} = \varepsilon_x\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\beta$$
$$\frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} = -\varepsilon_x\cdot\sin\beta + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta$$

同様に
$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\cos\beta + \varepsilon_y\cdot\sin\beta$$
$$\frac{\partial v}{\partial Y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\sin\beta + \varepsilon_y\cdot\cos\beta$$

という関係がある。これ等から $\partial u/\partial X, \partial v/\partial X$ 等の項を消去すれば

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x' \\ \varepsilon_y' \\ \gamma_{xy}'\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \sin^2\beta & \sin\beta\cdot\cos\beta \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & -\sin\beta\cdot\cos\beta \\ -2\sin\beta\cdot\cos\beta & 2\sin\beta\cdot\cos\beta & \cos^2\beta-\sin^2\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}$$

i.e. $\{\varepsilon\}' = [T]\cdot\{\varepsilon\}$ ……………（3.6）

なる関係を得る。

さてX－Y系における要素の内力仕事はx－y系における内力仕事に等しいから，X－Y系における応力 $\{\sigma\}'$ と弾性行列［D］′ に対するx－y系における応力 $\{\sigma\}$ と弾性行列［D］を用いると

$$\{\sigma\}'^T\cdot\{\varepsilon\}' = \{\sigma\}^T\cdot\{\varepsilon\}$$ ……………（3.7）

（3.4），（3.6）を用いると

$$\{\varepsilon\}'^T\cdot[D]'\cdot\{\varepsilon\}' = \{\varepsilon\}^T\cdot[D]\cdot\{\varepsilon\}$$
$$\{\varepsilon\}^T\cdot[T]^T\cdot[D]'\cdot[T]\cdot\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^T\cdot[D]\cdot\{\varepsilon\}$$

を得る。（この時行列［D］の対称性を用いている。）この恒等式から座標系x－yにおける応力行列は

$$[D] = [T]^T\cdot[D]'\cdot[T]$$ ……………（3.8）

と得られる。このようにして平面問題のあらゆる場合について応力行列［D が定義できる。

④ スティフネス［k］を算出する。

このステップにおいては，常に仮想仕事の原理が用いられる。有限要素法がエネルギー法から出発したのもこの点においてである。節点の仮想変位を

$d\{\delta\}$ とすると，これに応ずる節点力 $\{p\}$ のなした仕事は

$$W_1 = (d\{\delta\})^T \cdot \{p\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.9)$$

である。また要素内に生ずる内力：応力 $\{\sigma\}$ がおこなう内力仕事はこれに応ずる仮想ひずみが $d\{\varepsilon\}$ であるとき微小な容積について

$$(d\{\varepsilon\})^T \cdot \{\sigma\} = (d\{\delta\})^T \cdot [B]^T \cdot \{\sigma\}$$

したがって要素全体については，これを要素内部で積分したものになる。したがって（ 3.4 ）.，（ 3.3 ）式から

$$W_2 = (d\{\delta\})^T \cdot \int_V [B]^T \{\sigma\} \cdot dV = (d\{\delta\})^T \cdot \int_V [B]^T [D][B] \cdot dV \cdot \{\delta\} \quad \cdots\cdots\cdots (3.10)$$

ここでＶは要素の容積である。

仮想仕事の原理から$W_1 = W_2$ であるから

$$\{p\} = \int_V [B]^T [D] \cdot [B] \cdot dV \cdot \{\delta\} \quad \cdots\cdots\cdots (3.11)$$

なる関係を得る，（ 3.１１ ）式の積分は１個の正方対称行列となり，これを要素のスティフネス行列と呼び［ k ］と書く

$$[k] = \int_V [B]^T [D] \cdot [B]\, dV \quad \cdots\cdots\cdots (3.12)$$

$$\{p\} = [k] \cdot \{\delta\} \quad \cdots\cdots\cdots (3.13)$$

要素のスティフネスの各項のもつ構造力学的な意味はその（ i ， j ）要素が任意の j 番目の節点にのみ単位変位が生じ，他の節点の変位はすべてゼロであるようになさしめるのに必要な i 番目の節点に作用すべき力の大きさを意味している。このことからMaxwell の相反定理[56]によりスティフネスが対称な行列であることがわかる。（ 3.1 2 ）式は（ 3. 3 ）式で定義される［ B ］を用いて決定できる。

B）系：System

上のようにスティフネス行列で集約される性質をもった有限要素の集合で解析領域を表現するのが有限要素法である。その際隣接する要素間との力学的な連結はすべて節点 でおこなわれ節点においては変位のみが連続である。いま

ある領域がN個の要素から構成されており，要素の番号が j = 1 ，2 ，……N であるとする。またこの系に含まれている節点の総数は n であるとし，この番号が i = 1 ，2 ，……，n であるとする。系において定義される力ベクトル $\{P\}$ ，変位ベクトル $\{U\}$ ，スティフネスは［ K ］であるとする。このとき系の諸量についても（ 3.1 3 ）式と同形の次の関係式がなりたつものとする

$$\{P\} = [K]\{U\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.14)$$

要素と系の関連は次の通りである。

このような系の変位（または力）と要素の変位（または力）との対応を示す行列［ a ］が必らず定義できる。

$$\begin{aligned}\{\delta\} &= [a]_j\{U\} \\ \{p\} &= [a]_j\{P\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.15)$$

$[a]_j$ は 0 か又は 1 がその要素であってその次元は要素の節点数× n である。 j は要素番号である。 $[a]_j$ の要素が 0 であるのは，j 番目の要素には対応する節点が存在しないことを示し，要素が 1 であるのは，対応する節点が存在することを示している。

系における仮想変位が $d\{U\}$ であるとすると，これに応ずる節点力が $\{P\}$ であるとき節点力のなす仕事は（ 3.1 4 ）式より

$$W = (d\{U\})^T\cdot\{P\} = (d\{U\})^T\cdot[K]\cdot\{U\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.16)$$

である。他方この量は各要素における仮想節点変位 $d\{\delta\}_j\ (j = 1 \ldots\ldots N)$ とこれに応ずる節点力 $\{p\}_j$ により生ずる仕事の総和に等しい。よって（ 3.15 ）（ 3.1 6 ）両式より

$$W = \sum_{j=1}^{N} d\{\delta\}_j^T\cdot\{p\}_j = d\{U\}^T\cdot\sum_{j=1}^{N}[a]_j^T[k]_j[a]_j\{U\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.17)$$

（ 3.1 6 ），（ 3.1 7 ）両式より

$$[K] = \sum_{j=1}^{N}[a]_j^T\cdot[k]_j\cdot[a]_j \qquad \cdots\cdots\cdots(3.18)$$

なる定式化を得る

（3.18）式の操作は実際にはある1個の節点に関与する，すべての要素の対応するスティフネスの成分を加算したものが系のスティフネス：［K］を構成するということを意味している。このようにして系における力と変位の関係（3.14）式が成りたつ。

一般の静力学的問題は，系と外力が与えられていて，未知変位，未知内力を求めるという問題に帰着するから，解かれるべき方程式は $\{U\}$ を未知ベクトルとする（3.14）式を解くことになり，これが解けたとき，（3.15），（3.4）両式に戻って未知内力である応力を求めることになる。要素における場合と同様の論理により，［K］もまた対称である。

C）境界条件の導入

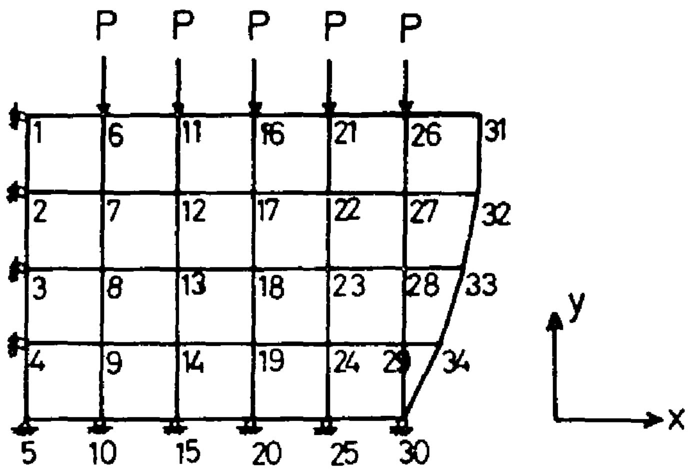


図3.2　有限要素モデルの例

上に述べた手順によって，方程式（3.14）式が組みたてられるが，これには変位と力についての境界条件が加えられなければ（3.14）式の解は存在しない。たとえば図3.2のような系は節点番号1，2，3，4点ではx方向の変位が拘束されており，節点番号10，15，25，30の点ではy方向の変位が拘束されており，節点番号5では，両方の変位が拘束されている。このような条件がなければPなる力の作用によって系は剛体運動を生ずる。このことが（3.14）式の解が境界条件の導入なしに存在し得ないことの構造力学的意味である。そこで方程式（3.14）式を既知変位 —（拘束変位点）と未知変位，および未知反力と既知外力の項に分解して書くと

$$\{U\}=\begin{Bmatrix} U_u \\ U_p \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{P\}=\begin{Bmatrix} P_p \\ P_u \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P_p \\ P_u \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pp} & K_{pu} \\ K_{pu}^T & K_{uu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_u \\ U_p \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.19)$$

但し

U_u： 未知変位　　P_u： 未知反力

U_p： 既知変位　　P_p： 既知反力

（3.19）式を分解すれば

$$\{P_p\} = [K_{pp}]\cdot\{U_u\} + [K_{pu}]\cdot\{U_p\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.19a)$$

$$\{P_u\} = [K_{pu}]^T\cdot\{U_u\} + [K_{uu}]\cdot\{U_p\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.19b)$$

となる。$\{U_p\}$ は既知だから（3.19a）式は

$$\{P_p\} - [K_{pu}]\cdot\{U_p\} = [K_{pp}]\cdot\{U_u\}$$

なる式を $\{U_u\}$ を未知とする問題として解くことができ，これにより未知量 $\{U_u\}$ が解かれると，これを（3.19b）式の右辺に代入して未知反力 $\{P_u\}$ を決定することができる。特に既知変位がすべて0であり（固定）しかも未知反力の計算を必要としない場合（多くの問題がそうである。）には問題は簡単に

$$\{P_p\} = [K_{pp}]\cdot\{U_u\} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.20)$$

のみを解けば良いことになる。すなわち拘束変位のある関係式のすべてを（3.14）式から取り去った方程式を解けばよいのである。

D）外力ベクトルの決定

上の説明からも明らかなように，力と変位という量は系の節点において伝播するものである。よってすべての分布した力も節点へ作用する集中力として表現されなければならない。任意の分布荷重や線荷重について，このような操作をおこなうのは簡単なことである。

ここにおこなうフィルダムの自重による沈下などを取りあつかうのに必要なのは容積に比例して生ずる力：自重の算定法である。

このためには各要素の重量が各節点に分布すると考えるのが最も容易である。要素の自重を表現するベクトル $\{P_0\}$ は要素の面積がA，一定な要素の厚さがt，単位重量がρであるとき，y方向が重力の方向であるならば，（三節点　6自由度の要素の場合）次のようになる。

$$\{P_0\} = \frac{\rho A t}{3}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.21)$$

このようにして，各要素の自重によるベクトルが求まれば同一節点についての寄与をすべて加算して系の自重ベクトル $\{P_0\}$ を作ることができる。

E）三角形三節点要素系におけるスティフネスの実際

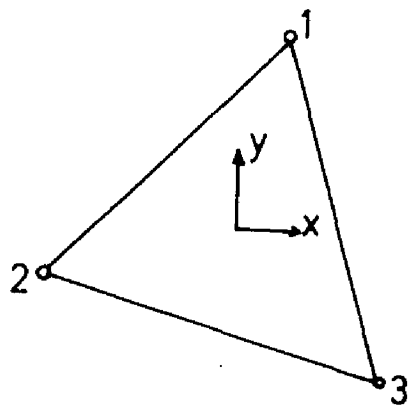


図 3.3　三角形有限要素

A項で述べたように変位函数を決定することが有限要素法の最も最初の点である。平面問題（一節点の自由度が 2 ）における三角形三節点要素を考えるならば，節点変位，節点力の成分はそれぞれ6である。

A項に述べた変位函数の定義によればこれは座標系の多項式であってその係数は，要素の幾何学的諸元と節点の変位成分でなくてはならない。いま既知の節点変位成分は6個であるから変位関数の係数は全部で6個でなくてはならない。そうするとx，y方向の変位，u，vについての対称な表現は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
u &= A_1 \cdot x + A_2 \cdot y + A_3 \\
v &= A_4 \cdot x + A_5 \cdot y + A_6
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots\cdots (3.22)
$$

(3.22)式から要素内座標：local coordinate を用いて $\{\delta\}$ の各成分を表示すると6個の方程式を得る。未定の定数 $A_1 \sim A_6$ についてこれを解けば［N］行列が決定できる。座標の原点を三角形の重心にとる表示を用いれば次の関係が成りたつ。（図3.3参照）

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\
c_1 &= x_3 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_3 & c_3 &= x_2 - x_1
\end{aligned}
\qquad \cdots\cdots\cdots (3.23)
$$

と書くとき

$$
\text{三角形 1, 2, 3 の面積} \times 2 = 2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}
$$

$$
a_1 = a_2 = a_3 = 2\Delta / 3
$$

が成りたつ。（3.23）式の関係式を用いると，（3.2）式の［N］行列は次の形となる。

$$
\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}
\begin{bmatrix}
a_1 + b_1 x + c_1 y & 0 & a_2 + b_2 x + c_2 y & 0 & a_3 + b_3 x + c_3 y & 0 \\
0 & a_1 + b_1 x + c_1 y & 0 & a_2 + b_2 x + c_2 y & 0 & a_3 + b_3 x + c_3 y
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}
$$

$$
= [N] \cdot \{\delta\} \qquad \cdots\cdots\cdots (3.24)
$$

（3.23）式をひずみの定義式に用いれば（3.3）式の［B］行列は容易に次の形になる。

$$[B]=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.25)$$

このようにして三角形要素のスティフネスが完全に定義できる。

四辺形要素についても同様の考えでスティフネスを定義できるが，この要素の方が少ない要素数で近似度の向上することが期待できる。しかし三角形要素による近似があらいものであったにしても，系のメッシュが細分化されることにより系の精度の向上することが認められるから，ほとんどの二次元解析がこの三角形要素を用いるか，または四辺形要素であっても，三角形要素に分解されたのであることが多い。また三角形要素は任意の曲線を近似するときにも便利である。

3.1.2 数値解析法について

有限要素系の連立方程式（3.19）～（3.20）式を解くことは数値計算上の問題である。それは実用的な二次元の有限要素法における節点数が100～800点位であり，その方程式数は200～1600 元位となるからである。また節点数が500以上になれば有限要素のメッシュを組むことすら人力では難しいことになってくるからこの作業をも自動化する必要があるほどである。[26]

方程式の次元が高いということは，係数行列式の次元が大であることであり，計算機の主記億（コアメモリ）の面と，計算時間（C.P.U. 時間）の両面から通常の方程式の解法を適用することは不可能である。このためにいろいろな工夫が考えられているわけだが，スティフネス行列が，主対角線を中心とする帯状対称行列であることに着目したバンド・アルゴリズム：band algorism が最も一般的であり，平面応力問題ならこの方法でも十分実用性がある。最近三次元有限要素法などの必要性からより究極的な方法としてウェーブ・フロント法が開発されているし，[75] 本質的にバンド幅の概念にとらわれない，反復法であるところのS・O・R 法や共役傾斜法による解法も研究されている。[58]

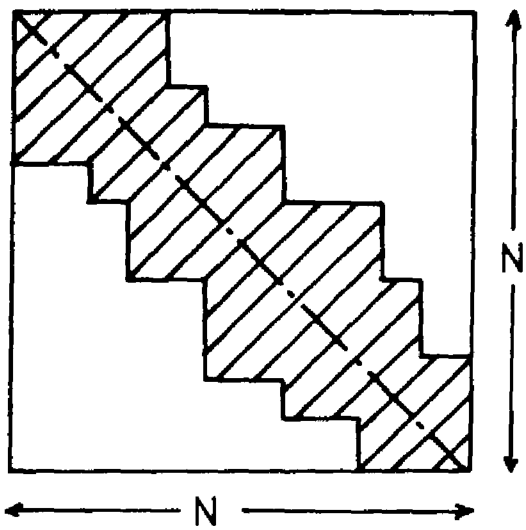


図 3.4　係数行列

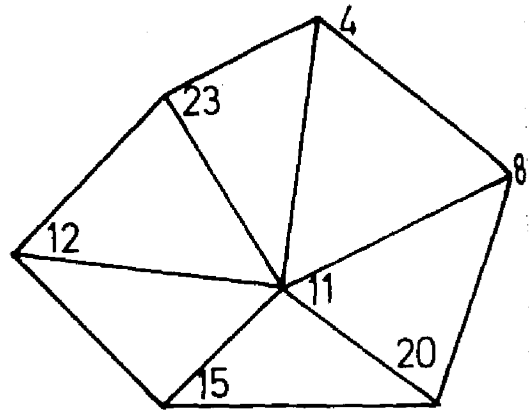


図 3.5　バンド幅とナンバーリング

ここではバンドアルゴリズムを用いる。スティフネス行列の非ゼロ要素は上に述べたように図 3.4 に示すような主対角線付近にのみ分布しており，対角線から離れた部分には 0 がつまっている。このことを利用して計算量と記憶量を節減するものである。（もちろん図 3.4 の斜線内にも 0 要素が含まれ得るわけだが，斜線部外には，0 しか存在しないという領域を示している。）このように主対角線付近にのみ非ゼロ要素があつまるという理由は 1 つの節点（節点番号 m とする）に関係する要素によって結びつけられる他の節点の節点番号の最大値を n とすると | n − m | はある小さな数になるという事実である。最悪の場合でも |n−m| は N（全節点数）を越えないはずである。たとえば図 3.5 の場合点 1 1 に関係する最大の節点番号差は 1 2 である。

この最大番号差のことをバンド幅 :band width　と呼ぶ。系の節点に番号を付けるときに注意すればこのバンド幅を一様に小さくとることができる。この例の場合，最大バンド幅は 1 2 だから係数行列の点 1 1 に対応する点のタテ，ヨコ方向には高々 1 2 だけ離れた範囲内にのみに非ゼロ要素が存在する。系のすべての点についてのバンド幅を調べその最大値が小さいものほど対角線上の

せまい範囲に非ゼロ要素があつまっていることになる。一般に二次元問題では方程式の次元の1／20～1／5程度に最大バンド幅をおさえることができる。この点に着目すれば次のような手続で係数行列のすべての非ゼロ要素をもれなく含む最小の領域をとって係数行列を分割して記憶することができる。

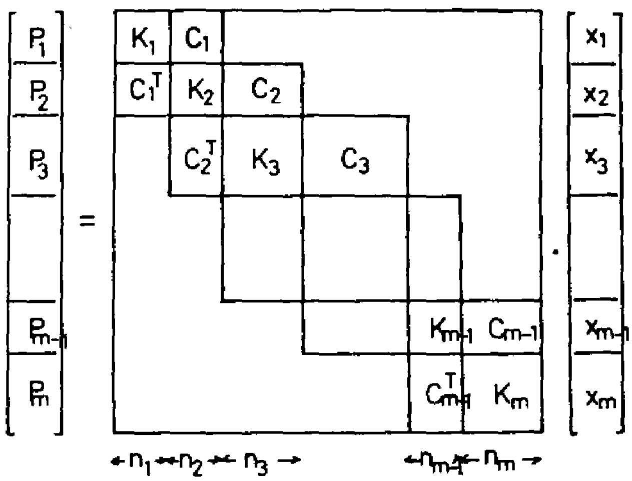


図3.6　方程式の分解

系の節点の総数をN，系の最大バンド幅をnとすると，係数行列を図3.6のようにm個の領域に分割する。ただし

$$m = [N/n] + 1$$

である。記憶されるべき行列は

$$K_1, K_2, \cdots, K_m$$
$$C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$$

（図中Tの印は転置行列を意味し，行列の対称性を用いてある。）だけでよく，これ等の行列の大きさは

$$m \times n^2 + (m-1) \times n^2 = (2m-1) \times n^2$$

である。今係数行列全体の大きさは$(m \times n)^2 = m^2 n^2$であるから記憶量としては，係数のすべてを記憶する場合の$(2m-1)/m$ の記憶量でよいことになる。図のように係数行列が分解可能であるならば，方程式系は未知変位ベクトル，既知外力ベクトル，をも同様に分解することによって

$$K_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 = p_1$$
$$C_1^T \cdot x_1 + K_2 \cdot x_2 + C_2 \cdot x_3 = p_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{m-1}^T \cdot x_{m-1} + K_m \cdot x_m = p_m \qquad \cdots\cdots\cdots (3.26)$$

但し

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{Bmatrix} \quad : \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_m \end{Bmatrix}$$

のように書ける。このように簡単化された方程式を解くにはまず（3.26）式の第1から x_1 を消去して第二式に代入すると

$$C_1^T \cdot K_1^{-1}(p_1 - C_1 \cdot x_2) + K_2 \cdot x_2 + C_2 \cdot x_3 = p_2$$

という関係を得る。これを整理すれば

$$(K_2 - C_1^T K_1^{-1} C_1) \cdot x_2 + C_2 \cdot x_3 = p_2 - C_1^T K_1^{-1} p_1$$

となる。ここで

$$\bar{K}_2 = K_2 - C_1^T \cdot K_1^{-1} C_1 \quad : \quad \bar{p}_2 = p_2 - C_1^T K_1^{-1} p_1 \quad \cdots\cdots\cdots (3.27\,a)$$

とおけば

$$\bar{K}_2 \cdot x_2 + C_2 \cdot x_3 = \bar{p}_2 \quad \cdots\cdots\cdots (3.27\,b)$$

という第一式と同様の形態となる。この式をまた上と同様にして x_2 を消去して第三式に代入すると，やはり同じことがおこなえる。一般に第 i 式においては

$$\bar{K}_i = K_i - C_{i-1}^T \cdot \bar{K}_{i-1}^{-1} \cdot C_{i-1} \ : \ \bar{p}_i = p_i - C_{i-1}^T \bar{K}_{i-1}^{-1} \bar{p}_{i-1} \quad \cdots\cdots\cdots (3.28\,a)$$

$$\bar{K}_i \cdot x_i + C_i \cdot x_{i+1} = \bar{p}_i \quad (i = 2 \ldots m-1) \quad \cdots\cdots\cdots (3.28\,b)$$

となり最後の第 m 式においては

$$\bar{K}_m = K_m - C_{m-1}^T \bar{K}_{m-1}^{-1} C_{m-1} : \bar{p}_m = p_m - C_{m-1}^T \bar{K}_{m-1}^{-1} \bar{p}_{m-1} \cdots\cdots\cdots (3.29\,a)$$

$$\bar{K}_m \cdot x_m = \bar{p}_m \quad \cdots\cdots\cdots (3.29\,b)$$

を得る。この式からは X_m がただちに下のように求められる。

$$x_m = \bar{K}_m^{-1}\ \bar{p}_m \qquad \cdots\cdots\cdots(3.30)$$

式(3.27)〜(3.29)式までの操作を前進消去： forward elimination という。(3.30)式より X_mが求められると前進消去によって得た式の第m−1番目にX_mを用いて

$$x_{m-1} = \bar{K}_{m-1}^{-1}\cdot(\bar{p}_{m-1} - C_{m-1}x_m) \qquad \cdots\cdots\cdots(3.31)$$

から X_{m-1} が得られこれを第m−2番目の式に用いて X_{m-2} を得ることができる。

このようにして第i番目には

$$x_i = \bar{K}_i^{-1}\cdot(\bar{p}_i - C_i x_{i+1}) \qquad \cdots\cdots\cdots(3.32)$$

より　が求まる。このような式(3.30)〜(3.32)式の操作を後退代入： backward substituon という。

このようにして大規模な方程式が，単位の小さな行列を何回かとりあつかうことによって，記憶量，計算量ともに，大幅に軽減されるのである。この方法では与えられた系のバンド幅に対して無駄な部分がまだ残存しているわけであり，非常に大規模な有限要素モデル(三次元モデルや，二次元モデルでも節点数が500点以上のもの)には適用が難しくなる。

しかし一般の力学解析に必要な中規模の有限要素モデルでは本法が基本的に掃き出し法[103]による逆行列演算を単位としていることから，精度の点と能率の点(計算時間)の2点で優れたものである。

解の数値的精度を調べるには残差ベクトルを知るのが一つの手段である。すべての解($X_1, X_2, , , X_m$)が得られた後に(3.26)式に戻って

$$q_1 = p_1 - K_1 x_1 - C_1 \cdot x_2$$

$$q_2 = p_2 - C_1^T x_1 - K_2 x_2 - C_2 x_3$$

$$q_i = p_i - C_{i-1}^T \cdot x_{i-1} - K_i \cdot x_i - C_i \cdot x_{i+1} \qquad \cdots\cdots\cdots(3.33)$$

$$q_m = p_m - C_m^T x_{m-1} - K_m x_m$$

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{Bmatrix}$$

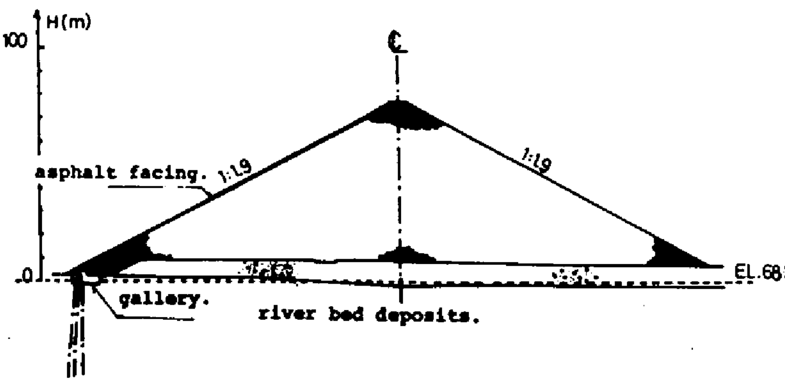
で定義される残差ベクトル $\{Q\}$ を計算できる。

このベクトルのノルムなどによって解の精度の一応の目安を得ることができる。得られた解のオーダーと残差ベクトルのオーダーの差におよそ計算機の１語が表現できる最大有効桁数付近の差があれば，得られている数値解はほぼ満足すべきものとせねばならない。

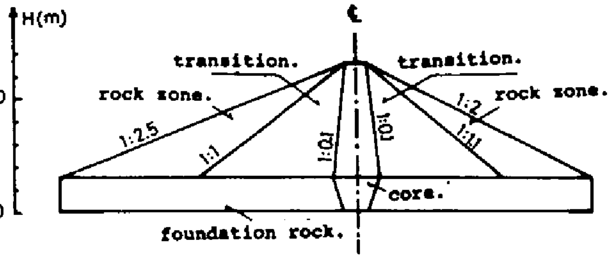
以上のような方法を二次元問題についてプログラムするには節点数３００～４００，最大バンド幅２５程度の系を対象とすれば主記憶３２～４０Ｋ語程度と，適当な補助記憶装置を装備した計算機が必要である。ただし計算精度の上からは，１語３２bit程度のものがどうしても要求されるので，このことが満足されるのはやはり大型の電子計算機でしかないということになる。

§３.２　堤体内応力および地盤内応力に関する線形解析

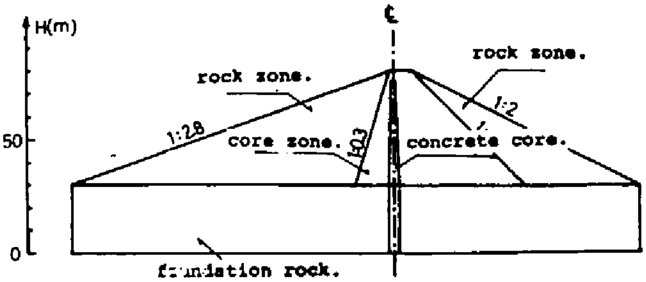
３.１.で述べた手法をそのまま適用することにより，フィルダムの完成断面や建造中の断面，あるいは地盤内の応力の分布などを容易に知ることができる。本研究の全体を通じて解析されるものは次の三種類のダム形式である。



A-Type dam. (MIYAMA Rock fill dam)



B-Type rock fill dam.



C-Type rock fill dam.

図 3.7　三種類のダム型式

(1)表面アスファルト舗装のロックフィルダム　A－型式
(2)中心コア型アースロックダム　B－型式
(3)コンクリートコアをもつアースダム　C－型式

(1)は著者等が数年来取りあつかってきている農林省の深山ロックフィルダムを対象としており，これをA－型式と呼ぶ。(2)は一般のアースロックダムを対象とし，これをB－型式という。(3)の形式のダムは最近ほとんど建造されることはないが，コアー用土がまったくないようなダムサイトには希に建造される可能性があるし，力学的にはいろいろな問題のある構造なのでとりあげ，これをC－型式と呼ぶことにする。それぞれのダムの標準断面を図 3.7 に示す。

3.2.1　堤体の一般応力解析

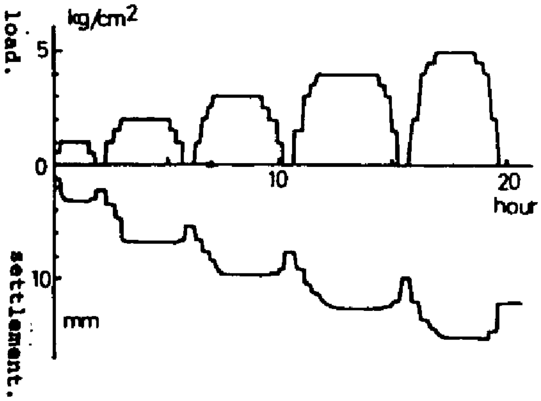
この節ではA，B，C－型式のダムの完成断面形の解析および，A－型式について築堤の進行に伴う，変位，応力の変化を解析する。この節の解析の共通点は，線形弾性解析であるが，土や岩塊の層を，ある限定された応力の範囲内で線形であるとして取りあつかうことができることは古典的な土質力学の方法の

示す通りである。従来の弾性論による応力解析によっては，応力解は得られても，有効な変位解が得られないことが多かったが，有限要素法は変位解と応力解を同時に与える有効な手段である。

a） A型式のダム

このダムは上述のように深山ロックフィルダム(69)を対象としており，本研究では具体的な解析をおこなうものである。本ダムは均一型のロックフィルダムであり，表面アスファルト，シャ水壁をもつダムである。岩塊の最大直径は８０㎝とされている。このような基本的な構造上の特性があるためこのダムの力学的挙動には浸透水による効果をまったく考慮する必要がないのである。また図3.7にも示しているように堤体下部２０～３０ｍは現河床の滞積層をそのままとり入れたものとなっており，堤体の底面はやや下流に対し傾いている。そのためダムの中心線に関して，完全な左右対称断面とはなっていない。以上の点を考えて解析を進めなければならないが，まず材料の弾性定数を決定することが必要である。

このダムにおいては，ロック材のまき出し，締固めの完了を決定する指数として，現場の岩塊の湿潤密度を用いている。すなわち湿潤密度が1.８ t／㎥ 以上をもってその指数としている。したがって自重の解析に用いる，材料の単位体積重量には1.８ t／㎥ を用いればよい。弾性係数（または変形係数）を決定するには堤体の土の一軸圧縮試験結果などを用いるのが合理的だが，ここでは次のように考えた。



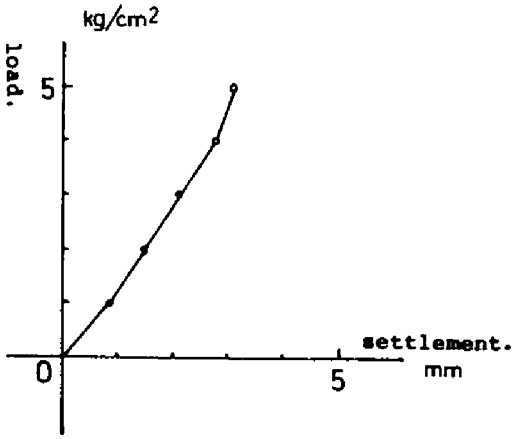


図3.8　平板載荷板試験によるデータ

堤体材料の応力－ひずみ曲線は，河床滞積層の応力－ひずみ，曲線と同じか，またはそれ以上のこう配をもった直線であらわせると考えられる。（このことは，滞積層が堤体の一部となっていることからも当然こうあるべきなのであるといえる。）河床の二地点で実施された載荷板試験の実例の一つを図3.8 a に示す。この試験の載荷板は円形で，その直径は１１３㎝であり，最大荷重は５㎏/㎠であった。

図3.8 a において除荷されることにより復元している変位を弾性変位として算出し，これと載荷重との関係をプロットすると図3.8－bのようなほぼ直線的の関係が得られる。これは地盤の弾性的な荷重－沈下の関係をあらわしている。他方半無限弾性地盤の弾性解の適応によって(60) 次式が導かれている。

$$d = \frac{\pi}{2E}(1-\mu^2)\cdot a\cdot q \qquad \cdots\cdots\cdots(3.34)$$

ただし，

d：沈下　　　　E：地盤の弾性係数

μ：地盤のポアソン比　　q：等分布載荷重

a：載荷板半径

である。ポアソン比として土砂や岩究から成る層状の部分に適用されることの多い0.4という値を用いることにすると（３.３４）式と図3.8からEを決定することができる。このようにして二地点の載荷板試験から弾性係数を算出するとE＝６５０～１７００㎏/㎠なる値を得ることができる。基礎岩盤の弾性係数は50,000㎏/㎠以上の値であると推定されていたがここでは，実際よりソフトな地盤を想定し岩盤の弾性係数として20,000㎏/㎠という値を用いて危険側の状態を想定してみた。

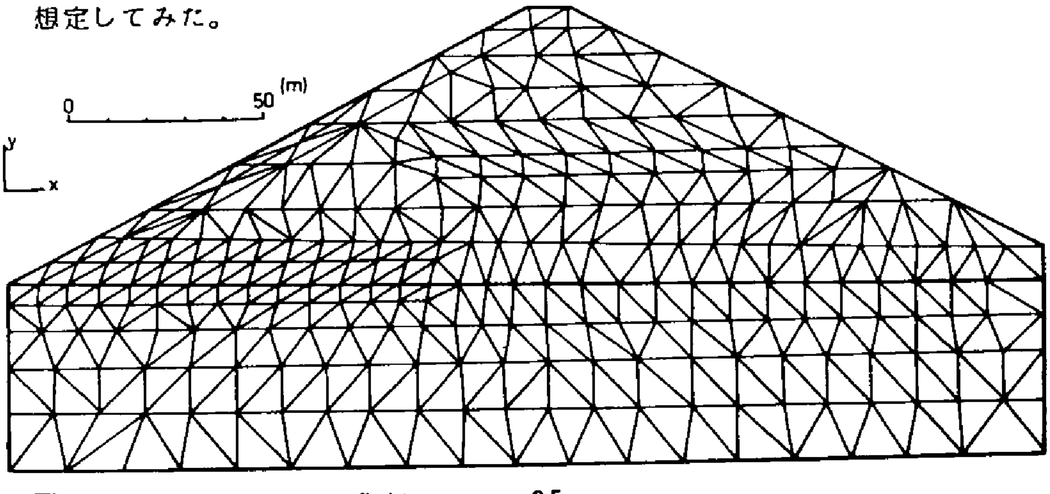


図3.9　A－1モデルの分割

堤底から深さ５０ｍの範囲の岩盤を含んだ領域を考え，このモデルをＡ－１モデルとする。これを図３.９に示す。上にも述べたようにこのダムは，ダム中心線に対して完全には上下流対称ではないから，堤体全体を表現する三角形断面を考えたのである。もし堤体がクレストからおろした鉛直線に対して，ほぼ上下流対称な断面であるならば，貯水圧や，動的変形を考えない限り，半分の断面形の解析で良い。

Ａ－１モデルの節点数は２７３，要素数は４９８である。堤体の上流のり先付近は貯水圧によって大きな応力を受けるのでこの部分のメッシュを細かくしてある。このダムの完成断面（空虚時）における三応力成分，主応力図を図３.１０に示す。

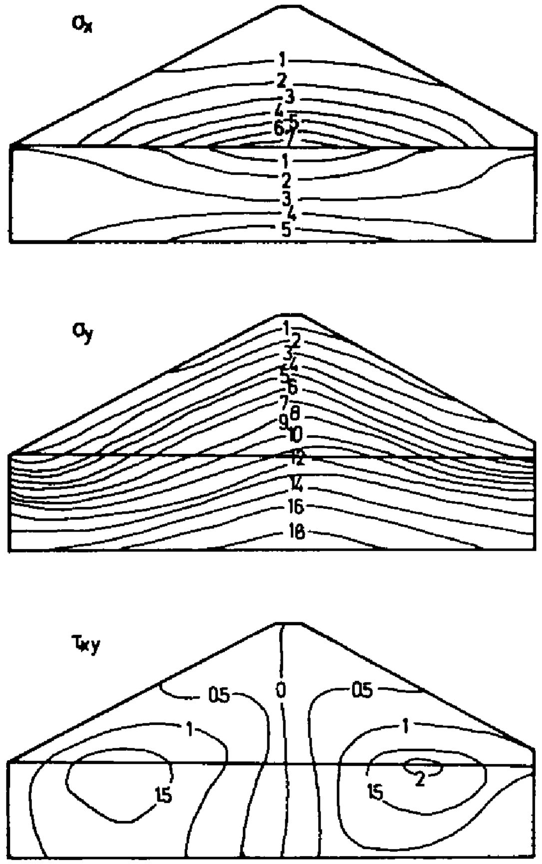


図３.１０　Ａ－１モデル完成断面の三応力分布

次にこのダムの築堤過程を図３.１１に示すような５段階に分けて考えたとき，堤体内の点が，夫々どのように変位するのか，またこの内部応力がどのように変化していくのかを考えることは興味深い。一般の弾性解析では，この有様を調べるのに図３.１１に示すような系を作って解析し，夫々の場合における変位，応力を算出してゆけば良いということになる。すなわち，ダムの築造の進行に伴って，系のスティフネスと載荷される外力ベクトルが同時に変化してゆくのである。

このような解析の結果を用いて堤体の代表点の変位を図３.１２に示す。図から築堤が進行するにつれて，表面に近い点は，外側へ，はらみ出す傾向を示す

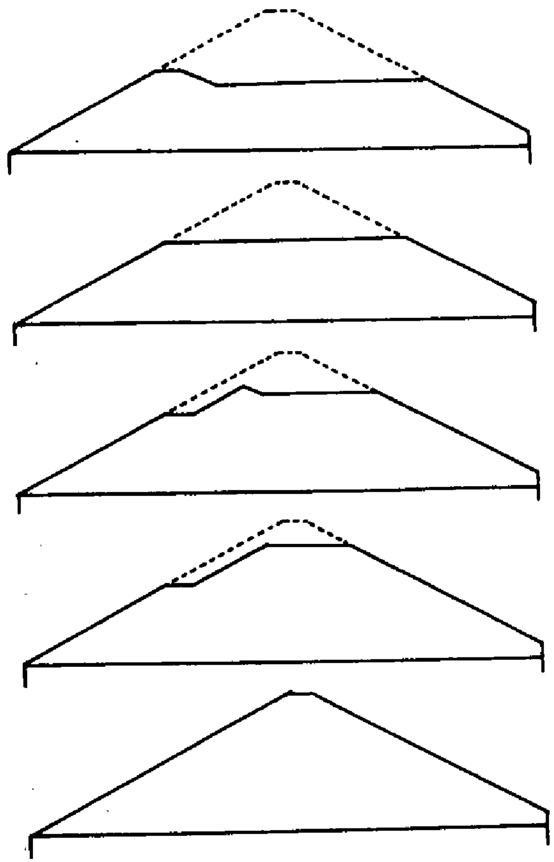


図 8. 1 1　A－1モデルの五段築造過程

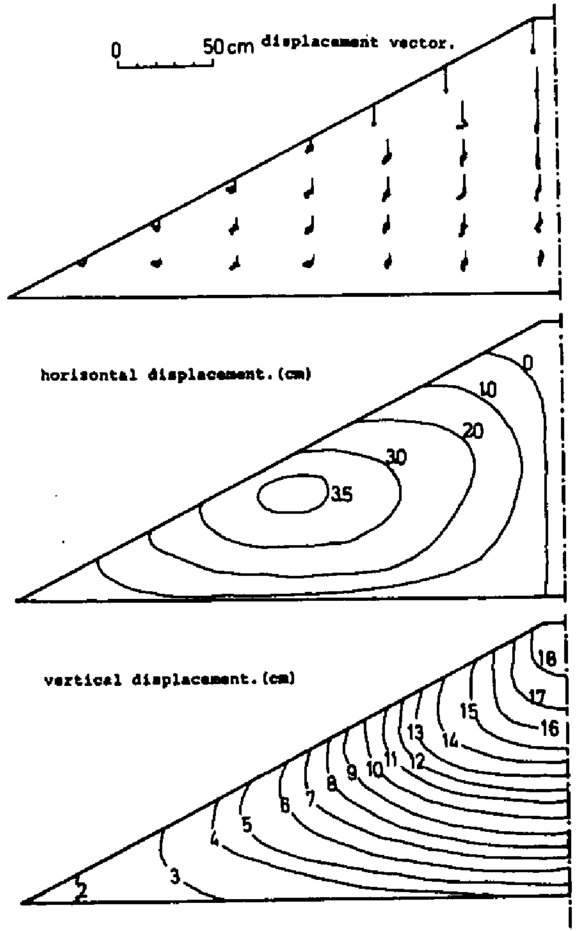


図 8. 1 2　築造進行による堤体内部の点の軌跡

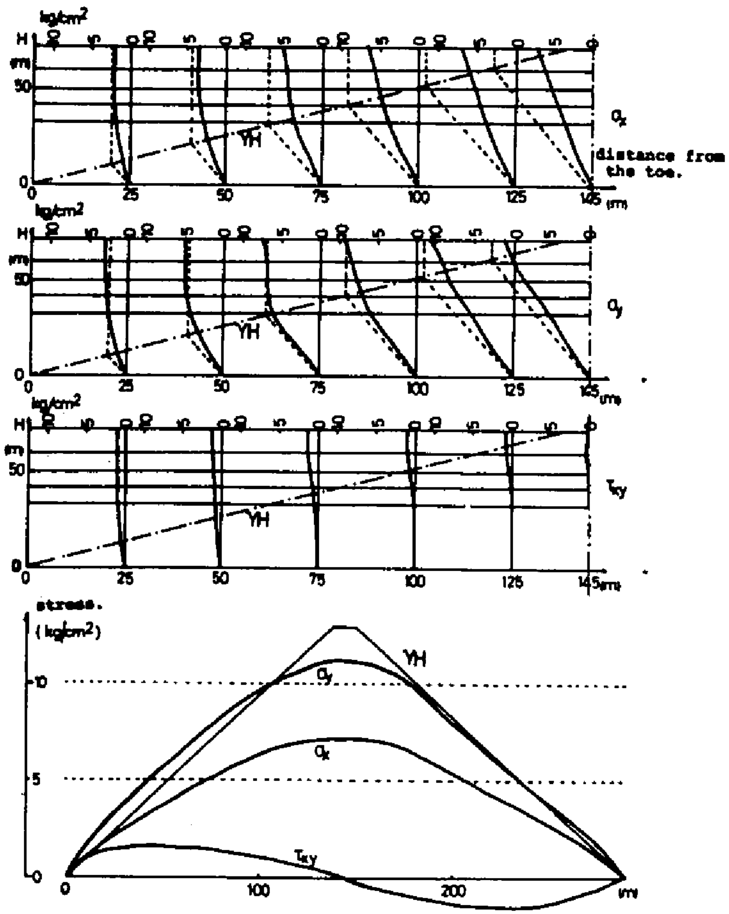


図 8.1 3 築造進行による応力の発達

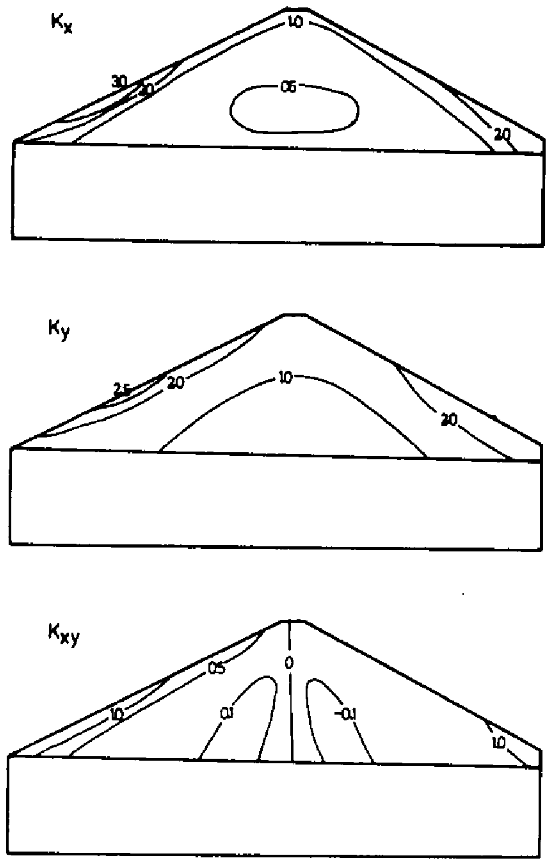


図 8.1 4 影響係数の分布

が，中央部付近の点は，ほとんど沈下するのみであることがわかる。

また，大きな変位は第一段階に生じており，残りの四段の施工によって第一段階によって生じた変位の 0.5 ～ 1.0 倍ぐらいの変位を生ずるのである。

また，築堤の進行に伴う堤底面の各点における三応力成分の変化を図示すると図 3.1 3 のようになる。またこの図には，完成断面について，堤底面における三応力成分を γ H の値と併記している。これ等の内部応力の指標となる量は堤頂からその点までの高さを H，単位体積重量を γ としたとき γ H で表わされる量である。図 3.1 3 の三応力成分の変化の様子は γ H の変化と好対応を成している。同じ考えから図 3.1 0 に示した完成断面の三応力成分を三影響係数値の分布として表現することも興味ある。すなわち

$$
\begin{aligned}
K_x &= \sigma_x / \gamma H \\
K_y &= \sigma_y / \gamma H \qquad \cdots\cdots\cdots (3.3\,5) \\
K_{xy} &= \tau_{xy} / \gamma H
\end{aligned}
$$

である。上式における H はその点から測った堤体表面までの高さである。この影響係数の分布を図 3.1 4 に示す。興味深いことは，応力値の大なる部分が必らずしも影響係数が大とはならず逆に Kx，Ky 等の分布にみられるように，堤体の表面付近で，この係数の値が 1 より大となるのであって，堤体の内部において，内部応力は，いわゆる流体圧力に比して十分小さな値しかとらないことがわかるのである。

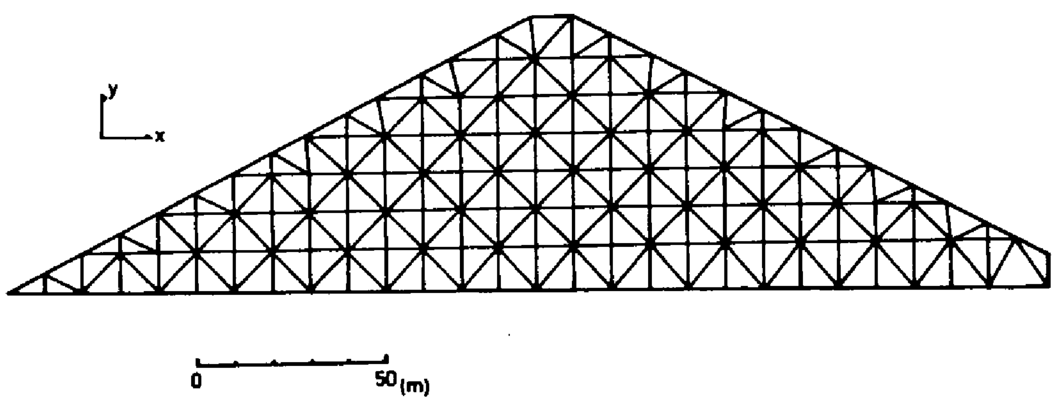


図 3.1 5　A－2 モデルのメッシュ

同じ堤体について堤底面の変位をゼロとした場合の解析をおこなってみた。

このモデルをA－2モデルと呼ぶ。この場合の有限要素モデルを図3.15に示す。このモデルは，節点数140，要素数222であり，先の図3.9のA－1モデルに比べて約半分位の規模であるが，堤体自体の節点数や要素数はA－1モデルと大差ない。この場合の三応力部分の分布および変位の分布を図3.16に示す。

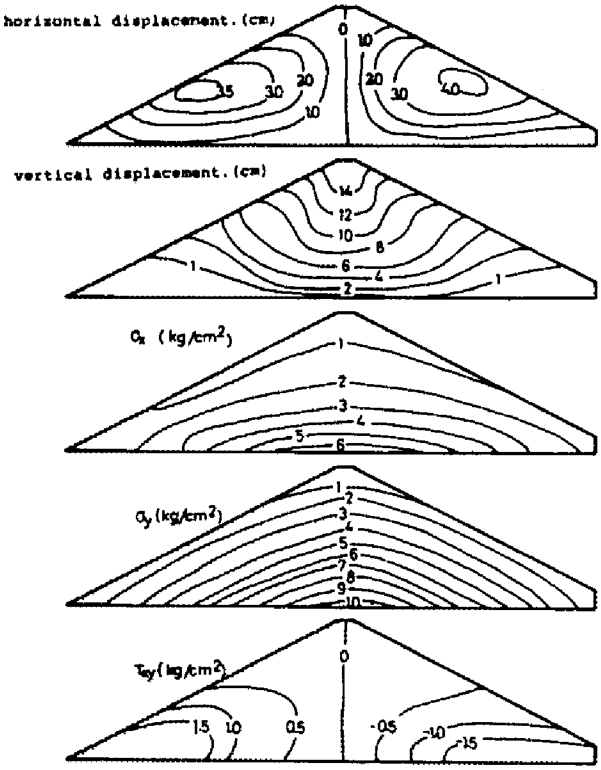


図3.16　A－2モデルの変位と応力

図3.10，図3.16を比較して，応力，変位の分布には基本的な差異のないことがわかる。但しA－2モデルでは，堤底面の変位を拘束しているために，この付近での鉛直変位の分布，せん断応力の分布に差のあることがわかる。この結果からすれば堤体と地盤の弾性係数比が0.1以下であるならば堤体だけのモデルで十分解析できるといえる。

水圧の作用によってA－1，A－2のそれぞれの場合，図3.17に示すそれぞれの場合のようになる。すなわちほぼ対称な応力分布を示していたものが，いくぶん上流側へ引き伸ばされた形になるのである。また上流のり先付近には主応力の最大のものが発生し，特にこのダムでは，上流堤シ部には止水壁を兼ねた監査廊が建造され，この監査廊の頂部には上流アスファルト舗装の終端が接続されるという重要な部分なのである。

したがってこの部分の構造は重要であるから危険時にも崩壊することのない保証が必要である。そこでまず堤体の上流面アスファルト舗装面の変形に特に注目し，A－1モデルによる解析を用いて空虚時と満水時におけるこの面の変

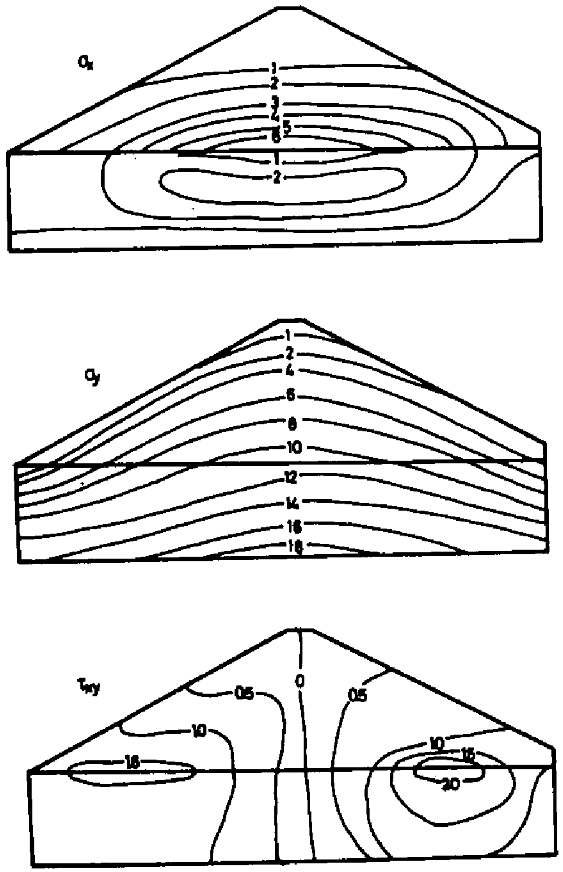


図8.17a A－1 モデル満水位の応力分布（kg/cm^2）

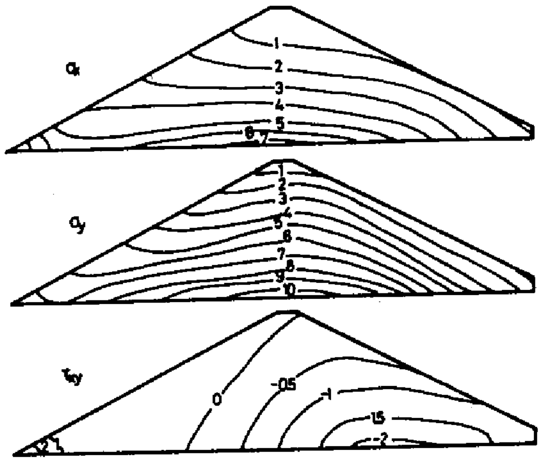


図8.17b A－2 モデル満水位の応力分布（kg/cm^2）

位を図示すると図3.1 8のようになる。

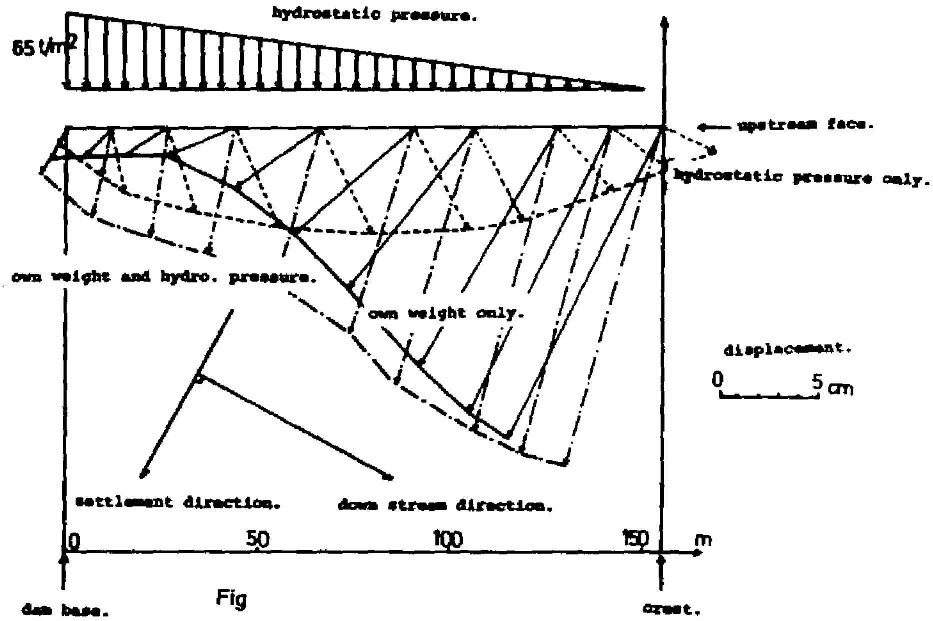


図3.1 8　上 流 斜 面 の 変 形

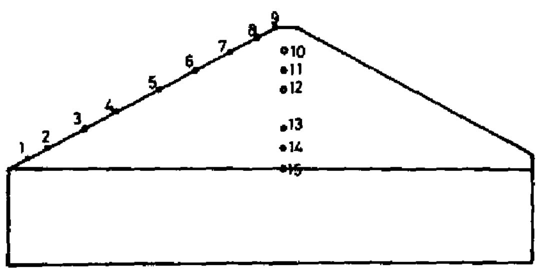


図3.1 9　表3.2 に示す変位の代表点

図から空虚時には，上流面の沈下と側方へのはらみ出しの傾向の大なることがわかる。また満水時には水の作用によってはらみ出しの効果が消されてしまう。満水時と空虚時のアスファルト舗装の最大変位は斜面のクレスト端からH/3~H/2の位置に生じ約6㎝位であることがわかる。

次にA－1モデルについてロック材の弾性定数を表3.1のように変化させた場合完成断面における代表点の変位を表3.2にまとめる。また代表点の位置は図3.1 9に示してある。

表3.1 解析するケース

単位体積重量(t/m³) ＼ 弾性係数(kg/cm²)	1700	1000
1.8	①	②
1.6	③	④

表3.2 代表点の変位(cm)

点 ＼ E ＼ 密度		ρ=1.8 t/m³		ρ=1.6 t/m³	
		1700	1000	1700	1000
		①	②	③	④
①	H	0.56	0.88	0.50	0.79
	V	2.65	1.98	1.89	1.92
②	H	1.43	2.85	1.27	2.09
	V	2.26	2.42	2.17	2.31
③	H	2.52	4.24	2.24	3.77
	V	3.06	3.56	2.83	3.27
④	H	3.33	570	2.97	5.07
	V	4.86	6.36	4.48	5.81
⑤	H	2.82	4.87	2.51	4.33
	V	7.74	10.95	7.02	9.87
⑥	H	1.82	3.17	1.63	2.83
	V	10.48	15.47	9.47	13.90
⑦	H	0.38	0.68	0.35	0.61
	V	14.37	21.97	12.97	19.67
⑧	H	0.41	−0.72	−0.63	−0.63
	V	16.70	25.90	23.17	23.17
⑨	H	−0.70	−1.25	−0.61	−1.09
	V	18.14	+28.34	16.27	25.39
⑩	H	−0.91	−1.67	−0.80	−1.44
	V	17.45	+27.17	15.65	24.29
⑪	H	−1.13	−1.99	−1.00	−1.76
	V	16.76	+25.97	15.04	23.23
⑫	H	−0.88	−0.68	−0.88	−0.60
	V	15.65	+24.61	14.08	21.49
⑬	H	−0.59	−1.04	−0.52	−0.92
	V	13.75	+20.83	12.87	18.66
⑭	H	−0.24	−0.42	−0.02	−0.36
	V	−7.10	4.51	6.45	8.60
⑮	H	−0.03	0.03	0.03	0.08
	V	3.60	8.60	3.34	3.34

表3.1に示した範囲は現実のロック材のとり得る安全側の範囲である。実際にはロック材の湿潤密度と弾性係数には正比例の関係があると考えられこれを取り入れることが望ましい。さて上に述べたように上流側の，のり先付近には満水位状態では応力の集中が大であり，この部分に建造される監査廊のもつ意味は大である。監査廊自体の構造解析をおこなうには，この部分に作用する多くの荷重をとり入れる必要がある。こうした解析は別の資料に報告されている[61]。

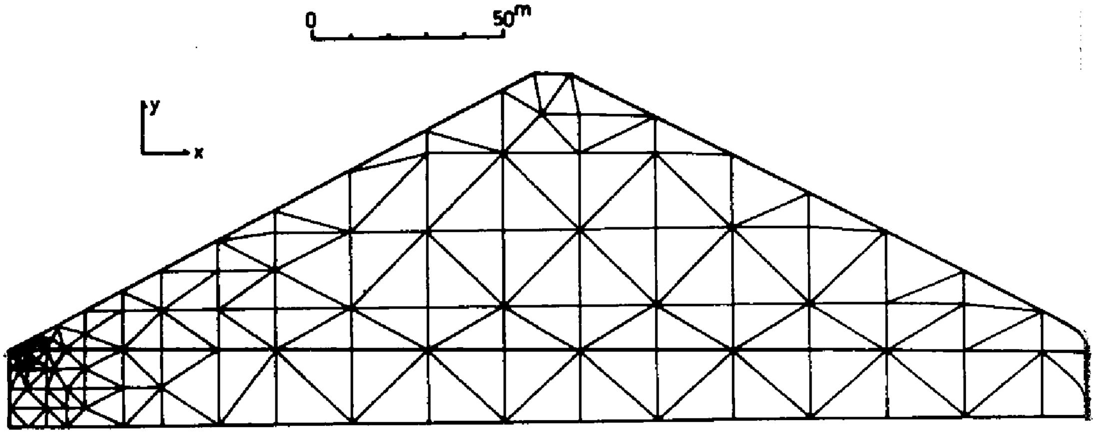


図3.20　A－3モデル

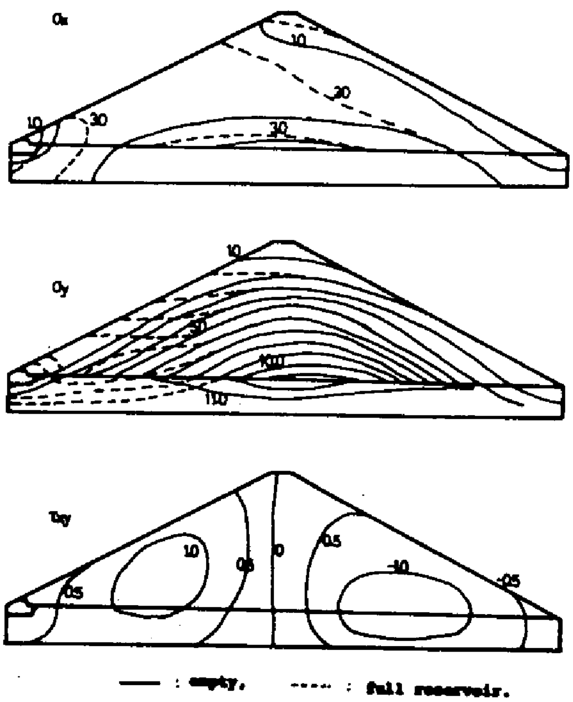


図3.21　A－3モデルの応力分布（kg/cm²）

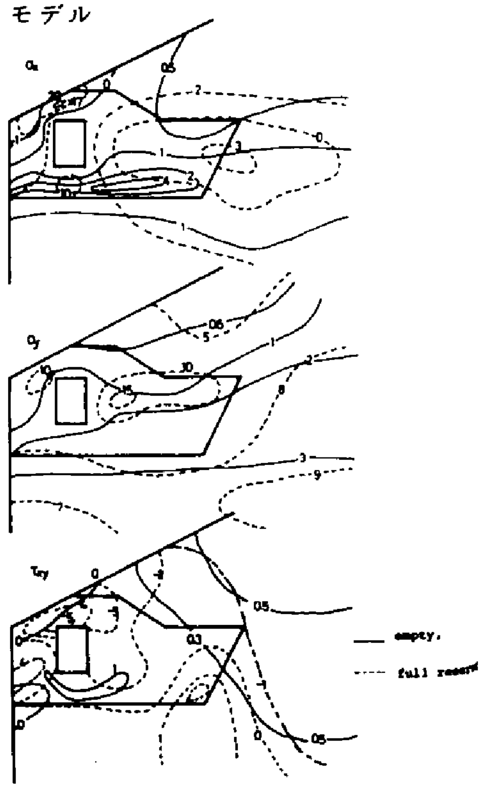


図3.22　監査廊付近の応力分布（kg/cm²）

ここでは上流側のり先に剛なコンクリート構造物である監査廊が存在することによって堤体の応力分布がどのような影響を受けるのかを調べるために，図3.20に示すA－3モデルを想定し解析した。このモデルは節点数111で，要素数175であり，諸材の物性値は表3.3に示す通りであるとする。

定数／領域	弾性係数(㎏/㎠)	ポアソン比	単位体積重量(t/㎥)
ロック材	2,000	0.3	1.8
監査廊	210,000	0.2	2.34
岩盤	20,000	0.2	2.8

表3.3　A－3型式の諸定数

このモデルによる応力分布を図3.21に示す。監査廊付近の応力分布については，図3.22に示す。以上の三種類のモデルによるA型式のダムの解析を通じて次のように結果をまとめることができる。

① A－1モデルとA－2モデルの解析結果から両者の変位分布，応力分布は堤底面付近，（堤高の約10％付近）で，その相異が認められるが，その他の点では大きな差異のないことが認められる。クレスト沈下量はA－2モデルにおいては，A－1モデルにおける地盤の沈下量だけ少なくなっている。堤体と地盤の弾性係数比が十分小さい場合には，堤体のみの解析で十分である。

② 図3.12から築堤が堤高の約50％完了したときに生ずる沈下とほぼ同量の沈下が，残りの50％の築堤を完成することによって生じている。水平変位の最大値は，堤高の約1/3高さの点に生じ，外側へ，はらみ出す傾向をとり，沈下は高いレベルのもの程大である。これは，それより下層の沈下が蓄積されてゆくからである。

③ 築堤の進行に伴って，応力（鉛直応力，水平応力）は増大してゆくが，これはγHというパラメーターに沿って増えてゆくことがわかる。（図3.13参照）　また影響係数値は，堤体の表面近傍（堤高の10％以内の厚さの範囲）で1より大きな値をとり，堤体の表面部分に，応力の相対的な集中のあることがわかる。（図3.14参照）

④ 貯水の作用によって，堤体の応力分布は，鉛直，水平応力の等高線が，上流に引き伸ばされた形になるが，堤体の中央より下流側では大きな変化はお

こらない。(図3.1 7参照） 上流側の堤シは，満水時１０～１２kg/cm²の主応力を発生する。満水位状態になると，堤体の上流面は，下流へ押し込められる形に変位するがその量は，ほぼ6 cm位である。（ 図3.1 8参照）

⑤ A型モデルの現地における諸材の考えられる物性値の範囲内で，弾性係数と，単位体積重量を変化させた結果，クレスト沈下と定数の変化量との間の関係は下の通りであった。

弾 性 係 数　約４０％減　→　クレスト沈下約５６％増

単位体積重量　約１０％減　→　クレスト沈下約１０％減

⑥ 上流堤シに監査廊のある構造を考慮すると，応力分布は，これを考慮しない場合とやや異なり空虚時水平応力が監査廊のまわりでやや大きい値をとる。また，満水位状態では，監査廊上流頂部には，大きな引張応力の発生することが認められた。

⑦ クレスト沈下は約0.0039・H～0.0022・Hである。（但しHは堤高）

b） B・C型式のダム

これ等のダムは後続の一連の解析と関連して用いる共通なサンプルとして設定した仮想モデルである。それぞれのダムの築堤材料の物性値を表3.4 に示し，それぞれの有限要素モデルを図3.2 3 ，3.2 4 に示す。

◎ B型式のダム

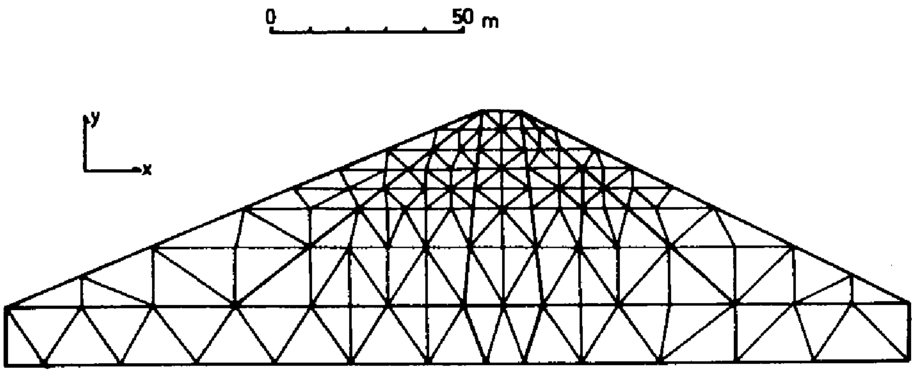


図3.2 3　B型式のダムモデル

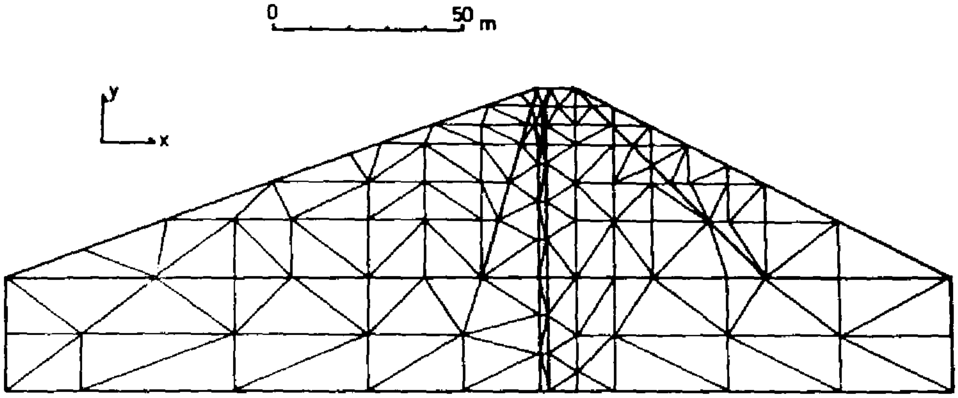


図3.2 4　　C型式のダムモデル

表3.4　B，C型式のダムの諸定数

領域＼定数		弾性係数 (%)	ポアソン比	単位体積重量（t/㎥）
ロック材	湿　潤	1,200	0.35	1.90
	水　中	960	0.39	1.05
細粒材	湿　潤	1,000	0.40	1.80
	水　中	800	0.44	1.02
コアー材	湿　潤	500	0.45	1.79
	水　中	400	0.48	0.82
岩　盤		10,000	0.30	2.10

B型式の弾性定数

		弾性係数 (%)	ポアソン比	単位体積重量（t/㎥）
ロック材	湿　潤	1,200	0.35	2.0
	水　中	1,100	0.35	1.8
細粒材	湿　潤	1,000	0.40	2.0
	水　中	900	0.40	1.8
コンクリート・コアー		210,000	0.20	2.30
岩　盤		20,000	0.20	2.60

C型式の弾性定数

A型式式のダムと異なり，コアー材，ロック材，細粒材から成る不均質な堤体である。均質な堤体の場合とは，変位，応力の分布が異なると予想される。また一般的な諸材の弾性定数として，表3.4に示す値を採用する。このダムの完成断面における三応力分布を図3.2 5に示す。完成断面であるから材料の数値はすべて湿潤状態のものを用いることにする。同ダムの満水状態の解析は，浸透領域と，非浸透領域で物性値が異なるので，浸透領域が図3.2 6の斜線部分であるとする。この形状はたとえばCasagrande式によって決めた浸潤線を近似する境界線を作ることによって行なう。そして浸透領域の定数としては表3.4の水中の場合を用いる。この場合の応力分布を図3.2 7に示す。（水圧の作用面は不透水領域であるコアーの上流面とした。）

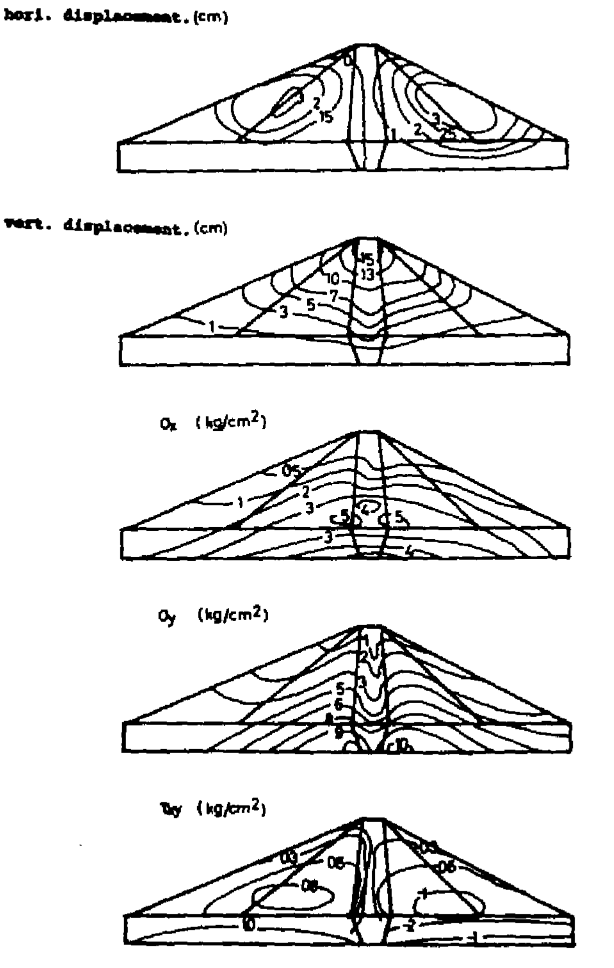


図3.2 5　B型式のダム空虚時の応力，変位の分布

両者の解析を通じて次のように結論できる。

◦変形についてはA型式のダムと同様の特徴を示すが，軟かい部分（コアーゾーンと細粒材ゾーン）の沈下が他の部分に比べて大きいことがわかり，最大沈下は表3.4の定数を用いた場合

$$d \doteqdot 0.003H$$

であった。

◦三応力成分の分布も非均質な構造のため単純な分布とならず，やや複雑な分布を示す。すなわち鉛直応力，水平応力の等高線が，コアーゾーンで，へこむ傾向をとる。水平応力はコアーの根入れ付近で大となる。

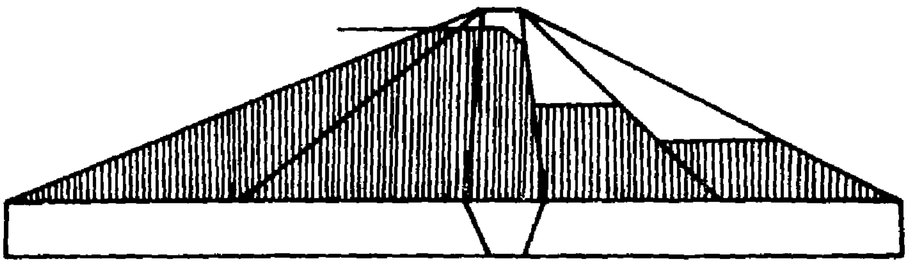


図3.26　堤体の浸透領域

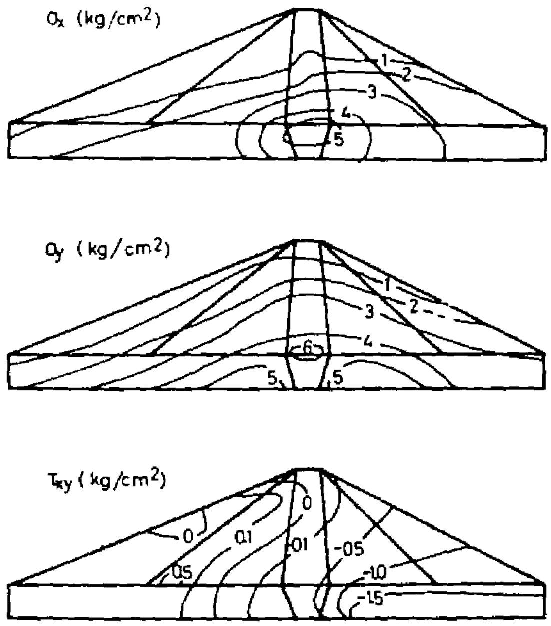


図3.27　B型式のダム満水時の応力分布

。この型式のダムの平均単位体積重量は，空虚時には $\gamma = 1.84\ t/m^3$ となる。この値を用いて，クレスト直下における鉛直応力の γH に対する割合は，このダムでは７０～７５％位である。先のA型式の場合にはこの比は８０～８５％位であったから，この型式のダムでは少し応力の分散がA型式より大であるといえる。

満水位状態の応力の等高線は水平応力と，せん断応力が，上流側に傾斜した分布を示すことになる。

◎　C型式のダム

この堤体モデルCも非均質なモデルであるが，薄いコンクリート・コアーを有しているために，これを有限要素モデルで十分精密に表現するには一般に限界がある。また普通の有限要素法では，このコンクリートコアーとその周辺の土の完全な変位の連続が含まれてしまうが，実際にはこの接触部には，変位の不連続がおこるものと考えられる。しかしコアー部に非常に剛な薄い板が存在するダム型を不十分ながら近似することは一般の有限要素法でも可能である。

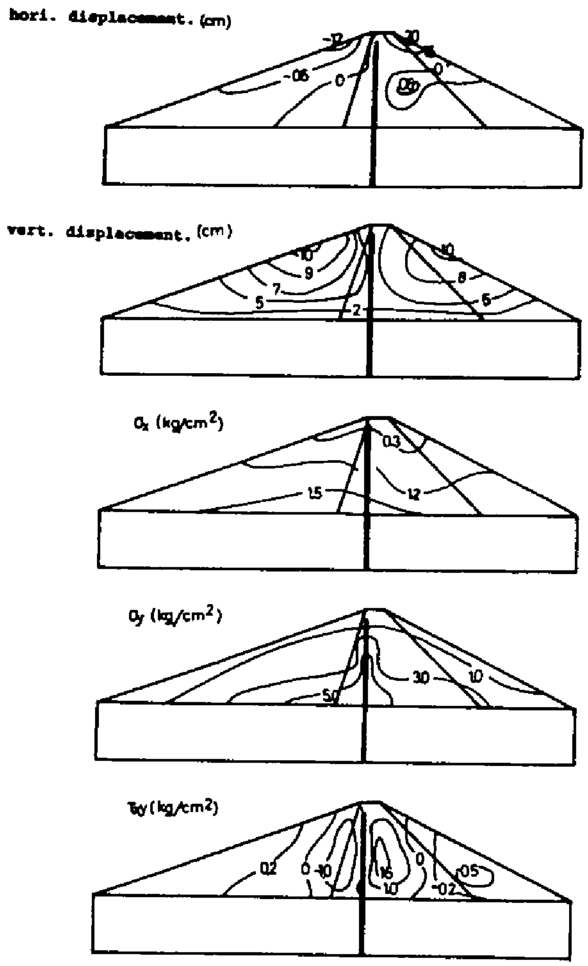


図3. 2 8　C型式のダムの空虚時変位，応力分布

このダムの完成断面（空虚時）における，変位，応力の分布を図3. 2 8に示す。満水時についてはコンクリート止水壁で完全にシャ水されてしまうものとして領域を分け，水圧はコンクリートコアーに水平に作用するものとして解析した。この場合の応力の分布を図3. 2 9に示す。二つの解析を通じて次のことがいえる。

。A，B型式のダムでは，ほぼ堤体の下，ほぼ1/3高さの上下流面付近に水平変位のピークがみられていたが，この形式では中央に剛な壁が存在することにより，水平変位のピークはダムの高い地点（クレスト付近）に移動した。鉛直変位もこの壁の効果により，壁をはさんだ両側の三角体が，それぞれ独立に沈

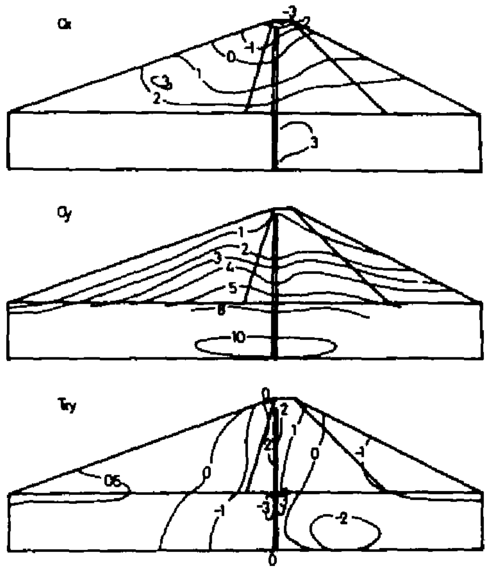


図3.29　C型式のダムの満水位応力分布（㎏/㎠）

下し，そのピークは上下流面のクレストからH/3位下った点に生ずることがわかった。

。水平応力の値は小さく減少し，ダム底においてもγHの15～20%位の大きさである。これは中央に剛な壁があることにより，水平方向の変形が拘束されているためと考えられる。

。鉛直応力，せん断応力は壁の周辺で集中するが，壁から離れるとすぐに減小してしまう。このことは壁での応力の集中のあることを示している。またせん断応力は壁で分割された両側の三角体について，それぞれ応力の符号の変わる線が存在しており，変形が複雑であることを示している。

。満水位状態では水圧が，壁に対して水平に作用するから鉛直応力の分布には，ほとんど影響はない。しかしクレスト付近に水平応力の大きな発生がみられる。せん断力についても満水位状態では，クレストの付近および壁の根入れ部分における分布形が複雑となる。

。以上から壁の付近における応力分布の複雑さ（なめらかでないこと）という点に注意すれば，特に応力分布上の問題はない。

3・2・2　築造進行に伴う増分解析

フィルダムの変形量の合理的な算定の問題を有限要素法で容易に解決できることは前節で示した通りである。ところが，前節に示した解析は，完成した断面が瞬時に岩盤上に築堤せられた場合に相当しているのである。いい換えると転圧，締固め施工により徐々に築造が進行してゆくという過程を表現し得ないのである。また図3.1 1～図3.1 3に示した築造の進行過程というものは，図3.1 1に示す5段階の断面形が，それぞれ瞬時に岩盤上に築堤せられた場合の変位，応力を求めこれでもって築造の進行過程を表現しようとしたものである。

このような考え方に対しCloughは incremental analysis：増分解析を提案した。(16)すなわちフィルダムの築造は連続的に進行するわけだが，これはたとえば“リフト”毎の施工というふうにとらえれば，一定厚さずつに撒き出しが行なわれ，転圧がおこなわれるわけである。このとき生ずる沈下はこのリフトの自重によって，このリフトより 下 の構造が受けもつ系によって生ずる変形のみであるという考えである。

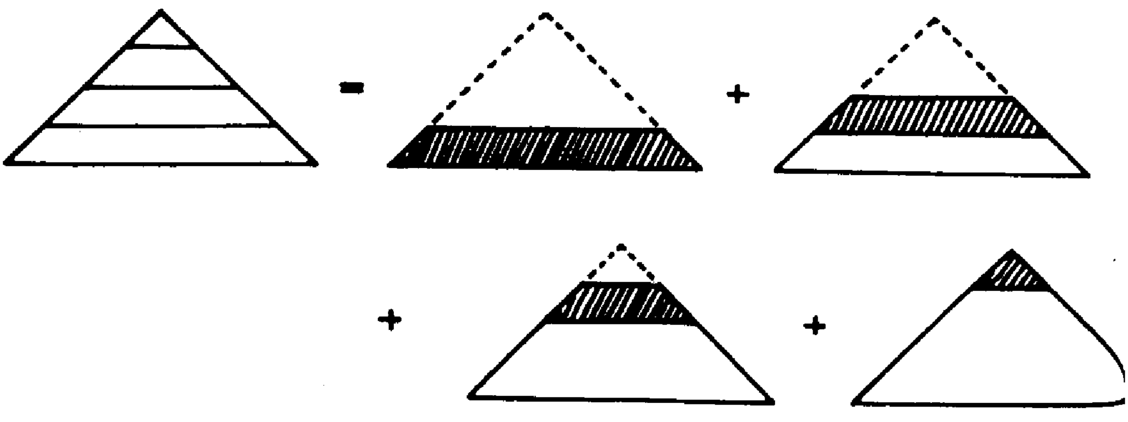


図3－30　増分解析の考えかた

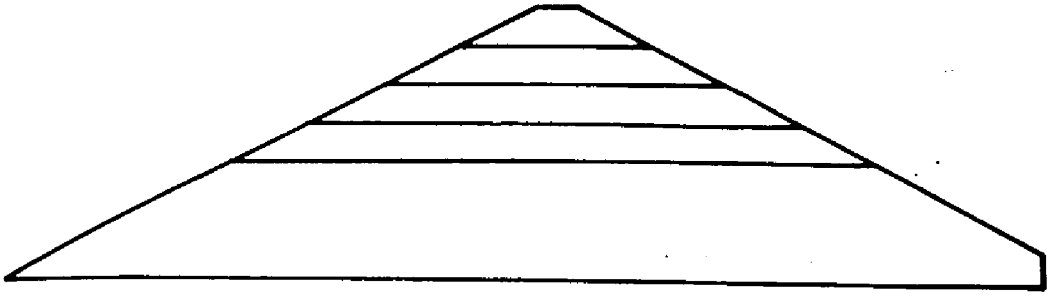


図3－31　A－2モデルの増分解析におけるリフト

図 3・30にこの考えの模式図を示してある。したがって完成した断面の変形は，これ等のリフトの施工毎に生ずる沈下を各点毎に累加したものによって与えられる。ただしこの時次の点に注目すべきである。

この解析を行うときに用いる有限要素系の寸法は，正確に各リフトの厚さから決定される諸元を用いる。すなわち各リフトの積層による変形が，系の形状に何等の影響をも与えないと考える点である。ところが，実際のダムの築造はこうではなく，各リフト毎に行われる施工は，余盛を行うことにより，完成した断面が所定のレベルに達するように施工される。したがって完成断面は，堤体が完成した瞬間に所定の高さを有しているわけである。これに対して解析モデルでは，たとえばＨｍの高さのダムを完成すれば，この系によって生ずる変形の累積によりダムの高さはHmよりは何がしか低くなってしまうというものである。しかしながらこの両者の相異は，本質的には，現実の施工が，解析モデルよりもより多くの材料を考えることにより（材料の単位体積重量が変化すると考えても良い。）説明できることであり，このことは実際の材の単位体積重量の推定に際して生ずる不確かさに比べれば小さな量であるとClo－ughはいっている。とにかく，この増分解析が，先におこなった瞬時盛りたての結果とどのように異なるかというのは興味ある問題なのでここではＡ－２型式とＢ－型式の二例についてまず線形増分解析をおこなう。

Ａ）　Ａ－２型式については３・２・１節に示した築造進行のリフトと同じものを用いる。（図３・３１参照）リフトの厚さの違いによって解のことなることが予想されるが，その差は実際にはほとんど認められなかった。(16)

図３・３１に示す築造のプロセスは堤高の $^1/_2$ までが瞬時に盛りたてられており，その後１０ｍリフトづつの積み上げによって生ずる応力や変位の分布を調べるためのものである。

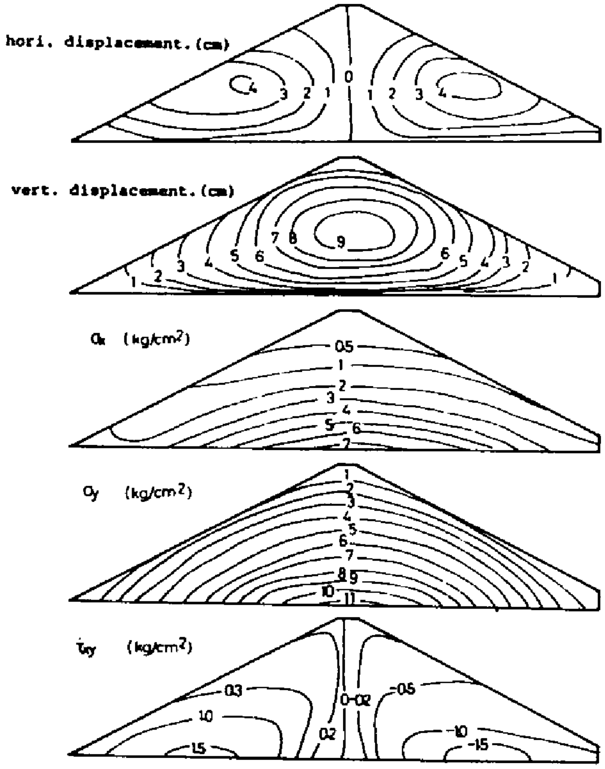


図3−32 増分解析による完成断面の変位と応力分布

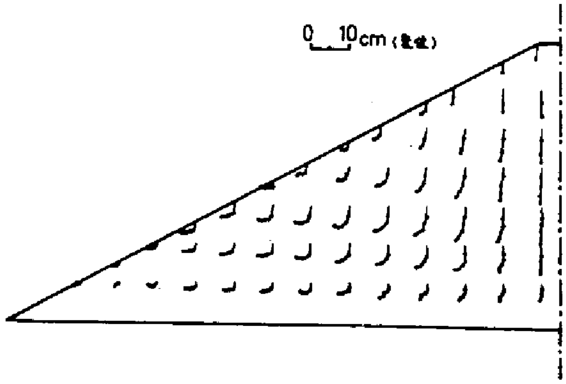


図3−33 築造進行による変位の軌跡

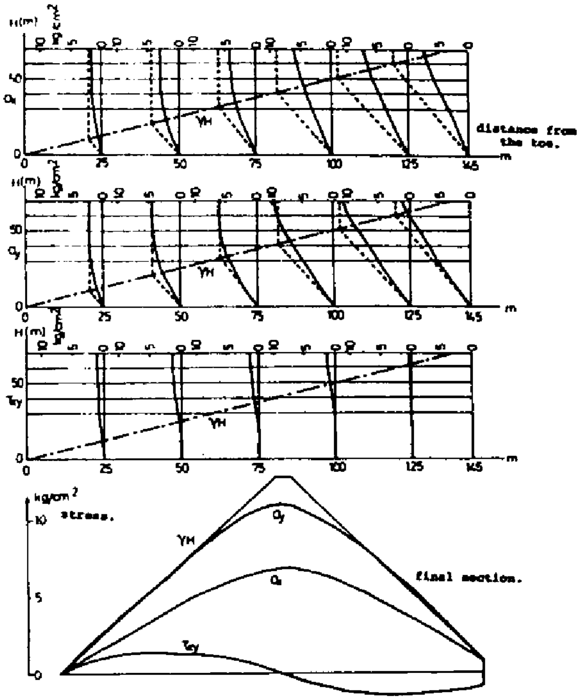


図3—34 築堤の進行と堤底の応力分布の発達

完成断面における変位と，三応力成分の分布を図3・32 に示し，また築造の進行に伴う各点の変位の模様を図3・33に示す。また図3・13におけるのと同様に，築造の進行に伴う堤底面における三応力成分の変化を図3・34に示す。A－2型式について前項に述べた瞬時盛たての結果（図3・16）と，今回の結果（図3・32～34）を対比すると次のことがわかる。

◎ 完成断面における水平変位の分布形は，ほとんど変化なく，リフト施工の場合にも瞬時盛たてと同量の変形が生ずる。

また鉛直変位の分布形は瞬時盛たての場合と大きく異なり，変位の最大値がダム高さの$^1/_2$付近に生じ，その最大値は瞬時施工の65～70％位に減少する。瞬時盛たての場合には，変位の最大値は堤頂に生ずることになるが，これが最も大きな解析上の相異である。

リフト施工，瞬時盛たてのそれぞれの場合における変位分布の特徴は，それぞれ図3・16と図3・32に示すもので与えられるが，両者の変位量の関係はダム形状（こう配：対称性）およびポアソン比によって変動すると考えられる。最大水平変位と，最大鉛直変位の比は瞬時盛たての場合0.25，リフト施工の場合0.45であり，水平変位の割合が増す。

◎　同じことが図3・12と図3・33に示す堤体各点の変位の軌跡図によって示されている。瞬時盛たての場合には，最初リフトによって生じた沈下が大であるのに対し，リフト施工の場合は各リフト毎に生ずる沈下量はほぼ同等の大きさである。また水平方向への移動の割合が増していることがわかる。

◎　三応力成分については，両者の分布はほとんど一致しているが，リフト施工の場合は，堤体の高いレベルにおける水平応力が，瞬時盛りたての場合よりやや小さくなる。これはリフト施工においては堤体上層部の変位量が少ないことと対応している。したがって応力分布については瞬時盛たてとリフト施工の場合に大差はなく，影響係数の分布もリフト施工の場合，図3・14に示すものと同じものが得られる。

◎　築堤の進行に伴　う三応力成分の増大の様子や堤底面における完成断面での三応力成分の分布は図3.13と図3・34を比較すれば，その相異が分る。両者の解析において，築造の進行に伴って応力値の増大してゆくことが認められるけれども，当然のことながらのり先付近の部分は早い時期に一定応力値に収束し，それ以後の盛たての影響をあまり受けないことがわかる。（これはのり先から50 *m*以内の領域である。）水平応力の最終値を両図で比較すれば，瞬時盛たての場合，のり先部分で0.8 γ H，堤体中央付近で0.6 γ H位の大きさである。またリフト施工の場合にもこれと全く同じ発達を示している。

鉛直応力の分布は瞬時盛たての場合，のり先付近で γ Hより大で，堤体中央付近で γ Hより小となるのだが，堤頂から10 *m*内外の点で γ Hと一致する点がある。リフト施工の場合は，大体 γ Hに一致する値をとる。両者とも築堤の進行に伴って γ Hの線に沿って発達する。

B）B―型式の堤体のリフトを図3・35の6個のリフトとする。この堤体は不均質な構造であるからA－2型式とは異なった性状を示すと予想される。完成断面における三応力成分の分布と変位の分布を図3・36に示し，築造の進行に伴　う，堤底面の応力の発達と，完成断面における堤底面の三応力成分の分布とを図3・37に示す。

この場合にもA－2型式において生じたのと同様の変化が認められる。すなわち図3・36と図3・25とを比較すると，変位の分布型は沈下の分布が瞬時盛たての場合と大きく異なりダム高さのほぼ半分位の所で沈下量の最大

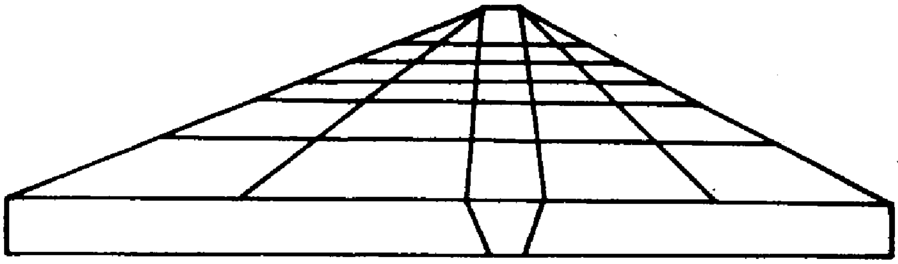


図3−35　B型式の増分解析におけるリフト

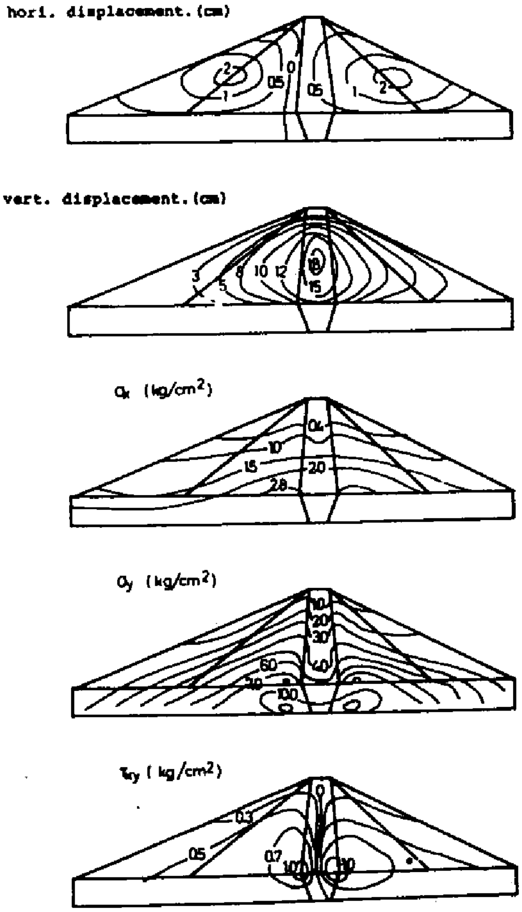


図3−36　B型式の増分解析による変位と応力の分布

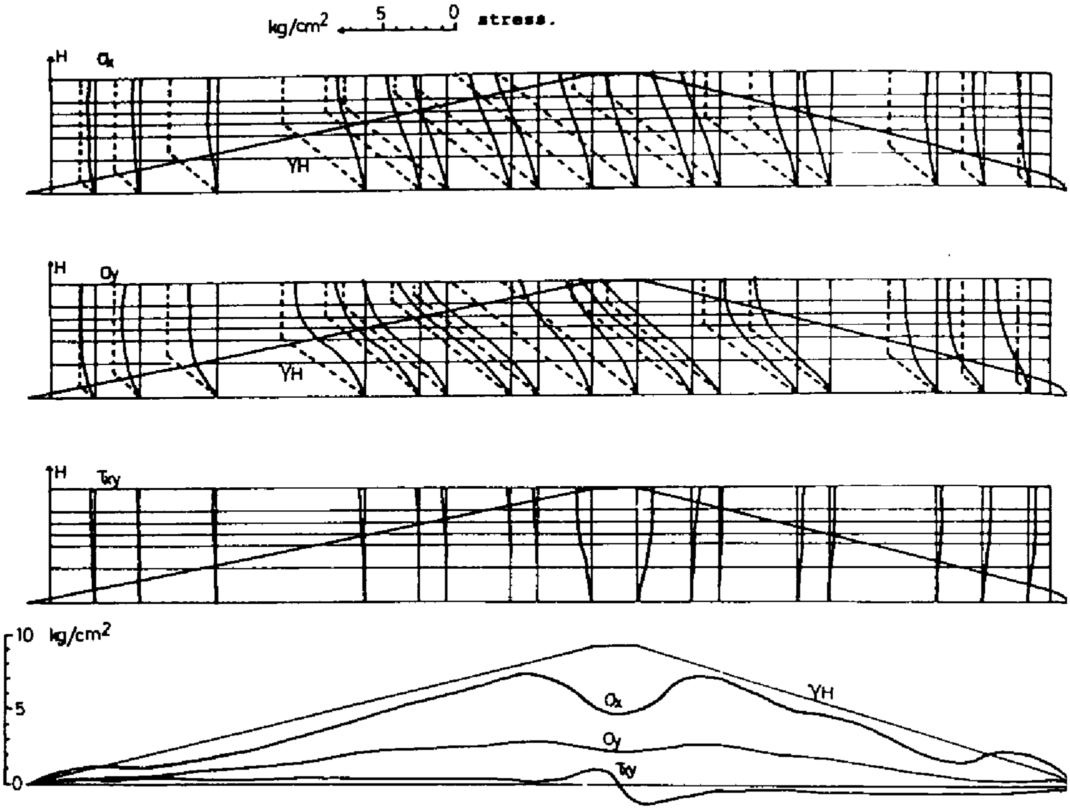


図3−37　B一型式の築造進行による応力の発達

値が生じ，その値は瞬時盛たてと大差ないが，約２０％位小さな値となっている。また三応力成分の分布は瞬時盛たての場合と大差なく，リフト施工の場合には，水平応力がやや小さく，鉛直応力がやや大きく出ることが確認された。また図３・３７から築堤の進行に伴う三応力の発達の様子を，堤底面において調べると，堤体の中央から両側へ，堤高の２倍位の範囲内では，水平応力，鉛直応力ともに，堤体が高くなるにつれて単調に応力も増大してゆくことがわかる。しかし堤高が$^2/_3$H位になれば増加率は減小する。せん断応力は均質な堤体と異なって，コアー両側部で大きな値をとる。（図中破線はγHの分布を示している。）

また完成断面の堤底における三応力成分の分布は図３・３７の下段に示しており，一般に鉛直応力はγHの７０〜８０％程度の大きさである。特にコアー部は単位体積重量が小さいために鉛直応力の値はその両側部より減少し，γHの５０〜６０％になってしまう。B一型式のような不均質な堤体においては

堤体の単位体積重量 γ としては各種の断面における単位体積重量の重み付き平均値を用い，今回の解析では γ =1.84 t/㎥となった。（図3.7，表3.4参照）
さてここに示した二種類の増分解析は築堤の過程を表現するには，前節の瞬時盛たて表現よりも現実的であり，両者の解析結果の最も大きな相異は完成断面における沈下量の分布型にあらわれてくる。すなわち増分解析では，沈下量の最大値の発生する点が堤高のH/2〜2/3Hの付近でありこの点を中心とした同心円的な等沈下量コンターが描けるのに対し，瞬時盛たての解析によっては，堤頂部にその最大値が発生し，下層になるほど沈下が減少するというコンターが描けるのである。また水平変位も，リフト施工の表現による方が，若干小さな値になる。このように変形の様子というものに顕著に解析法の相異が影響を与えており応力分布そのものは結果的には大きな変化のないことが分った。
また，堤底面における三応力成分の値の間には一般に

$$\gamma H \fallingdotseq \sigma_y > \sigma_x > \tau_{xy}$$

という関係のあることが認められた。

3・2・3　堤体下の地盤内応力分布

堤体が築造される基礎地盤が，この堤体を十分に支持できるかどうかという問題は重要であり，この問題を力学的な観点から論ずるには，弾性論による解析をおこなうことが，最も一般的である。特に地盤の崩壊に密接な関係のある最大せん断応力：maximun shearing stress の分布を論じている研究が多いのである。

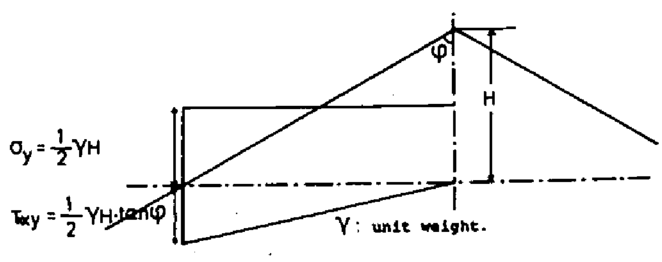


図3−38 Levy 応力による堤底面の応力

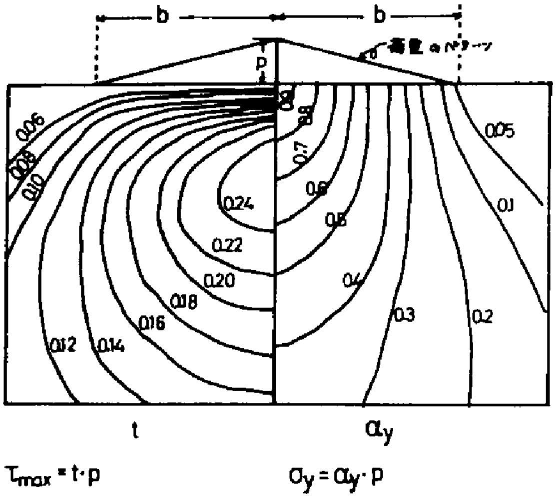


図3−39　jürgenson による地盤内応力分布

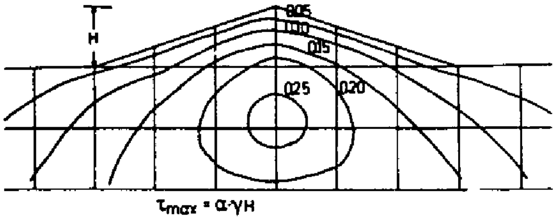


図3−40　ダム地盤系における最大せん断応力係数
（のりこう配3：4）

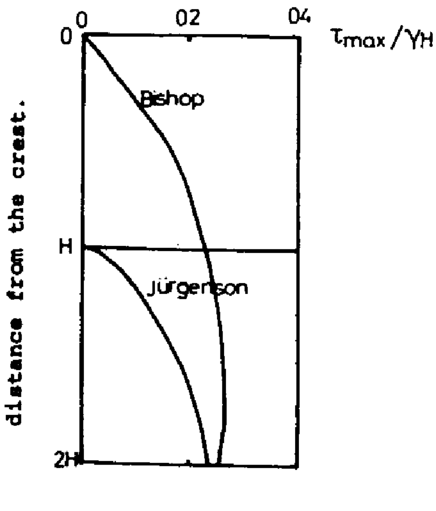


図3−41　ダム中心軸における最大せん断応力の比較

Terzaghi[90]によれば堤底面での応力の分布が図3・38のように誘導されている。同図は半無限クサビ体の，頂点からの高さがHであるような水平面上の鉛直応力とせん断応力の分布とを得たものであり，Levy 応力の仮定から得られたものである。この結果によれば，堤底のどの部分でも鉛直応力は同じ大きさであり，せん断応力は，のり先において最大，中央において0となる分布を示している。実際のダム底における応力の分布は前項，図3•13，図3•34等にみたようなものであって，この解が如何に現実と異なっているかが問題になる。

またこれとは別に半無限弾性地盤上に鉛直三角形分布荷重が，作用した場合の地盤内応力分布をBoussinesque 式の積分によって得た解があり，これを図3・39に示す。この解は今日でも引用される著名なものであり，これはJürgenson によって得られた。(51) この解の欠陥は弾性体である堤体を三角形分布鉛直荷重として表現したことにあり，堤底においては鉛直応力しか伝達されず，せん断応力が，地盤に伝達されるという現実を無視したものであるという点にある。最大せん断応力は堤体の中央直下$1/2$•b位の点（bは堤底面の長さの半分）で最大ピークとなり，その大きさはほぼ0.24p位であるということが分る。また鉛直応力のコンターは堤底中央を中心としてほぼ同心円的にひろがる。

ところで上に述べたJürgenson の解における欠陥を克服するために，堤体を表現する水平帯状板の積み重ねを仮定したMiddlebrooks[64]の研究がある。しかしより根本的には，弾性理論を用いて半無限弾性地盤上に堤体が存在するという応力場を数値的に解いたBishop[6]の研究が，上述の欠陥を補なうのに役だった。Bishopのこの研究は同一弾性体からなる，半無限一三角形領域における弾性解を得たものである。したがって堤体と地盤の間の応力の関係が明らかにされており，堤体内の応力分布も明らかにされた。この解析結果を図3・40に示す。これによれば先のJürgenson の解に比して最大せん断応力のピークの発生する位置が上方に移動していることがわかる。ダム中央線上での最大せん断応力の分布をJürgenson と Bishopのものについて比較すれば図3・41のようになり，両者の結果は，堤底面下H以上の深さでは，両者の結果が大体一致することが認められる。このような解析解においては，一般的な現実がそうであるように，堤体と地盤の弾性的性質の相異（弾性係数，ポアソン比）を導入することが困難である。したがってこの影響を調べるには有限要素法が効果的であることが分る。この節においてはこうした観点から有限要素

法により，次の二点を中心に計算結果をまとめてみた。

◎　のり　こう配の変化による応力分布の変化

◎　地盤と堤体の弾性係数の変化による効果

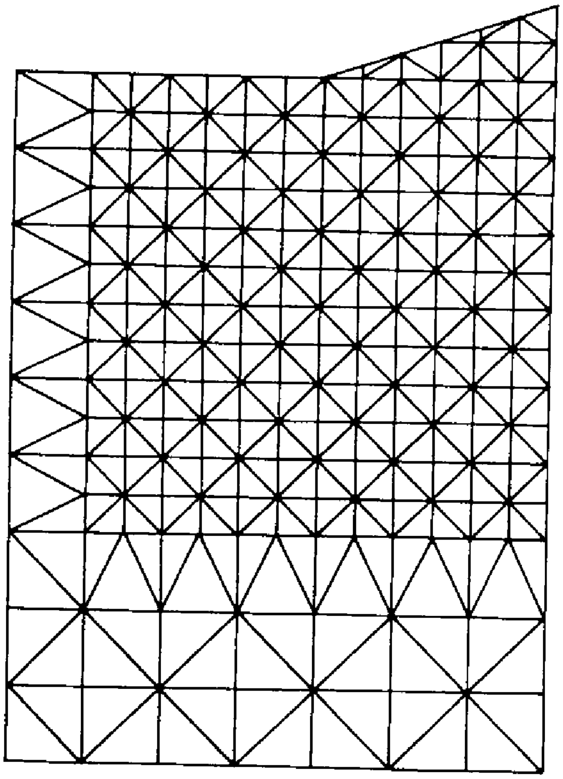


図3−42　ダム地盤系をあらわす2次元有限要素系

この問題を解くために二次元平面ひずみ場を設定し，半無限応力場を近似するために，図3・42に示す領域とメッシュを採用した。のりこう配の変化は，1：3，1：1.5，1：1.0の三種類，地盤と堤体の弾性係数比は1：0.0001，1：0.01，1：0.1，1：0.5，1：1.0の五種類，変化させてみた。解析の領域としては堤底面の長さの半分をbとするとき，幅2.333b深さ3bの長方形領域を用いた。深さに関する限り，少なくとも3bの深さをとれば底面固定の影響はあまりあらわれないと考えられる。何故なら，半無限地盤と，有限深さ地盤における鉛直応力の比較をみれば，3bの深さではほとんど応力に差が認められなくなるからである(37)

以上に示す解析では堤体の弾性係数：Ed，ポアソン比：ν = 0.4，地盤の

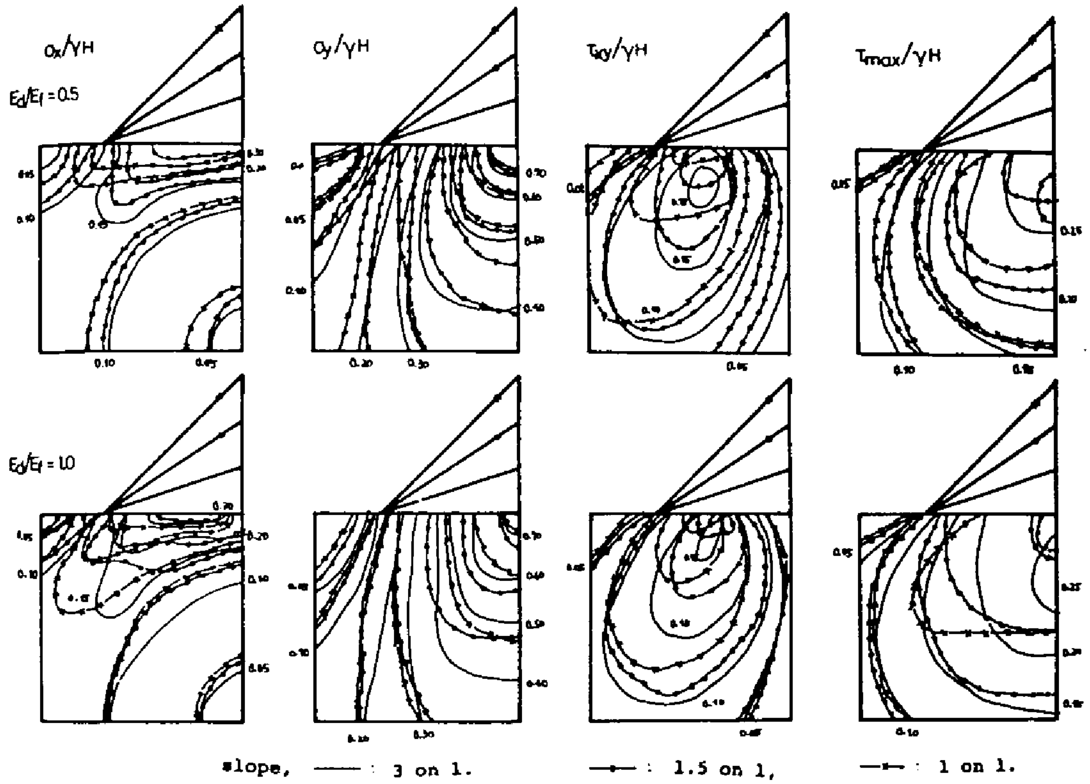


図 3—43　有限要素解による地盤内の応力分布（ 1 ）

弾性係数：Ｅｆ，ポアソン比：$V = 0.3333$ であるとする。堤底の長さの $1/2$ をｂとし，堤高をH，堤体の単位体積重量を γ とし，地盤の自重は考えない。図３・４３に堤体のこう配の変化とEd/Efの変化による，三応力成分と，最大せん断応力の分布の変化の模様を図示した。図中の値は応力／（堤体の単位重量×堤高）という無次元量である。図からこう配が急になるにつれて，応力度の大きな領域の増大することが認められる。またEd/Efが大となるにつれても同じような傾向を示すが，その変化は，のり　こう配の変化によるもの程大きなものではなく，応力の集中が極端に大きくなるということはない。応力分布の特徴は，Ed/Ef＝0.1付近のパターンとEd/Ef＝1.0付近のパターンに代表される。水平応力の最大は，堤底の浅い部分（b/5~b/6位）に生じその大きさは 0.3～0.4 γH である。のり先付近の地表面にわずかに引張力が発生する。$1/2$・b以上の深さになると水平応力は 0.1 γH 以下になる。

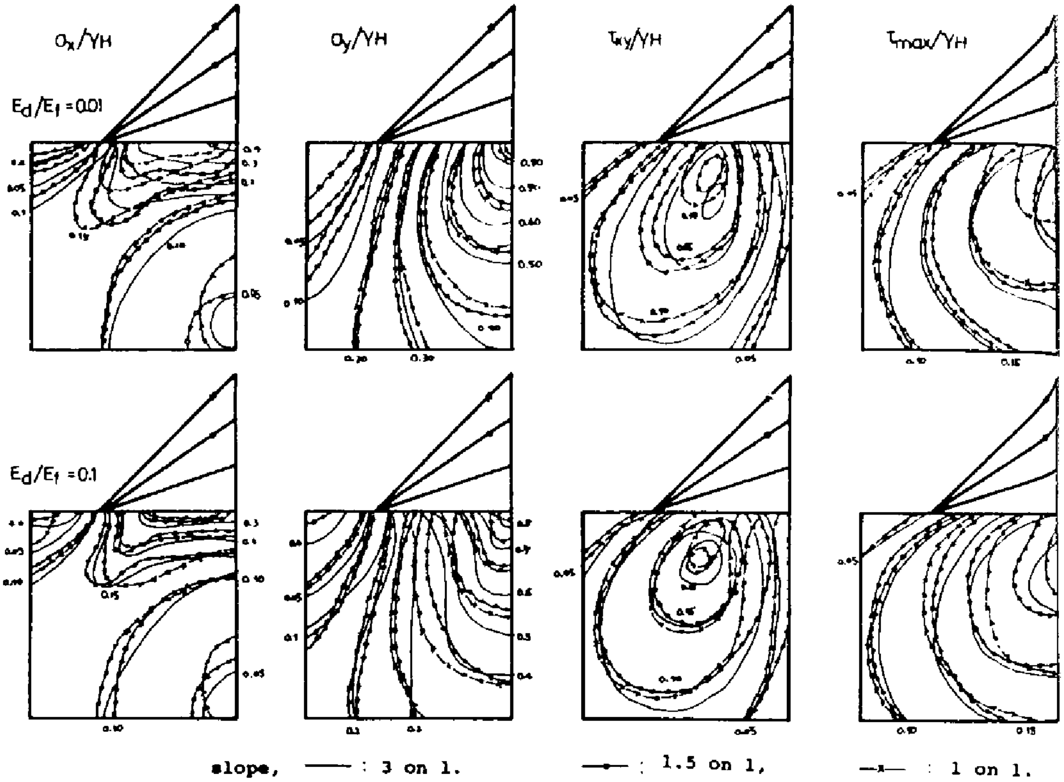


図 3—43 有限要素解による地盤内の応力分布（２）

鉛直応力の分布は，基本的には，圧力球根の形状を呈する。Ed/Ef=0.01 付近では，その分布は三角形分布荷重による解（ Jürgenson ）とほぼ一致した解になるが，この場合も，こう配が急になれば，Jürgenson の解とかなり異なってくる。また基本的には鉛直応力は堤体の中央直下で 1.0 になるはずだがその領域はきわめて狭く，$^1/_6$•b 位の深さになると応力値は 0.8～0.7 に減少する。

せん断応力の分布はのり先と，堤頂，堤底中央が成す角の，ほぼ二等分線上に中心を持つ傾斜した卵形のコンターをとる。これはダム軸を中心に対称な分布となるはずである。せん断応力ピークは，およそ，のり先から約 b ／ 2 内で，深さ b/2～b/3 付近に生じその大きさは，0.1 8ないし，0.2 0 γH 位である。
これ等の応力分布は，片側にだけ三角形分布荷重のある場合の解 (23) と比較すると類推できる。

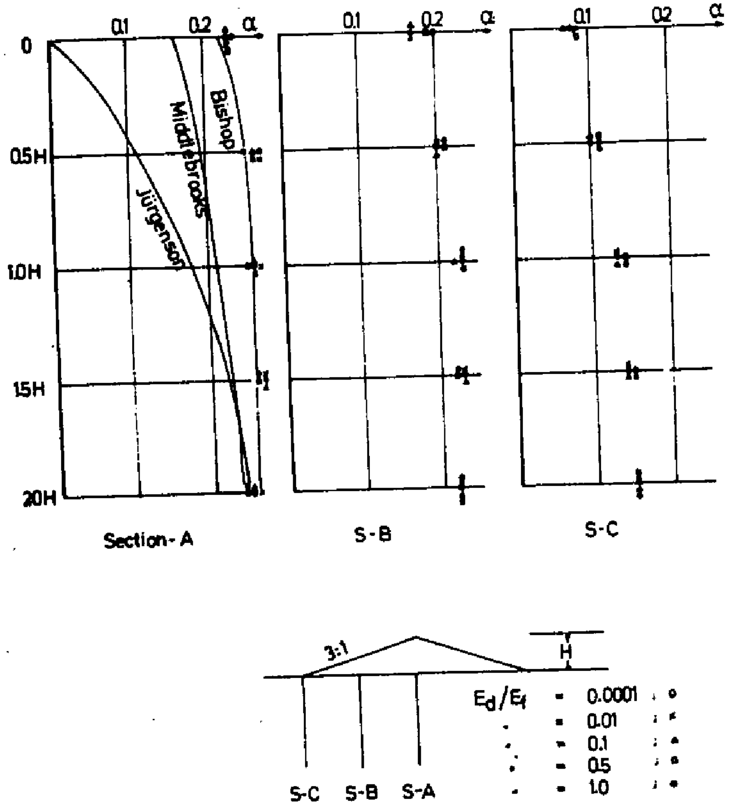


図 3—45　弾性係数比の変化による最大せん断応力の変化(1)

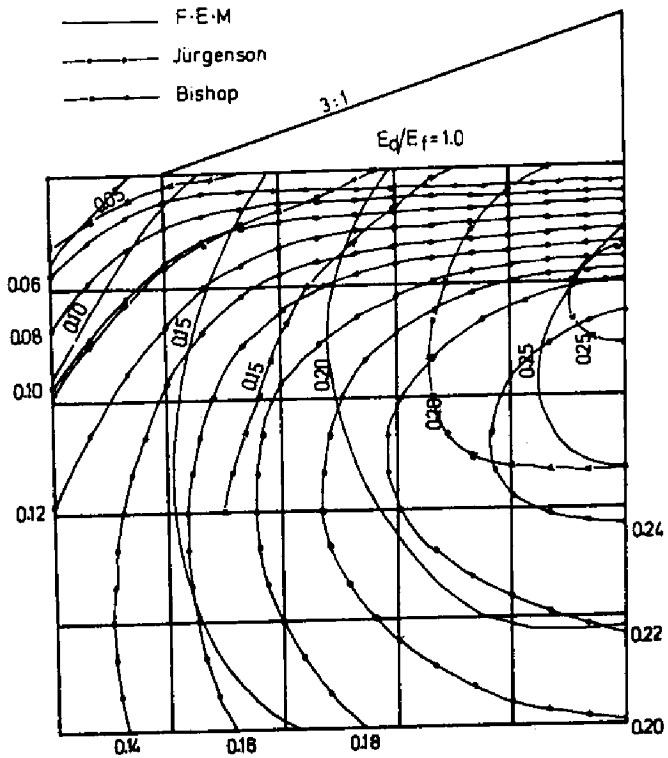


図 3—44　最大せん断応力分布の比較

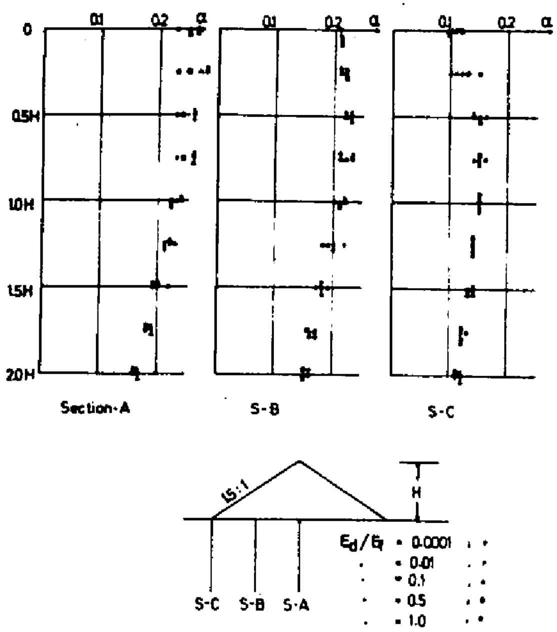


図 3−45 弾性係数比の変化による
最大せん断応力の変化 (2)

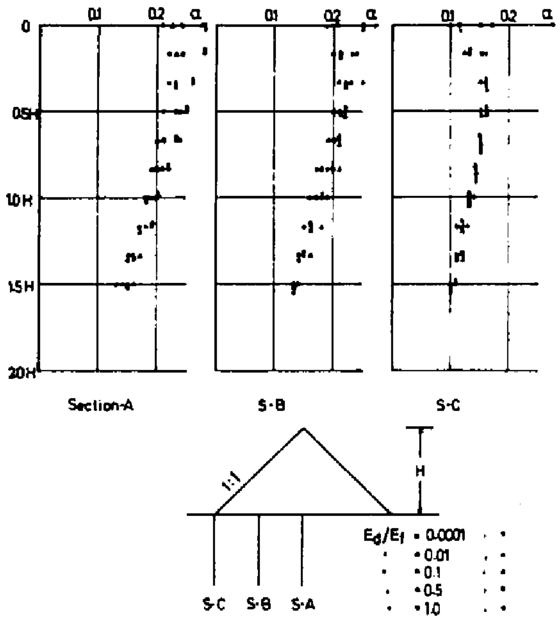


図 3−45 弾性係数比の変化による
最大せん断応力の変化 (3)

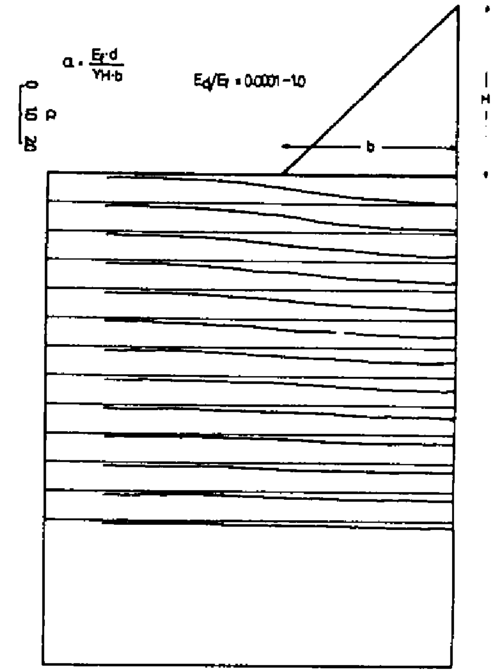


図 3−46 地盤の沈下係数のパターン

さて問題の最大せん断応力の分布は，基本的には，ダム軸上0～b／5位の点に中心をもつ同心円的な分布であり，しかもピークはその中央付近にあり，その大きさは0.25 γH付近であることが図からわかる。こう配が1：3で E_d/E_f =1の場合はBishopの解と比較できるから有限要素法の解とを比較すると図3・44のようになる。また同図にはJürgensonの解も併記している。図から等高線は有限要素法の解ではBishopの解より大きな領域を占める形になっていることがわかる。また分布の相異は横方向に大きいことがわかる。Bishopの解が理論的な真値を代表していると考えられるから，有限要素法によるこの解のズレは，領域を有限な広さに制限したこと，（特に側方の広がり）およびポアソン比をどのように取りあつかっているかの相異によるものと考えられる。ところが，有限要素法の解と，Bishopの解は，深さ方向については，ダム中央断面において良く合致している。このことは図3・45に示す深さ方向の変化をみれば理解される。すなわちこう配が3：1の場合には2.0 γH程の深さまで最大せん断応力の値は0.25 γH程の値を示す。またのり先の断面では最大せん断応力の大きさは単調に増加する傾向にある。のりこう配が急になると深さ方向での最大せん断応力の減少の傾向は大となる。また E_d/E_f の変化による最大せん断応力の変化はわずかであることが分るが，浅い部分ほどこの影響が顕著であり，且つのりこう配が急である程，E_d/E_f による最大せん断応力値の変化が大である。（たとえば1：1.0の場合の中央断面）すべての場合を通じて E_d/E_f による効果（接触の影響）ダム高さ位の深さ内で消滅すると考えられる。

沈下の分布については沈下をdとしたときに無次元化した沈下：

$$\alpha = \frac{E_f \cdot d}{\gamma H \cdot b}$$

の分布を図3・46に示す。同図はこう配が1：1.0の場合を示しているが，のりこう配の変化による沈下分布の変化は，ほとんど認められない。E_d/E_f が0.0001 から1.0まで変化する間に沈下量は10％程度小さくなる。この図から 最大沈下はダム底の中央に生ずることがわかるが，たとえば $E_f=5\times10^4$ kg/cm² γ = 2.0 t/m³ H = 50 m b=50 m（こう配1：1.0）E_d/E_f =0.01とすると最大沈下量はおよそ

$$d = \alpha \frac{\gamma H b}{E_f} = 0.8 \times \frac{2.0 \times 50 \times 50}{5 \times 10^5} {}^{m} = 8 \times 10^{-3} \ {}^{m}$$

となる。

§3・3　弾塑性解析

前節で線形解析による種々の解析を示したのであるが，土材量の示す応力ーひずみ関係の非線形な性質を解析に取り入れることがどうしても必要になる。このことは，特に変形量を正確に知るために必要なのである。この土の示す非線形性を表示するには，大別して二種類ある。第一はレオロジーモデルを用いるものであり，第二は弾性定数を応力の関数として表わすものである。第一のものは，特に動的な解析によく用いられるが，多種類のモデル定数を実験で定めなければならないこと，モデルが弾性モデルではないため解析手法に困難がある。この例としては，たとえば畑野等(28)による研究がある。第二のものは変形係数，ポアソン比を主応力の関数等とするものであり，解析技術は容易になるが，この関数形をどのようにとるかには確定した方法がないようである。この例としては，たとえば林等(33)による研究がある。

以上の方法は現実の材料の性質をできるだけ忠実に解析に取り入れようとするものであるが，ここではやや概念的に弾塑性解析という形で取りあげてみた。

3・3・1　弾塑性解析の手法

① 弾塑性応力行列の誘導

土やロック材料の力学的挙動を弾塑性体とみなすと一般に次のような，応力ーひずみ関係の理論が適用できる。(86)

ひずみ増分理論によれば，ある荷重段階での“ひずみ増分”，$d\varepsilon$ は弾性ひずみ，$d\varepsilon^e$ と塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^p$ の和で表現される。弾性ひずみ $d\varepsilon^e$ は弾性論によって決定されるひずみ量であるから，Hook の法則により決定する。塑性ひずみ増分は，基本的には Prandtle-Reuss の関係式(96)によって定義され，塑性ひずみ増分が，偏差応力成分に比例することが定式化されている。いま問題を二次元応力問題に限っているから $x-y$ 平面を考えるとひずみ成分は，

$$d\varepsilon_x = d\varepsilon_x^e + d\varepsilon_x^p$$

$$d\varepsilon_y = d\varepsilon_y^e + d\varepsilon_y^p \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot36)$$

$$d\gamma_{xy} = d\gamma_{xy}^e + d\gamma_{xy}^p$$

である。平面応力，平面ひずみのそれぞれの場合について，塑性ひずみ増分ー応力の関係を定義する弾塑性応力行列を定義することができれば，有限要素法には好都合である。そのために塑性論の適用によって次のような弾塑性応力行列を誘導する。(99)

（平面応力の場合）

$\sigma_z = 0$ だから偏差応力は次のように定義できる。p を平均応力とすると

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \quad : \quad \begin{aligned} \sigma_x' &= \sigma_x - p = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y) \\ \sigma_y' &= \sigma_y - p = \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x) \\ \sigma_z' &= -p = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \quad (3\cdot37)$$

この時相当応力 $\bar{\sigma}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2 + 2\tau_{xy}^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3\cdot38)$$

塑性ひずみ増分は，塑性ポテンシャルを f と書く時，Mieses の最大塑性仕事の仮定(87)によって

$$d\varepsilon_x^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}\cdot d\Lambda ; d\varepsilon_y^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}\cdot d\Lambda ; d\gamma_{xy}^p = \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}\cdot d\Lambda \quad (3\cdot39)$$

ここで $d\Lambda$ は比例定数である。いま塑性ポテンシャルが相当応力に等しいとすると，（加工硬化のある場合の一般的表示法）

$$f = \bar{\sigma} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot40)$$

（3・40）式の両辺を二乗して（3・38）式を用い　$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 等

で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{1}{2\cdot\bar{\sigma}}(2\sigma_x - \sigma_y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{1}{2\cdot\bar{\sigma}}(2\sigma_y - \sigma_x) \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot41)$$
$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{1}{2\cdot\bar{\sigma}}\cdot 6\tau_{xy}$$

他方塑性仕事は次式で定義される。

$$dW^p = \sigma_x \cdot d\varepsilon_x^p + \sigma_y \cdot d\varepsilon_y^p + \tau_{xy} \cdot d\gamma_{xy}^p \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot42)$$

この式に（３・４１）と（３・３９）式を用いると

$$dW^p = \frac{d\Lambda}{2\bar{\sigma}}\left[\sigma_x \cdot (2\sigma_x - \sigma_y) + \sigma_y \cdot (2\sigma_y - \sigma_x) + 6\tau_{xy}^2 \right] = \frac{d\Lambda}{2\bar{\sigma}} 2\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma} \cdot d\Lambda \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot43)$$

また塑性仕事の別の表現法は相当有効応力$\bar{\sigma}$に対する，相当塑性ひずみ増分$d\bar{\varepsilon}^p$によって，次式で表現される。

$$dW^p = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon}^p \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot44)$$

よって，（３・４３）と（３・４４）式から

$$d\bar{\varepsilon}^p = d\Lambda \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot45)$$

（３・３９）と（３・４１），（３・４５）式によって

$$d\varepsilon_x^p = \frac{1}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_x - \sigma_y) \cdot d\bar{\varepsilon}^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \sigma_x' = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p}} \sigma_x'$$
$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} \cdot H} \sigma_x'$$

$$d\varepsilon_y^p = \frac{1}{2\bar{\sigma}}(2\sigma_y - \sigma_x)\cdot d\bar{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\cdot\sigma_y' = \frac{3}{2}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p}}\cdot\sigma_y'$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}\cdot H}\cdot\sigma_y'$$

$$d\gamma_{xy}^p = \frac{1}{2\bar{\sigma}}\cdot 6\tau_{xy}\,d\bar{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\cdot 2\tau_{xy} = \frac{3}{2}\cdot\frac{d\sigma}{\bar{\sigma}\cdot\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p}}\cdot 2\tau_{xy}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}\cdot H}\cdot 2\tau_{xy}$$

ただし ……………………(３・４６)

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \qquad \cdots\cdots(3\cdot 47)$$

は加工硬化曲線のこう配を意味し，この係数によって材料の塑性の特徴が決定されるのであり，これは材料試験から決定さるべきである。

（３・４６）式は塑性ひずみ増分と，偏差応力の平面応力場における関係式であるからこれを（３・３７）式を用いて求めるべき関係へと行列表示する。

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{d\bar{\sigma}}{H\cdot\bar{\sigma}}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(3\cdot 48)$$

（３・４８）式は塑性ひずみ増分についての関係式であるから，これに弾性ひずみを加え合わせるために次の操作を行なう。（３・４６）式の各項の二乗を作り，これに（３・３８）式を用いると，

$$(d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_x^p)\cdot(d\varepsilon_y^p) + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy}^p)^2$$

$$= (\sqrt{3}\cdot\bar{\sigma})^2\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\right\}^2 = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot d\bar{\varepsilon}^p\right\}^2$$

なる関係を得，結局相当塑性ひずみに対する記述が

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left\{(d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_y^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_x^p)\cdot(d\varepsilon_y^p)\right\}^{1/2} \qquad \cdots\cdots(3\cdot 49)$$

となることが分る。（３・３６）式における全ひずみ増分の定義に（３・４・ａ）式

における弾性ひずみの定義を用いれば，

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y^p \\ d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix}$$

よって

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y - d\varepsilon_y^p \\ d\gamma_{xy} - d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} \qquad (3 \cdot 50)$$

（3・50）式に（3・46）式を代入すると

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \begin{Bmatrix} E \cdot [(2-\nu)\sigma_x - (1-2\nu)\sigma_y]/3(1-\nu^2) \\ E \cdot [(2-\nu)\sigma_y - (1-2\nu)\sigma_x]/3(1-\nu^2) \\ E \cdot \tau_{xy}/(1+\nu) \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots (3 \cdot 51)$$

$$S_1 = \frac{E}{3(1-\nu^2)} [(2-\nu)\sigma_x - (1-2\nu)\sigma_y]$$
$$S_2 = \frac{E}{3(1-\nu^2)} [(2-\nu)\sigma_y - (1-2\nu)\sigma_x] \qquad \cdots\cdots\cdots (3 \cdot 52)$$
$$S_3 = \frac{E}{(1+\nu)} \tau_{xy}$$

となる。$d\bar{\varepsilon}^P, \bar{\sigma}$ 等を応力成分を用いて表示すると（３・３８）式より

$$2\bar{\sigma}\cdot d\bar{\sigma} = 3\sigma_x'\cdot d\sigma_x + 3\sigma_y' d\sigma_y + 6\tau_{xy}\cdot d\tau_{xy} \quad \cdots\cdots (3\cdot53)$$

これに（３・４７）式を用いると

$$2\bar{\sigma}\cdot H\cdot d\bar{\varepsilon}^P = 3(\sigma_x'\cdot d\sigma_x + \sigma_y'\cdot d\sigma_y + 2\tau_{xy}\cdot d\tau_{xy})$$

$$d\bar{\varepsilon}^P = \frac{3}{2\bar{\sigma}H}(\sigma_x'\cdot d\sigma_x + \sigma_y'\cdot d\sigma_y + 2\tau_{xy}\cdot d\tau_{xy}) \quad (3\cdot54)$$

（３・５４）式の $\sigma_x' d\sigma_x$ ，$\sigma_y' d\sigma_y$ 等の項に（３・５１）式を用いて計算すると（３・５４）式の右辺は

$$\sigma_x'\cdot d\sigma_x + \sigma_y' d\sigma_y + 2\tau_{xy} d\tau_{xy} = S_1 d\varepsilon_x + S_2 d\varepsilon_y + S_3 d\gamma_{xy} \quad \cdots\cdots (3\cdot55)$$

$$-\frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^P}{\bar{\sigma}}(S_1\sigma_x' + S_2\sigma_y' + 2S_3\tau_{xy})$$

（３・５４）式，（３・５５）式より

$$d\bar{\varepsilon}^P = \frac{2}{3}\cdot\frac{S_1 d\varepsilon_x + S_2 d\varepsilon_y + S_3 d\gamma_{xy}}{\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H + S_1\sigma_x' + S_2\sigma_y' + 2S_3\tau_{xy}}\bar{\sigma} = (S_1 d\varepsilon_x + S_2 d\varepsilon_y + S_3 d\gamma_{xy})\frac{\bar{\sigma}}{S}\cdot\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot56)$$

$$S = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H + S_1\sigma_x' + S_2\sigma_y' + 2S_3\tau_{xy}$$

（３・５６）式を（３・５１）式に代入すると，

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{1}{S}\begin{bmatrix} S_1^2 & S_2S_1 & S_3S_1 \\ S_2S_1 & S_2^2 & S_2S_3 \\ S_3S_1 & S_2S_3 & S_3^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3\cdot57)$$

なるひずみ増分と応力増分の関係式が最終的に得られる。（３・５７）式右辺，第一項は弾性応力をあらわし，第二項は，塑性応力をあらわしているからこれを次のように表示する。

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}]\cdot\{d\varepsilon\} = [D_e - D_p]\cdot\{d\varepsilon\} \quad \cdots\cdots (3\cdot58)$$

ここで

$$[D_e]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix} \quad ; \quad [D_p]=\frac{1}{S}\begin{bmatrix}S_1^2 & S_2S_1 & S_3S_1\\ S_2S_1 & S_2^2 & S_3S_2\\ S_3S_1 & S_3S_2 & S_3^2\end{bmatrix}$$

この場合S，S_1，S_2，S_3は（3・5 6）式および（3・5 2）式に定義されるものである。

以上で誘導が終った。

（平面ひずみの場合）

手順は平面応力の場合と全く同じであるが，偏差応力の形が異なり，従って相当応力の表示が異なる。$d\varepsilon_z^p=0$ だから $d\sigma_z'=0$ となる。よって平均応力をpとすると

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot59)$$

であり偏差応力は，

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= \sigma_x-p = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\\ \sigma_y' &= \sigma_y-p = \frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x) \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot60)\\ \sigma_z' &= 0\end{aligned}$$

相当応力$\bar{\sigma}$の定義は

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_x'^2+\sigma_y'^2+\sigma_z'^2+2\tau_{xy}^2)^{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_x^2-2\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2+4\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (3\cdot61)$$

以下（3・39）～（3・47）式と同じ結果を得る。（3・46）式に（3・60）式を用いると，

$$\begin{Bmatrix}d\varepsilon_x\\ d\varepsilon_y\\ d\gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}H}\begin{bmatrix}3/4 & -3/4 & 0\\ -3/4 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \quad (3\cdot62)$$

という塑性ひずみ増分の定義式を得る。

（３・４６）式の二乗を作りこれに（３・６１）を用いると

$$(d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_y^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_x^p)(d\varepsilon_y^p) = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}d\bar{\varepsilon}^p\right\}^2$$

なる関係を得，結局相当塑性ひずみに対する記述が

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{(d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_x^p)(d\varepsilon_y^p) + (d\varepsilon_y^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy})^2\right\}^{1/2} \quad (3\cdot63)$$

となる。他方（３・３６）式における全ひずみ増分の定義に（３・４ｂ）式における弾性ひずみの定義式を用いると結局，

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y - d\varepsilon_y^p \\ d\gamma_{xy} - d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} \quad (3\cdot64)$$

（３・６４）式に（３・４６）式を代入すると，

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} \quad (3\cdot65)$$

$$S_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\sigma_x' + \nu\sigma_y'\right] \; : \; S_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\sigma_x' + (1-\nu)\sigma_y'\right]$$

$$S_3 = \frac{E}{(1+\nu)}\tau_{xy} \quad (3\cdot66)$$

$d\bar{\varepsilon}^p$, $\bar{\sigma}$ 等を応力成分を用いて表示しようとすると（３・６１）式より

$$\bar{\sigma}\cdot d\bar{\sigma} = \frac{3}{4}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)\cdot d\sigma_x + (\sigma_y - \sigma_x)\cdot d\sigma_y + 4\tau_{xy}d\tau_{xy}\right\}$$

これに（３・４７）式を用いると，

ここで

$$[D_e]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix} \quad ; \quad [D_p]=\frac{1}{S}\begin{bmatrix}S_1^2 & S_2S_1 & S_3S_1\\ S_2S_1 & S_2^2 & S_3S_2\\ S_3S_1 & S_3S_2 & S_3^2\end{bmatrix}$$

この場合 S, S_1, S_2, S_3 は(3・56)式および(3・52)式に定義されるものである。

以上で誘導が終った。

（平面ひずみの場合）

手順は平面応力の場合と全く同じであるが，偏差応力の形が異なり，従って相当応力の表示が異なる。$d\varepsilon_z^p=0$ だから $d\sigma_z'=0$ となる。よって平均応力を p とすると

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot59)$$

であり偏差応力は，

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= \sigma_x-p = \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\\ \sigma_y' &= \sigma_y-p = \frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_x) \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot60)\\ \sigma_z' &= 0\end{aligned}$$

相当応力 $\bar{\sigma}$ の定義は

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_x'^2+\sigma_y'^2+\sigma_z'^2+2\tau_{xy}^2)^{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_x^2-2\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2+4\tau_{xy}^2)^{1/2} \quad (3\cdot61)$$

以下(3・39)〜(3・47)式と同じ結果を得る。(3・46)式に(3・60)式を用いると，

$$\begin{Bmatrix}d\varepsilon_x\\ d\varepsilon_y\\ d\gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}H}\begin{bmatrix}3/4 & -3/4 & 0\\ -3/4 & 3/4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \quad (3\cdot62)$$

という塑性ひずみ増分の定義式を得る。

（３・４６）式の二乗を作りこれに（３・６１）を用いると

$$(d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_y^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\varepsilon_x^p)\cdot(d\varepsilon_y^p) = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}d\bar{\varepsilon}^p\right\}^2$$

なる関係を得，結局相当塑性ひずみに対する記述が

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{(d\varepsilon_x^p)^2 + (d\varepsilon_x^p)(d\varepsilon_y^p) + (d\varepsilon_y^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma_{xy})^2\right\}^{1/2} \quad (3\cdot63)$$

となる。他方（３・３６）式における全ひずみ増分の定義に（３・４ｂ）式における弾性ひずみの定義式を用いると結局，

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y - d\varepsilon_y^p \\ d\gamma_{xy} - d\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} \quad (3\cdot64)$$

（３・６４）式に（３・４６）式を代入すると，

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x' \\ \sigma_y' \\ 2\tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}}\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} \quad (3\cdot65)$$

$$S_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\sigma_x' + \nu\sigma_y'\right] \;:\; S_2 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\sigma_x' + (1-\nu)\sigma_y'\right]$$

$$S_3 = \frac{E}{(1+\nu)}\tau_{xy} \quad (3\cdot66)$$

$d\bar{\varepsilon}^p$, $\bar{\sigma}$ 等を応力成分を用いて表示しようとすると（３・６１）式より

$$\bar{\sigma}\cdot d\bar{\sigma} = \frac{3}{4}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)\cdot d\sigma_x + (\sigma_y - \sigma_x)\cdot d\sigma_y + 4\tau_{xy}d\tau_{xy}\right\}$$

これに（３・４７）式を用いると，

$$\bar{\sigma}\cdot H\cdot d\bar{\varepsilon}^{p} = \frac{3}{4}\left\{(\sigma_x-\sigma_y)\cdot d\sigma_x+(\sigma_y-\sigma_x)\cdot d\sigma_y+4\tau_{xy}\cdot d\tau_{xy}\right\}$$

$$d\bar{\varepsilon}^{p} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\bar{\sigma}H}(\sigma_x'\cdot d\sigma_x+\sigma_y'\cdot d\sigma_y+2\tau_{xy}d\tau_{xy}) \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot67)$$

（３・６７）式の $\sigma_x' d\sigma_x$，$\sigma_y' d\sigma_y$ 等の項に（３・６５）式を用いて計算すると（３・６７）式の右辺は

$$\sigma_x'\cdot d\sigma_x+\sigma_y'\cdot d\sigma_y+2\tau_{xy}\cdot d\tau_{xy} = S_1\cdot d\varepsilon_x+S_2 d\varepsilon_y+S_3 d\gamma_{xy} - \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^{p}}{\bar{\sigma}}\{\sigma_x' S_1+\sigma_y' S_2+2\tau_{xy}S_3\} \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot68)$$

（３・６７）式（３・６８）式より

$$d\bar{\varepsilon}^{p} = \frac{2}{3}\cdot\frac{S_1 d\varepsilon_x+S_2 d\varepsilon_y+S_3 d\gamma_{xy}}{\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H+S_1\sigma_x'+S_2\sigma_y'+2S_3\tau_{xy}}\bar{\sigma} = (S_1 d\varepsilon_x+S_2 d\varepsilon_y+S_3 d\gamma_{xy})\frac{\bar{\sigma}}{S} \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot69)$$

$$S = \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H+S_1\sigma_x'+S_2\sigma_y'+2S_3\tau_{xy}$$

（３・６９）式を（３・６５）式に代入すると，

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \left\{\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} - \frac{1}{S}\begin{bmatrix} S_1^2 & S_2S_1 & S_3S_1 \\ S_2S_1 & S_2^2 & S_2S_3 \\ S_3S_1 & S_2S_3 & S_3^2 \end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3\cdot70)$$

なるひずみ増分と応力増分の関係式が最終的に得られる。前と同様にこれを行列表示すると次のようになる。

$$[D_e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} : [D_p] = \frac{1}{S}\begin{bmatrix} S_1^2 & S_2S_1 & S_3S_1 \\ S_2S_1 & S_2^2 & S_2S_3 \\ S_3S_1 & S_2S_3 & S_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\{d\sigma\} = [D_{ep}]\{d\varepsilon\} = [D_e - D_p]\{d\varepsilon\} \quad \cdots\cdots\cdots(3\cdot71)$$

この場合 S，S_1，S_2，S_3 は（３・６９）式および，（３・６６）式に定義されているものである。以上で誘導がおわった。

このように形式的には全く同様の誘導で平面ひずみと平面応力の場合の弾塑

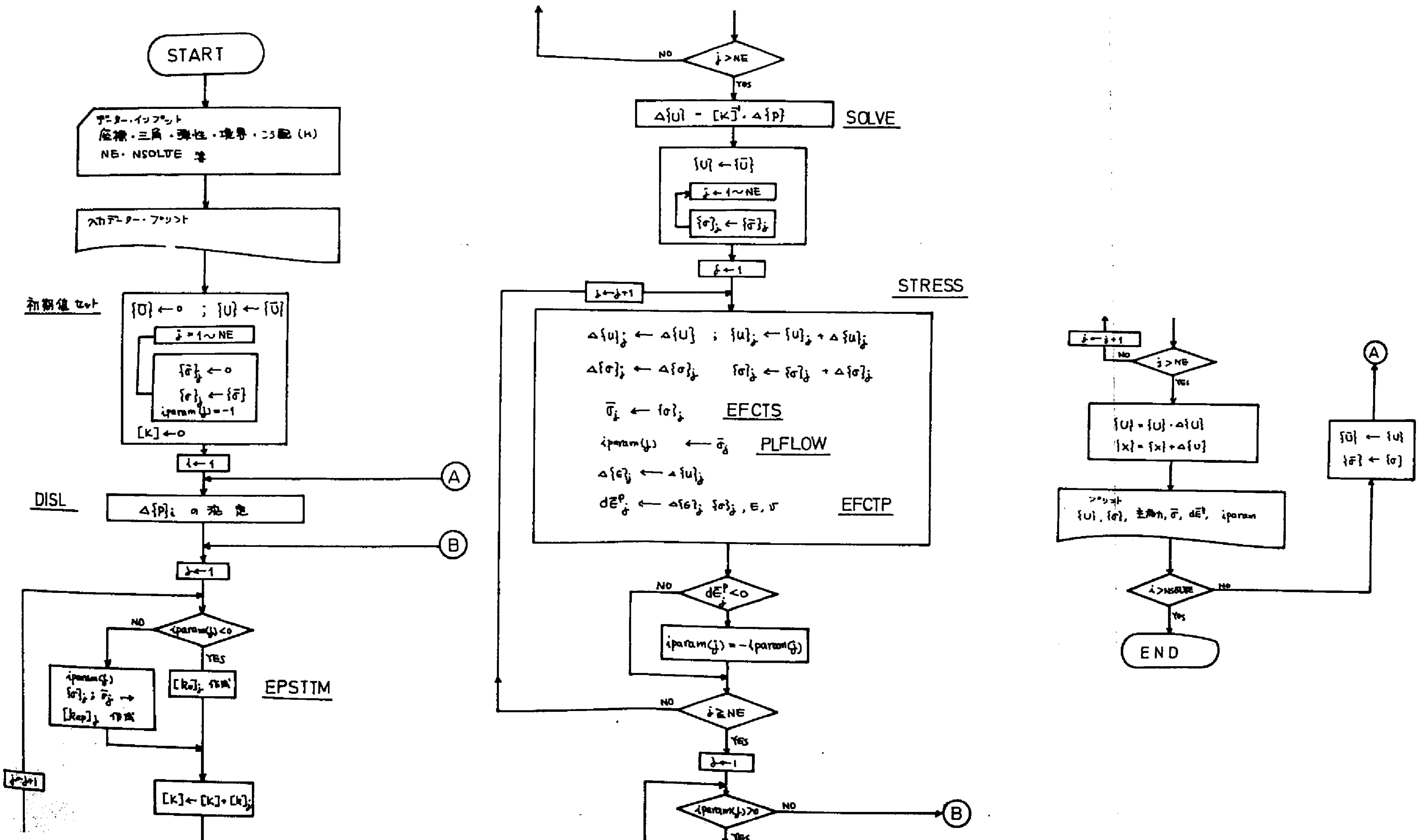


図 3—47　弾塑性解析のアルゴリズム

性応力行列が定義できる。両者の違いは結局偏差応力の表現の相異に帰着するものである。
塑性応力行列の各項S，S_1，S_2，S_3は弾性係数，ポアソン比，の他に，ある載荷段階における偏差応力，および加工硬化曲線のこう配：Hが含まれていることに注意せねばならない。すなわち塑性変形におけるひずみだけが，発生応力に比例しているのである。この〔Dep〕行列を用いて3・1・1項に述べた手法によってスティフネス行列を作ることができる。

② 弾塑性解析のアルゴリズム

①に誘導した弾塑性応力行列を用いることによって，容易に弾塑性解析がおこなえるわけであるが，①で示したひずみ増分理論に従えば，各載荷段階に生じたひずみの蓄積がある構造物の載荷履歴の最初から，その時点におけるまでの全ひずみをあらわすことになる。よって上の弾塑性応力行列を用いて，有限要素の解を用いるにも，適当な載荷段階を目的に応じて設定するのが普通である。前項3・2・2 に示した，堤体の築造進行に伴う応力や変位の変化の追跡の問題における築造リフト等が載荷段階に適している。こうした考えで図3・47に示したフローチャートのような解析アルゴリズムを用いた。このアルゴリズムには，モール・クローンによる破壊規準によって，各載荷段階ごとに，ある要素が降伏しているかどうかをチェックすることによって次項に述べる，堤体の遂次破壊の追跡のアルゴリズムにもなり得る。
一般の有限要素解析と異なる点は，入力データ に 載 荷段階の総数が必要なこと，要素のスティフネスの作成が，やや複雑であること，それに相当塑性ひずみ $d\bar{\varepsilon}^p$ が負になる要素がある場合，再度この要素は，塑性変形を生じないものとして，系のスティフネスを再び作りなおす作業が必要なことである。図中の記号は次のような意味である。

$\{u\}_j$：要素の変位。　$\{U\}$：系の変位。
$\Delta\{u\}$：載荷段階における変位増分。
$\{\bar{U}\}$：1段階前の変位ベクトル。
$\{X\}$：系の座標。　$\Delta\{P\}_i$：載荷段階の荷重ベクトル
$\{\sigma\}_j$：要素の応力。
$\Delta\{\sigma\}_j$：載荷段階に対応する要素の応力増分。
$\{\bar{\sigma}\}_j$：1段階前の要素の応力。

$[k_e]_j$ ：要素の弾性スティフネス行列。

$[k_p]_j$ ：要素の塑性スティフネス行列。

$[K]$ ：系のスティフネス。

N E ：要素数，NSOLVE：載荷段階数

iparam ：塑性変形を生ずるか，生じないかのパラメーター

DISL, EPSTTM, STRESS, EFCTS, EFCTP, PLFLOW：サブルーチン名

3・3・2 深山ダムにおける実例

① 応力ひずみ曲線の推定

深山ロックフィルダムにおけるロック材の三軸試験における応力ひずみ曲線から（3・47）式における，加工硬化曲線のこう配Hを求めなくてはならない。塑性論によれば，$d\bar{\sigma}/d\bar{\varepsilon}^p$ なる量は，引張試験から求めらるべきことが示されている。それは，圧縮試験によっては，試料の直径と高さの比によって，試料に純粋の圧縮力が作用しなかったり，端面の拘束圧が大きいこともまた，座屈が生じたりすることなどである。しかし土材料に対して引張試験をおこなうことは無意味であるから圧縮試験の結果を用いねばならない。また$d\bar{\sigma}$ や $d\bar{\varepsilon}^p$という量は結局一般の三軸応力状態を一軸応力状態の応力ひずみの量に還元する量と考えて良いのだから，三軸試験等の結果を利用するには側圧が0のものを利用すれば良いことになる。ところが，手もとに得られた試料は側圧が 0.5 , 1.0 、1.5 kg/cm² の三種類についてなされた三軸圧縮によるせん断試験の経過記録のみであった。そこで次のように考える。

（図3・48参照）

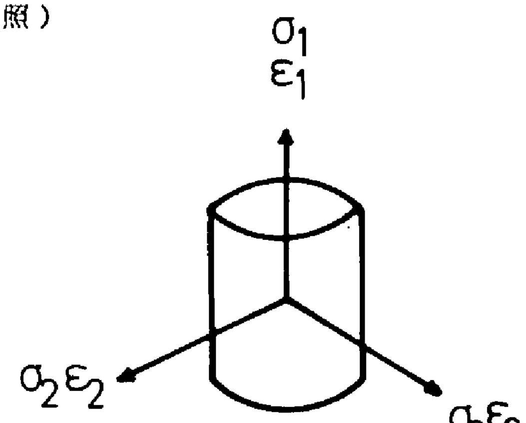


図3−48 三 軸 試 験

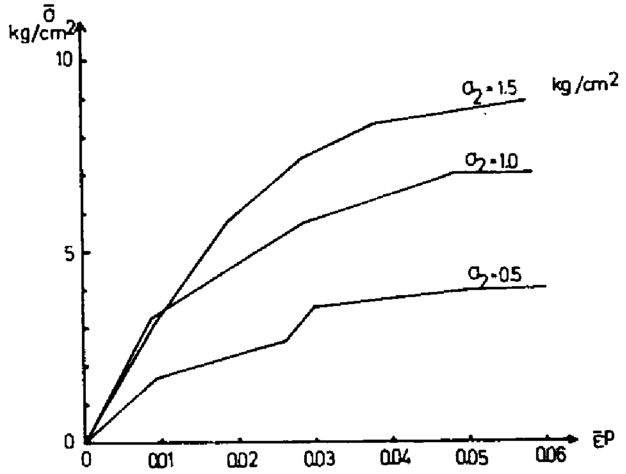


図 3−49 $\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^P$ curve

与えられた関係は通常の三軸試験よりε_1と$\sigma_1-\sigma_2$の関係であるからこれを$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^P$の関係になおしたいわけである。そのためには，$\varepsilon_2, \varepsilon_3$を求めなければならない。試料の半径方向には，対称な変形が生じているはずだから，半径方向のひずみが分れば良いわけだが，これを測定することは難しい。よって今，試料の変形はすべて塑性変形であるとすれば塑性変形は体積変化を伴なわないという事実から

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 = 0 \qquad \cdots\cdots(3\cdot72)$$

そして$\varepsilon_2=\varepsilon_3$だから，既知の$\varepsilon_1$に対し

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_1/2 \qquad \cdots\cdots(3\cdot73)$$

となる。ところで（3・36）式にあるように，ひずみは，弾性ひずみと塑性ひずみの和であるから（3・73）式で求められたひずみから弾性ひずみを差し引いたものが塑性ひずみである。そこで測定された各応力度に対応する弾性ひずみは，σ_1：軸圧力，$\sigma_2=\sigma_3$：側圧縮力としてHookの法則から

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^e &= \frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)] \\ \varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e &= \frac{1}{E}[\sigma_2-\nu(\sigma_1+\sigma_3)] \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3\cdot74)$$

として得られる。

この式のE, νは弾性解析で用いた値を用いる。このようにして塑性ひずみは（３・36）式から求められる。これをε_1^p，ε_2^p，ε_3^pとし，主ひずみ，主応力での相当ひずみ，相当応力の定義式〔（３・３８）式（３・４９）式または（３・６１）式，（３・６３）式に相当〕(88)

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2\right)^{1/2}$$

$$\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2\right]^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot75)$$

を用いると，$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^p$の曲線が得られる。三種類の側圧に対してほぼ同一の曲線が得られるべきであるが，実際には，側圧に応じて，こう配はゆるやかになる（破壊に達する）点の応力度が４～８kg／cm²と変化してくる。この線図を図３・４９に示す。ただしこの場合，E＝１７００kg／cm²；ν＝0.4としている。実際のロック材料の$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^p$曲線は，これ等の曲線の範囲内にあると想定される。そこで側圧1.0kg／cm²に対応するものと，側圧0.5kg／cm²に対応する$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^p$曲線を表３．５に示すような折線で近似し，解析に用いることとした。この二種類を用いたのは，こう配のゆるやかな曲線ほど，塑性変形が大となり，解析が安全側に出ると考えられるからである。

② 解　析　結　果

3・3・1に示した方法で前項に得た諸数値を用いて非線型増分解析をおこなった。増分解析の意味は，既に3・2・2項に述べた。図３・50はこの場合の変位のコンターを示してるる。曲線―aの場合については，築造の第１段における分布と完成断面における分布を示し，曲線―ｂについては完成断面における変位の分布を示している。また図３・５１は，上流側半分の堤体が示す，築造段階ごとの変位軌跡をプロットしている。（曲線―aの場合）

曲線－a		曲線－b	
$\bar{\sigma}$(t/m²)	H(t/m²)	$\bar{\sigma}$(t/m²)	H(t/m²)
0～30	3000	0～20	2000
30～45	2000	20～30	1000
45～55	1000	30～35	500
55～60	400	35～38	300
60～62	200	38～40	200
62～	100	40～	100

表３・５　$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^p$関係

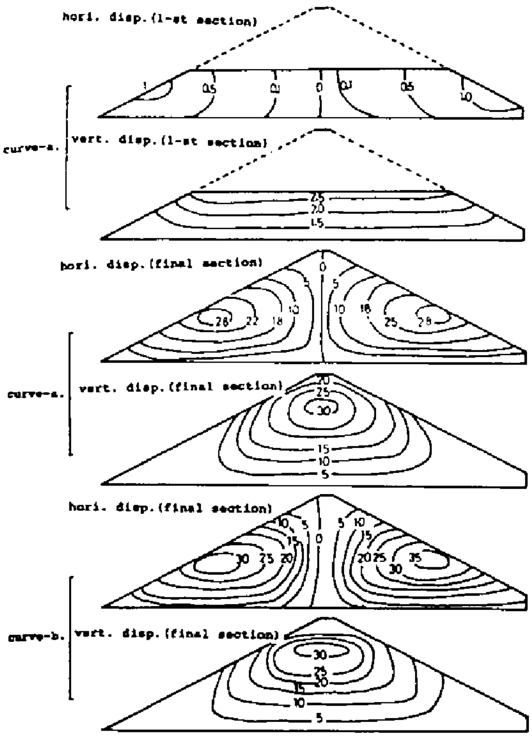


図3−50　築堤進行時の変位分布
（非線形）cm

これ等の図から，先の線形解析に比べて，水平方向の変位が非常に大きくなっていることが一見してわかる。図3・52は完成断面における三応力成分の分布を曲線−aと曲線−bの両方について示している。図3・53は曲線−aの場合における築堤の進行〜応力の発達図と，堤底面における三応力成分の分布形を（完成断面について）図示したものである。

これ等の解析は，単なる増分解析のループ以外に塑性ひずみ増分の符号に対するチェック（図3・47参照）があるため，反復回数が多くなり$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^{p}$曲線のこう配のゆるやかなものほど計算上一定した値に達するのに反復回数を多く必要とする。図3・50〜図3・53に得られた弾塑性解によって得られた結果をまとめると次のようになる。

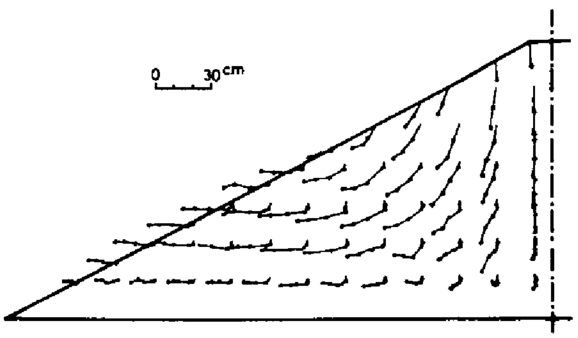


図3−51　築堤の進行に伴う堤体の変位軌跡
（非線形・曲線−a）

1 ）線形解析の場合に比べて堤体の水平変位が非常に大きくなる。たとえば曲線ー a を用いた場合，最大水平変位と，最大沈下の比は，約（28~26)／30 ≒ 0.9であり，これを線形増分解析における結果，（図3.3 2参照）0.45と比較すると約２倍の増加である。すなわち堤体の側方へのはらみ出しの助長は，材料の示す，応力，ひずみ関係の非線形性にもとずくものが大である，

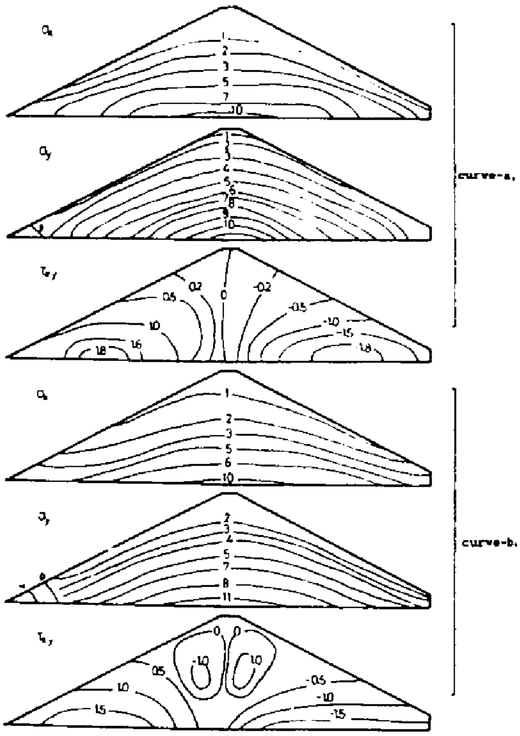


図 3—5 2 非線形な堤体の応力解析（kg/cm²）

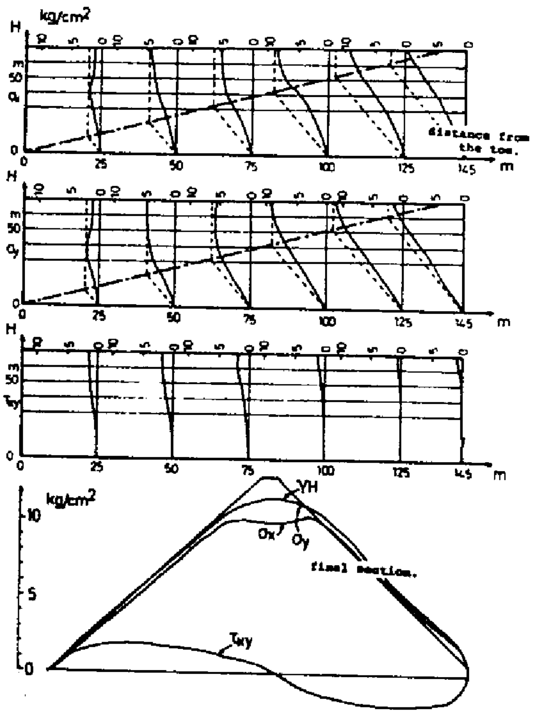


図 3—53 築造進行に伴なう応力の発達
（非線形　曲線ー a ）

2 ）最大沈下，最大水平変位量も，当然のことながら，線形解析の場合より増大している。また沈下のピークの生ずる位置が，やや上方に（ 1 0 m程）移動したことがわかる。

3 ） $\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^{p}$曲線の相異は変形の上では，水平変位にあらわれ沈下量には大きく影響しないことがわかる。（図 3・50）すなわち曲線ー a の場合最大水平変位と最大沈下の比は約 0. 9 であったのに対し，曲線ー b の場合この比は（30~35)

／30≒1.1である。

4）図3・51から各築堤段階毎に各点の変位が，ほぼ同量ずつの変形を示すのではなく，第二段⟶第三段への施工がおこなわれた時に大きな変位が生ずることがわかる。特に第一～第二段目までは沈下方向での変位が大であったのだが，それ以後の築堤によって水平方向への変形が大となるのである。また堤体の表面部分に近ずく程，各点は水平方向の変位が沈下に対して大きくなる。表面の低い部分では築造が進行すると，やや上方へふくれあがる傾向をすら示している。これ等の傾向は線形増分解析（図3・33）にはみられなかったことである。

5）完成断面における応力分布（図3・52）の基本的特性は，線形増分解析におけるもの（図3・32）と，大差はないが，水平応力の最大値が1.4倍位大となっている。これは水平変位が線形解析より増大していることによるものである。また上流側堤シ部では鉛直応力にわずかな引張力の発生がみられるが，これはふくれ上がりの現象に対応するものである。$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^{P}$曲線の相異による応力分布の相異はほとんど認められないが，せん断応力の分布は，曲線がゆるやかになった場合，やや複雑な形状を呈する。

6）築堤の進行に伴う堤底面の応力の発達をみると，この場合にも水平応力の発達のし方に線形増分解析の場合とことなり，やや大きな応力の発達がみられる。またのり先付近では，築堤が堤高の$2/3$以上になると，鉛直応力はやや減少する傾向を示す。一般に応力の発達の様子は各応力成分についてなめらかである。完成断面における堤底面の三応力成分の分布は，水平応力が線形解析に比べて約1.4倍位大となっている点が異なる。

7）塑性ひずみ増分：$\bar{\varepsilon}^{P}$の完成断面における分布を図3・54に示す。図から大きなひずみの生じているのは堤体の中央部分と上，下流の低い部分であることがわかり，中央部は沈下の方向に上下流面は，水平方向への移動という形でひずみが発達している。また$\bar{\sigma}-\bar{\varepsilon}^{P}$曲線のこう配のゆるやかなもの程（曲線－bの場合）ひずみ量も大であり，上下流面の低い所でのひずみ量が大である。

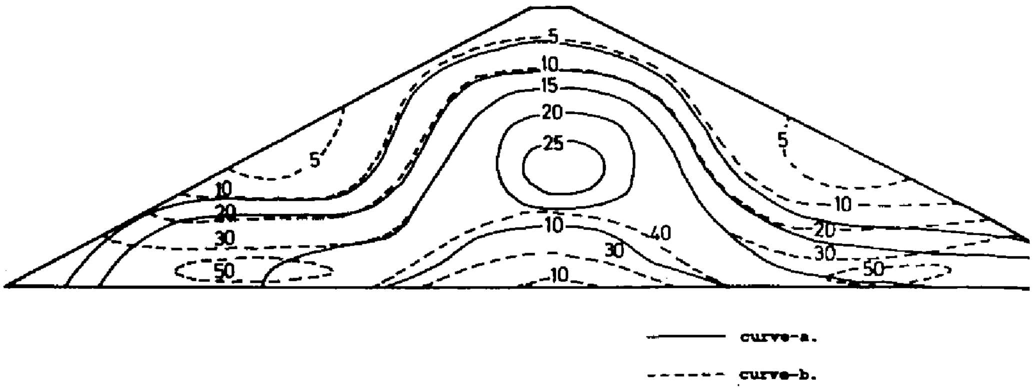


図 3−54　塑性ひずみ増分の分布 (×10^{-6})

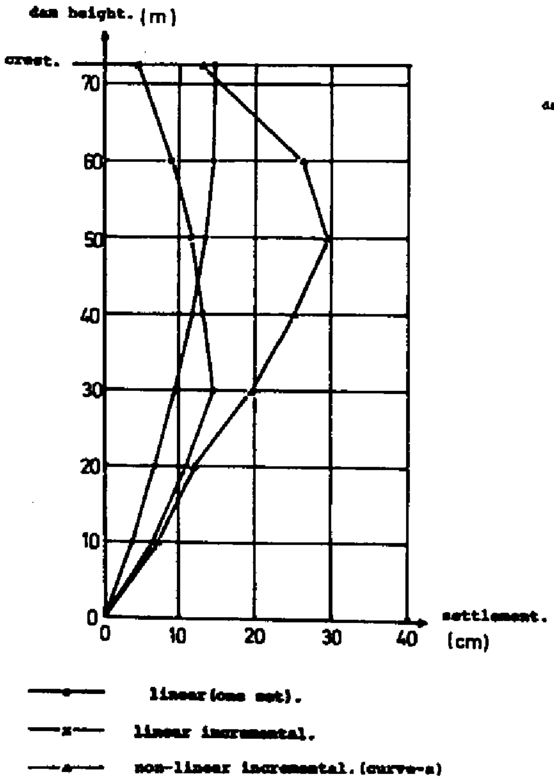


図 3−55 解析法の違いによる沈下量分布の相異

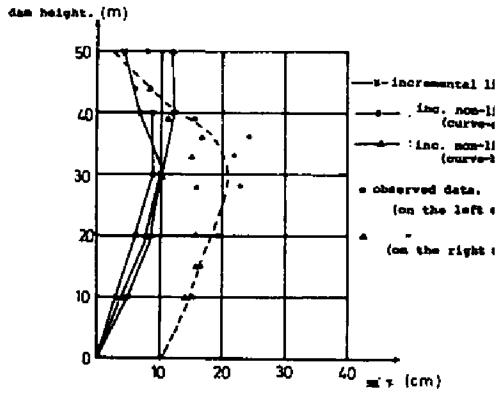


図 3−56　築堤高さ50mのときの沈下の実測値解析結果

③ 解析法の比較

3・2・2項でも述べたように，増分解析と一般の瞬時盛たてに対応する解析とでは，沈下の分布に相異のあることが，上の結果からも分かる。また線形な解析では沈下量の最大値は，増分解析の場合と一般解析の場合と，ほぼ同じ値を与え，増分解析によれば，その最大値は，堤体の中央部付近に生ずる。（図3・55参照）非線形増分解析でも沈下の分布はやはり，タル型の中ふくらみ型となるが，そのピークはダム頂より$H/3$位下った点に生じ,沈下の最大値も線形の場合のほぼ2倍となる。また図3・56には，築堤高さが約50 mに達したときの深山ダムの沈下実測値と，50 m段階での理論値とを比較したものを示している。沈下の実測値はダムのクレスト部に相当する点から，鉛直に下されたクロスアームにより，層別に測定されたものである。実測データによると，基礎部の沈下がおよそ10 cm位発生していると考えられる。したがって実測値を近似した曲線（図中の破線）を左へ移動し，堤高が0での沈下が0になるように移動すると，ほぼ解析結果と一致することが認められる。ただし実測データではH＝35 m以上で急激に沈下の減少する傾向がみられ，この点が解析結果の傾向と異なる点である。一般に沈下の分布がタル型になることは各種の実測データから認められていることだがこの形は応力－ひずみ関係に依存しているようである。これ等の少ない実測データから，どの解析法が最善であるかを結論することは難しい。しかし他の事例などから考えて(16)，沈下の分布のより現実的な推定のためには増分解析法が良く，さらに堤体の側方への変位量の推定や，沈下分布形の正確な推定のためには，非線形増分解析法が良いと考えられる。

§3・4　堤体の材料力学的安定性に対する応力分布の影響

フィルダムが，土石や岩盤をその対象材料としているから，その破壊のメカニズムは，モール・クローンの法則によって説明し得るものである。堤体の安全性という問題は，従来，もっぱら，斜面の安定性－すべりの安全率というものに還元し，論じられてきている。この問題は，土石で作った斜面の大規模な崩壊：slidingの現象を説明する有力な理論をうみ出したのであるが，問題を斜面のスベリという問題に結びつけずに，堤体の個々の部分が，どのような危険度（降状への接近度）の分布をもっているかを取りあげることにした。すなわち，堤体の形態，外力の作用の仕方といったものによって，堤体各部に生ぜ

しめられた応力状態は，それが降伏に非常に接近している部分もあるだろうし，そうでない部分もあるので，これを知ることが，堤体設計の上でも，堤体挙動の予知の上でも，有益なことだからである。
ここでいう降伏：failureとは塑性論でいう降伏のことである。従って，材料は外力の増大（載荷）により降伏に達するまでは，応力ーひずみの増大が許されるが，降伏に達すればこれ以上の応力は，発生せずにひずみだけが増大し外力の除荷によって，残留ひずみが残るという性質のものを想定している。これを相当応力ー相当ひずみで表現すれば，図3・57に示すような，弾完全塑性を想定していることになる。

3・4・1　破壊のパラメーターの定義

材料が降伏したかどうかを確かめるには，塑性論であつかう破壊規準：yielding criteria を用いることが便利である。土材料に対しては，Mohr-Coulomb の破壊規準の適切なことが，実証されているから(38) これを用いることにする。この破壊規準が他の一般的な破壊規準（Tresca, Von Mises 等）と異なる点は，破壊せん断応力が，平均応力に比例して増大するという点にあり，従って応力解析によって，取りあつかう場合にも，複雑になる。Drucker(20) はこのMohr-Coulomb の破壊規準に対して降伏関数の定義をおこなった。いずれにせよ，せん断応力が，ある材料に固有な値以上になれば，降伏に達するという，基本的な性格には変りがない。従って応力分布においても，材料の降伏に最も関係が深いものは，最大せん断応力である。
任意の材料の応力状態が，主応力空間に作られた降伏曲面上に位置する時は，材料が，弾性体と，塑性体の境界にあるときであり，この状態を極限つりあい：limit equilibrium(24)という。材料の任意の点の応力状態がどれ程，この極限つりあい状態に近いかを知るために，Mohr-Coulombの破壊規準において，次のパラメーターを導入した。図3・58においてある点の応力状態が一個のモール円で表現されるが，これに対して材料に固有の破壊包絡線が，内部摩擦角：ϕと，粘着力：cによって定義される。モール円の半径が増大し，円が破壊包絡線に達したとき，この点の応力状態は，降伏曲面上にある，――すなわち極限つりあい状態にあることになる。したがってモール円の中心から破壊包絡線に下した垂線の長さ：dとモール円の半径：rとの比 $s = r/_d$ は，この応力状態における降伏状態への接近度をあらわしていることになる。任意

の点の応力状態は系に作用する荷重の変化に応じて変化するから，このモール円は，半径も，中心の位置も，荷重に応じて変化するが，その時々における比：$s = r / d$ は，この時における降伏への接近度を示すことになる。また極限つり合い状態に達してからは，荷重の増大は応力の増大をうみ出さず，ひずみの増大だけをうみ出すものである。すなわち，これを相当応力，相当ひずみの応力ーひずみ関係で図示すれば図３・５７に示す，こう配が０の状態のものとなる。すなわち弾完全塑性である。

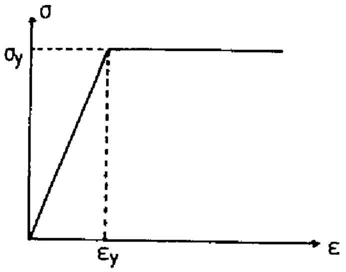


図3—57 弾完全塑性体の応力ーひずみ関係

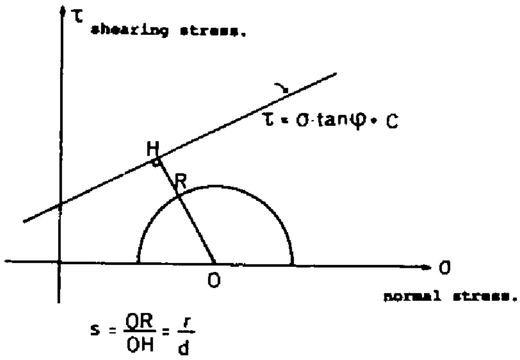


図3—58 モール円と破壊ほうらく線および比 r／d

３・４・２　有限要素法への適用

上のような事項を含めた比：$s = r / d$ の載荷状態の変化による，変動の追跡を行なうことは，極めて容易である。しかしながら，有限要素解において完全塑性体の状態を表現することは不可能である。なぜなら完全塑性体は，体積変化を生じないという条件から，弾性体の応力ーひずみ関係式におけるポアソン比＝$1/2$ となり，また弾性係数＝０という状態に相当するからである。この状態を（３・４）式における弾性行列に用いることは，有限要素解が無意味になることである。したがってこの状態を近似するような数値的表現：$\nu \fallingdotseq 1/2$　$E \fallingdotseq 0$ という表現を，降伏した要素に用いる必要がある。このような解析に必要なアルゴリズムは，前節３・３・１に示した弾塑性解析のものとほとんど同一であり，若干の修正を加えるだけで実行できるのである。

3・4・3　A－2型式のダムにおける実例

完成断面の堤体の満水位状態または空虚時における破壊のパラメーターとしての比：$s = {}^{r}/_{d}$ の分布を知ることは興味深い。さらに築堤の進行に伴う，この比の変化，設計荷重以上の外力が堤体に作用した場合，この比の値がどのように変化するかを，A－2型式について解析してみた。

図3・59は線形増分解析における，比 $s = {}^{r}/_{d}$ の分布形を示している。各断面毎に比：$s = {}^{r}/_{d}$ の分布は，ほぼ堤体中央に対して対称な分布となっている。そして築堤の進行につれて s の値が大きくなっていく。完成断面においては（空虚時に相当）比 s の最大値は約0.9に達し，それは，上，下流堤シに生ずる。

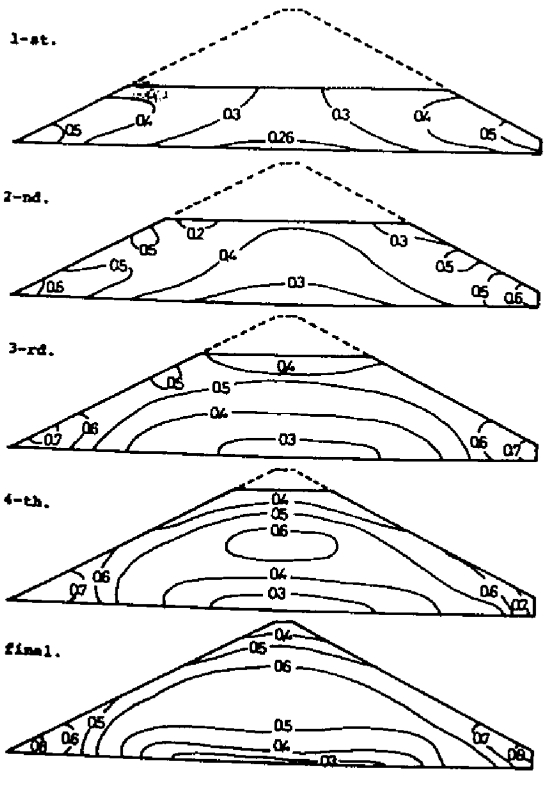
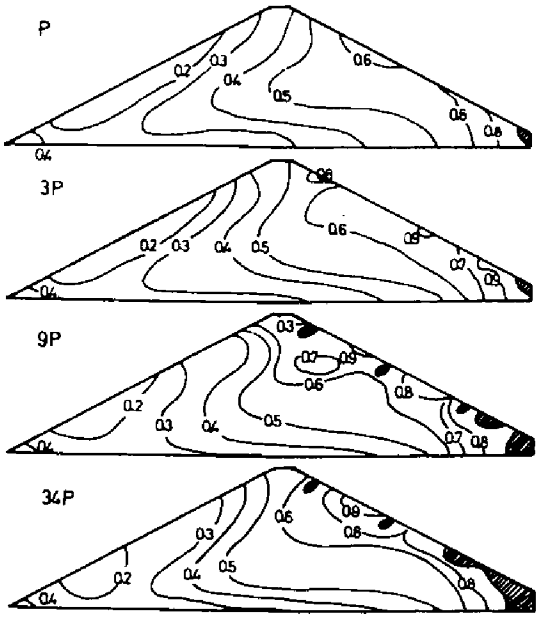


図3−59 築造進行による ${}^{r}/_{d}$ 値の変化
（線形解）



P ; design load of full reservoir. yielding region.

図 3−60 外力の増大による比 $r/_d$ 値の変化と破壊領域（線形）

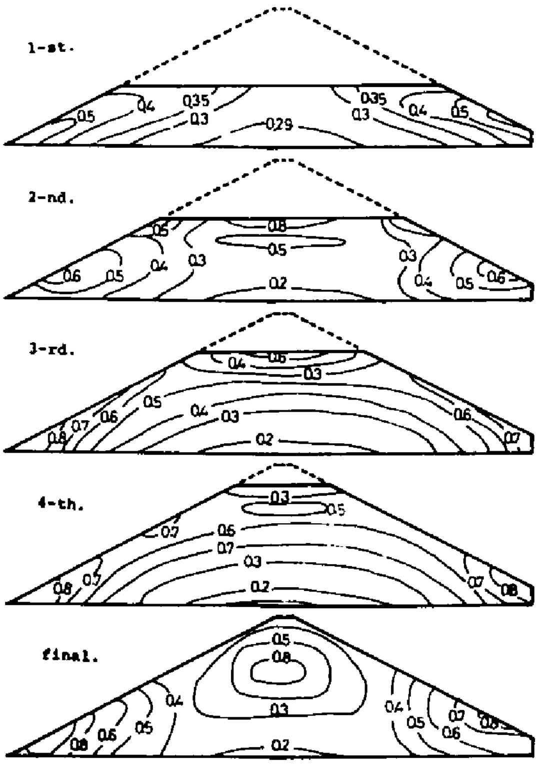


図 3−61 築造進行による比 r/d 値の分布の変化（非線形−a）

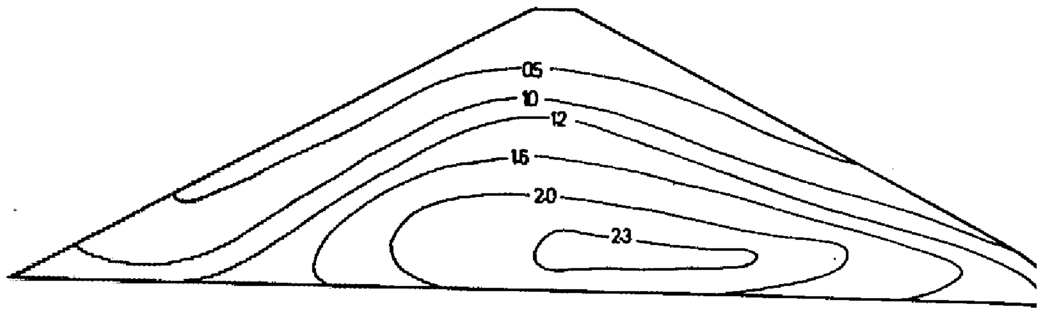


図3−62　満水位状態の最大せん断応力の分布(線形解)kg/cm²

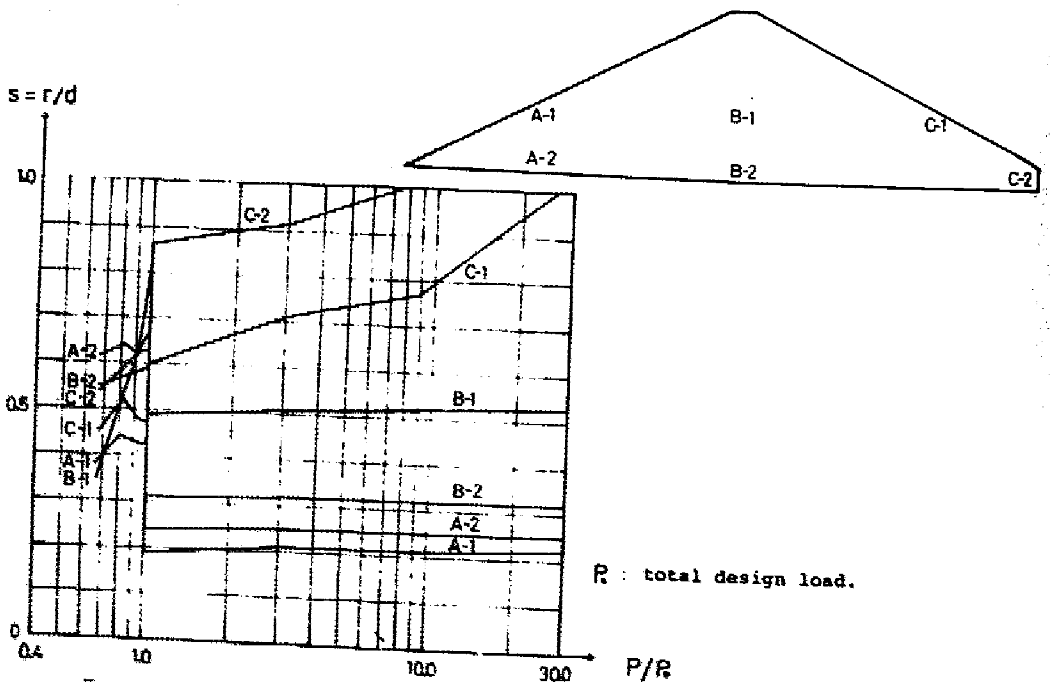


図3−63荷荷重の増加と比：sの関係

次に図３・６０は完成した堤体断面に作用する満水時の全外力（水重と自重）をＰｏとあらわした時に，これが何倍かに増大した時の比：ｓの分布を示している。築造の進行に伴なう比：ｓの分布については，図３・６０の横軸の値は，完成断面に達するまで（$^{P}/_{Po}<1$）は，完成断面の堤体断面積をＡ，各築堤ごとの堤体断面積をＡｉとすると$^{Pi}/_{po}={}^{Ai}/_{A}$ になる値で横軸の値を決定した。

実際にＰｏ以上の荷重が堤体に作用することはあり得ないわけであるが，これを堤体のせん断破壊に対する安全率を考える上での資料とすることができる。すなわち，堤体の安全性が全く保てなくなるほどに，破壊領域の発達する荷重をｎPoとすると，この堤体の安全率をｎとすることができよう。

図３・６０には，Ｐｏ~33Poまで荷重が約３０倍の設計外力に達するまでの比ｓの分布を描いている。Ｐ＝Ｐｏの場合は，満水位状態と考えられるが，図３・59における完成断面と比べると，水圧が作用することにより，上流側表面の比ｓの分布は減少する。そして分布形は一般に上流から下流に向ってだんだんと，ｓが増加してゆく傾向を示している。下流のり尻では，ｓ＝１に達する部分あらわれる。さて荷重が３Ｐｏ～３３Ｐｏと増加するにつれて，下流表面付近で降伏に達する領域が，増大してゆくことがわかる。なぜ下流側の表面付近ばかりが，先に降伏に達するかを考えると，主応力図を描いてみてもわかるが，満水状態での堤体の主応力分布は，上流側で主応力差が小で，下流の表面では主応力差が大となること（最大せん断応力の分布を考えても良い，図３・６２参照）に帰因している。すなわち，Mohr-Coulomb の破壊規準によっても，最大せん断応力の増加による，破壊状態への接近という現象がみられるからである。

図３・６１は非線形増分解析による，築造解析における比：ｓの分布を示している。これを線形増分解析の場合（図3・５９）と比較すると，やや分布形が異なるだけで基本的な特徴は変らないことがわかる。

図３・５９~図3・６０における比：ｓの増大の模様を堤体の代表的な点について図化してみると，図3・６３のようになる。図３・３６の比：ｓの増加の線図をみると，これには大体三種類の変化のあることが認められる。すなわち上流側表面付近，堤体中央部付近，それに下流表面付近の三種類である。下流側表面付近の堤体は，荷重の増大に対し，比：ｓの増大が顕著にあらわれ ３０Ｐ~８Ｐでｓ＝１に達する。堤体中央部分はこれ等の間の状態を示しており，ｓの値は上流付近の堤体より大きな値をとっているが，Ｐの増加に対しても，ｓはほとんど関係がない。対応する領域のモール円の変化を図示すると，図３・６４の

ようになる。図から上流および中央部付近の堤体は荷重の増大が，単に主応力（最大，最小）の増大をのみもたらしているのに対し，下流付近の堤体は荷重の増大が主応力差の増大をもたらしていることが，観察できる。

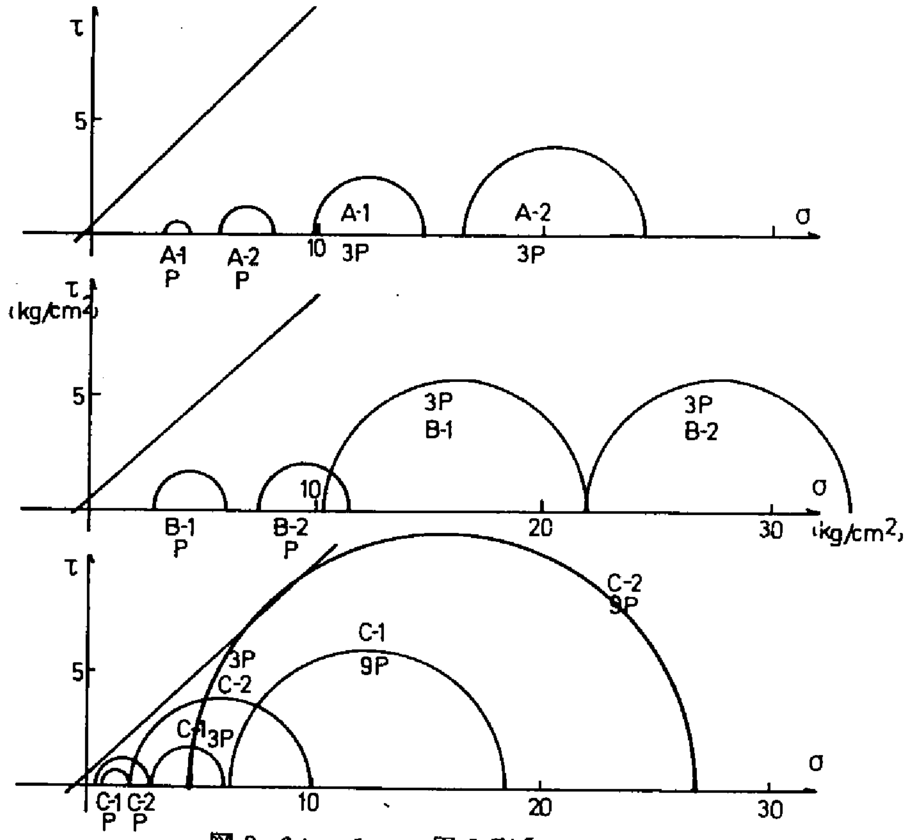


図 3—64　モール円の変化

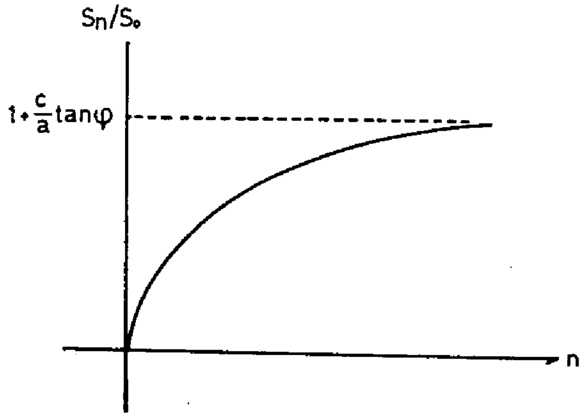


図 3—65　比 s の増加と n の関係

このような差は一体何に帰因しているかを考えれば次のようになる。図3・58で $\overline{OH}=d_0$, $\overline{OR}=r_0$ としモール円の中心の鉛直応力（平均応力）をaとすると，荷重がPoのとき比 sの値がsoであったとするなら，粘着力をc，内部摩擦角をϕとするとき次の関係が成りたつ。

$$s_0=\frac{r_0}{d_0}=\frac{r_0}{\sin\phi(c\cdot\cot\phi+a)} \quad \cdots\cdots(3\cdot76)$$

載荷が進んでnPoとなったとき，領域のどの部分にも，塑性域の発生がなかったとすれば：線形応力場では，内部応力はn倍になるのだからこの時の比 sの値がsnであったとすると，次の表現ができる。図3・58を参照して
$\overline{O'H'}=d_n$, $\overline{O'R'}=r_n$ となったとすると

$$\frac{d_0}{d_n}=\frac{c\cdot\cot\phi+a}{c\cdot\cot\phi+na} \quad \cdots\cdots(3\cdot77)$$

である。したがって

$$s_n=\frac{r_n}{d_n}=\frac{nr_0}{d_n}=\frac{nr_0}{d_0}\frac{c\cdot\cot\phi+a}{c\cot\phi+na}$$

$$=\frac{s_0}{a}(a+c\cdot\cot\phi)-\frac{c\cot\phi+a}{a(c\cdot\cot\phi+na)}s_0c\cdot\cot\phi \quad \cdots\cdots(3\cdot78)$$

（3・74），（3・76）式より比．Sの増加の割合は

$$\frac{s_n}{s_0}=\frac{1}{a}(a+c\cdot\cot\phi)-\frac{c\cdot\cot\phi+a}{a(c\cot\phi+na)}c\cot\phi \quad \cdots\cdots(3\cdot79)$$

となる。sn/so をnの関数として描けば図3・65のようになる。すなわち，$n\to\infty$ となっても，比：sは無限に増大することはなく，たかだかpoに相当するs（soのこと）のc・cotϕ／a倍だけしか増大しないことがわかる。またc＝0の材料については，比：sの増大は，Pの増大によって全く生ぜしめられないことがわかる。結局この比はC≒0の材料について，内部摩擦角とPo値（基準状態）での主応力和に逆比例の形で，その増加率が決まるのである。図3・60の例はこのことを示しているのである。

第四章　動的解析

フィルダムの動的解析の重要性は，第二章にも述べた通りであり，多くの研究成果があがっている。第二章にも述べたように今日のフィルダムの動力学的解析の方向は，数値解析法の技術を十分に駆使しながら，現実的条件を十分とり入れた定量的なものに進む方向にある。堤体材料の示す応力ーひずみ関係の非線形性や，粘弾性効果をとり入れることは，重要なことだが，そのためには動的な堤体材料の物性に関する多量のデーターが必要であり，解析の手法も今日確立しているとはいい難い。本章は主とし，表面シャ水ロックフィルダムである，深山ロックフィルダム（Ａ－２型式）を考え，線形な応力ーひずみ関係を想定した有限要素法によるモーダル・アナリシスをおこない，フィルダムの振動における基礎的考察をおこなう。そして地震応答の実際を研究することによって，堤体の安全性を静的応力分布と対比しつつ究明するものである。

§ 4・1　固有モード

4・1・1　固有モードの算定法

有限要素法による振動解析[107]の利点は，それが静的解析に用いたのと全く等価な動力学モデルへと容易に移行できることであり，その結果として得られる振動系は多自由度系：multi-degrees-of-freedom-system[63]であり，振動論的にも非常に明解な体系を形ずくることである。すなわち，Lagrangeの運動方程式そのものが得られるわけである。今，系の質量行列を［Ｍ］スティフネス行列を［Ｋ］，時刻 t における変位ベクトルを $\{X(t)\}$ ，とすると，減衰力のない自由振動の方程式は

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = \{0\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot1)$$

と書ける。（上式で˙は時間に関する微分を意味している。）

$\{X(t)\}$ に，定常調和解を仮定すると，

$$\{X(t)\} = e^{i\omega t}\{r\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot2)$$

ω：固有円振動数

これを（４・１）式に用いて

$$\omega^2[M]\{r\} = [K]\{r\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot3)$$

なる方程式を得る。（ここで［Ｍ］，［Ｋ］，は正定値ー pcsitive definiteー実対称行列ー real symmetric matrixーであることに注意する。）

（４・３）式は力学系における固有値問題をあらわしているが，最近用いられるような大規模な多自由度モデル（ｒの次元＝自由度がたとえば１００以上のもの）では在来の解法(77)でこれを解くことはできない。その理由は（4・3）式を直接解くことは，高速の大型電子計算機にとっても非常に不経済なのだからである。こうした難点の解決には大別して二つある。第一のものは，系の自由度を何等かの方法により大幅に減小させる方法であり，減小のためには代数的演算によるもの（３）と構造力学的な分解による(45)ものとの二方法がある。第二のものは，系の自由度をそのままに保ち，実用的に必要とする固有モードの数が，それ程多くないこと（５～２０位）に着目した同時ベクトル反復法(49)によるものである。本章ではこの第二の方法を用いる。

第一の方法は，系のうちのある特定の点を選んでこの特定の点をもとに系を組みなおすことと等価であり，この点の選定法や，数に問題があるが，後者のものは，すべての点を等価に扱うことができ，静的な有限要素法に用いられる，バンド・アルゴリズムをそのまま用いることのできる利点がある。

この方法によれば先ず（４・３）式のスティフネス行列を choresky分解する(34)。

$$[K] = [L]^T \cdot [L] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot4)$$

（４・４）式の分解は［Ｋ］について常に可能であり，［Ｌ］は下三角行列である。（４・３）式の両辺に左から $[L]^{-1T}$ を乗ずると

$$[L]^{-1T} \cdot [M]\{r\} = \frac{1}{\omega^2}[L]^{-1T} \cdot [L]^T \cdot [L] \cdot \{r\}$$

よって，

$$[L] \cdot \{r\} = \{\delta\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot5)$$

なる新しいベクトル $\{\delta\}$ を定義すると上式は

$$[L]^{-1T}\cdot[M]\cdot[L]^{-1}\{\delta\} = \frac{1}{\omega^2}\{\delta\}$$

となる。よって

$$[A] = [L]^{-1T}\cdot[M]\cdot[L]^{-1} \quad \cdots\cdots(4\cdot6)$$

とすると

$$\frac{1}{\omega^2}\{\delta\} = [A]\{\delta\} \quad \cdots\cdots(4\cdot7)$$

という固有値問題の標準形が得られる。〔A〕は正定値の実対称行列だから $\{\delta\}$ というベクトルについて反復法(63)によれば，固有値の大きな順（$1/\omega^2$ の絶対値の大きい順に）固有値と固有モードが得られる。同時ベクトル反復法(48)によれば，必要とするモードの個数（ m とする）だけのすべてのベクトル群を考え，且つそれ等が，直交するという条件に着目する。第 k 次の試行ベクトル群 $[X]_k$ は

$$[X]_k = [\{\delta\}_1\cdot\{\delta\}_2\cdots\cdots\{\delta\}_m] \quad \cdots\cdots(4\cdot8)$$

ここで m は $\{\delta\}$ の次元 n に比べて十分小さいのが一般である。〔A〕の左から $[X]_k$ を乗じたものを $[Y]_{k+1}$ とすると次の行列

$$[Y]^T_{k+1}\cdot[X]_k = [X]^T_k[A]\cdot[X]_k = [B] \quad \cdots\cdots(4\cdot9)$$

は次元（ m × m ）の小さな行列である。

もし $[X]_k$ が真の固有ベクトルに一致しているならば〔B〕は対角化されその対角項は固有値である。一般に〔X〕は固有ベクトルに等しくないから〔B〕は対角化されない対称な行列である。そこで

$$[B]\{p\} = \lambda\{p\} \quad \cdots\cdots(4\cdot10)$$

なる固有値問題を解き（ m が小さいからこれは容易である。）この固有ベクトル群を〔P〕とすると

$$[Y]_{k+1}[P] = [A]\cdot[X]_k[P] = [Z] \quad \cdots\cdots(4\cdot11)$$

ここで

$$[C] = [Z]^T \cdot [Z]$$

なる正方実対称行列をchoresky分解して得られた行列を〔S〕とすると

$$[X]_{k+1} = [Z] \cdot [S]^{-1} = [Y]_{k+1} \cdot [P] \cdot [S]^{-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4 \cdot 12)$$

なる〔X〕$_{k+1}$を新しい試行ベクトル〔Y〕$_{k+1}$として（４・８）式に戻り(4・9)式が対角化されるまで反復をくり返すものである。(4・12)式のような変換が必要な理由は試行ベクトル群に，常に直交性すなわち

$$[X]^T \cdot [X] = [I] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4 \cdot 13)$$

なる関係をもたせるためである。（但し〔I〕は単位行列）

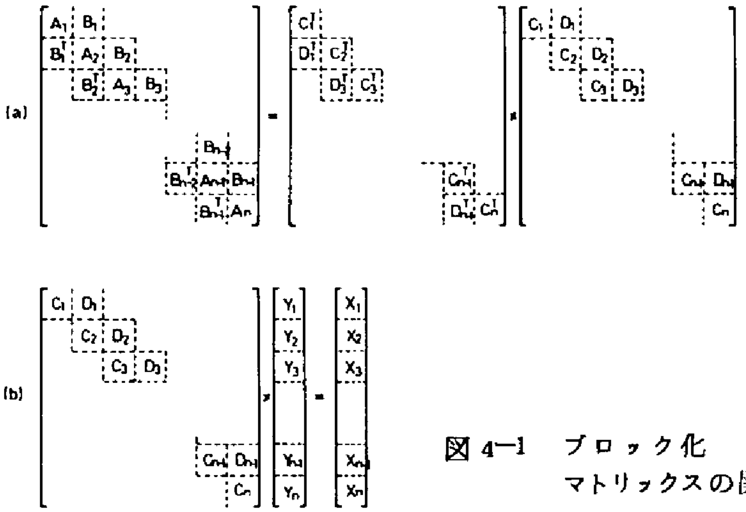


図 4―1　ブロック化
マトリックスの関係

ところで（４・９）式～（４・１２）式までの操作は有限要素法における行列の“sparseness”を利用したバンド・アルゴリズムによれば，計算量を大幅に軽減できる。(48)

まず（４・４）式の分解法は，3・1・2項にも述べたように，スティフネス行列〔K〕は帯状対称行列であるから，これをブロックに分解できることに注意すれば，図４・１（a）に示すような対応関係が成りたつ。右辺の行列〔L〕の成分C_1, C_2, ……, D_1, D_2, …… 等は未知である。しかし第１行目について成りたつ関係

$$A_1 = C_1^T \cdot C_1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot14)$$

からC_1は choresky 分解によって得られる。C_1が決定すると，同じく第1行目について成りたつ関係から

$$B_1 = C_1^T \cdot D_1 \longrightarrow D_1 = C_1^{-1T} \cdot B_1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot15)$$

によってD_1が決定する。一般に第k行については，

$$A_k = C_k^T \cdot C_k - D_{k-1}^T \cdot D_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots, N) \qquad (4\cdot16)$$

なる関係があり，D_{k-1}は$k-1$回目の操作によって決定しているからC_kを choresky 分解で得ることができる。また同じく第k行目になりたつ関係

$$B_k = C_k^T \cdot D_k \qquad (k = 2, \cdots\cdots N-1) \qquad (4\cdot17)$$

からD_kを求めることができる。このようにして順次C_k，D_kを決定できる。次に（4・6），（4・9）式等によってベクトル〔X〕$_k$と行列〔A〕の積を作る作業が必要になるが，これも手順を次の三段階に分解すると簡単になる。試行ベクトル群〔X〕に対してある未知ベクトル群を〔Y〕とすると

① 〔L〕・〔Y〕 = 〔X〕 ……… (4・18)

を解き〔Y〕を求める。次に求めた〔Y〕に〔M〕を乗じて〔S〕とおく。

② 〔S〕 = 〔M〕・〔Y〕 ……… (4・19)

次に未知ベクトル群を〔V〕として

③ 〔L〕^{T}・〔V〕 = 〔S〕 ……… (4・20)

を解く。ここに得た〔V〕は（4・9）式における〔Y〕$_{k+1}$であることがわかる。①と③の手続きは結局同じことであってこの場合もブロックに分解した行列について図4・1(b)に示すような対応関係が成りたつ。第i行目の関係式は

$$C_i \cdot Y_i + D_i \cdot Y_{i+1} = X_i \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, N-1) \qquad (4\cdot21)$$

であり第N行目の式から

$$C_N Y_N = X_N \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot22)$$

を得る。これからただちにY_Nが決定するから，（4・21）式に代入（後退

代入）して第 i 行目の式については，Y_{i+1} が求まっているから

$$Y_i = C_i^{-1}\left(X_i - D_i \cdot Y_{i+1}\right) \quad (i=N-1,\ N-2,\ \cdots\cdots,\ 1) \quad \cdots\cdots \quad (4\cdot23)$$

このようにして（４・１８）式または，（４・２０）式が容易に解けることになる。行列〔B〕が対角化されたかどうかの判定は次式で行なうものとした。

$$\frac{\sum\left|\text{対角要素}\right|}{\sum\left|\text{非対角要素}\right|} > 10^4 \quad \cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot24)$$

上式が満足されたならば，求める固有値と固有モードはそれぞれ（４・５）式（４・９）式より

第 i 次固有円振動数：　$\omega_i = 1/\sqrt{B_{ii}}$

$$\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot25)$$

第 i 次固有モード：　$\{r\}_i = [L]^{-1}\{\delta\}_i$

という形で得られる。また本章でおこなう解析では，質量行列〔M〕として集中質点系（ lamped−mass−system ）を用いた。集中質点系と分布質点系の表現の相異による得失については山本等の著述(101)に詳しいが，ここでは彼等の結果により，低次モードのみを問題にするので集中質点系で十分であることがわかる。

4・1・2　剛性基礎上の堤体の固有モード

静的解析に用いたのと同じ深山ロックフィルダムのモデル（Ａ－２型式）を用いて固有モードを求めた。ここでは，さらに粗なメッシュによって得られる結果がどう異なるかを検討するために，Ａ－２型式よりも粗な，図４・２に示す二種類のモデルを考えている。この解析により，次の点を検討した。

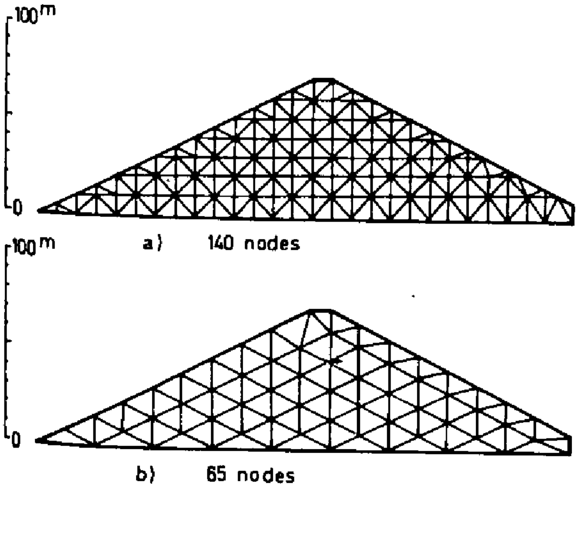


図 4−2　剛基礎上のダムモデル

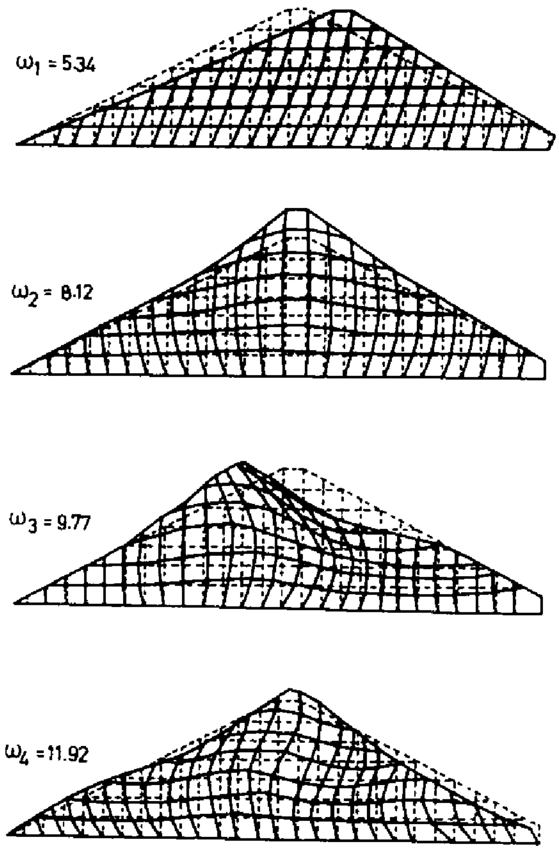


図 4—3 均質な堤体の固有モード

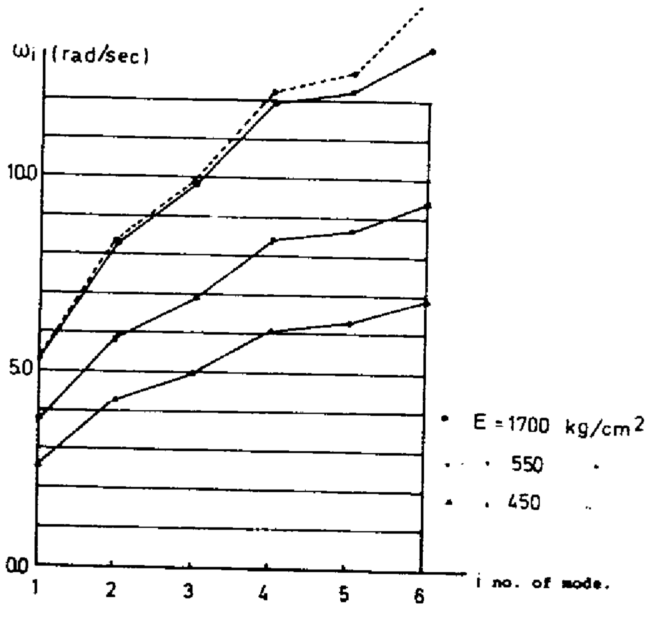


図 4—4 均質な堤体の固有振動数

① メッシュの細粗によって得られる結果がどのように変化するかということ，および堤体の弾性係数や，単位体積重量の変化が結果に及ぼす影響。

② 堤体内の物性値の分布が不均質なことが結果に与える影響。

①図４・２(a)に示すモデルについて単位体積重量：$\gamma = 1.8$ t/㎥，弾性係数：E＝1700 kg/㎠，ポアソン比：$\nu = 0.4$ とした均質な堤体の第四次までの固有モードを図４・３に示す。図４・２(b)に示すモデルについては，同じ物性値に対して，固有モードの形状変化は，ほとんど認められなかった。次に(a)のモデルで弾性係数を 850 kg/cm² ~ 450 kg/cm²と変化させた場合の固有モードを算定してみたが，これは図４・３に示すものと完全に同一であり，固有振動数についても以下の要領で得られることを確認した。すなわち，今，堤体の形状のみが，図４・２に示すようなものであれば，その弾性係数がEt/㎥単位体積重量がγ t/㎥であるとすると，固有モードは図４・３に示すものとなり，固有振動数は

$$\omega_1 = 5.31\,k \ (\mathrm{rad/sec})$$
$$\omega_2 = 8.35\,k \ (\ \text{〃}\ )$$
$$\omega_3 = 9.88\,k \ (\ \text{〃}\ )$$
$$\omega_4 = 12.39\,k \ (\ \text{〃}\ )$$

……… (4・26)

$$k = \sqrt{\frac{E/17000}{\gamma/1.8}} = 0.013\sqrt{E/\gamma}$$

で与えられる。このことは振動学的にみてもまったく当然のことである。したがって，任意の物性値をもったものについても，ポアソン比$\nu = 0.4$のものについては，固有モードに関する情報はすべて得られていることになる。図4・4は，図4・2 (a)，(b) 両モデルで得られる固有振動数を示しているが，(b)のモデルは(a)モデルによる値よりも，低次モードで数％，高次モードで１０％大きな値を示すことがわかる。したがって低次モードのみを問題とする場合には，(b)のモデルでも十分であるといえる。

また最も重要に応答を支配するところの一次固有振動数は，考えられる物性値の範囲内：E＝500~2000 kg/㎠，γ ＝ 1.5～2.2 t/㎥ では $\omega_1 \fallingdotseq 2.6 \sim 6.3$ rad/sec，(ie 一次固有振動数＝ 0.41~1.00 H z. 一次固有周期＝1.00~2.4

sec）でありパワースペクトル密度のピークが1.0 Hz以下にあるように地震波（たとえばEl, Centro May. 1940）が作用したとき，堤体は共振状態に達する。図4・3からはChopra等(11)が指摘するように，せん断振動モデルでは，ここに示したモードのうちの非対称モードしか表現し得ないこと，水平変位の分布が上下流方向で大きく変化すること等の点で，せん断振モデルと異なることがわかる。また畑中によれば(40)三角体のせん断振動，曲げせん断振動，曲げ振動における第一次固有周期T_S, T_{BS}, T_Bは解析的には，次の（4・2）式で与えられるものである。すなわち，ν＝0.35で上下流のりこう配が1：1.5ならば

$$\frac{T_S}{\sqrt{\gamma/E}\cdot H}=4.29,\ \frac{T_{BS}}{\sqrt{\gamma/E}\cdot H}=4.39,\ \frac{T_B}{\sqrt{\gamma/E}\cdot H}=1.37 \qquad (4\cdot27)$$

である。ただしHはダム高さである。

（4・27）式の表記を（4・26）式に適用すると二次元有限要素法によっては，

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{0.0103\times5.31\sqrt{E/\gamma}}=1.59\sqrt{\gamma/E}\cdot H \qquad (4\cdot28)$$

（H＝72 m）

を得る。よって（4・27）式より

$$T_B<T_1<T_S<T_{BS} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot29)$$

を得る。（ただしA－2型式のダムはのりこう配が1：1.9でかつν＝0.4であるから（4・27）式の結果とは若干の相異があるはずである。このことから有限要素モデルによって得られる振動のパターンは，曲げ振動に近いものであり，せん断振動とは，あまり縁のないものであることがわかる。

② より現実的考察をおこなうためには，堤体内で，物性値の値が不均質であると考えるべきであろう。その分布は実測によって確認されるべきであるがここでは類型的に弾性係数の分布が次の二種類の分布をとっている場合を想定した。第一の場合は弾性係数が，水平方向に層状で変化し，下層になるほど大きいという場合であり，これを水平分布と呼ぶ。第二の場合は，堤体の中央部

を中心にして，中心からの距離に比例して弾性係数の減少する場合であり，これを山型分布と呼ぶ。この二種類の分布は考えられる弾性係数の代表的なパターンを示している。築堤中，あるいは築堤完了直後の弾性係数の分布は締　固めの効果により水平分布に近いものになるのであろうが，築堤後長時間経過すれば，圧密の進行によって弾性係数の分布は山型となるであろう。図　4・5に水平分布，図4・6に山型分布の場合の固有モードを与えている。

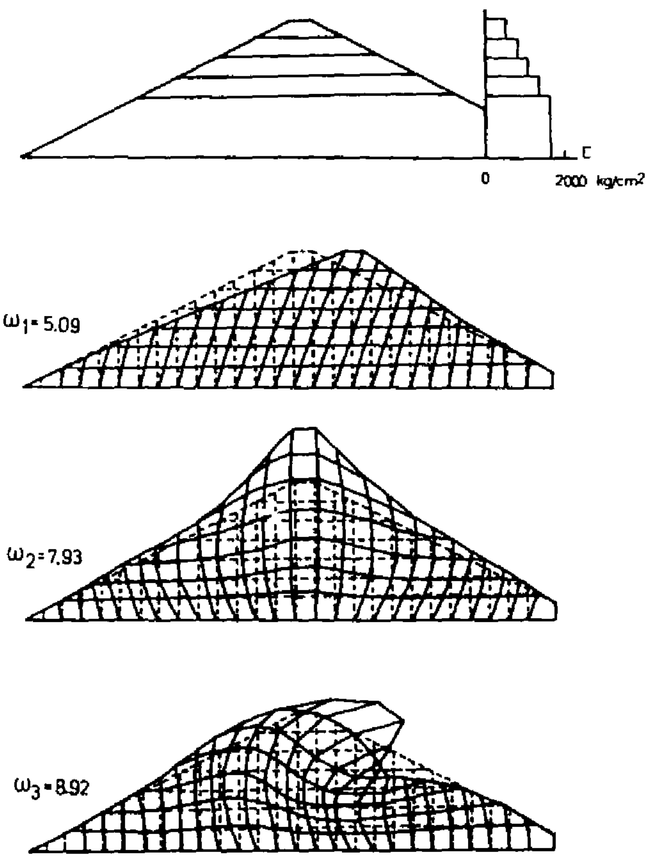


図 4—5　非均質な堤体（水平分布）の固有モード

図4・5から一次モードにおいては鉛直な線分の水平変位の分布が，均質な場合と異なっていることがわかる。また二次モードでは，均質な場合に比べ，クレストの鉛直変位が二倍近くなり，三次モードにおいては，堤高の 2/3以上の部分の曲げの状態が強化される。

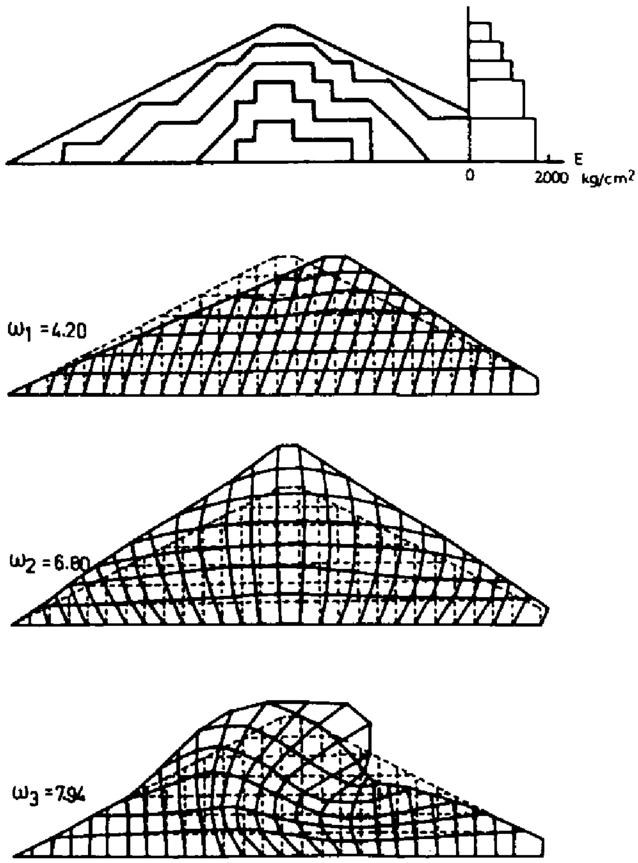


図 4—6 非均質な堤体(山型分布)の固有モード

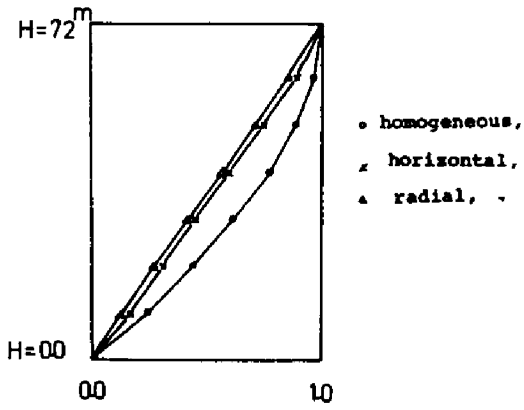
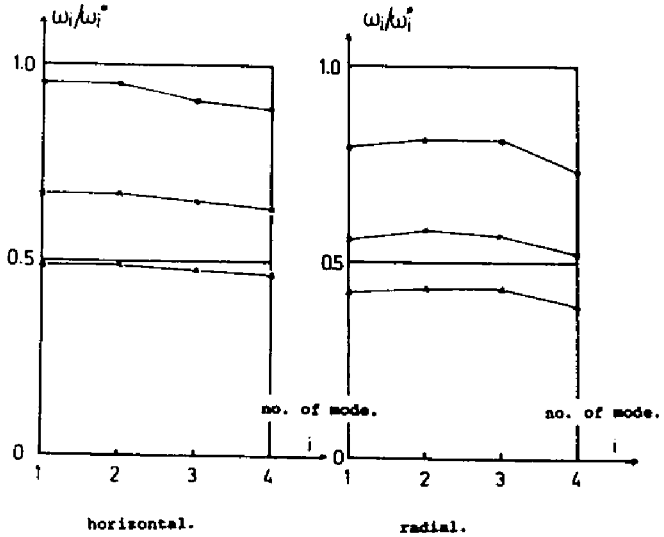


図 4—7 一次モードにおける水平変位の比較

図4・6の場合には，一次モードにおいても無視できない量の鉛直変位が発生し，水平な線分は，両端固定の弦の二次モードの形を有している。二次モードは，堤体の表面付近の，水平，鉛直変位が，均質な場合の二倍近くも増加する。図4・7に一次モードにおける，クレストを通る鉛直線の水平変位の分布をクレストの変位を1としてプロットしてみた。これ等の結果からも，弾性係数の分布は，モード形，固有振動数の両者に大きな影響を与えるものであるから，現実の弾性係数や，単位体積重量の分布を測定することが重要である。



•· E=567~1700, ▪· E=283~850, ▴ E=150~450 kg/cm²

図 4—8　非均質な堤体の固有振動数変化

次に弾性係数が，堤体内で均質でない場合に，固有振動数が，均質な堤体に比べて，どれ位変化するかを調べたのが，図4・8である。図の縦軸は，各々の場合のEの分布に対応する固有振動数を，均質な堤体（弾性係数：Eo=1700 kg/cm²）の場合の固有円振動数で割った値である。図から同じEoに属する固有振動数はモードの次数によって（均質な場合に比べ）大きく変化しないことがわかる。しかしモードの次数が高くなればやや低下する傾向にあり，この傾向は山型分布の場合に顕著である。

4・1・3　地盤－堤体系の固有モード

フィルダムの振動を考える場合に，特に地盤との関係を考えることが重要である。フィルダムはあまり強固でない地盤上に築堤されることが多いから，静力学的な解析にも，半無限くさび型として取りあつかわれることが多い。地盤と堤体の堅さの比が大きい場合（剛基礎上）には，堤体のみの振動が優先するであろうが，両者の堅さの比が接近すれば，地盤，堤体の相互の運動は無視できないはずである。有限要素系では半無限地盤を考えることはできないから，有限な範囲の地盤でこれを考えなくてはならないが，これを決定するのは難しい。最近Chopra等は[12][13]深さ方向に半無限な地盤モデルと，堤体をあらわす有限要素系を結合して固有モードを得たが，この方法は特殊である。本節では，深さ方向に堤底長の約$^1/_5$，上下流にも堤底長の約$^1/_5$ずつ延長した図４・９に示すモデルを設定した。このモデルは１４０節点２３８要素，自由度２３４のモデルであり，このモデルを仮にA－４型式と呼ぶことにする。このモデルは剛な岩盤上に軟かい滞積層がのっており，その上に堤体があるような場合に相当すると考えられるが，この系に表現されている，地盤部の深さが変化すると固有モードが如何に変化するかを調べるのは興味深いことなので，この点については，後にいろいろな深さについて検討することにする。
ここではまず，地盤と堤体の堅さの比が変化することにより，固有モードが受ける変化を確認した。堤体の弾性係数をEd，地盤の弾性係数をEfとしたときにEd/Efを三種類に変化させたときの固有モードを図4・10～4・12に示す。

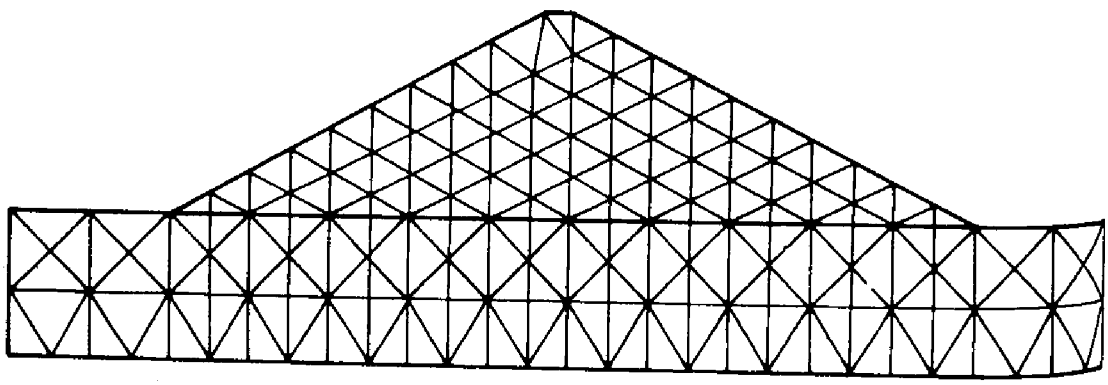


図 4-9　地盤－堤体系のモデル（A－4モデル）

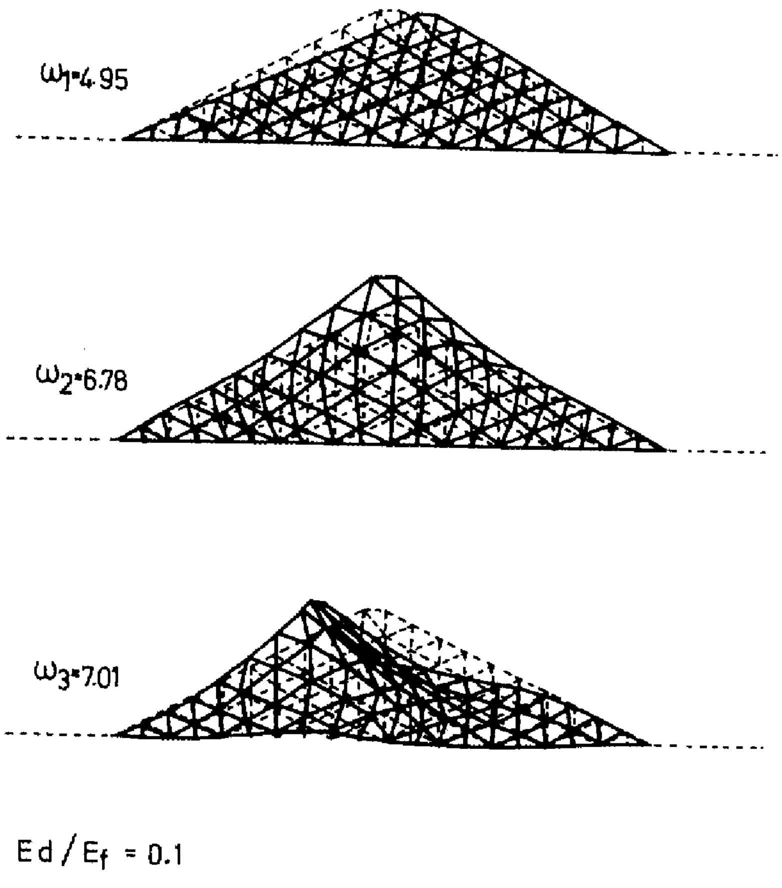


図 4−10　A−4モデルの固有モート（その1）

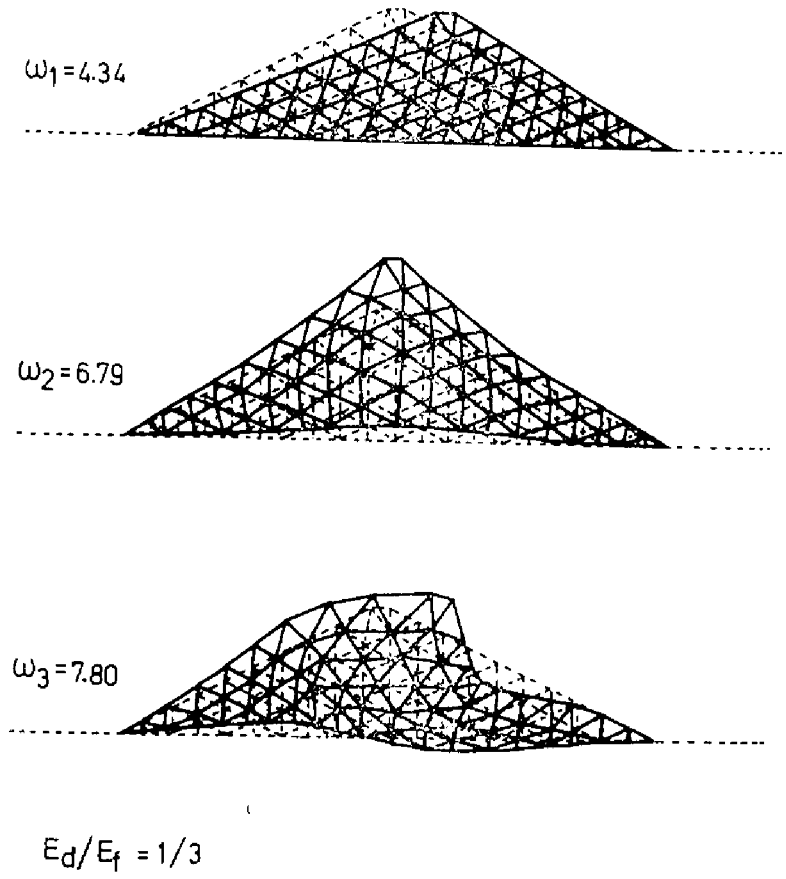


図 4−11　A−4モデルの固有モード（その2）

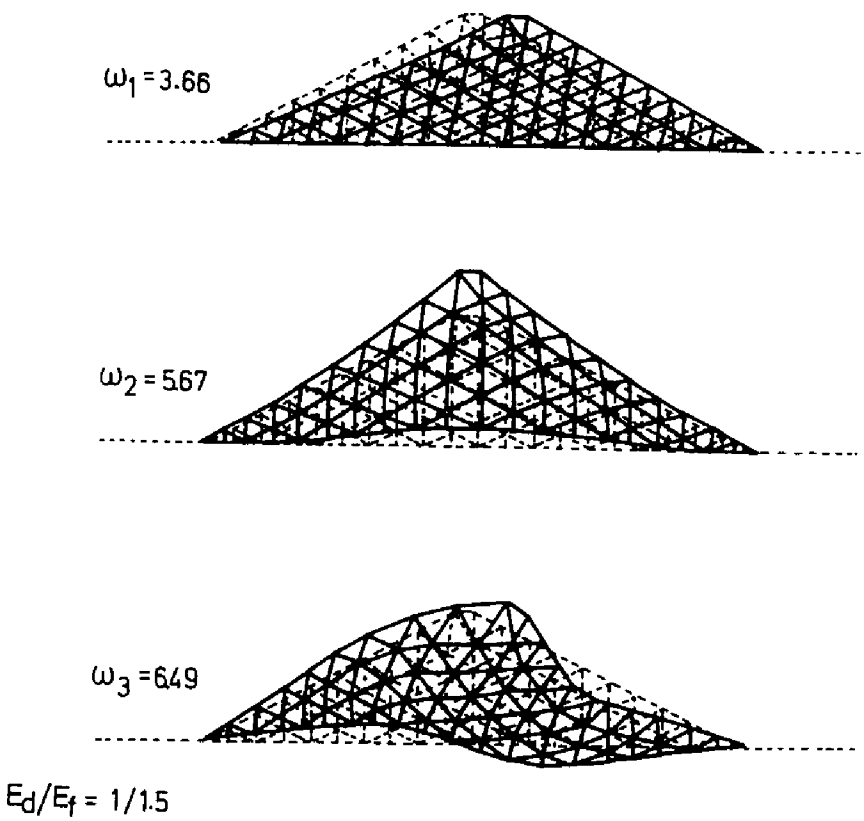


図 4−12　A−4 モデルの固有モード（その3）

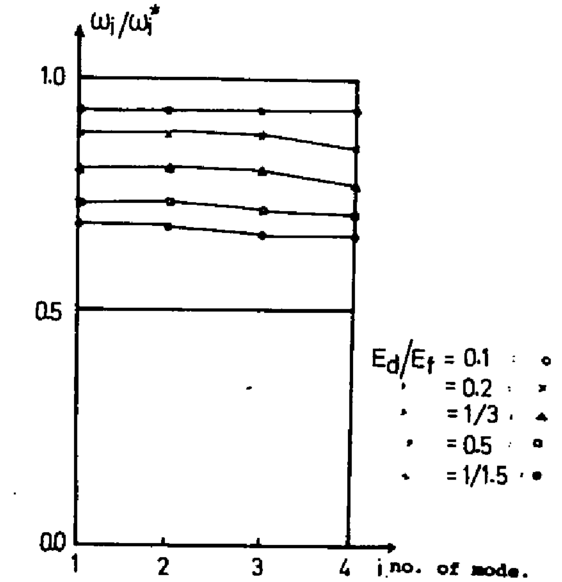


図 4−13　A−4 形式における固有振動数の変化

これ等の図からEd/Ef が大となるにつれて，堤体と地盤の接触面の変位が，クレスト変位に比べて大となり，Ed/Ef ＝ 1/1.5 の場合には，一次モードにおいて堤底の水平変位は，クレストのそれの５０％にも達する。

また二次，三次モードにおいても，鉛直変位について同じことがいえる。この状況は図４・２に示すＡ－２型式のような剛基礎上のモデルでは表現し得ずモード形が地盤を考えることによってEd/Efの変化に応じた効果を受けることが明らかであり，その効果はEd/Ef ⟶ 1 に近ずくにつれて重大となる。固有振動数の受ける変化を調べると，図４・１３のように整理される。

これは，地盤－堤体系モデルの固有振動数を剛基礎上のモデルの固有振動数 ω_i^* で無次元化したものである。Ed/Ef＝0.1 の場合には，各モードについては ω_i/ω_i^* ＝０.９３であり，Ed/Ef＜０.１ではほとんど剛基礎上の固有モードと変化がないものと考えられる。Ed/Ef ＝ $1/3$ 位になれば次第に固有振動数は低下し，地盤と堤体の相互作用があらわれる。Ed/Ef ＝ 1/1.5 の時には固有振動数は，剛基礎上のそれの７０％程度に低下する。また各々の場合モードの次数によっては，ω_i/ω_i^* は大きく変化せず５％位の範囲にある。

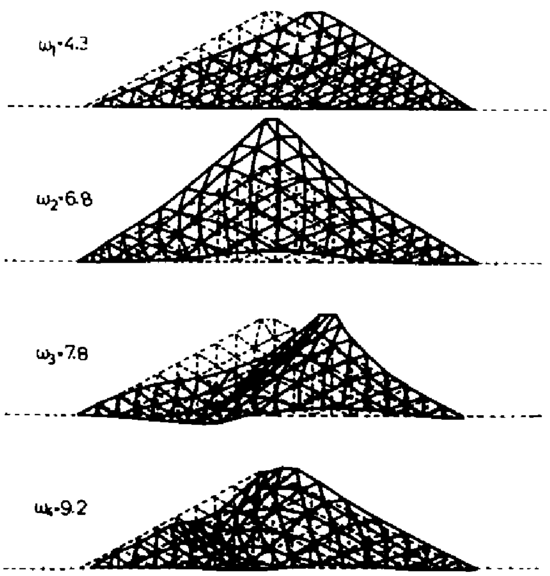


図４―１４　d=0.397・bの場合の固有モード

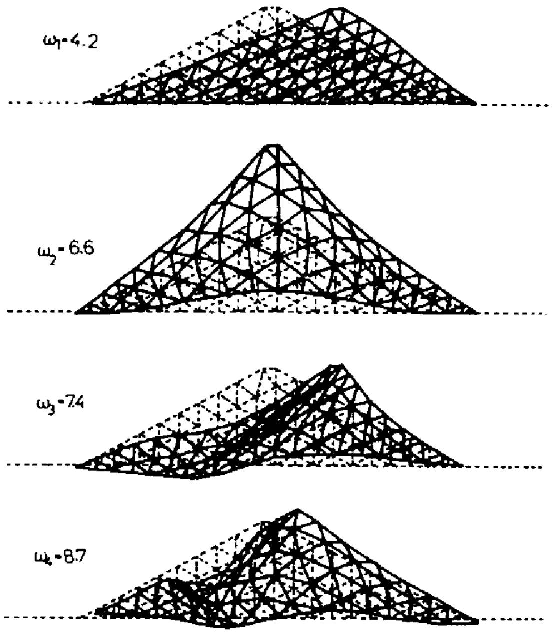


図 4−15　d=0.5・bの場合の固有モード

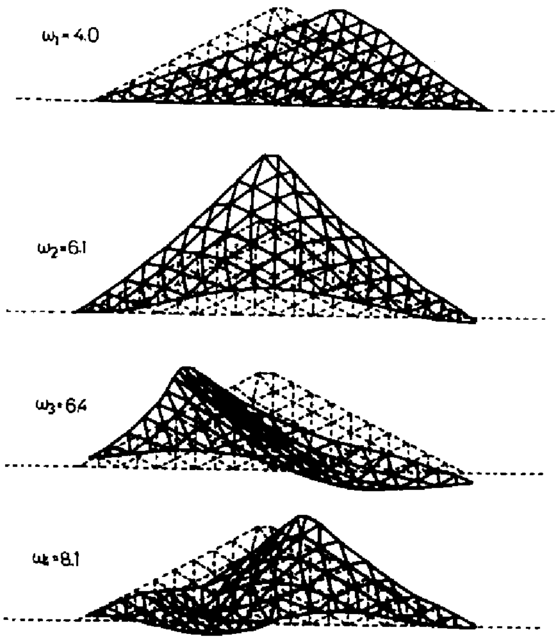


図 4−16　d=0.75・bの場合の固有モード

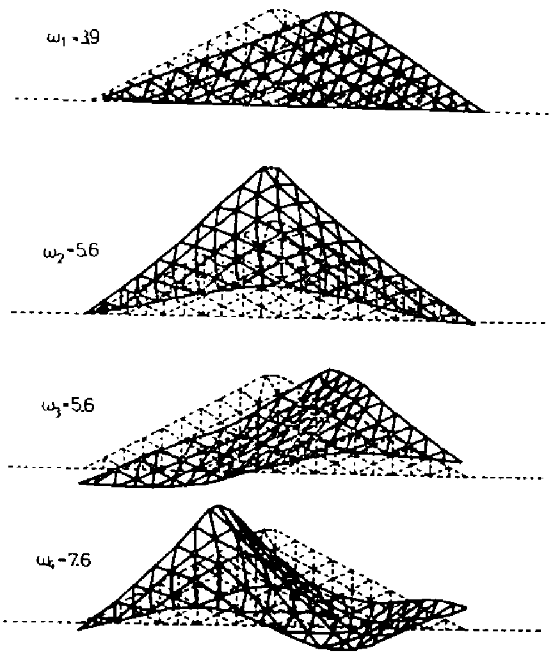


図 4−17　d＝bの場合の固有モード

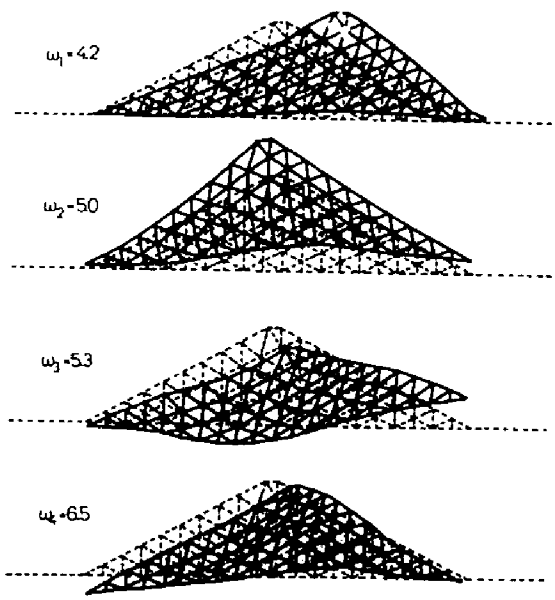
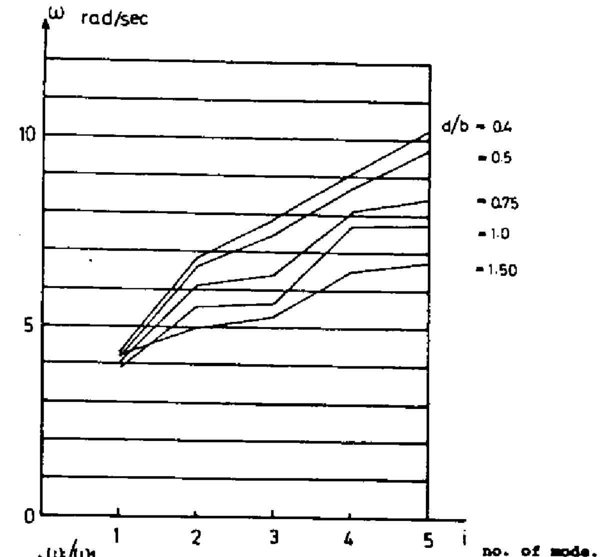


図 4−18　d=1.5 bの場合の固有モード

先にも述べたように図４・９に示したモデルは堤底の長さの半分をｂとするとき，深さｄが約$^{b}/2.5$であるが，深さをいろいろに変化させた場合の固有モードの変化を調べてみた。$Ed/Ef={}^{1}/_{3}$の場合について$d={}^{b}/_{2.5}$，$d={}^{b}/_{2.0}$ $d={}^{b}/_{1.333}$，ｄ＝ｂ，ｄ＝1.5ｂ の五種類変化させた場合の固有モード型の変化をそれぞれ図４・１４～図４・１８に示す。（これ等のそれぞれのモデルについて節点数は不変である。）これ等の図から，各次のモードの基本的な変形特性は変らないが，深さが深くなるにつれて，地盤と堤体の相互作用の程度に変化のあることが理解される。たとえば（$d={}^{b}/_{2.0}$～ｄ＝1.5ｂ まで，地盤が深くなるにつれて）一次，二次モードにおいては，クレストの変位に対するクレスト直下の地盤上の点の変位の割合はだんだんと大きくなっている。またｄ＝1.5 ｂの場合には，それまでと少し異なった，なだらかな変形を示すことから，振動様式に，それまでと違った要因のつけ加わることがわかる。
このことから，地盤の深さが，堤底長の半分の深さ位まであると，堤体と，地盤は，ほぼ対当な振動系を構成し，両者の機械的な結合度が非常に強い状態であるといえる。両振動系の共振状態ともいうべき状態が，生起されるものと考えられる。この共振状態のパラメーターが，上に述べたクレスト変位に対する，クレスト直下の地盤上の変位の比で表わせるものとすると，深さが深くなる程この比が小さくなり，すなわち，共振現象が，大きくなっているということができる。

また，地盤の深さの変化によって固有振動数がどのように変化するかをみると，図４・１９のようになる。図からわかるように，深さが深くなる程，一様に各固有振動数が低下してゆく。特に高次の固有振動数（四次，五次）の低下率が大である。また$^{d}/b=0.4$と0.5はほぼ同一傾向，$^{d}/_{b}=0.75$と1.0も，ほぼ同一傾向を示し，大別してこの範囲では，三種類のパターンの存在することがわかる。同図にはまた，第一次の固有振動数に対する各次の固有振動数の倍率をも図示しているが，これ等の図からも$^{d}/_{b}=0.4$～0.5では各モード間の固有振動数の離間が，ほぼ等しかったのだが，$^{d}/_{b}>0.75$では，二，三次モード，四，五次モードの固有振動数が接近し，これ等の固有モードの切れが悪くなることを示している。(102)



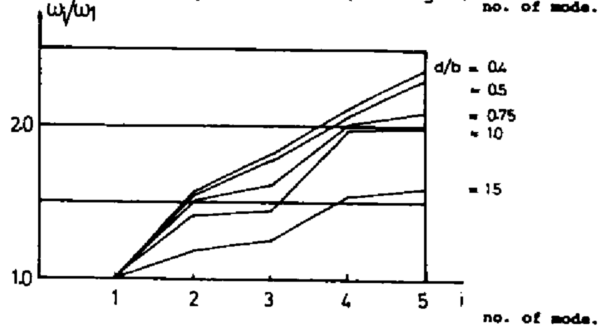


図 4−19　地盤の深さの変化と固有振動数

4・1・4　結　　論

深山ロックフィルダムを近似するA－2型式またはA－4型式による固有モードの特徴を上に示したのであるが，得られた結果を要約すれば次のようになる。

◎ 多自由度有限要素モデルは弾性体の振動モデルを得るには適用性に富んだものである。また解の稠密な分布を得るために必要な自由度の上昇に対して生ずるアルゴリズム上の困難は，ベクトル同時反復法を 利 用して効果的に解消できることを確かめた。

◎ 上の各々の例題において，１０個のモードを算出するのに必要な計算時間はFACOM230−60機で１７０秒前後，反復回数は１５～25 程度である。

◎ 二次元の振動を考えた，フィルダムの振動モードには，当然，せん断振動モデルに含まれない固有モードがあらわれ，それは堤体の鉛直方向の振動を

表現するダムセンターに対する対称モードである。またここに得た結果からフィルダムは，曲げ振動に近い状態の振動をおこなうと考えられる。

◎ 堤体内の物性値を正確に知ることが，現実のフィルダムの振動を正確に決定する。堤体内の弾性係数や，単位体積重量の分布が，明らかになったときより現実的な固有モードが得られることを示した。

◎ 地盤ー堤体系のモデルを設定し，両者の弾性係数比による，モードの変化を明らかにした。その結果弾性係数比，Ed/Efが$^1/_3$~1になった場合に，特に地盤を含めた振動系を考える必要のあることがわかった。このことは有限厚さの地盤について確認したことであるが，この地盤の厚さについては，考える地盤の層が，非常に浅い場合についても，その効果の大であることがわかった。また地盤の深さが深くなる程，地盤ー堤体の相互作用の大であることを確認した。

4・1・5 その他の型式の堤体の固有モードについて

前章においてもB一型式と，C一型式のフィルダムを解析したが，これ等のダムは非均質な堤体であるという点に特色があるものである。これ等の振動性状についても簡単に触れておきたい。

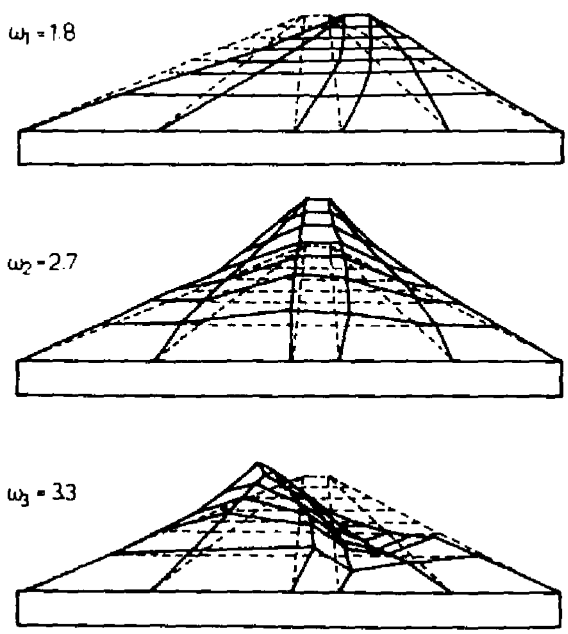


図 4-20 B一型式の堤体の固有モード

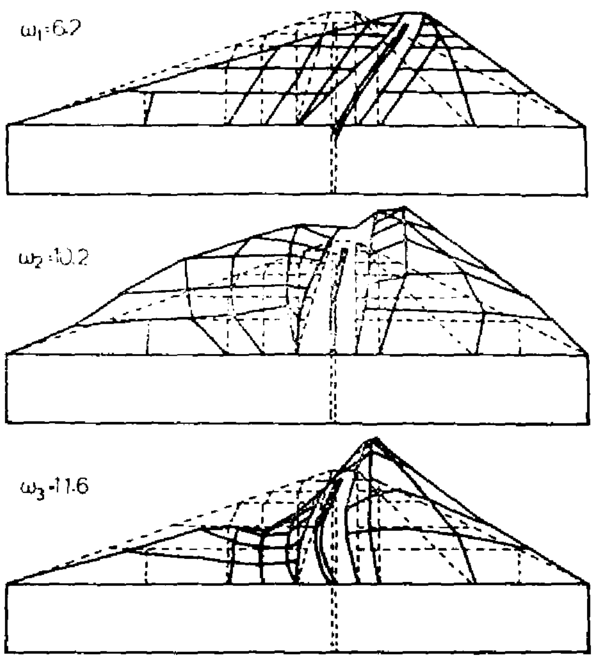


図 4—21 C—型式の堤体の固有モード

まずB一型式の堤体については，やはり図3・7に示すモデルそのまま用いて諸材の物性値に空虚時の堤体の物性値を用いた場合の固有モードを図4•20に示す。またC一型式の堤体の固有モードを図4・21に示す。これ等の非均質な堤体の固有振動数について，先の均質なA一2型式の堤体のような議論はできないがとに角，ほぼ同じ断面積と堤高を有するB，C一型式の堤体においては，C一型式の一次固有振動数が約3.5倍もB一型式の一次固有振動数よりも高い値をとっている。これは，C一型式の堤体の中央に存在する剛なコンクリートコアの影響が顕著で，堤体全体の固有振動が高められているためである。一次モードにおいては両型式について，ほぼ同様の水平振動からのみ成る運動を示している。

二次モードについては，C一型式の場合中央コンクリート・コアの変位に対してその周辺の材の上下方向の変位が大であることがわかる。このため，モード型は，ダム中央部の変位が，その周辺部より小さくなるような形状を呈しているが，これは解析上コンクリート・コアと周辺土質との変位の連続性が導入されているためであり，実際にはこの二次モードが生ずると，コンクリート・コアと周辺土材料との変位は不連続になり，クラックが生ずるものと考えられる。

総じてB－型式の堤体の振動形状の方が，各ゾーンの一体化した運動の生起されていることがわかる。

同様なことが二次モードについても観察され，結局C－型式においてはモード形自体に不安定な要因の含まれていることが多いといえる。すなわちこの型式の堤体は，動的には不安定なのである。

また四次モードまでの固有振動数の割合を考えてみると，B－型式の場合

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = 1.0 : 1.5 : 1.8 : 2.1$$

同じくC－型式の場合

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 = 1.0 : 1.6 : 1.9 : 2.0$$

であり，このことから基本的なモード間の影響のしかたや，振動の性質は，両者ともに同じであるといえよう。

このような非均質な堤体の振動性状を詳しく追求することは，浸透水による弾性係数の減少と単位体積重量の変動の効果等の現実的なさまざまの要素を取り入れるいう点で，非常に難しい問題であるが，これ以上深く立ち入らない。

ここに示した有限要素法によれば，非均質な堤体についても，均質な場合とまったく同じ手段で，その固有モード，更には応答についての解析が実行できることを示した。

§ 4・2 地 震 応 答

前節にひきつづき，フィルダムの地震応答解析をおこない，これによって得られる堤体の力学的安全性に関する知見を述べる。このような解析的方法の歴史的な経緯は，第二章（２・３節）に述べた通りであるが，ここでは，その実例を示すものとする。多自由度系のモーダルアナリシスを基調とする，応答解析は，線形弾性体についてあてはまる理論である。堤体を構成する材料が，線形弾性体であるとする点には異論もあるが，模型実験による挙動の観察，確認と比較して，この応答解析は材料が，線形であるという条件を完全に満足しつつ，理論化された解を，より詳細に与える。こうした意味でこの解析は，数値モデルによる模型実験ーシミュレーションと考えて良い。特に表面シャ水ロックフィルダムのように堤体を十分締 固めた上，浸透水の影響を考えなくても良い場合，線形解の持つ意味は大きいと考える。

ここではできるだけ現実的な地震応答解析を実行することを目的とし，次の観点から解析を進めた。

1） 堤体モデルには，前章に用いたＡ－２型式およびＡ－４型式を用い，（図４・２，図４・９参照）剛基礎上の堤体と，軟かい地盤上の堤体の振動応答の相異を明らかにする。

2） 用いる地震波はできるだけ現実的なものとする。このためには，人工地震波形が適当である。

3） 鉛直加振をも考慮すること。

4） 最危険時の堤体の安全性を検討すること。

４・２・１ 応答諸量の算定法 (55)

（４・１）式に用いた運動方程式系に粘性減衰行列〔Ｃ〕を加え系に作用する加速度を $\ddot{f}(t)$ とすると，運動方程式は，次のようになる。

$$[M]\cdot\{\ddot{X}(t)\} + [C]\cdot\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = [M]\cdot[L]\cdot\ddot{f}(t) \quad \cdots\cdots(4\cdot30)$$

ここで行列 $[L]$ は加速度が作用する点を指定する行列であり，たとえば $[M]$ が集中質点系で表記されており，すべての点に等しい加速度が作用する場合には $[L]$ は単位行列である。（４・３０）式の系の非減衰固有モードを（４・２）式のように表現し，$\{r\}_i$ （ｉ＝１，２，・・・・・ｍ；ｍは用いるモードの個数）とすればその定義から（４・３）式がなりたつ。

また変位応答 $\{X(t)\}$ は固有モードのｍ個の和から成る行列〔Ｒ〕と時間関数 $\{Q(t)\}$ の積で表現できるから

$$\begin{aligned}\{X(t)\} &= \{r\}_1\cdot q_1(t) + \{r\}_2\cdot q_2(t) + \cdots\cdots + \{r\}_m q_m(t) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\{r\}_i\cdot q_i(t) = [R]\cdot\{Q(t)\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot31)$$

と書ける。（4・31）を（4・30）に用いると，固有モードの直交性から（4・30）は結局次のように変形される。

$$\ddot{q}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = g_i(t) \quad \cdots\cdots\cdots(4\cdot32)$$

$$g_i(t) = \frac{1}{M_i^*}\{r\}_i^T \cdot [M][L] \cdot \ddot{f}(t)$$

$$M_i^* = \{r\}_i^T [M] \cdot \{r\}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

ただし ω_i は第 i 次固有振動数，ζ_i は第 i 次の減衰率である。（4・32）式の左辺第二項の表現が可能であるためには，行列〔C〕はある条件を満足しなければならない[9]がその詳細は省略する。

（4・32）式はm個の二階連立常微分方程式であって（4・32）式の解 $q_i(t)$ が決まれば（4・31）から変位応答 $\{X(t)\}$ が決定する。まったく同様にして速度，加速度応答は

$$\{\dot{X}(t)\} = [R]\{\dot{Q}(t)\} \ , \ \{\ddot{X}(t)\} = [R]\{\ddot{Q}(t)\} \quad \cdots\cdots(4 \cdot 33)$$

から得られる。（4・30）式を直接積分して $\{X(t)\}$ を得たり，（4・32）式を積分したりするのにNewmarkの β ー法が用いられることが多いが，ここでは（4・32）式の積分にはR・K・G法を用いた。R・K・G法ならば(4・32)式の解を得ることが簡単であり，後述するように，打ち切り誤差も時間刻みを十分小さくとれば大きくなることはない。[103][101]

応答 $\{X(t)\}$ が決まると第 j 要素の時刻 t における動的応力 $\{\sigma(t)\}_j^d$ は次式で与えられる

$$\{\sigma(t)\}_j^d = [S]_j \cdot \{x(t)\}_j \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4 \cdot 34)$$

ここでNは系の全要素数，〔S〕j は第 j 要素の応力行列，$\{x(t)\}_j$ は第 j 要素を包む三個の節点の時刻 t における変位である。

よって総応力は静的応力 $\{\sigma\}_j^s$ と $\{\sigma(t)\}_j^d$ との和で与えられ，次式となる。

$$\{\sigma(t)\}_j = \{\sigma\}_j^s + \{\sigma(t)\}_j^d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4 \cdot 35)$$

以上のように解析的方法は明解であるから模型実験では，困難な取扱いである，不規則波形による加振，水平，鉛直両成分の同時加振状態，応力分布の解明などの項目が，きわめて容易に実施できる。ところで最も難しい事項の一つは粘性減衰行列〔C〕の決定 $\longrightarrow \zeta_j$: 粘性減衰率の決定である。この点について現在まで明解な結論は得られてないが，畑野等は[29]コンクリートや鋼からなる実際の構造物の実測データーをもとに次の結論を得た。すなわち，一自由度

の各種レオロジーモデルとこれ等の構造物の，変位応答を対応させると等価な減衰率：h（（4・32）式中の ζ に相当する量）と非減衰固有振動数との間には，ある逆比例関係があると結論され鋼製橋脚のコンクリート・ピアーの実測例ではおよそ $\zeta = 0.02 \sim 0.3$ 位まで変化するという。（すなわち高次モードの振動に対する減衰率が大きくなると解釈できる。）このような研究成果をとり入れる必要がある。

次に加振加速度過程をどのようなものに設定すべきかについては，設計上重要な問題である。従来定常な加振過程や，既往のダム築造点付近に生じた地震加速度記録を用いることが多かった。しかし後者は常に信頼できる良質の記録があるとは限らないから，何等かの方法で，現地に発生するであろう地震加速度を推定した記録を用いるのが合理的である。

ここでは最近良く用いられるM. Aminによる[(50)(2)]非定常地震加速度記録のシミュレーション法を用いた。この方法の特色は，非定常性を定めるパラメーターを米国における多数の既往の強震記録の統計的処理によって類推している点であって，設計パラメータが現実的であることである。

4・2・2　定常加振による応答

前節の結果から，解析するフィルダムの最高次モード（m＝5とする。）の固有円振動数は高々15 rad/sec 程度であることがわかる。（図4・9参照）したがってNewmarkの β－法における解の収束安定条件の基準[(101)]
応答計算における時間刻み Δt と最短固有周期Tにおいて

$$\frac{\Delta t}{T} < 0.05 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot36)$$

という厳しい条件を付した時にも $\Delta t < 012$ secとなり，これを満足する Δt ならば β－法では収束と安定が保障される。R・K・G 法では誤差が Δt の4乗に比例する[(103)]ことから以下のすべての解析においては $\Delta t = 0.02$ sec を用いる。

図4・2.2.に地盤－堤体系のモデルと剛基礎上のモデルの二つを示してある。用いる材料の物性値は，前節に用いたのと同じ値をとる。地盤－堤体系における弾性係数比はすべて $Ed/Ef = {}^{1}/_{1.5}$ という相互作用の大きな場合をとりあげることにする。この二つのモデルを用いることによって典型的な二つの振動モデルが代表される。何故なら，地盤－堤体の相互作用が顕著になってくるの

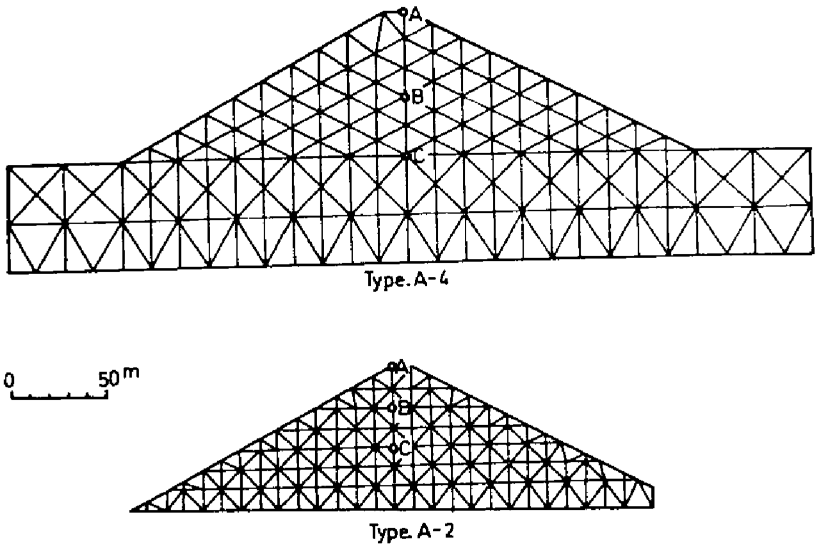


図 4—22　二種類のダムモデル

型式＼モード次数	1	2	3	4	5	節点数	不動点
A － 4	0.583	0.903	1.032	1.250	1.349	148	地盤の底面と側壁
A － 2	0.899	1.327	1.554	1.896	1.955	140	堤底面

表 4 ・ 1　両モデルの固有振動数（H.z ）

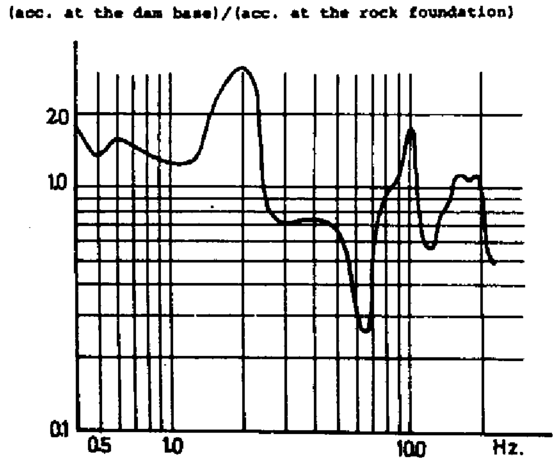


図 4—23 河床滞積層の周波数応答

は，Ed/Ef ＞ $^1/_3$ ぐらいであるからである。表４・１に両モデルの５次までの固有円振動数を示す。

本章で取りあげる深山ロックフィルダムに作用すると考えられる地震波形の推定については，現地における常時微動記録の結果を利用した。築堤地点のダム中央線の二点における測定記録から河床堆積層の水平振動の周波数応答を得ているが，そのパターンは図４・２３に示すようなものであった。(74)
この結果からこの河床には 2.0 Hz および 10.0Hz に顕著な増幅作用があるものと考えられる。堤体の固有振動数は表４・１より 5.0 Hz以下であるから最も危険と考えられるのは，2.0 Hz 付近の加振である。そこでまず 1.5 Hzおよび 2.0 Hz の定常加振下の応答を求めた。

型式・加振 ＼ 項目		最大変位	最大変位の発生時刻	定常片振幅
A－4	2.0 Hz	11.6 cm	0.46 sec	1.5
	1.5 〃	16.0 〃	0.52 〃	3.3
A－2	2.0 Hz	8.6 〃	0.40 〃	3.3
	1.5 〃	12.2 〃	0.44 〃	4.1

表４・２ クレストの変位応答の比較（$\zeta = 0.2$）

図４・２４ は地盤一堤体系のすべての点に静止状態から，水平方向に

$$\ddot{f}(t) = 300 \cdot \sin(2\pi \times 2.0\,t) \quad \mathrm{cm/sec^2} \quad \cdots\cdots(4 \cdot 37)$$

なる 2.0 Hz，300 gal の加速度が作用した場合の水平変位応答を示している。図示されている変位は図４・２２に示す点A. B. C 点の変位である。
図４・２４，Aは A－４型式に対して $\zeta_i = 0.2$，0.1（$i = 1 \sim 5$）とした場合である。同じ加振が A－２型モデルに作用した場合の変位応答を図４・２４，Bに示している。この場合は $\zeta_i = 0.2$（$i = 1 \sim 5$）の場合のみである。
図４・２４Cには A－２型式および A－４型式のモデルにおいて $\zeta_i = 0.2$（$i = 1 \sim 5$）とした場合に

$$\ddot{f}(t) = 300 \cdot \sin(2\pi \times 1.5\,t) \quad \mathrm{cm/sec^2} \quad \cdots\cdots(4 \cdot 38)$$

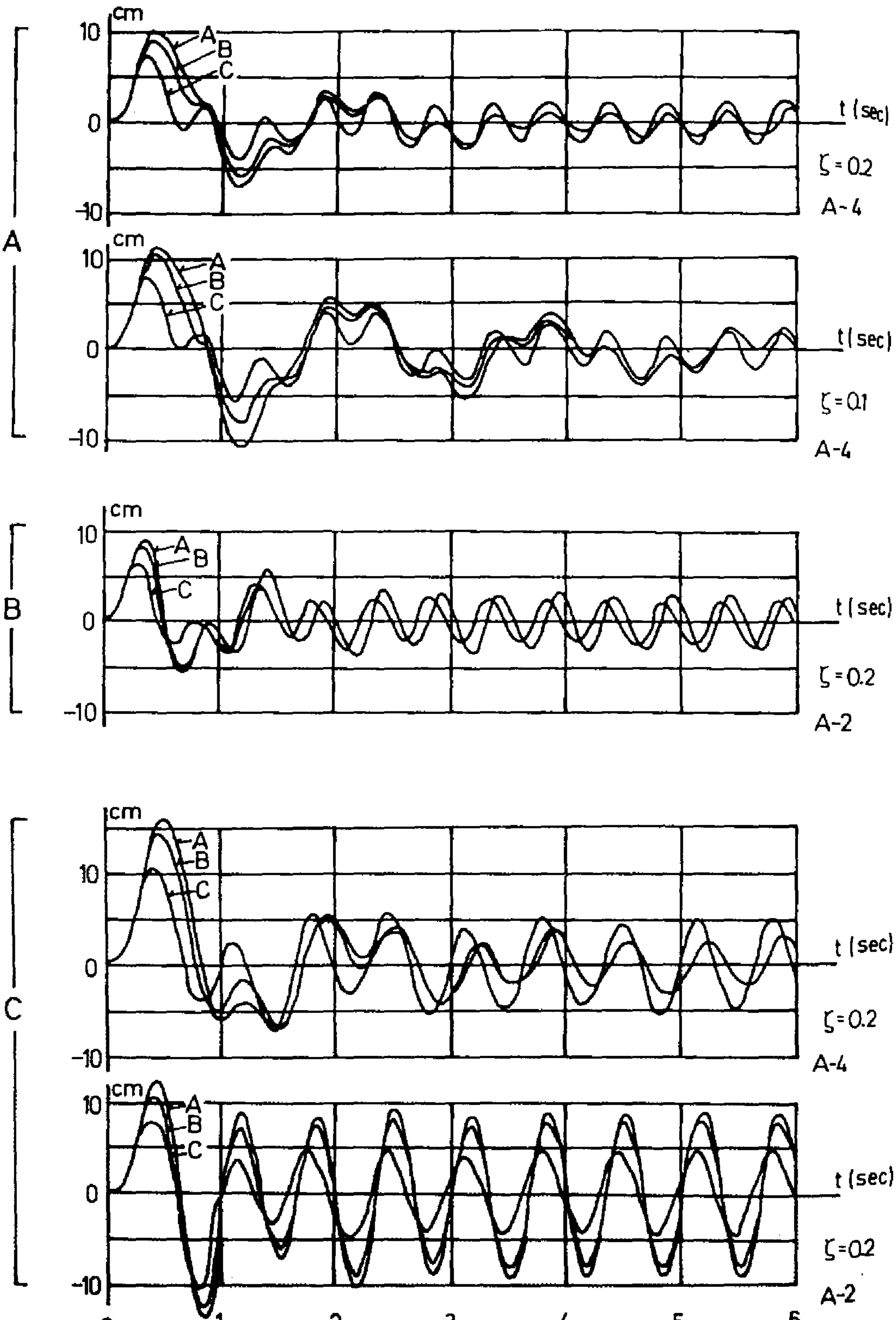


図４－２４　定常変位応答

なる1.5 Hz 300 gal の水平加速度が作用した場合の水平変位応答を示している。図4・24の結果から次のことがいえる。

① 2.0 Hz および1.5 Hz の加振の場合には，A－4型式では加振後約5sec A－2型式では加振後約3.0 secで定常な変位応答に達する。

② 各点の変位応答の間には，A－4型式の場合，位相差が15°以下であるが，A－2型式の堤体では底面に最も近いC点とそれ以外の点の間には30～50°の位相差のあることが認められる。またA－4型式では堤底の変位がクレスト変位より30％位大である。このことは両モデルの振動の形態が本質的に異なるものであることを示している。

③ いずれの加振状態においてもクレスト部が最大の変位応答を示すのは加振の最初の周期においてである。クレストの水平変位応答の特徴的な値を表にすると表4・2のようになる。

④ A－4型式で ζ＝0.1および ζ＝0.2とした場合の変位応答の変化は前者が後者よりも応答量において10～15％増大することがわかる。このことは両者の応答において位相や履歴には大きな変化が生じないのだが，減衰率の小さな場合には定常状態に達するのに時間を要する。

⑤ いずれのモデルにおいても1.5 Hz加振の場合が，2.0 Hz加振よりも応答が大である。このことは表4・1の固有振動数の関係からも理解できる。つまり1.5 Hzの方が両モデルにおけるより低次な固有振動数に近いからである。

⑥ いずれの加振においてもA－4型式の方がA－2型式よりも大きな定常応答示すが，このことはA－4型式が軟弱地盤上の地盤－堤体系であることにより地盤のもつ機械的な増幅作用，およびダンピング機能が，応答に影響をおよぼすからである。このことは①に述べた定常応答状態に達する時間がA－4型式の場合の方が長いこととも関連している。

上の項目④で述べたことから以下の解析においては，土質材料の線形応答解析によく用いられる値である，ζ＝0.2の値を採用することにする。なぜなら異なる ζ の値に対する応答は ζ＝0.2の結果から類推することができるからである。

次に両モデルにおける代表的な応力分布と水平加速度応答分布を図4・25，図4・26に示す。ここに示してある応力は動的な力による応力のみである。図4・25 から両モデルの応力分布の相異が明らかになる。両モデルともτ_{xy}の

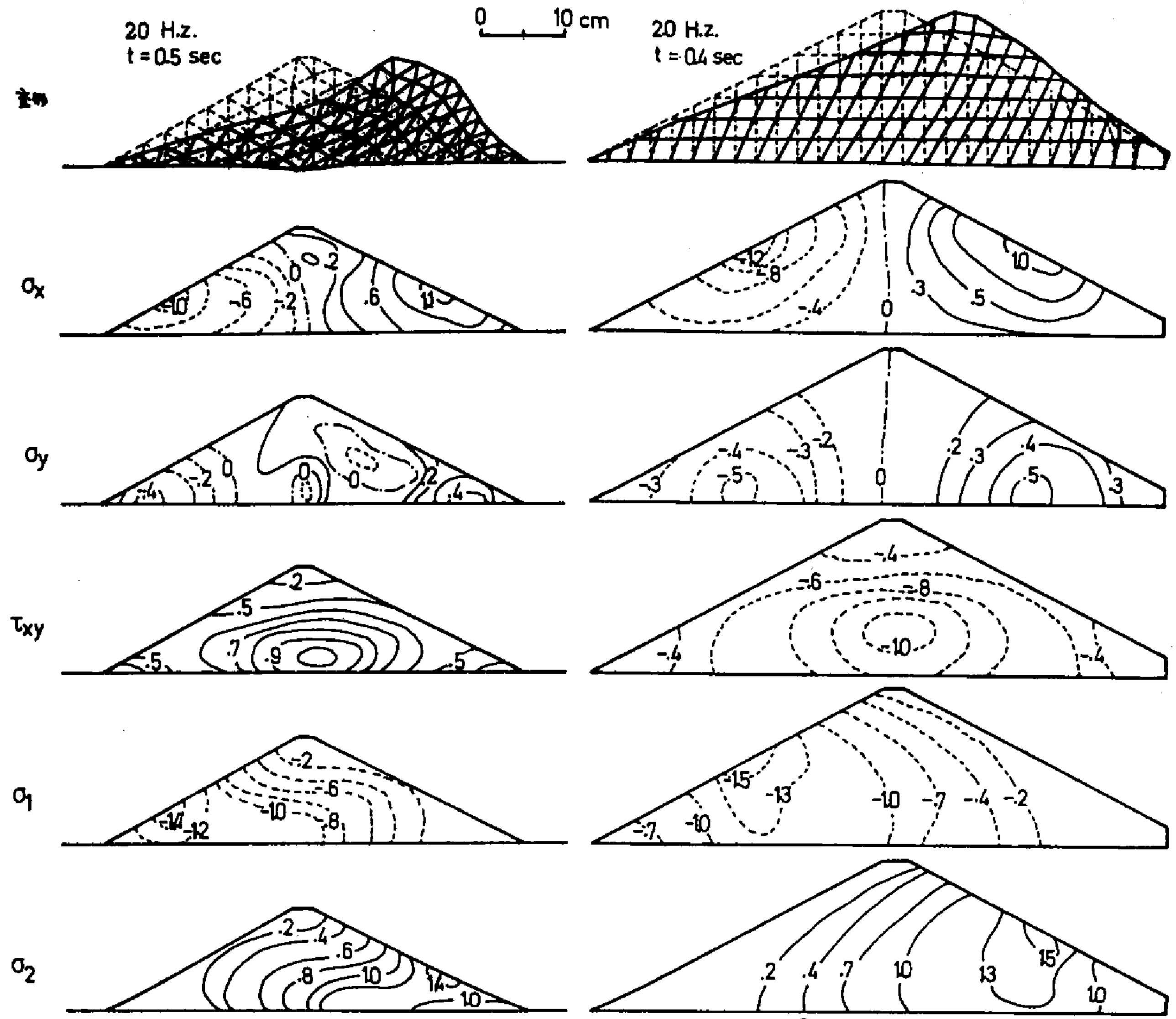


図 4－25　定常加振による応答応力（kg/cm²）

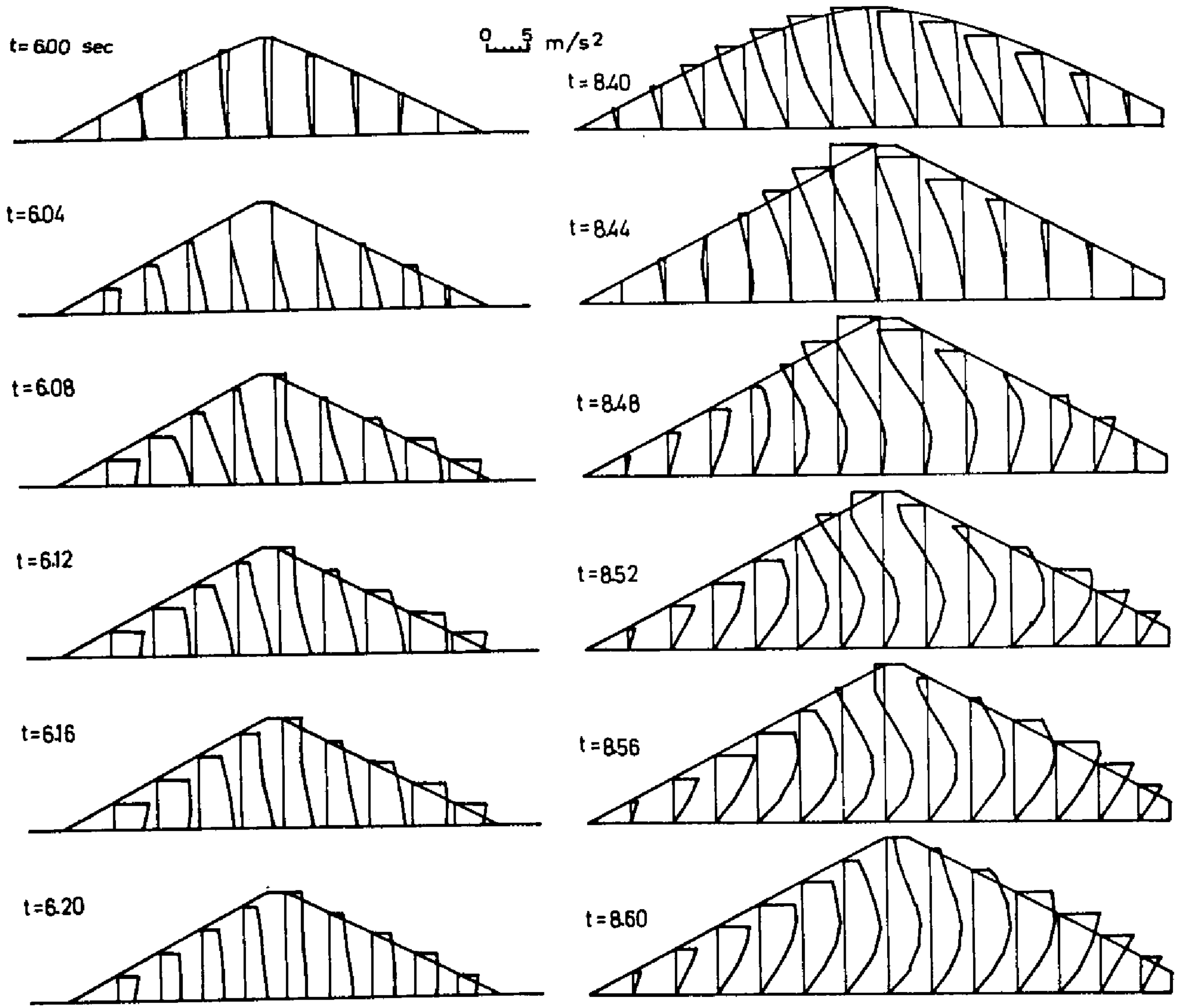


図４－２６　定常加振による応答加速度分布（２.０Ｈｚ）

分布は堤体の中央部を最大値とする同心円型の分布を示しているが，これはせん断振動モデルにおける仮定とは異なった応力分布である。また主応力分布はほぼ大きさの等しい圧縮一次主応力と引張二次主応力を生ずることわかる。このことは動的応力では主応力差が常に大であり土の破壊規準からすれば危険な状態であることを示唆している。この点については後に堤体の極限つりあいの問題として論ずる。

また図4・26から水平加速度分布は堤頂において大であり，堤底において小となるという一般的傾向を示している。(4・37)(4・38) 式による水平加振は震度法でいうと，水平震度＝0.3という状態に対応しているわけだが，動的解析によれば，どの点においても震度が0.3であるとすることが不合理であることがわかる。この点についても後に動的震度の問題として取扱う。

4・2・3　El. Centro とTaft地震による応答

人工地震による応答との対比のために，著名な二つの強震記録であるEl. Centro (May. 18.′40:NS comp)とTaft (Jul. 21.′52 :S69°E comp)地震記録による応答を求めた。この二つの記録を選んだのはそれぞれの波形のもつパワスペクトル密度のピークが図4・27に示すように1.5～2.0 Hz 付近にあり，当面問題としている加振周波数領域に近いこと，両者のパワスペクトル密度のパターンの違いが，地震波の二つの異なった性格を代表すると考えられるからである。すなわちTaft は高い周波数成分の残存率が割合高いのに対し，El. Centroでは高い周波数成分の減衰が大である。また両者は強震であるから加速度記録の分散値が大であり(El. Centro: $\ddot{f}max$ = 274 gal，加速度の分散値＝0435$(m/sec^2)^2$　Taft; $\ddot{f}max$= 170gal，加速度の分散値＝0.162$(m/sec^2)^2$)で最危険と考えられる状態を成起するのに十分な要素をもっていると考えられるからである。両者の加速度過程を図4・28に示す。この地震によるA－4，A－2両型式の変位応答を図4・29に示し,Taft地震による加速度応答を図4・30に示し，さらに図4・31にEl. Centro地震による最大主応力の極大値の発生時刻における応力分布を示した。図4・29～図4・31に得られるデーターの特性値を整理すれば表4.3のようになる。

これ等の結果からA－4，A－2両振動モデルの応答のパターンが大きく異なることがわかる。どちらの地震においても発生する最大水平変位はA－4型式ではA－2型式の約1.4倍である。図4・30による加速度応答をみても，

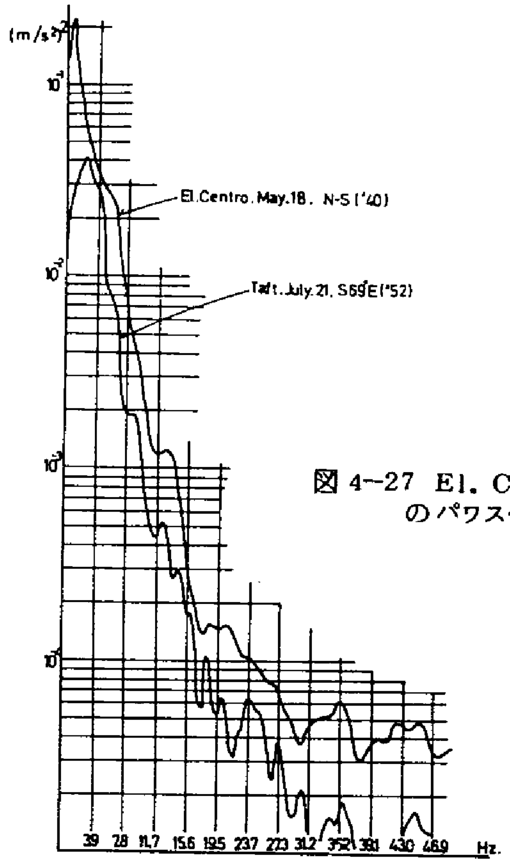


図 4−27 El. Centro, Taft 地震加速度のパワスペクトル パターン

A－4型では堤底面において加速度が0となることはなく，地盤も共に運動していることがわかる。しかし両モデルにおいて生ずる最大主応力に差のないことは，堤体内部に生ずるひずみ量には差のないことを意味している。応答主応力の絶対値 $|\sigma_{max}(t)|$ がある応力レベル：σ_0（たとえば 1.0 kg/cm²）より，大となる時間の総計：$T_{\sigma>\sigma_0}$ が意味するものは，これが長大であればあるほど，地震によって生ぜしめられた交番応力が σ_0 より大となる継続時間の長いことを意味している。表4・3からすれば同じ加振を受けてもA－4型式はA－2型式の $T_{\sigma>\sigma_0}$ よりも 1.7～3.2 倍大きな $T_{\sigma>\sigma_0}$ 値をとる。これは地盤によるダンピング機構が堤体の運動を緩慢にし，大きなひずみの発生した状態を急速に解放しないためである。

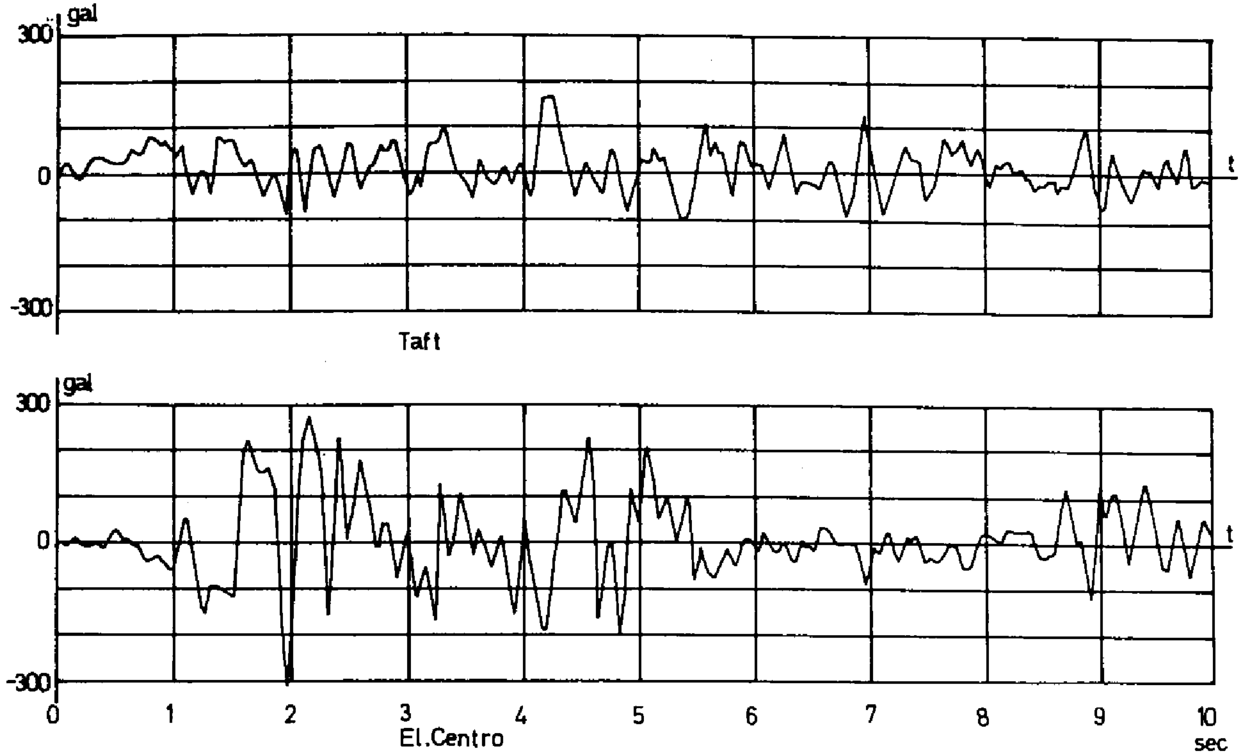


図4−28　El. Centro と Taftの地震加速度過程

型式と加振波＼項目		水平最大変位(cm)	最大変位の発生時刻(sec)	最大主応力(kg/cm²)	最大主応力の発先点	$T_{\sigma>\sigma_0}$ $\sigma_0=1.0$ kg/cm² なる時間(sec)	最大水平応答加速度(gal)	最大水平加速度の発生点
A−4	El.Centro	14.7	2.3〜2.5	2.0	上下流面堤趾	2.60	−	−
	Taft	8.9	4.5	1.3	上下流面$^2/_5$H	0.38	212	クレスト及び堤中央
A−2	El.Centro	10.0	2.0	2.0	上下流面4／7・H	0.80	−	−
	Taft	6.8	4.6	1.3	上下流面4／7・H	0.22	260	クレスト

表4・3　El. Centro と Taft 地震による応答の特性値

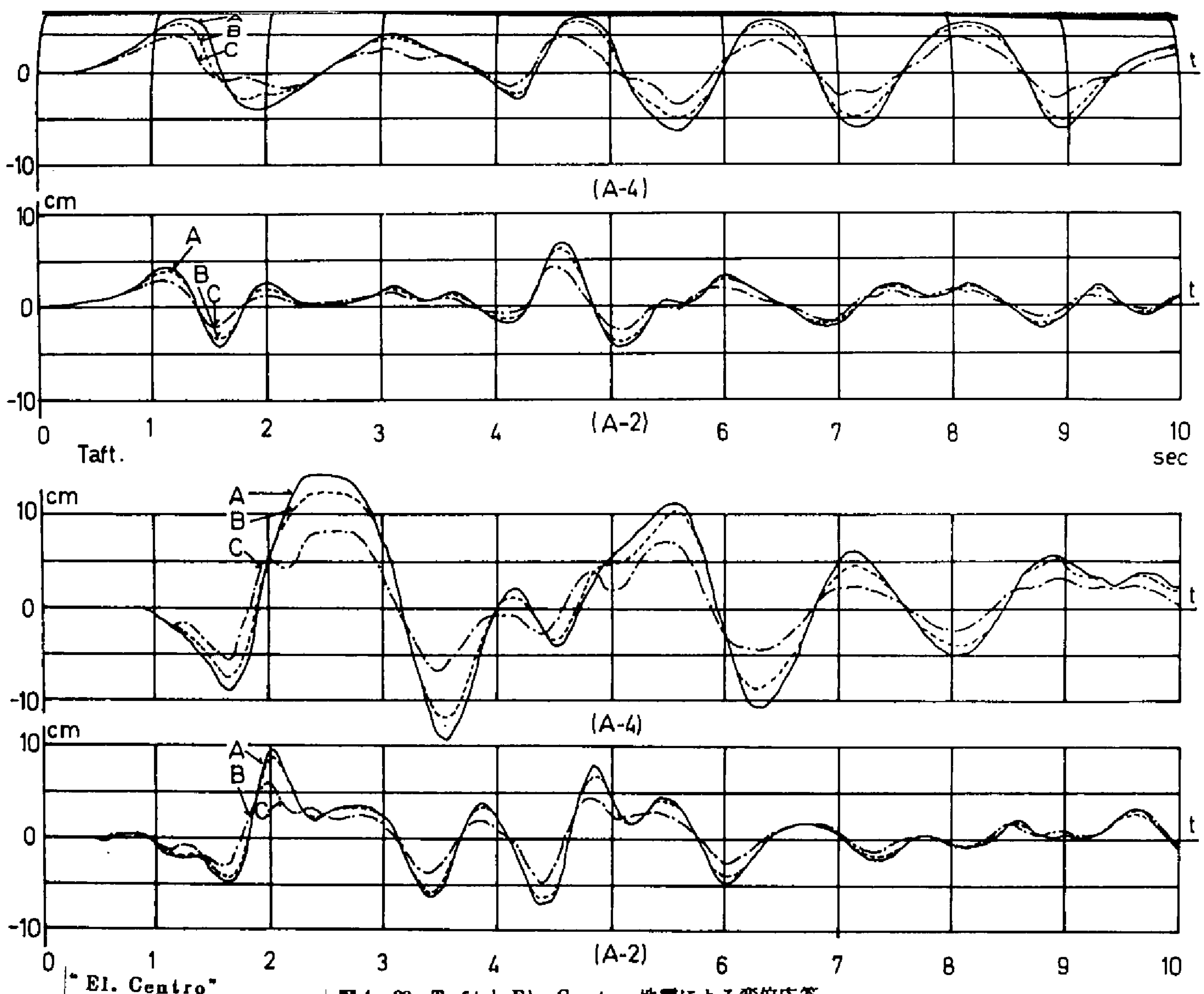


図4－29　TaftとEl. Centro地震による変位応答

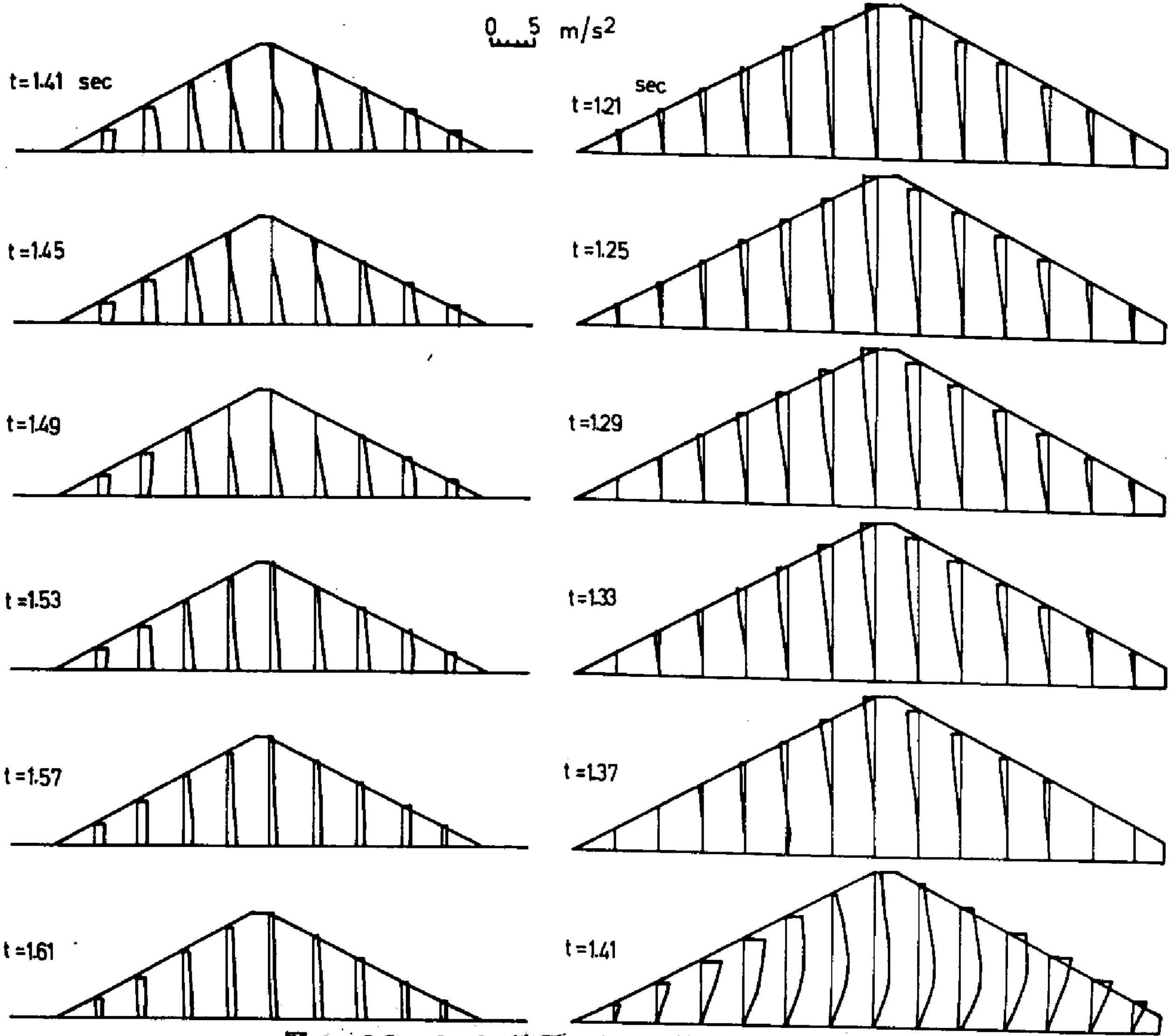


図 4—30　Taft 地震による応答加速度分布

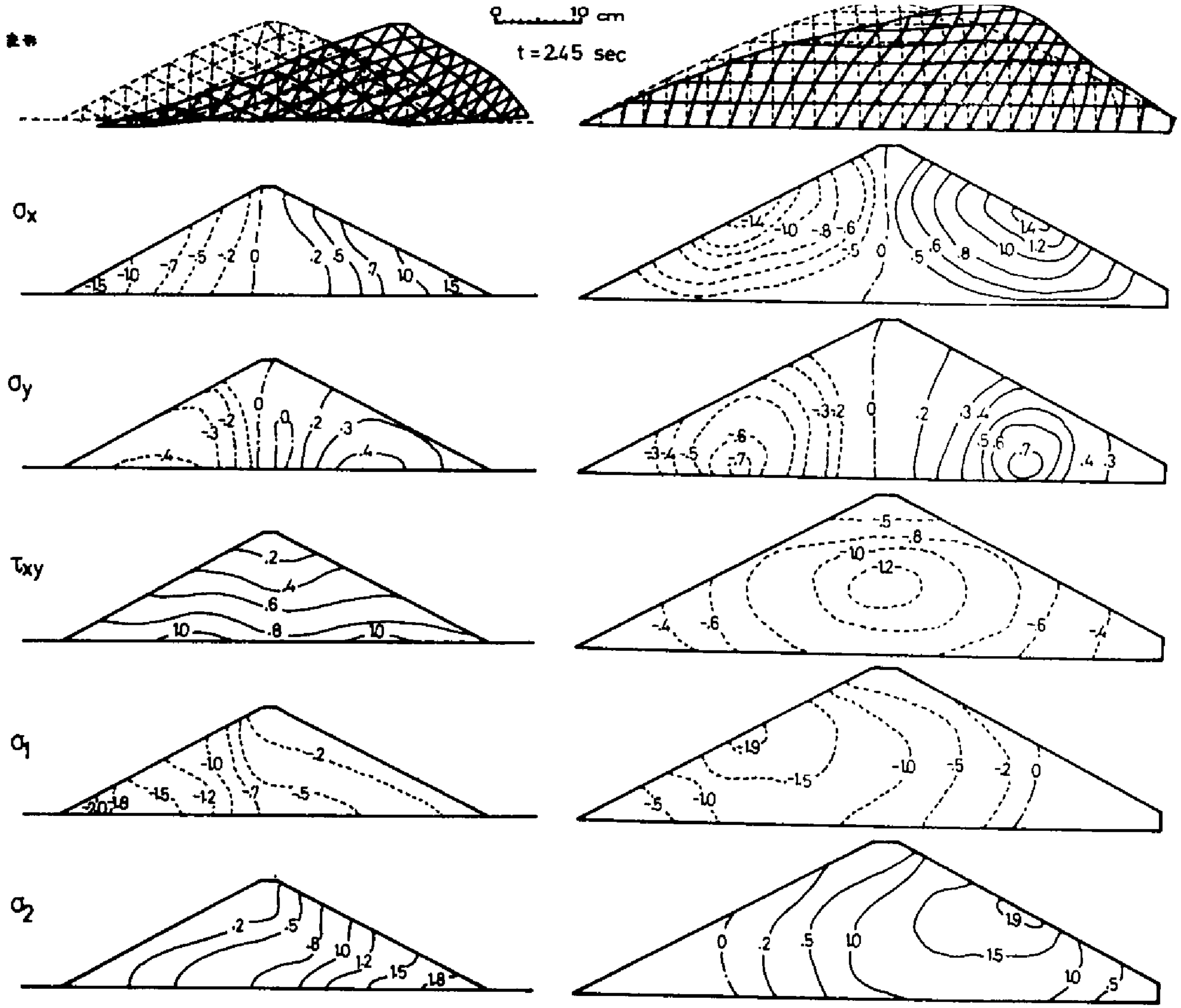


図4－31　El. Centro 地震による応答応力（kg／cm²）

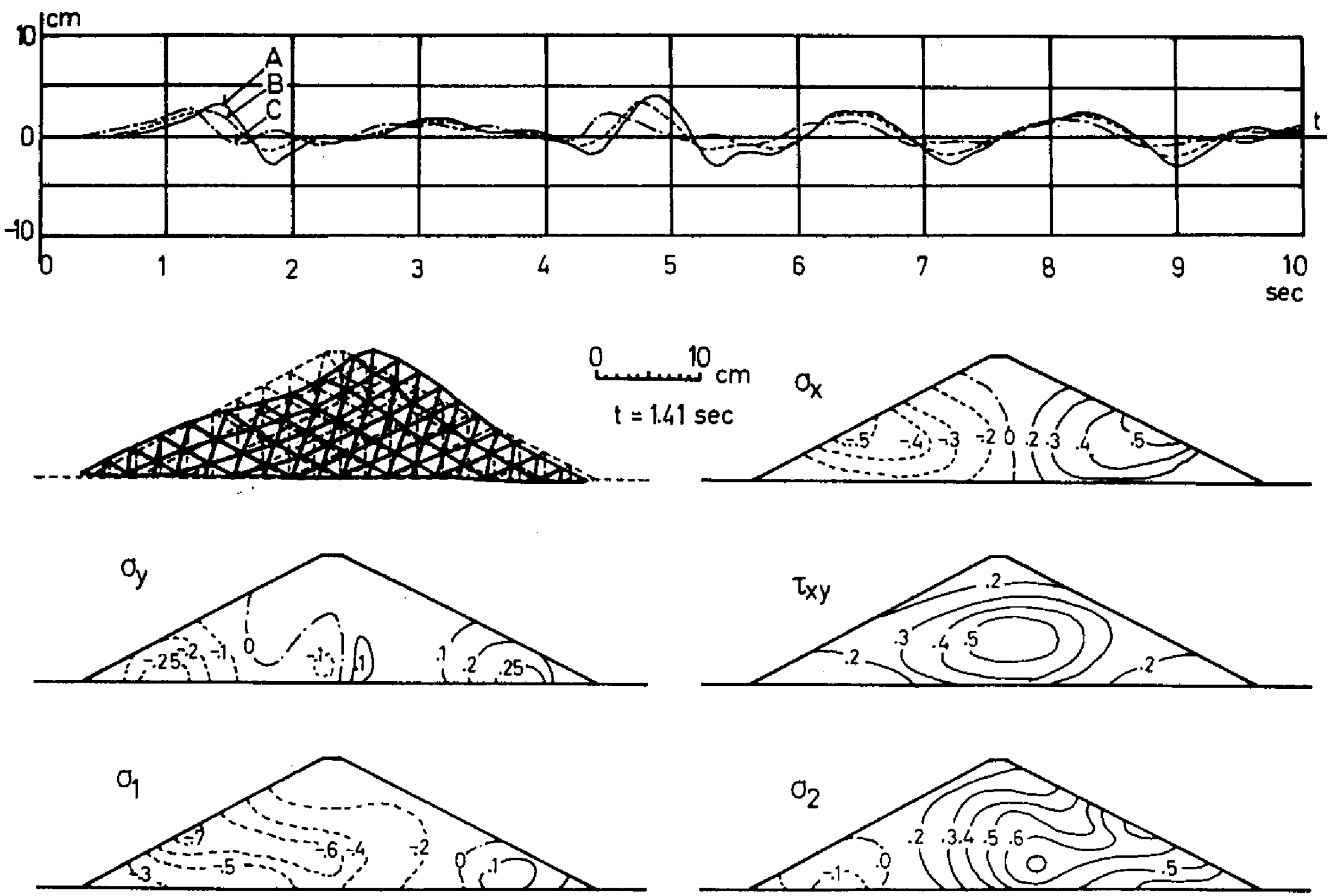


図 4－32　地盤のみにTaft地震が作用した場合の応答量（kg／cm²）

図4・32にはA－4型式の地盤部分にのみTaft地震加速度が作用した場合の変位応答と最大主応力の極大値の発生時刻における応力分布を示している。地震波が，地盤から堤体にどのように伝達してゆくのかという問題は興味深いものである。ここに示す結果から，その機構の一端をうかがい知ることができる。図4・32の変位応答および図4・29の変位応答を比較すると，加振波のフロントは常に堤底にあり，クレストにこれが達するのにはほぼ0.28～0.30secを要していることがわかる。これは水平振動が堤体内を約240 m/sという速度で伝播しているということであり，今用いている堤体の物性値からすれば堤体のせん断波速度は，$V_S = 162$ m/secであるので，結局，堤体を振動が伝播する速度はV_Sの約1.5倍位であるということである。

4・2・4　人工地震加速度による応答

先にも述べたように，人為的に地震加速度のパラメーターを設定し得る人工地震加速度の適用は設計者にとって有利である。ここでは図4・33および表4.4に示す特性値をもつSAMPLE－1およびSAMPLE－2という二つの過程を用いる。この過程の発生法は，4・2・1項に述べた通りである。図4・33には二つの過程のパワスペクトル密度，および非定常性のパラメーターを示している。ここに設計された二つの過程は4・2・3項のEl. CentroやTaft地震に比べて分散値が3～5倍大きいから，これ等の強震よりも数倍程強い地震波と考えることができる。SAMPLE－1による水平加振をA－4，A－2両型式に加えた場合の変位応答と，最大主応力の極大値発生時刻における応力の分布を図3・34と図4・35のそれぞれに示す。また応答量の特性値を表4・5に示す。

結果として言えることは応答の基本的な性質は前項4・2・3の場合と同様であり，ただ応答量の数値のみが興味の対象となる。

次に水平加振と鉛直加振が同時に作用する場合を考える。この種の応答を考えることの重要性は強調されているが(72)これを実際にとりあげたものは以外に少ない。Chopra(14)は，米国における著名な強震記録から鉛直加速度過程と，水平方向の直交する二方向の加速度過程の統計的処理をおこなった。それによれば両者の加速度記録のスペクトラム強度の比（鉛直成分／水平成分）は0.20～0.30である。したがってこの結果を利用すれば設計に用いるべき加速度過程のスペクトラム強度の比を0.20～0.30にすべきであるが，ここでは簡単のために，鉛直加振と水平加振過程の振幅の比を0.25とした。すなわち表4.4のSAMPLE－2を水平加振波（SAMPLE－1）×0.25を鉛直加振波と

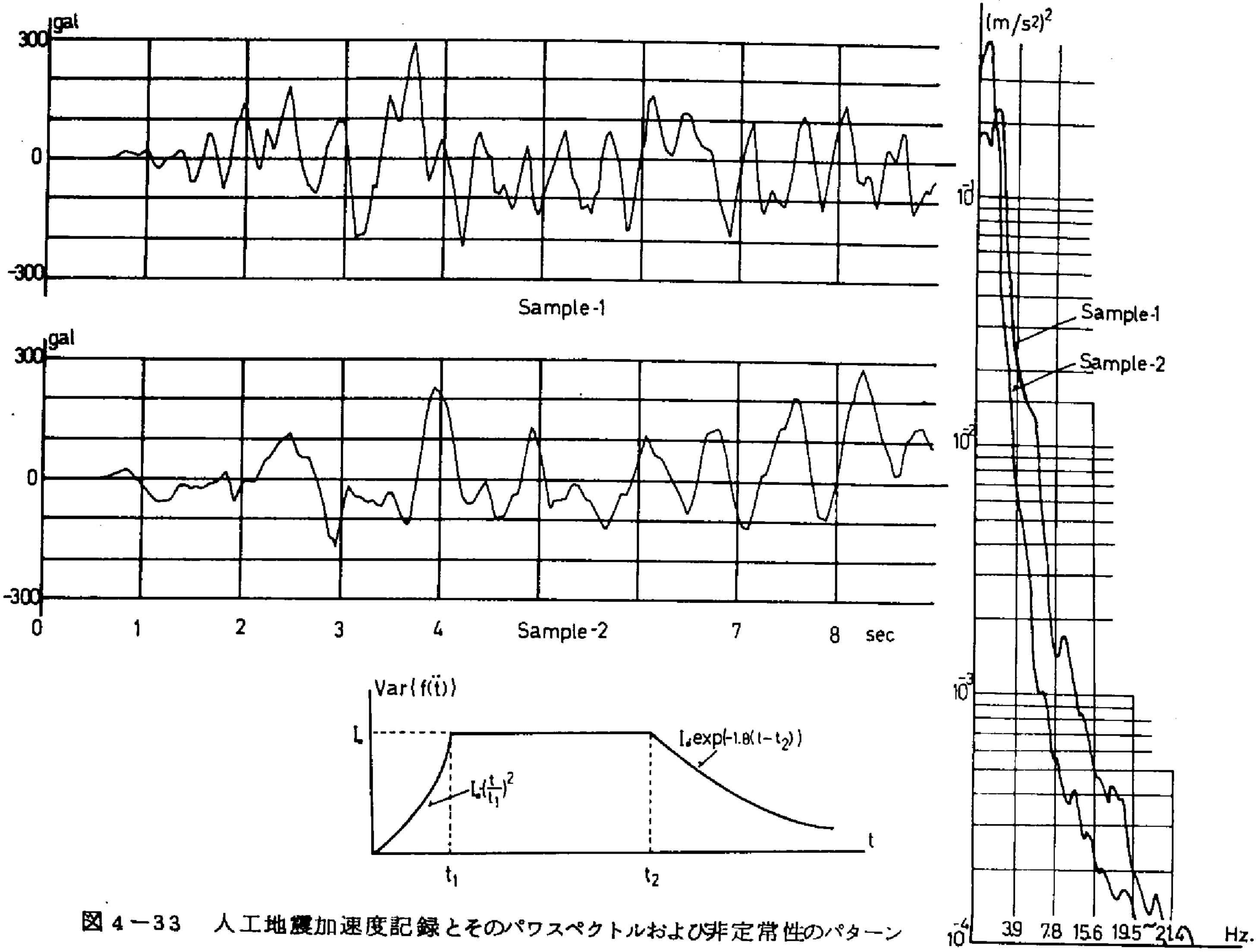


図４−３３　人工地震加速度記録とそのパワスペクトルおよび非定常性のパターン

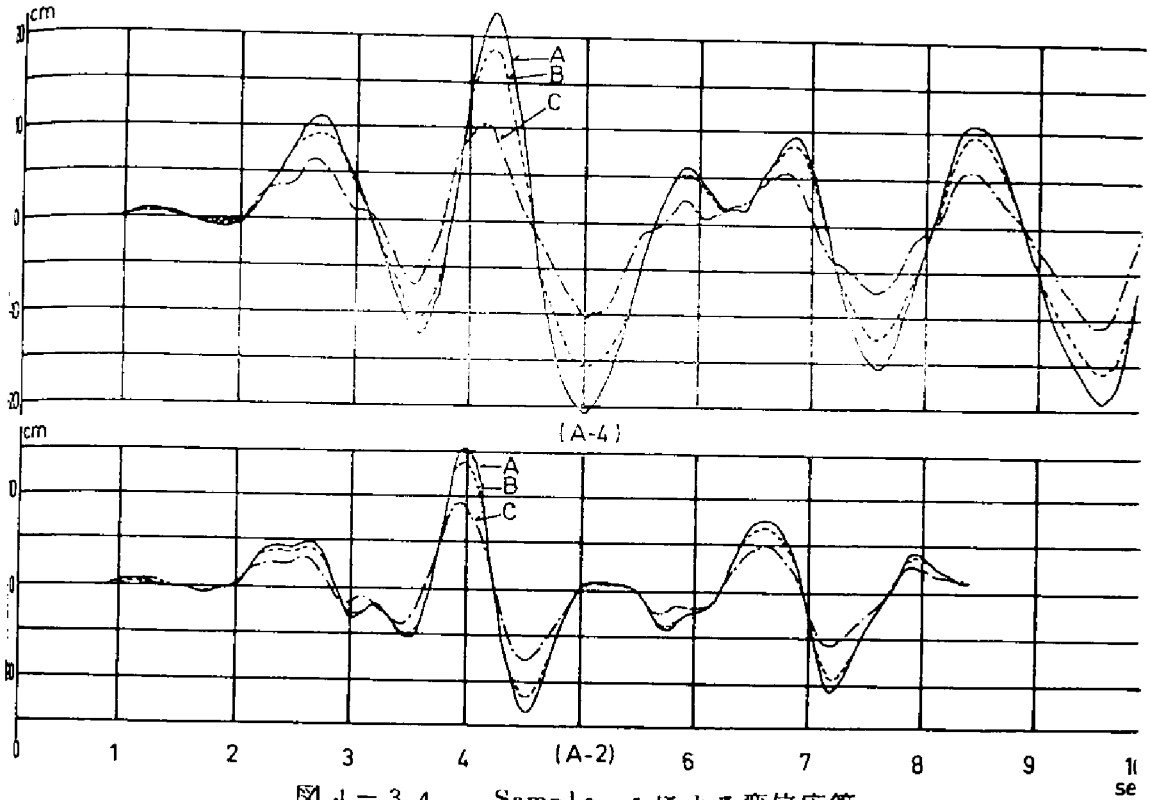


図4−34　Sample−1による変位応答

項目 / 資料	最大加速度 (cm/sec^2)	パワスペクトル密度のピーク周波数(Hz)	加速度の分散値($(m/sec^2)^2$)	図4・33におけるパラメタ t_1(sec) t_2(sec)	時間刻み (sec)
SAMPLE−1	300	1.45	0.616	2.0　15	0.02
SAMPLE−2	300	0.78	0.742	2.0　15	0.02

表4.4　人工地震波形の特性値

	応答最大水平変位 (cm)	最大変位の発生時刻 (sec)	最大応答主応力 (kg/cm^2)	最大主応力の発生点	$\sigma_{max}>1.0$ kg/cm^2 となる時間(sec)
A−4型式	23.7	4.18	4.2	上下流堤趾	5.2〜7.2
A−2型式	15.2	4.00	4.1	上下流通4/7・H	1.5〜2.5

表4.5　SAMPLE−1による応答の特性値

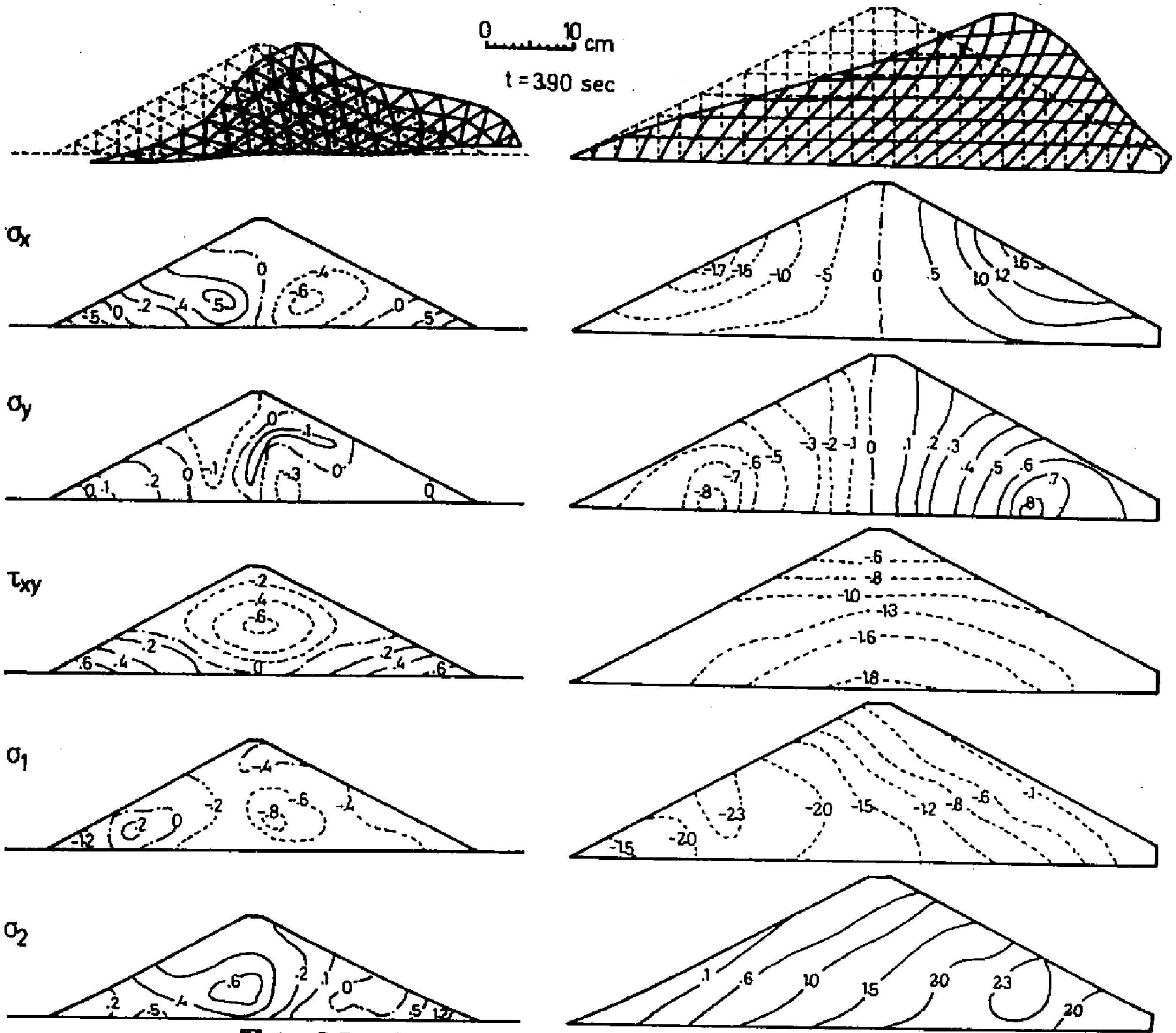


図 4―35 Sample―1 による応答応力分布（kg/cm²）

して解析した。

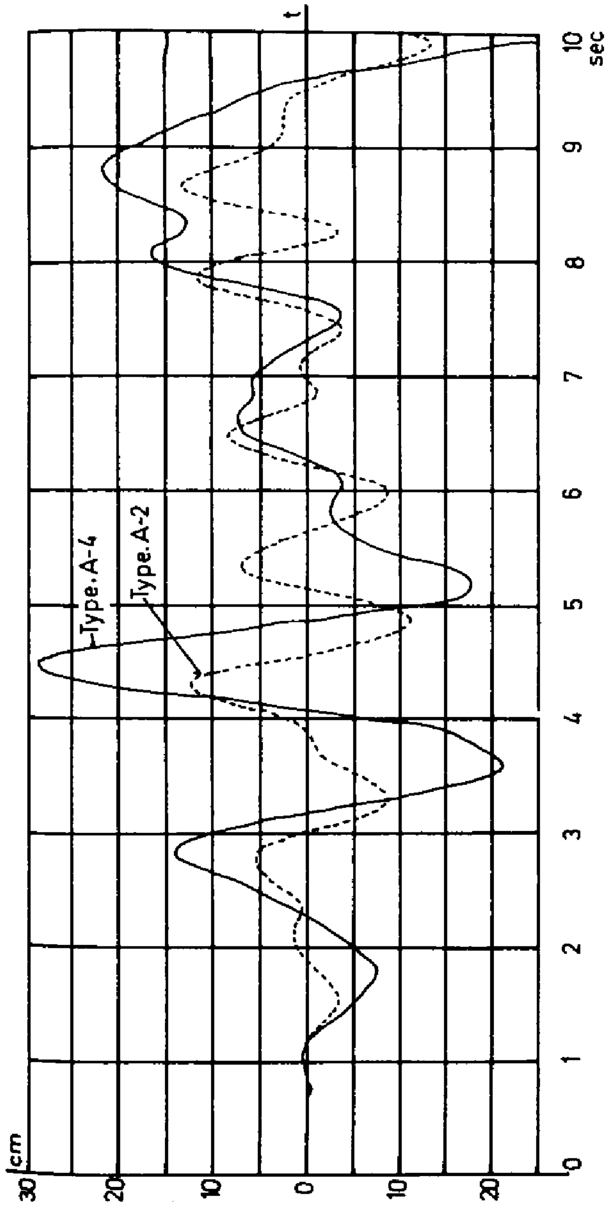


図4−36a　両モデルのクレスト水平変位応答

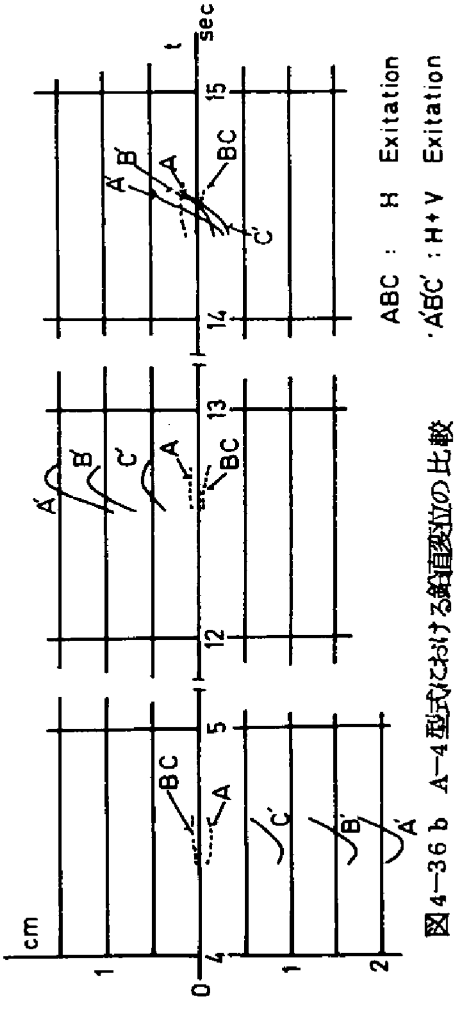


図4−36b　A−4型式における鉛直変位の比較

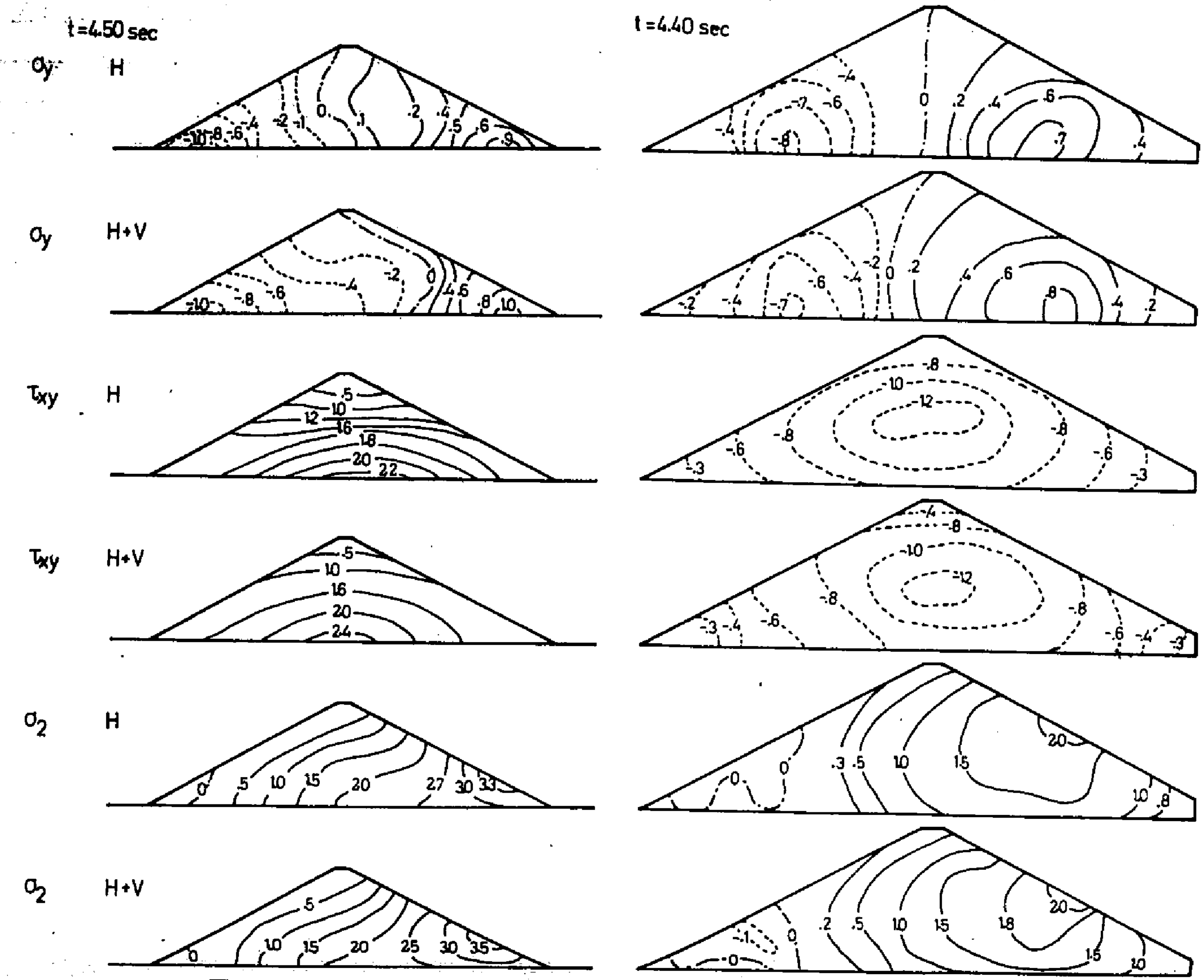


図4－37　鉛直加振がある場合の応力分布の比較（kg／cm²）

この型式においてクレストの水平変位は図4.・36aに示す形となり，加振加速度過程の分散値の大きいことから，変位応答も大となり最大ピークは t = 4.2 ～ 4.4 secで生ずる。また鉛直方向の加振が加わることによっては，水平変位応答は，ほとんど影響を受けないことを確認した。鉛直加振が加えられた場合と，これが作用しない場合の鉛直変位応答を比べると図4.36bに示すようになり，変位応答においては，鉛直変位が3～15倍になることがわかる。また鉛直加振による鉛直変位の増大の程度はA－4型式の方が著しい。しかし鉛直加振が加わることによる応力分布の変化は図4・37に示すようであり，ほとんど変化が認められない。わずかに最大主応力が鉛直加振が加わることによって増大することが認められるがこれは σ_y, τ_{xy} が，鉛直加振のあることによって増大するためである。このように鉛直加振の加わることによって大きな応力分布上の差が発生しない理由は，水平加振で生起される堤体の振動モードのうちには曲げモードがあり，鉛直方向のひずみをすでに誘起しており，これが堤体の二次元振動様式を大きく支配するためである。

4・2・5　堤体の極限つりあいの問題

以上の応答解析を通じて地震波を受ける堤体の時々刻々の応力分布が明らかになる，このことから材料力学の意味における極限状態への近接の度合を知ることができる。（3・4・1項参照）H. B. Seedはアースダムの耐震設計法と題する論文(79)において堤体の設計の当初から，この極限つり合い状態を想起すべきであるとしている。堤体の応力状態は，静的応力と動的応力の和として表示される。静的応力解析における応力分布は第三章に示した通りである。図4・31に示すEl. Centro地震による最大動応力の発生時における満水状態の主応力図は図4・38に示すものである。動的応力の加えられることにより主応力の方向は水平方向に傾斜し，その傾斜の程度は上流ほど大である。（もち論この状態は図4・31の変形図にも示すように堤体が下流側へ押し出されている場合であるからその逆の状態をも考える必要がある。）この傾向はまた両方のモデルについて共通である。また堤体内の主応力値は二つのモデルの同一レベルの点については大きな差がない。ここに示すような応力分布が堤体の安全性にどの程度の影響を与えるのかを調べるには3・4・1項の比：$s = r/d$ をみるのが便利である。たとえばA－4型式における上流堤シ部における比 s はEl. Centro地震の t = 2.44 secにおいては図4・39に示すように小円から

大円へと静的状態から動的応力の加わった状態へと変化し，このことにより比 s は 0.324 から 0.965 へと変化する。

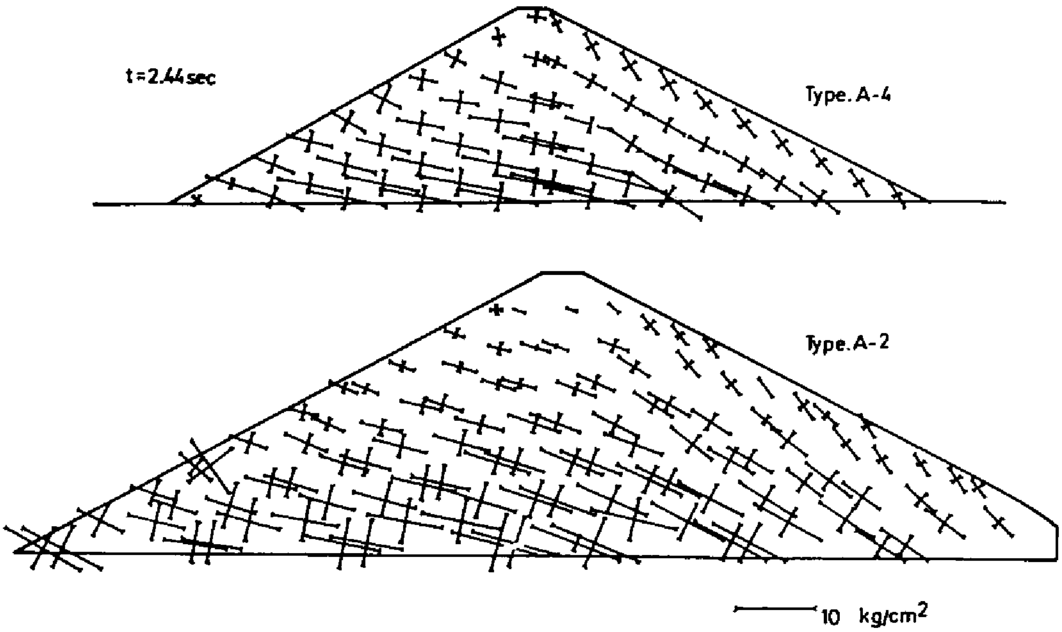


図 4—38 El．Centro 地震による合応力の主応力図（満水時）

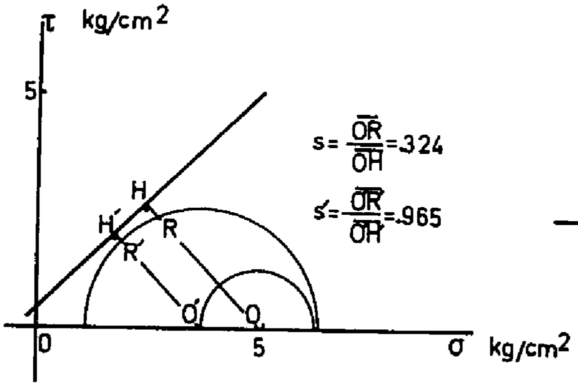


図 4—39 地震力による比 s の変化

図 4—40a 満水時合応力による比 s の分布

図 4—40b 動的応力による比 s の増加の分布

すなわちこの瞬間においてはこの点は極限つり合いの状態に非常に接近したことになる。このような考えを堤体内のすべての要素についておこなうと比sの分布は図4・40aに示すようになり，さらに静的状態からどれだけ比sが変化したかを示すと図4・40bのようになる。このことから上流側堤シ部および下流表面中央の比sの値は大きくなり，上下流表面での比sの値は小さくなる。特に上流側の堤シ部では極限つり合いに達し，材料の降伏することがわかる。この結果を図4・31の変形図と比較すれば引張ひずみと圧縮ひずみの集積する部分での比：sの値が大であることがわかる。また比：sの地震による変化をみればこれも上流堤シ部を中心とする一角に大きく集中しており堤体の中央部付近では比：sの減少する（安全側になる）部分のあることもわかる。
今考えているのはEl. Centro地震の最危険時であるから，ここに得た比：sの値は強震下での比：sについての一つの資料を与えていることになる。

4・2・6 動的震度の問題

我国において耐震設計上最も利用されることの多い，震度法は，構造物が剛体であるという仮定の上に成りたつものであるから，ここに示している動的応答解析とは異質なものである。

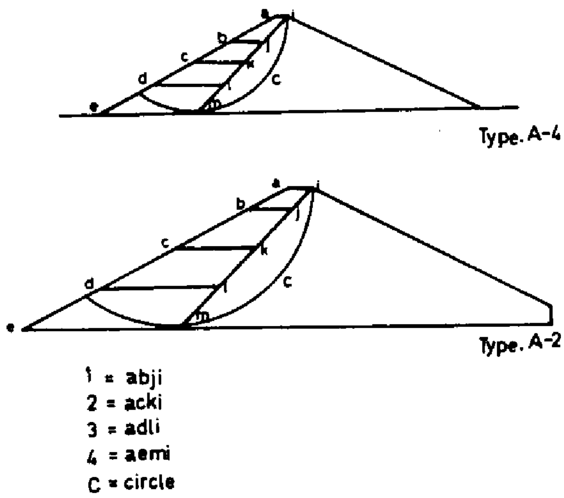


図 4—41 動的震度を求める5個のスベリ体

り，Housnerは[41]このような方法に対し，線形一自由度系に対する各種の強震記録に対する応答速度の最大値を，系の固有振動数に対してプロットし，速度応答スペクトラムと名付けた。この線図を用いて任意の構造物の固有周期と減衰率を決めると震度が決定できるという意味でこの方法は有効なものであった。

しかしフィルダムのような巨大な構造物を一自由度振動系で表現することには本来限界がある。すなわち堤体のどの部分にも，ある瞬間に等しい地震力が作用するという仮定そのものに限界がある。Seedは[78]こうした問題の解決のためにフィルダムの三角体せん断振動モデル表現を用いて，応答解析をおこなうことから，時々刻々における特定のスベリ円に対する水平地震力 $F_h(t)$ を応答解析によって得た加速度分布：$a(y, t)$ を用いて計算した。すなわち

$$F_h(t) = \sum_{y=0}^{H} m(y) \cdot a(y, t) \qquad \cdots\cdots\cdots (4 \cdot 39)$$

である。但し，y は高さの変数，$m(y)$ はすべり体Cにおける高さ y の微小重量である。この方法は一次元振動系であったが，有限要素法によって二次元振動を用い，同じ考えを適用したのはChopra[11]である。

本項ではChopraの方法によって図4・41に示す二つの形式の堤体について五個のスベリ体を定義し，動的震度をEl. Centro地震下で計算してみた。動的震度は次式で定義される量である。

$$K_h = \frac{F_h(t)}{W}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4 \cdot 40)$$

$$F_h(t) = \sum_i \left(a_i \cdot \sigma_x^i(t) + b_i \cdot \tau_{xy}^i(t) \right)$$

但し，W：スベリ体の全体の重量

$F_h(t)$：スベリ体に働く動的地震力の総和

i：スベリ線が切る要素の番号

a_i：第 i 要素を切るスベリ線の鉛直長さ

b_i：　　〃　　水平長さ　　である、

両型式の堤体における動的震度は図4・42に示す通りであった。この結果

から，堤体クレスト付近の小さなスベリ体ほど大きなスベリ体の震度よりも大きくなることがわかる。

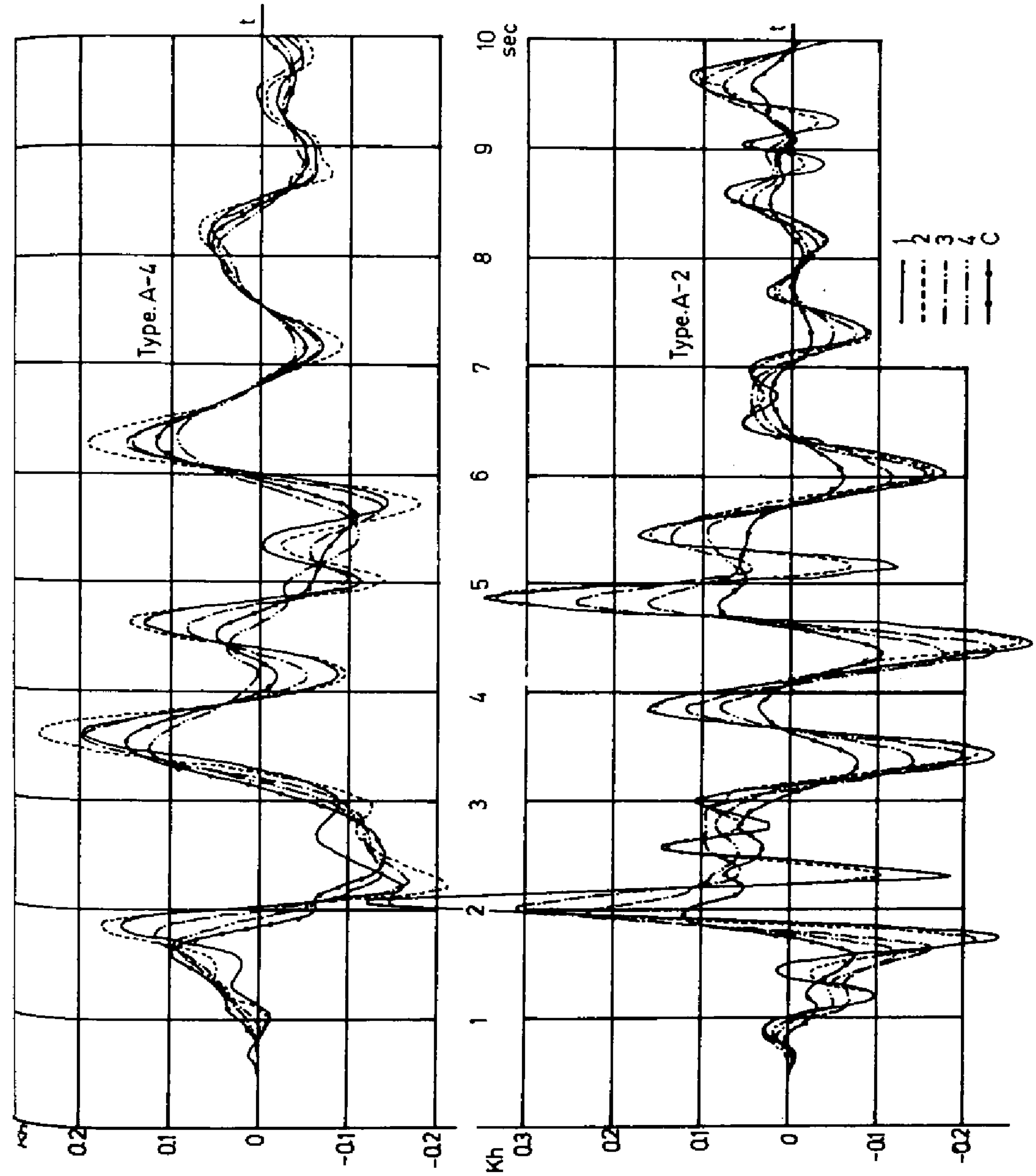


図4−42 El. Centro地震による動的水平震度

同一の地震波を受けても剛基礎上の堤体の方が地盤一堤体系よりも大きな地震力を受け，前者の最大水平震度は各々のスベリ体について0.48～0.10であり，後者のそれは0.25～0.13であり，前者の方が各すべり体についての震度の差も大である。また円形すべり体を考えても，クサビ型スベリ体をとっても大差はない。そしてこのようなスベリ体の震度を円形スベリ面法における震度として採用するのが合理的な方法である。動的震度の線図は，結局応答応力をスベリ面に沿って積分したものであるから動的震度の線図は応答応力の性質を知るものとしても利用できる。

4・2・7 結　　論

以上二次元の線形弾性振動系の応答を基礎としてフィルダムの耐震設計上，考えるべき諸問題を検討した。フィルダムの動力学的問題は複雑であるが，基本的な解の性質は現実のダムの正確な物性値を知ることにより完全に決定できる。上に得られた諸々の結果を要約すれば，次の通りである。

(1) 剛基礎上の堤体と，堤体と地盤の堅さの比が1：1.5の地盤一堤体系のモデルと比べると，応答の基本的性質は変位量，減衰機構において異なるが，生ずる内部応力の最大値には，大差がない。

(2) El. Centro地震や，Taft地震が二つの型式の堤体に作用した場合生ずる最大動的主応力は前者が2.0 kg/cm²，後者が1.3 kg/cm²であり，満水時における静的主応力の最大値の10～20％位である。

(3) 統計的性質が上の二つとはやや異なり，加速度強度が5～2倍程度強い，人工地震波加速度記録を作用させた場合の応答最大主応力は，両型式を通じて2.6～3.5 kg/cm²であった。

(4) 一般に動的応力の三応力成分（σ_x，σ_y，τ_{xy}）は，堤体の中央を中心とする対称な応力分布を示し，水平応力とせん断応力の増大となってあらわれる。応力の分布型は一般に剛基礎上の堤体と，地盤一堤体系とでは，異なる。

(5) 水平地震動の最大加速度の$1/4$の最大加速度を有する鉛直加振が水平加振と同時に堤体に作用した場合，応力分布の基本的性質は鉛直加振のない場合と大差なく，わずかな最大主応力の増大がみられる。

(6) 堤体の応力は，地震時，動応力と，静応力の和で得られ，一般に動的応力が作用することにより，堤体の一部に極限つり合い状態に接近する部分のあることがわかった。動応力の静応力に対する効果が明らかになった。

(7) 動的な震度をすべり面法などに適用するべきであるが，二つのモデルにおけ

る動的震度が明らかにされた。このことから，クレスト付近の小さなスベリ体ほど震度が大きく，堤体のどの部分にも等しい地震力が作用するという震度法の仮定は修正さるべきことが確認された。

第5章　すべり面法と応力解

2.4節にも述べたように，すべり面法はフィルダムの設計上最も有効視され，多く用いられている方法であり，ダムだけでなく盛土，斜面，基礎構造物の安定性について一つの指数を与える簡便且つ有効な方法なのである。前章までに示した解析的な方法によっては，結局堤体の種々な状況に対応する応力分布というものが明らかにされ，それはすべり面法とは異質なデータを設計者に与えるものである。

設計者が最も最初に知りたいデータは，やはり安全率という概念で示される一つの指数であり，そのことは必らずしも意味のないことではないと考える。そこで応力解と，すべり面法との関連を明らかにしてみることを試みた。

§5.1　応力解と円形すべり面法

もともといわゆるすべり面法というものも，堤体なり，斜面なりを構成している材料が連続体であって，その変位の連続性があるすべり面に沿って満足されなくなるという状況を想定しているものであるから，本来連続体の力学である，弾性論や塑性論にのっとって考え出されねばならないはずである。言いかえれば，すべり面法は非常に簡素化された力関係で，材料の降伏の状件を導入したものである。たとえばスライス法(39)というものは一般に，隣接するスライス鉛直面に作用する鉛直応力や，せん断応力の作用を無視したり，すべり面上に作用する力を，その直上のスライスの自重の成分であるとしている点に，力学的条件の簡素化があるわけである。

このような点からスライス法を改良したものとして修正フェレニウス法や，最近ではMorgenstern-Priceの方法(67)などがある。

有限要素法の適用によって，すべり面上に作用する力が正確に決定されるならば，この値によって得られた安全率というものが厳密な意味での安全率になるであろう。

本節ではこうした点から ① 応力分布から円形すべり面法と同じ考えで安全率を求めてみること， ② 3.4節におこなった解析から得られる比：sの逆数をすべり体に適用することの二つの方法を実施してみた。

番号	名称	内部摩擦角 (φ)	湿潤粘着力 (t／m²)	飽和粘着力 (t／m²)	乾燥密度 (t／m³)	湿潤密度 (t／m³)	飽和密度 (t／m³)	水中重量 (t／m³)
①	ロックゾーン	40°	4.0	2.0	1.70	1.90	2.05	1.05
②	トランジション	35°	5.0	2.0	1.60	1.80	2.02	1.02
③	コアゾーン	15°	6.0	8.0	1.32	1.79	1.82	0.82
④	基盤部	45°	4.0	2.0	1.72	2.00	2.10	1.10

表 5.1　堤体各部の物性値表

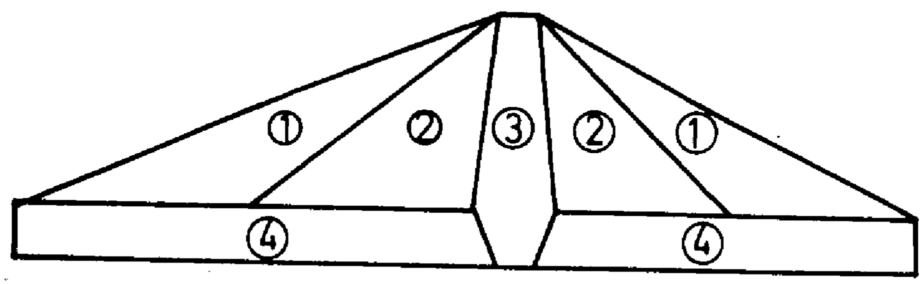


図 5.1　堤体各部の諸物性値

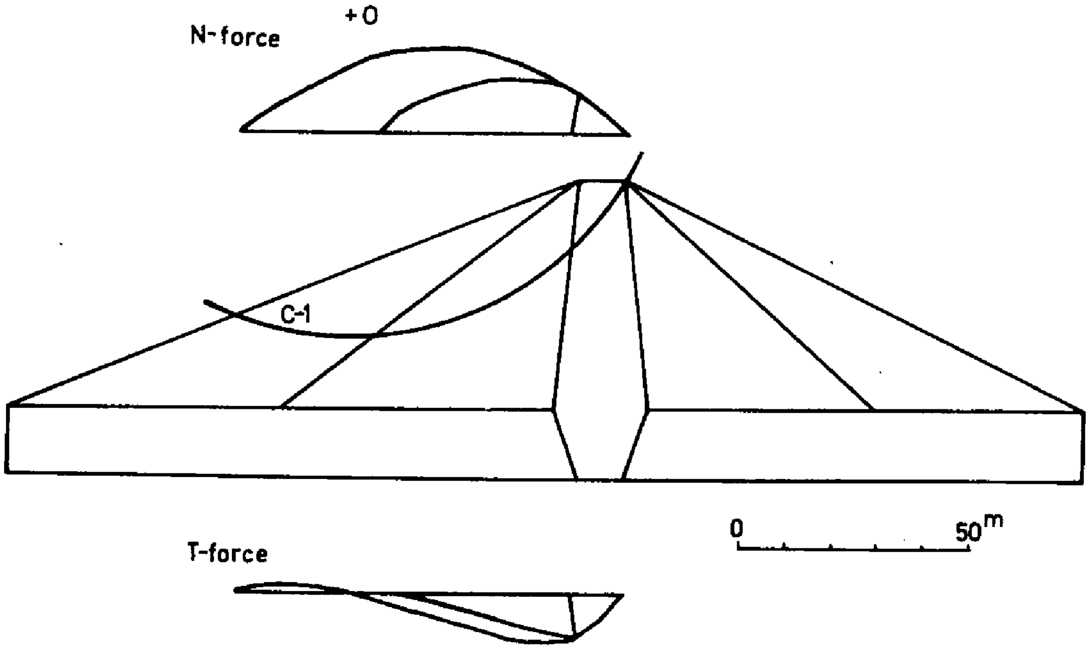


図5.2　すべり円１に対するＮ一力，Ｔ一力図

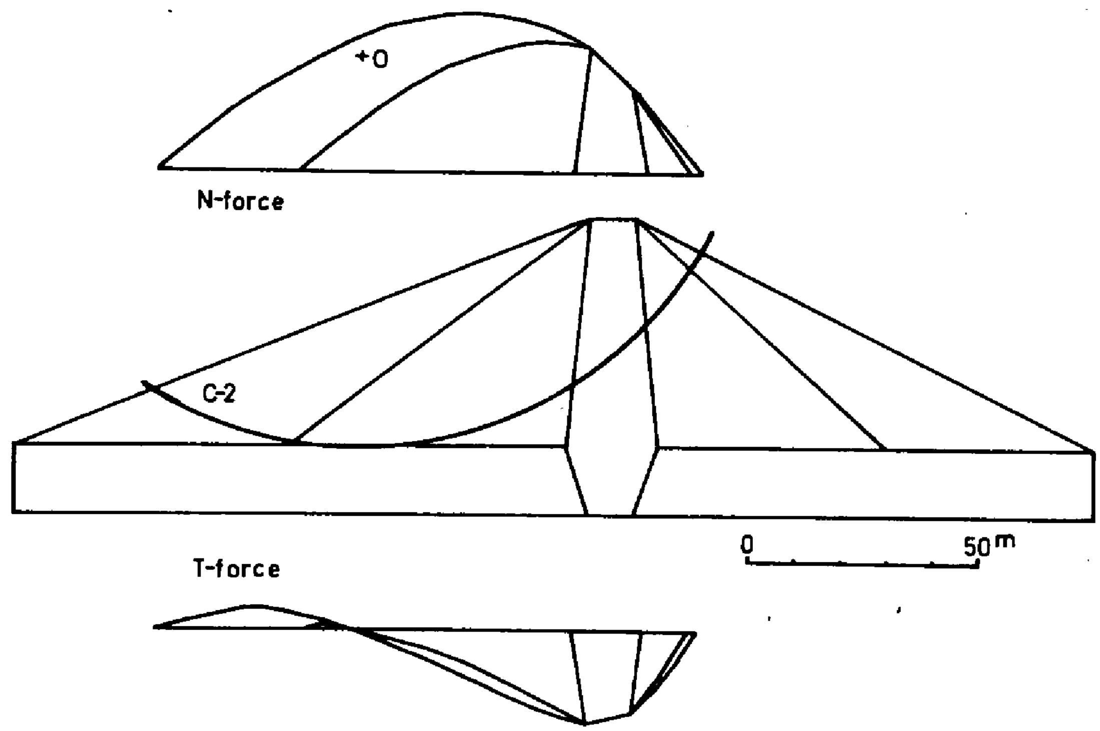


図 5.3　すべり円 2 に対する N－力，T－力図

	ゾーン	面積 m^2	単位重量 t/m^2	重量 t	Φ	tanΦ	NtanΦ	c (t/m^2)	L	cL (t)	NtanΦ+cL	
N力	コア	55	1.79	99	15°	0.268	26	6	19	111	137	ΣN·tanΦ+cL =1970
	トランジション	360	1.80	648	35°	0.700	453	5	49	242	695	
	ロック	633	1.90	1200	40°	0.839	1005	4	33	132	1137	
T力	コア	60	1.79	108								ΣT =648
	トランジション	200	1.80	360								
	ロック	95	1.90	180								

表5.2　円1のすべり安全率 SF_1 ＝3.04

	ゾーン	面積 m^2	単位重量 t/m^2	重量 t	Φ	tanΦ	NtanΦ	c (t/m^2)	L	cL (t)	NtanΦ+cL	
N力	コアア	300	1.79	538	15°	0.268	144	6	21.5	129	273	ΣN·tanΦ+cL =4170
	トランシジョン	1245	1.80	2240	35°	0.700	1564	5	78.0	390	1955	
	ロック	1120	1.90	2130	40°	0.839	1790	4	38.0	152	1942	
T力	コア	245	1.79	439								ΣT =1278
	トランジション	480	1.80	865								
	ロック	−125	1.90	−23.7								

表5.3　円2のすべり安全率 SF_2 ＝3.29

5.1.1　すべり面法に対応する安全率

図5.1および表5.1にB—型式の一般的なフィルダムに対して，すべり安全率を求めるための諸数値を示した。ここに用いた諸数値は，3.2.1の解析に用いたのと同一の数値である。

空虚時，地震力なしの場合のすべり安全率を二つのすべり円について，在来の円形すべり面法[70]で求めたN－力図，T－力図を図5.2，図5.3にそれぞれ示す。なお後に示す応力解からの数値と対比するために，コア内部に発生する間隙水圧の分布を考えないことにする。それぞれのすべり円に対する安全率は表5.2，表5.3に示すようになり，それぞれ

$$SF_1 = 3.04 \qquad SF_2 = 3.29$$

となる。

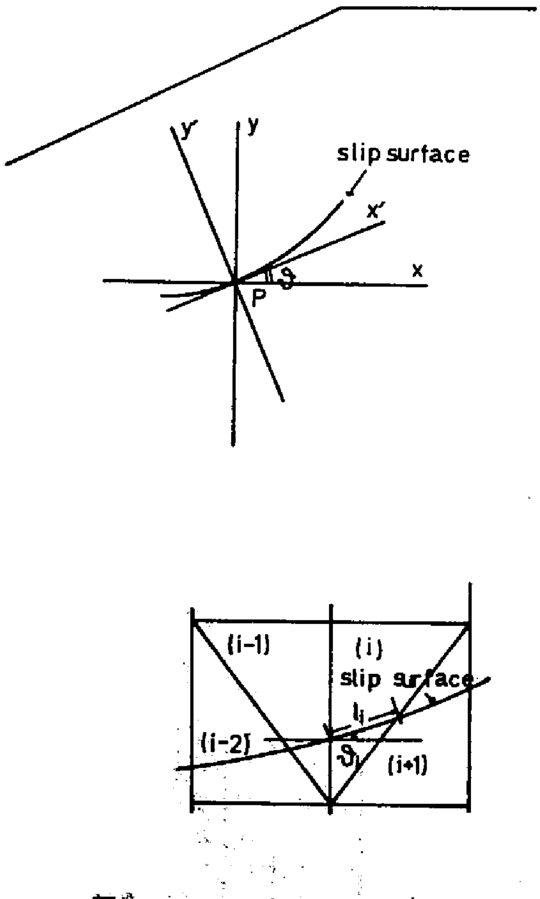


図5.4　すべり面上の座標と有限要素

ところで堤体内の任意のすべり面上での応力値が有限要素解などによって明らかになっている場合に，いわゆる接線方向力と，法線方向力は，すべり面上に沿った方向でのせん断応力と，鉛直応力を積分したものに等しくならなくてはならない。すなわち図 5.4 に示すように一般の座標系 $x-y$ に対し，すべり面上の一点Pの接線の成す角度が θ である場合に，二次元応力変換公式[91] によって

$$\sigma = \sigma_x \cdot \sin^2\vartheta + \sigma_y \cos^2\vartheta + 2\tau_{xy}\cos\vartheta \cdot \sin\vartheta$$

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x)\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta + \tau_{xy}(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta) \quad \cdots\cdots\cdots (5.1)$$

でありこれはすべり面の接線 x' と法線 y' 系に作用する鉛直応力とせん断応力である。この応力を用いるとすべり面法で定義される法線方向力：Nと接線方向力：Tは次式で決定できる。

$$T = \int_L \tau_{x'y'} \cdot ds \quad : \quad N = \int_L \sigma_{y'} \cdot ds \quad \cdots\cdots\cdots (5.2)$$

ただし ds は微小なすべり線上の弧であり，Lはすべり線全体に渡る線積分であることを意味している。（ 5.1 ）式（ 5.2 ）式で定義されるN，T力を用いると，いろいろなゾーンについての最大せん断抵抗力と，粘着抵抗力を集計することにより，安全率が次式で決定できる。

$$SF = \frac{\sum N_i \cdot \tan\phi_i + c_i \cdot L_i}{\sum T_i} \quad \cdots\cdots\cdots (5.3)$$

3.2.1 項におこなったB－型式の堤体における空虚時の応力解析結果（図 3.25）を用いて（ 5.1 ）式～（ 5.3 ）式を実行すると，安全率が決定できる。このとき次のことを仮定している。

(i) すべり線が通過する各要素毎に，この線分上での応力値は一定である。

(ii) すべり線が一つの要素によって切りとられる部分は，直線であるとする。
（図5.4 参照）

これを用いるとすべり線が通過する要素の総数を n とするとき，第 i 要素内の折線で近似されたすべり線の，水平となす角を ϑ_i ，すべり線の長さを l_i

とし，さらにこの要素内の三応力成分を σ_x^i ，σ_y^i ，τ_{xy}^iとすると，（5.1）式を用いて各要素内の応力が変換される。これを σ_i ，τ_i と書けば，

$$T=\sum \tau_i \cdot l_i \quad : \quad N=\sum \sigma_i \cdot l_i \qquad \cdots\cdots\cdots(5.2)'$$

で接線力，法線力が決定できる。

図5.1の二つのすべり円，円・1と円・2に対してこれを実行すると，それぞれ安全率は円・1に対して $SF_1=2.96$，円・2に対して $SF_2=3.70$ と得られる。

すなわち円・1に対しては円形すべり面法から導かれる安全率とほぼ同一の安全率が得られ，円・2に対しては円形すべり面法から導かれるのより約12%大きな安全率が得られるわけである。

この二つの異なった方法によって得られる安全率の相異が何に帰因するかを考えると，結局N力とT力の分布形の相異にあるとしか考えられない。そこで図5.5にすべり面法と応力解によるすべり面上の鉛直応力 σ とせん断応力 τ をすべり面上に沿って表示してみた。円形すべり面法から得られる応力は図5.2，図5.3に描かれている線図の縦距にそれぞれ対応する単位重量を乗ずることによって得られる量である。

図からN力の分布については，両者のすべり円について大きな相異はみられないのだが，T力については解析結果の示す値の方が全体的に小さいことがわかる。この傾向は特に円・2について顕著である。T力とは結局せん断応力であるから実際のすべり面上に作用するせん断応力は，スライス法による（スライス側方間の力のつり合いを無視した場合）せん断応力より一般に小さいものであるということができる。

従ってこのことから二次元の応力分布から得られる安全率は一般に円形すべり面法によって得られる安全率より大となり，その傾向はスライス高さが高いものほど（深いすべり体ほど）顕著になる。すなわち円形すべり面法によって与えられる安全率は，現実よりも危険側の推定をしていることになる。この原因は結局，すべり面上のせん断応力の決定のし方にあるのであって，安全率に与えるせん断応力分布の影響の大きいことを示している。この点については他のいろいろな事例が報告されている。[93]

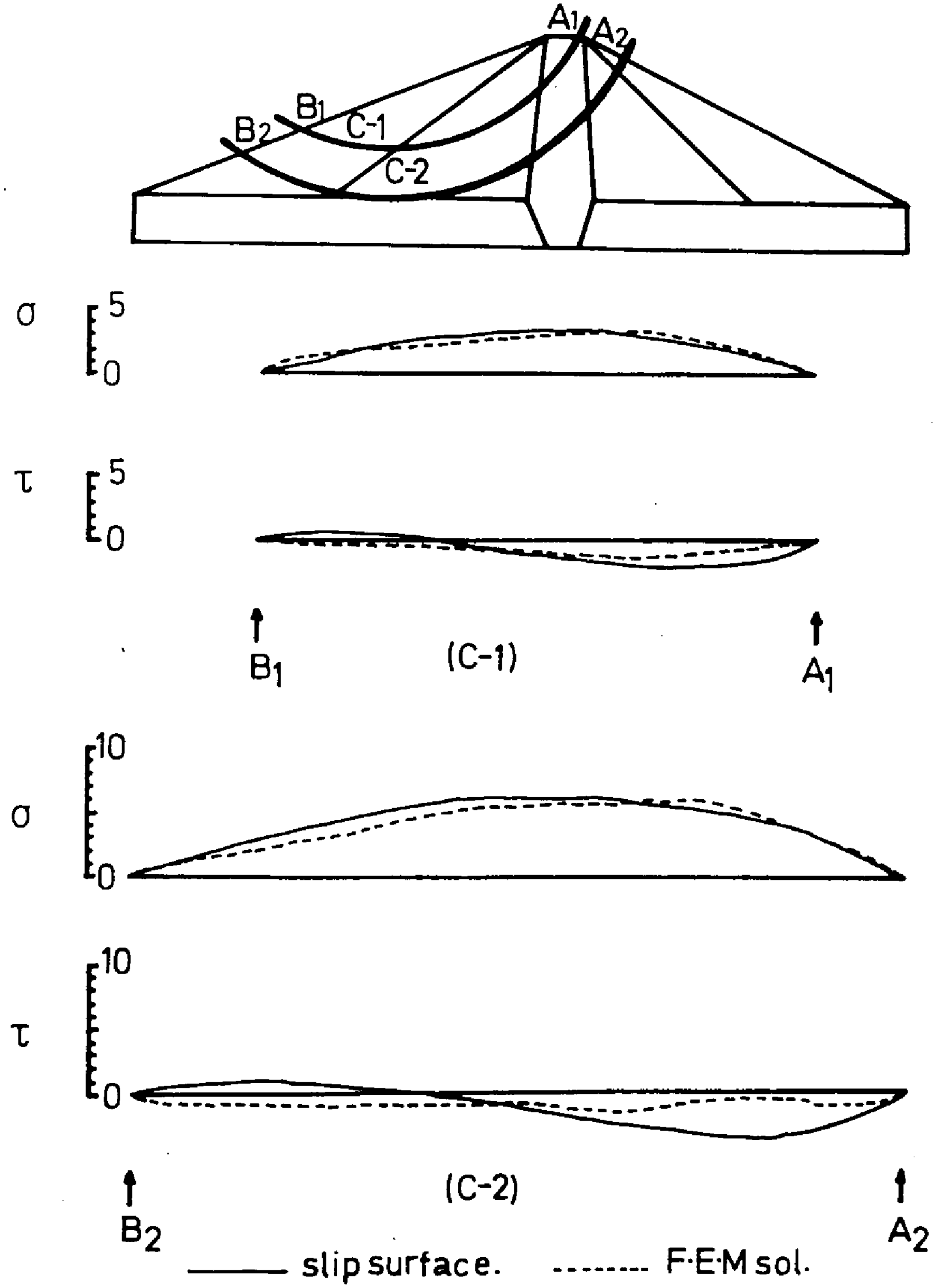


図 5. 5　すべり面上の鉛直応力とせん断応力の分布　　([illegible])
(すべり面法と応力解の比較)

5.1.2 比：s から導かれる安全率

次に安全率を応力分布から決定する第二の方法を示す。この方法は3.4節に示した考え方をそのまま応用すれば良いのであって，ただ一般の安全率という概念に近ずける表現をとろうとするなら，同節で用いた比：s という量の逆数を考えれば良い。ここでは仮にこの量を安全係数と名付け

$$m=\frac{1}{s}=\frac{d}{r}=\frac{2\cdot\sin\phi\cdot(c\cdot\cot\phi+(\sigma_1+\sigma_2)/2)}{\sigma_1-\sigma_2} \quad \cdots\cdots\cdots (5.4)$$

で定義することにする。

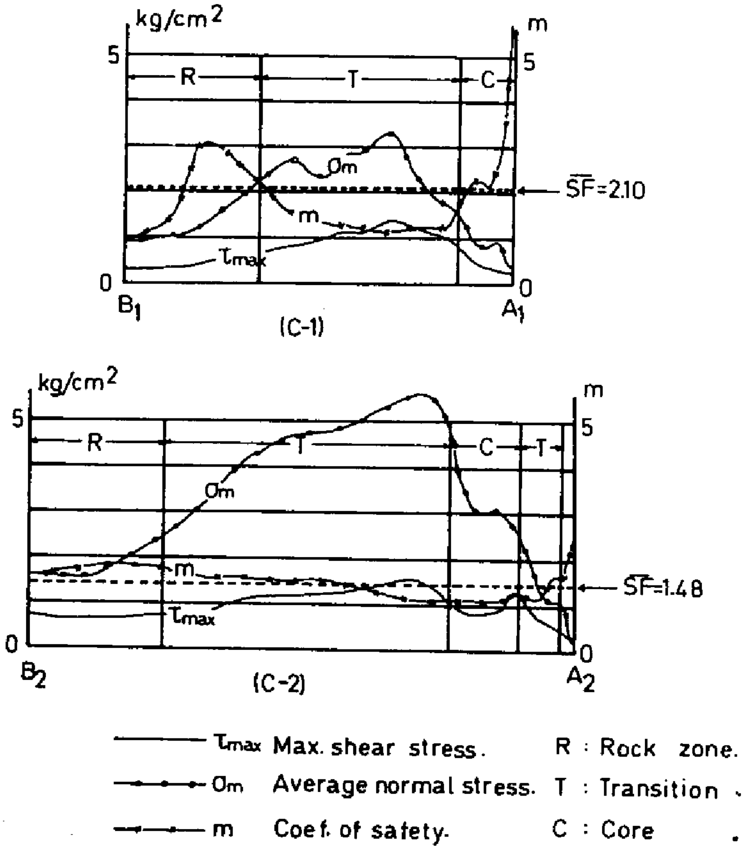


図5.6 すべり面上の最大せん断応力，平均主応力，および安全係数の分布

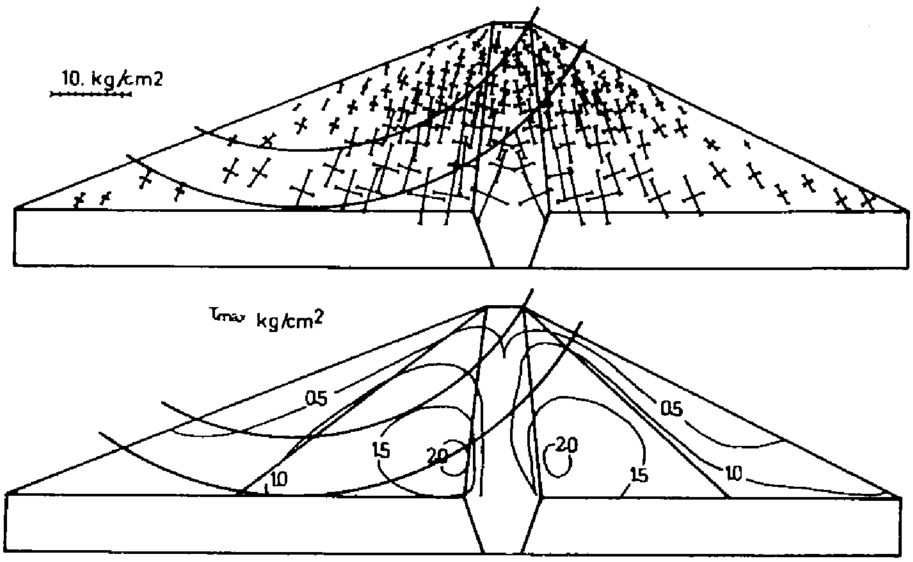


図 5. 7　堤体内の主応力と最大せん断応力の分布

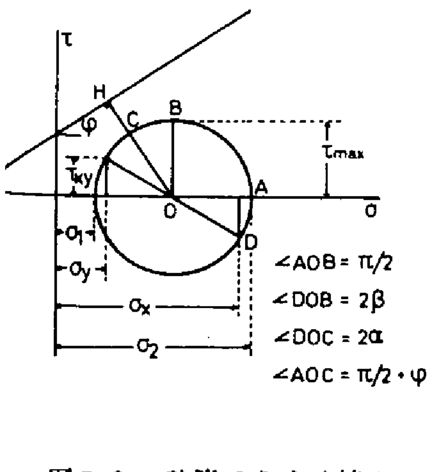


図5. 8　破壊はうらく線と
モール円および
最大せん断応力

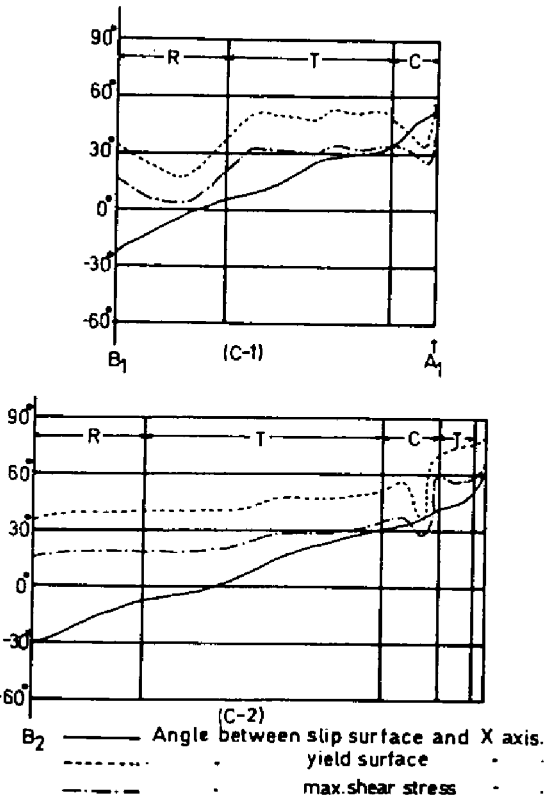


図 5. 9　破壊面と最大せん断応力の発生面の
関係

3.4節におこなった比：sの分布をB－型式の堤体について，すべり線上で求めると図5.6のようになる。すべり線上でのmの値をこの線に沿って積分するといわゆる安全率に相当する量が定義できる。（5.2）′式と同様に，各要素によって切り取られるすべり線の長さを l_i とすると，安全率 $\overline{SF}$ は

$$\overline{SF}=\frac{\sum l_i\cdot m_i}{\sum l_i}=\frac{\sum l_i/s_i}{\sum l_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.5)$$

式で得られる。(73)

もち論ここに得た安全率 $\overline{SF}$ は先のすべり面法における考えかたから導かれたものとは原理的に異なったものであるから両者の安全率という数値を同列に比較して議論することはできない。しかし今回の方法によっては，円・1の安全率のほうが，円・2の安全率より大きいという点が本質的にすべり面法と異なる点である。

その理由はすべり面上の安全係数の分布を示した図5.6からもわかるように円・2の方が安全係数の分布が一様に小さいことにある。

また図5.6にはmを決定する主要な要素である最大せん断応力と，主応力平均のすべり面上での分布を示している。

すべり面法ではすべり面上での危険度の分布について考えることができず，一個のすべり体について総計的なものが示され得るわけであるが，図5.6に示すように，今取りあげた例では，すべり面の底部が安全係数が小さいということがわかる。最大せん断応力は主応力の方向と45°をなす面に作用するから，その方向は主応力図から想定できる。したがって一般には，すべり面底の角度と，最大せん断応力の方向とは一致しないから，このすべり円について破壊が生ずるとは言えないわけである。また破壊面が生ずる角度は理論的には主応力面と $(\phi+\pi)/2$ なる角度をなす面であるから，この面が最も危険な面であることになる。（図5.8参照）

いますべり面底とx軸のなす角度を θ，破壊面とx軸のなす角度を α，および最大せん断応力面とx軸のなす角度を β とすると，これ等の角度のすべり線上での分布は図5.9に示すようになる。

図から，当然 β と α とは一定差の同一変化をしていることがわかる。そして θ と β とは，まったく異なった変化をしている。θ と α，又は β が接近するのは，すべり面の底部，すなわちすべり面の右方，トランジション部分において

である。また，図5.6から，安全係数の分布も，平均安全率であるところの$\overline{SF}$よりもmが小さくなっているのは，やはりこの部分に於てであるので，この部分が最も危険度の高い部分であるといえる。

ここに示した方法は，すべり面法が，すべり面上のどの部分も同じ危険度を有しているという仮定に基いていることに対する一つの見解を示し得るものであって，こうした観点から別の意味における安全率を定義した。

§5.2 地震時の安全率

地震時の安全率については最も議論の多い部分であって，特にすべり面法に震度法を用いる場合に，安全率が低く見つもられるという事が指摘されている。(21)

ここでは第四章におこなった動的解析をもとにして，安全率の誘導を試み，円形すべり面法から得られる値と比較してみた。

例にとりあげたダムは，A－4型式の堤体であって，地盤－堤体系として表現された深山ロックフィルダムのモデルである。すべり円はクレストを通り基盤部に接する円である。（図5.10参照）

注意すべきことは，このダムが表面シャ水型のロックフィルダムであることから，満水位状態の安全率を求めるための合理的な在来の方法が存在しないことである。浸透水が堤体に充満している場合には，土の水中重量，飽和重量を用いることによって，満水時の安全率を求めることができるのだが，この型式のダムでは，この考えは不適当である。

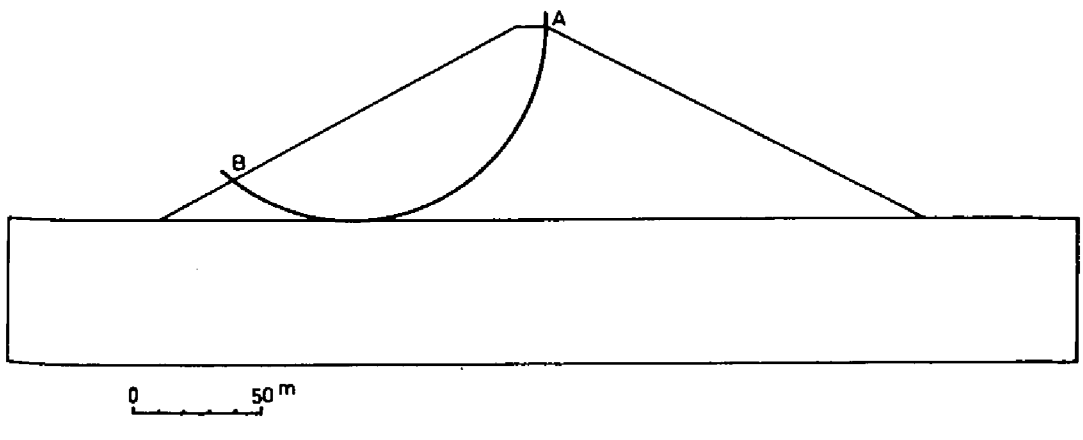


図5.10　A－4型式におけるすべり面

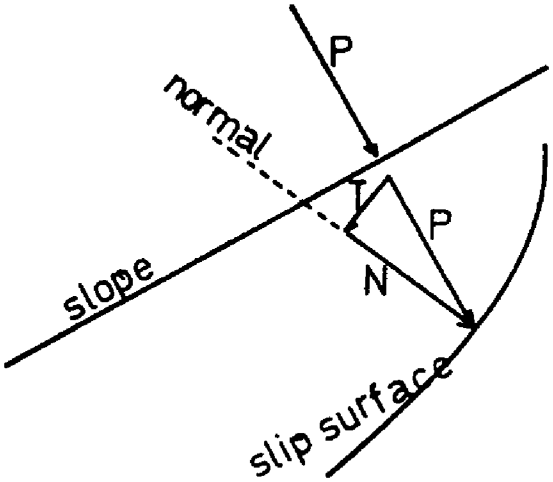


図 5.1 1　水圧力の分解

	弾性係数 (t/m²)	単位体積重量 (t/m³)	ポアソン比	内部摩擦角 (度)	粘着力 (t/m²)
堤体	1 7,0 0 0	1.8	0.4	4 3°	4.0
岩盤 (d = 5 2.5)	2 5,5 0 0	1.8	0.3	—	—

表 5.4　A－4 モデルの物性値

空虚時地震力なし

	ゾーン	面積 (m²)	単位重量 (t/m³)	重量(N,T) (t)	tanΦ	NtanΦ	c	L	cL (t)	ΣN·tanφ+cL	SF
N一力	堤体	3800	1.8	6840	0.933	6382	4	166	664	7046	$SF=\frac{\sum N\cdot\tan\phi+c\cdot L}{\sum T}=3.1$
T一力	堤体	1260	1.8	2273	$\sum T$						

満水時地震力なし

N一力	堤体	3800	1.8	6840	0.933	6382	4	166	664	10256	$SF=\frac{\sum N\cdot\tan\phi+c\cdot L}{\sum T}=30.8$
	満水位	3440	1.0	3440	0.933	3210					
T一力	堤体	1260	1.8	2273	$\sum T=333$						
	満水位	-1940	1.0	-1940							

空虚時水平震度＝0.15

N一力	堤体	3800	1.8	6840	0.933	6382	4	166	664	7311	$SF=\frac{\sum N\cdot\tan\phi+c\cdot L}{\sum T}=2.2$
	地震力	158	1.8	284	0.933	265					
T一力	堤体	1260	1.8	2273	$\sum T=3286$						
	地震力	568	1.8	1013							

満水時水平震度＝0.15

N一力	満水堤体		1.8	10280	0.933	9591	4	166	664	10520	$SF=\frac{\sum N\cdot\tan\phi+c\cdot L}{\sum T}=7.8$
	地震力	158	1.8	284	0.933	265					
T一力	満水堤体		1.8	333	$\sum T=1346$						
	地震力	568	1.8	1013							

表 5.5　A－4 モデルのすべり安全率

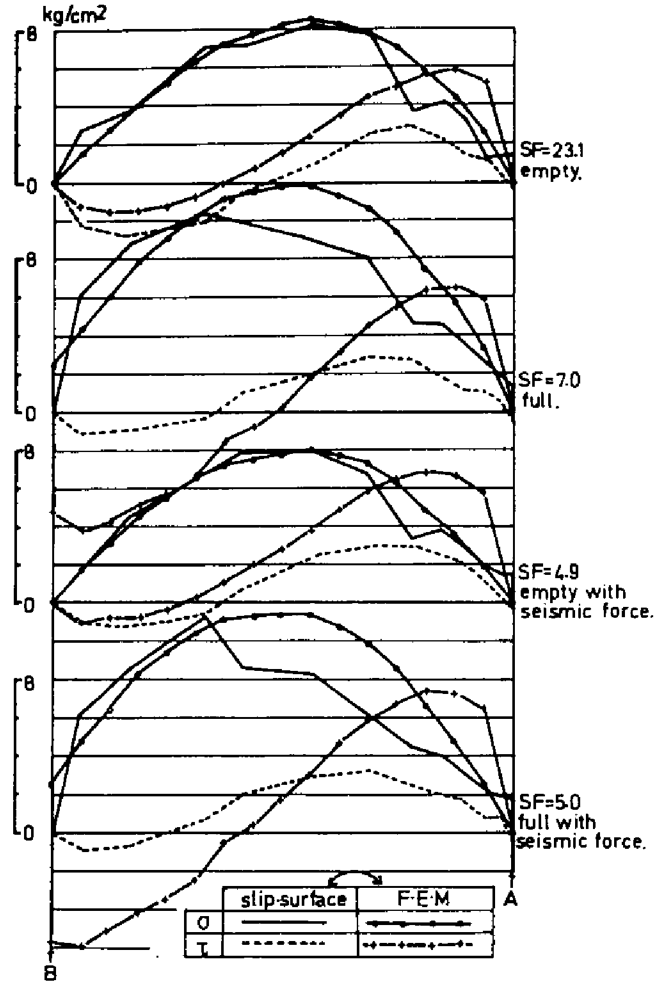


図 5. 1 2　すべり面上の σ と τ の分布

そこで次のような仮定，すなわち〝堤体の表面上の 1 点に作用する水圧力はその大きさと方向を変えずに，すべり面に達する〟を設けた。（図 5. 1 1 参照）このように考えると堤体の表面に作用する全水圧のすべり面上への寄与を推定できる。厳密には上に設けた仮定は正しくはないのだが，総計的な水圧の作用を評価する上では，特に不都合ない。

A － 4 型式の諸材に用いた物性値を表 5. 4 に示し，表 5. 5 にすべり安全率を円形すべり面法によって求めた結果を示す。

ここで，用いた水平震度＝0. 1 5 という数値は，4. 2. 6 項に得た，A － 4 型

式の堤体の，このすべり円に対する動的震度の計算結果から得たものである。（図4.4 2参照） すなわち，この震度は在来の震度法から決定した数値を用いているのではなく，動的な応力解析と比較し得るものとして用い得る震度として，El.Centro 地震における最大震度が約0.1 5であるという結果をすでに得ていたのである。

表5.5に示す円形すべり面法から得たすべり面上の鉛直応力：σとせん断応力：τの分布をそれぞれの場合について図5.1 2に実線と点線で図示した。

この結果から言えることは水圧の作用がすべりを押さえる作用をすることになるので，満水時の堤体の安全率は非常に大きくなるということである。よってこの円形すべり面法によっては，最も安全率の低下するのは，空虚時に地震力が作用した場合であって，このときにはＳＦ＝2.2となり，満水時，地震力のない場合は，ＳＦ＝３ 0.8にも達する。

上の結果が果して合理的な堤体の安全率を与えているかどうかには，非常に疑問がある。特に水圧力の作用のし方の正確な推定が行なわれているかどうかという点が疑問である。これを解決するには，やはり応力解を用いる以外に明解な方法はないであろう。

前項5.1.1に述べた方法を用いて対応する安全率を求めると，すべり面上の鉛直応力：σとせん断応力：τの分布は図5.1 2の○印と×印で示すようになり，また，安全率もそれぞれ図中に示したように得られた。（この場合地震時の応力分布はEl.Centro 地震がＡ－４型式の堤体に作用した場合の最大主応力の極大値発生時刻の応力分布（図4.3 1）から得たものである。） すなわち，このことによっても，応力解から得た安全率と，すべり面法による安全率の示す値が大きく異なることが認められる。図5.1 2のσ，τの分布形を比較すれば，すべり面底がクレストに近い部分において，σ，τが応力解と，力の分解から得たもの（すべり面法に対応）とが大きく異なってくる。この部分では空虚時，地震力のない場合，応力解から得たのは３ ０～４ ０％程，力の分解から得た値より小さく，τの値は応力解から得たものが，力の分解によるものの，約半分位の大きさでしかない。このことが両者の安全率の大きな相異の原因を作っている点なのである。

また全体を通じてすべり面法はτを過大に評価することが，ここでも又示されている。特にすべり面が堤底面～堤体上流面の部分では，τの符号から，すべりを止める方向に作用するものではあるが，それほど大きな値ではない（５

１０ｔ/㎡ 程度）のに対し，すべり面法によっては，すべりを止める方向に作用するせん断力の大きさは５０～６０ｔ/㎡ で，非常に大である。この現象は，水圧の効果をとり入れた時すべり面法において特に著しくなる。しかし応力解からみたように水圧の作用によって生ずる，すべりを止める方向でのせん断力の発生は，それほど大きくはない。また，すべり面が堤底面付近では，応力解による σ と円形すべり面法による σ とは比較的良好な一致を示している。

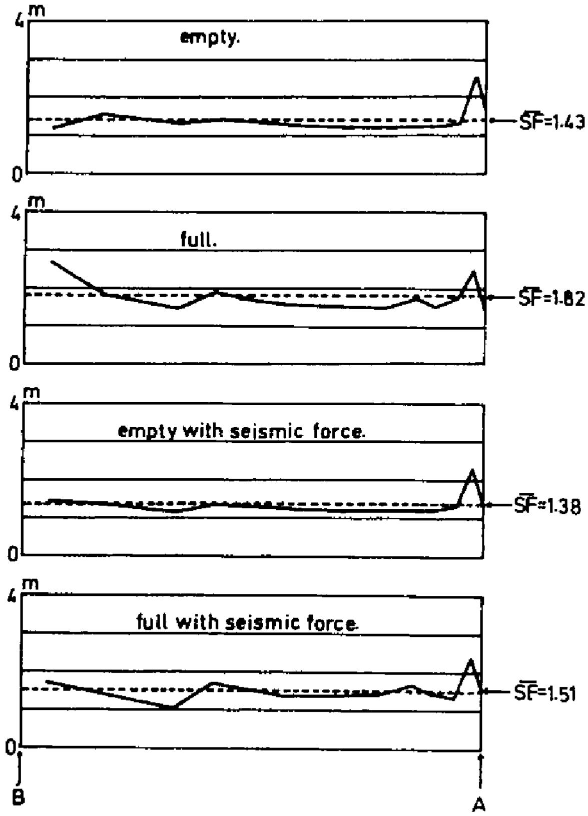


図５.１３　すべり面上の安全係数ｍの分布

方法 ＼ 場合	空虚	空虚地震	地震による低下率（%）	満水	満水地震	地震による低下率（%）
円型スベリ面法	3.1	2.2	29	30.8	7.8	75
応力解	23.1	4.9	79	7.0	5.0	29
安全係数	1.43	1.38	3	1.82	1.51	17

表５.６　各種の方法による安全率の比較

いずれにせよ，せん断応力の分布が応力解とすべり面法とでは大きく異なるために，応力解によっては，最も安全率の低下するのが，空虚時，地震力のある場合でＳＦ＝ 4.9であり，満水時，地震力のある場合にも，この値は大きく変化しない。また空虚時，地震力のない場合がＳＦ＝２３.１で最も大きい。

このようにして応力解から得られる安全率は，すべり面法と同様の形式で得られる。

次に前項5.1.2で述べた，比：sから求められる安全率$\overline{SF}$を知ることも興味深い。これは既に4.2.5項でその方法を示しているから結果だけを示す。

すなわち各状態に対応する安全係数：mのすべり線上での分布を示すと図5.13のようになり，これにすべり面長さによる重みを付けて平均すると安全率$\overline{SF}$が得られる。

図からこの場合すべり線上の安全係数：mの変動は，どんな場合にも，それ程大きくはなく，すべり面がクレスト部分に入った部分でmの値が大となる傾向を示している。

安全率：$\overline{SF}$は水圧の作用によって増大し，地震力の作用によって減小するという傾向を示している。基本的には，これは円形すべり面法と同じ傾向である。

またこの場合にも，すべり面の低い部分で平均の安全係数よりも，mの値が小さい。

以上三種類の方法で得られた安全率の値を整理すると表5.6のようになる。これ等を比較すると，結局応力解による方法と，安全係数による方法とは，同じデーターを用いながら，安全率の定義のし方が異なるために安全率として異質な傾向を与えている。安全係数によっては，最高$\overline{SF}$＝1.８２から最低$\overline{SF}$＝1.３８までの狭い範囲内でしか安全率が変化せず，地震力の作用による安全率の低下率は１７％程である。

他方応力解による方法によっては，地震力の作用によって安全率が７０％以上も低下するということになる。しかし与えている安全率そのものは，最低のものでもSF＝4.9であり，安全係数から得られる$\overline{SF}$より大である。また円形すべり面法によっても，ほぼ同様の傾向が得られるが，満水時と，空虚時の安全率の大小関係が逆転する。このことの原因は結局水圧力の効果のあらわれ方にあり，円形すべり面法では，水圧力はすべて，すべりを止める方向の力として作用することになるのに対し，応力解では，どちらかと言えば，水圧はす

べりを促すように作用する。

そしてこれ等は結局円形すべり面法における単純な力の分解によるせん断力の決定が合理的なものでない点に原因がある。

三者の結果を総合してみると，応力解が得られているという，前提にたてば安全係数による安全率の決定が最も適用性に富んでおり，合理的な安全率を与えると考えられる。

あとがき

本研究は著者が農業施設工学研究室において沢田敏男教授の指導の下で，ここ四，五年間のうちにおこなった研究のまとめである。そもそも著者が具体的にフィルダムの問題を知らされたのは，農林省，関東農政局によって設計，築造された深山ダムにおいてである。その際著者は数度にわたって設計施工委員会（昭和45～昭和47年）を傍聴する機会を得，この時に種々のフィルダム設計上の問題点を教えられたのであった。

フィルダムの設計，施工というのは広範な知識と経験を必要とする仕事であり，種々の与えられた条件下で，あるダムの“安全性”を評価する上で，“解析”というもののもつ比重は，現時点ではそれ程大ではないだろう。

にもかかわらず最近，フィルダムの力学的挙動の解析に関する研究が数多くなされていることは，解析によって得られる知識を設計者がいかに設計施工に取り入れようと努力しているかを物語るものである。すなわち解析によって得られる情報を取り入れることによって，フィルダムの安全性をより狭い範囲内に推定しようとする努力である。本書に述べたことは，こうした試みの，ほんの端緒であるにすぎない。

本研究を終るにあたって以下の点に触れられなかったことが特に反省される。静的解析においては，応力－ひずみ関係の非線形な解析をもう少し違った角度から取扱うこと（弾塑性解析以外の解析），動的解析においてはレオロジカルなモデルを用いること，及びすべり面法との関連においては近時の新しい解析法であるBishop法やMorgenstern-Price 法等の多くの結果と系統的な比較検討をおこなうこと。

何よりもこうした解析が有効となるための条件は，築堤材料に関する詳細な土質力学データが準備できること，解析するダムの施工中，施工完了後の力学的挙動の観測データが得られることであることを痛感している。そのためにはこうした解析をおこなうには，その現場と密接なつながりがなくてはならないだろう。

本研究において示した解析例はすべてが，電子計算機を用いた数値計算であり，こうした手段が従来のマクロな解析法に比べて持っている優位性は，当分の間消滅しないと考えられるが，フィルダムの力学的挙動のすべてを数値計算

で示し得ると考えるのは危険である。たとえば3.2.3項に述べたように解析モデルには，現実とは本質的に異なる何等かの理想化がおこなわれているから，その理想化が結果に及ぼす効果の少ない時にのみ解も有効となる。

従って得られた解析解に対して常に疑いを持つことが必要であり，これが正しいと確信できるためにも実観測データとの対応を調べることが重要である。本研究ではこうしたチェックが十分におこなえなかった憾がある。

終りにあたって，本文中には著者の入手していない文献を若干件数（６件）引用しているが，これ等は，その研究の歴史的経緯を明らかにする上で敢えて引用したものである。本研究の完成のために終始御指導いただいた沢田敏男教授に深く感謝の意を表すると同時に，初期の時点から有限要素法の適用について御助言下さった長谷川高士助教授に謝意を表す。

（昭和４９年１月）

引用文献ならびに参考文献

(A)

(1) Akai.K., "On the Stress Analysis and Stability Computation of Earth Embankment. Part-1." Disast. Prev. Res. Inst. KYOTO UNIV. Bull. No.17.('57) pp1-25

(2) Amin. M., Ang. A., "Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol.94., No.EM2.('68) pp559-582

(3) Anderson. R., Irons. B., Zienkiewicz. O., "Vibration and Stability of Plates using Finite Elements." Int. J. Solid & Struct., Vol.4., ('68) pp1031-1055

(4) Argyris. J., "Energy Theorems and Structural Analysis." Aircraft Engineering., Vol.26-27., Oct. ('54)-May. ('55)

(B)

(5) Bishop. A., Henkel. D., "The Measurement of Soil Properties in the Triaxial Test." Edward Arnord., London. ('57)

(6) Bishop. A., "The Stability of Earth Dams." Thesis submitted to the Imperial College of London Univ. for the degree of PHD. ('52)

(7) Bishop. A., "The Use of the Slip Circle Method in the Stability Analysis of Slopes." Geotechnique., Vol.5., ('55) pp1-17

(8) Casagrande. A., "Seepage through Earth Dams." J. New. Eng. Water. Work Assoc., Jun. ('37) pp137

(9) Caughey. T., "Classical Normal Modes in Damped Linear Dynamic Systems." Trans. ASME., Ser. E., J. Appl. Mech., Vol. 27., ('60) pp264-271

(10) Chopra. A., Dibaj. M., Clough. R., Penzien. J., Seed. H., "Earthquake Analysis of Earth Dams." Proc. of 4-th Int. Conf. on Earthquake Eng., Chile., ('59) A-5

(11) Chopra. A., "Earthquake Response of Earth Dams." J. Soil Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., Vol.93., No.SM2.,('67) pp65-81

(12) Chopra. A., Perumalswami. P., "Dynamics of Earth Dams with Foundation Interaction." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol.97., No.EM2., ('71) pp181-191

(13) Chopra. A., Permalswami. P., "Dam-Foundation Interaction During Earthquake." Proc. of 4-th World Cong. on Earthquake Eng., ('69) Chile., A-6

(14) Chopra. A., "The Importance of Vertical Compornent of Earthquake Motions." Bull. of Seism. Soc. of Am., Vol.56., ('66) pp1163-1175

(15) Clough. R., "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis." Proc. on 2-nd Conf. of Electronic Computer. ASCE., ('60) pp345-378

(16) Clough. R., Woodward. R., "Analysis of Embankment Stress and Deformations" J. Soil Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., No.SM4., ('67) pp529-550

(17) Clough. R., Chopra. A., "Earthquake Stress Analysis in Earth Dams." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol.92., No.EM2., ('66) pp197-217

(18) Creager. W., Justin. J., Hinds. J., "Engineering for Dams. Vol.-3" John Wiley & Sons Inc., New York., ('45) pp668-672

(19) op.cit. (18) pp715-728

(D)

(20) Drucker. D., Prager. W., "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design." Quat. Appl. Math., Vol.10., ('52) pp157-165

(F)

(21) 福岡保，加納伸朗〝地震時の円形すべり計算法〟土と基礎 Vol.20., №3.,（′72）pp43－48

(22) フローリン原著，赤井浩一監修〝フローリンの土質力学〟第Ⅱ巻 森北出版刊（′71） pp240－245

(23) op.cit. (22) pp125-127 （第Ⅰ巻）

(24) op.cit. (22) pp78-108 （第Ⅰ巻）

(25) Fellenius. W., "Calculation of the Stability of Earth Dams." 2-nd Cong. on Large Dams.

Washington. D.C., ('36)., Vol.4., D48

(26) Frederic. C., Wang. Y., Edge. F., "Two Dimensional Mesh Generation for Structural Analysis." Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol. 2., ('70) pp133-144

(G)

(27) Goodman. L., Brown. C., "Dead Load Stress and the Instability of Slopes." J. Soil Mech. & Found.Div., Proc. ASCE., Vol.89., No.SM3., ('63) pp103-133

(H)

(28) 畑野正，渡辺啓行 ″粘土，砂，砕石の動的粘弾性定数，ならびにポアソン比について″ 土木学会論文報告集 №164（′69）pp33−49

(29) 畑野正 ″粘弾性体の振動″ 土木学会論文集№110 （′64） pp1−14

(30) 畑野正，渡辺啓行 ″アースダムの振動解析″ 土木学会論文報告集 №164（′69）pp1−4

(31) 林正夫，日比野敏，藤原義一 ″非線形現象を考慮した，岩盤の変形，応力と耐荷力の解析″
電力中央研究所報告№66072 （′67）

(32) 林正夫 ″ロックフィルダムの挙動解析″ 昭和46年度ダム技術講演会テキスト，日本大ダム会議（′71）pp1−26

(33) 林正夫，藤原義一 ″逐次破壊現象としての斜面の安定の数値解析″ 土木学会論文報告集 №171（′69） pp11−24

(34) 平野菅保，戸川隼人，藤井宏，三好哲彦 〃計算技術および数値計算法〃
コンピューターによる構造工学講座 II－I－A 培風館刊
（'71） pp62−63

(35) Harr. M., "Foundations of Theoretical Soil Mechanics."
McGraw-Hill Book Co., ('66) pp195-208

(36) op.cit. (35) pp233-324

(37) op.cit. (35) pp94

(38) op.cit. (35) pp175-183

(39) op.cit. (35) pp196

(40) Hatanaka. M., "Fundamental Consideration on Earthquake Resistant Properties of the Earth Dam." Bull. Disast. Prev. Res. Inst., KYOTO UNIV., No.11., ('55)

(41) Housner. G., Martel. R., Alford. J., "Spectrum Analysis of Strong Motion Earthquakes." Bull. of Seism. Soc. of Am., Vol.43., ('53)

(42) Housner. G., "Behavior of Structures during Earthquakes." J. Eng. Mech, Div., Proc.ASCE., Vol.85., No.EM4., ('59) pp59-129

(43) Housner. G., "Generation of Artificial Earthquakes." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol.90., No.EM1., ('64) pp113-150

(44) Hudson. D., "Some Problems in the Application of Spectrum Techniques to Strong-Motion Earthquake Analysis." Bull.

of Seism. Soc. of Am., Vol.51., ('62) pp417-430

(45) Hurty. W., "Vibration of Structural Systems by Component Mode Synthesis." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol.86., No.EM4., ('60) pp51-69

(I)

(46) 石崎溌雄，畠山直隆 〃アースダムの振動性状に関する考察〃 京都大学防災研究所年報 第3号 ('59)

(47) International Comission on Large Dams., "World Register of Dams." ('65)-Ed.

(J)

(48) Jennings. A., Orr. D., "Application of Simultaneous Iteration Method to Undamped Vibration Problems." Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol.3., ('71) pp13-24

(49) Jennings. A., "A Direct Iterative Method of Obtaining Latent Root and Vectors of Symmetric Matrix." Proc. of Camb. Phil. Soc., Vol.63., ('67) pp755-765

(50) Jennings. P., Housner. G., Tsai. N.,"Simulated Earthquake Motion for Design Purpose." Proc. of 4-th World Cong. on Earthquake Eng., ('69) Chile., A-1

(51) Jürgenson. L., "The Application of Theory of Elasticity and Plasticity to Foundation Problems." J. Boston Soc. Civil. Eng., Vol.21., ('34) pp206

(52) Justin. J., "Earth Dam Project." John Wiley & Sons Inc. New York., ('32) pp128

(53) op.cit. (52) pp128-156

(54) op.cit. (52) pp88-113

(K)

(55) 河島佑男 ″動的振動解析″ コンピューターによる構造工学講座 Ⅱ－4－A，培風館刊 pp3－80

(56) 小西一郎，横尾義貫，成岡昌夫 ″構造力学第Ⅱ巻″ 丸善KK刊（′67）pp33

(57) Kulhawy. F., Duncan. J., "Stress and Movements in OROVILLE Dam." J. Soil Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., Vol.98., No.SM7., ('72) pp653-655

(M)

(58) 宮本博 ″有限要素法と破壊力学″ コンピューターによる構造工学講座Ⅱ－3－B，培風館刊（′72）pp114－119

(59) 最上武雄，土木学会監修 ″土質力学″ 技報堂刊（′69）pp492－506

(60) op.cit. (59) pp221

(61) 村田定彦，鈴木武，″深山ダム基礎における凝灰角レキ岩盤の力学的特性について。そのⅠ，そのⅡ″ 農業土木学会誌 Vol.40.,№8 pp10～18., №9 pp37－41（′72）

(62) Malone. D., Connor. J., "Finite Element and Dynamic Vis-coelasticity." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol. 97., No.EM4., ('71) pp1145-1158

(63) Meirovitch. L., "Analytical Method in Vibrations." Macmillan Co. New York., ('67) pp73-125

(64) Middlebrooks. T., "Foundation Investigation of FORT PECK Dam Closure Section." Proc. of 1-st Conf. on Soil Mech. & Found. Eng., ('36). Vol.1., pp135-145

(65) Mohr. O., "Die Elastizitatsgrenze und Bruch Eines Materials." Z. Verein Deutshe Ingeneure., Vol.44., (1900) pp1534

(66) Mononobe. N., Takata. A., Matsumura. M., "Seismic Stabilities of the Earth Dam." 2-nd Cong. on Large Dams., Washington. D.C., ('36) Vol.4., D22

(67) Morgenstern. N., Price. V., "The Analysis of the Stability of General Slip Surfaces." Geotechnique., Vol.15., ('65) pp79-93

(N)

(68) 日本鋼構造協会編 ‘コンピューターによる構造工学講座’ 全11巻,22分冊 培風館刊(’70−’73)

(69) 農林省関東農政局 ‘那須野原開拓建設事業概要書’

(70) 農林省農地局 ‘土地改良設計基準,第四部第1編フィルダム’(’66) pp205−215

(71) Newmark. N., "A Method of Computation for Structural Dynamics." J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE., Vol.85., No.EM3., ('59) pp67-94

(O)

(72) 岡本舜三 "耐震設計への反省" 土と基礎。Vol.20.,№7.,('72) pp1～4

(73) 大橋明光，木本満，"関門橋の橋りョウ基礎地盤調査と設計" 土と基礎 Vol.20.,№3.,('73)pp51－57

(74) 応用地質調査事務所KK，"深山ダム建造に伴う常時微動測定報告書" ('70)

(S)

(75) 桜井運美，吉村敏 "有限要素法のプログラムデザイン" コンピューターによる構造工学講座 II－2－B，培風館刊 ('72)pp126－138，pp157－179

(76) 沢田敏男，青山成康 "表面シャ水ロックフィルダムの静力学的挙動について" 農業土木学会論文集第40号('71)pp56－66

(77) 沢田敏男，長谷川高士，青山成康 "ホローダムの振動性状に関する解析的研究" 農業土木学会論文集第30号('68)pp12－20

(78) Seed. H., Martine. G., "The Seismic Coefficient in Earth Dam Design." J. Soil. Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., Vol.92., No.SM3., ('66) pp25-28

(79) Seed. H., "A Method for Earthquake Resistant Design of Earth Dams." J. Soil. Mech. & Found. Div., Proc. ASCE.,

Vol.92., No.SM1., ('66) pp13-14

(80) Shaw. F., "Relaxation Method." Dover Pub. Inc. ('53)

(81) Sherard. J., Woodward. R., Gizienski. S., Clevenger. W., 河上房吉監訳 "アースダムとアースロックダム" 森北出版刊（'７２）
ｐｐ２０８

(82) op.cit. (81) pp189-193

(83) Shiffman. R., "Interactive Graphics; Settlement and Stability." J. Struct. Div., Proc. ASCE., Vol.97., No. ST1., ('71) pp253-273

(84) Shinozuka. M., "Simulation of Nonstationary Random Process." J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE., Vol.93., No.EM1., ('67) pp11-40

(T)

(85) 高瀬国男 "アースダムの安全性に関する統計的研究" 京都大学農学部学位論文

(86) 竹山寿夫 "初等塑性力学" 丸善KK刊（'６９）
ｐｐ２２３－２４６

(87) op.cit. (86) pp61-63

(88) op.cit. (86) pp51

(89) Taylor. D., "Fundamental Soil Mechanics." John Wiley & Sons Inc., New York., ('48) pp406-421

(90) Terzaghi. K., "Theoretical Soil Mechanics." John Wiley & Sons Inc. New York., ('43) pp406-408

(91) Timoshenko. S., Goodier. J., "Theory of Elasticity." 2-nd Ed. McGraw-Hill Book., ('51) pp13-14

(92) Tölke. F., "Wasserkraftanlagen - Handbibliothek für Bauingeniure., 3-Teil., Wasserbau., 9-Band." V. Julius Springer., Berlin., ('38) pp252-275

(93) Turnbull. W., Hvorslev. M., "Special Problem in Slope Stability." J. Soil. Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., Vol.93., No.SM4., ('67) pp499-528

(94) Turner. M., Clough. R., Martine. H., Topp. L., "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures." J. Aeronautical Science., Vol.23., ('56) pp805-823

(W)

(95) 渡辺啓行，"有限要素法による粘弾性体の振動解析" 土木学会論文報告集，№198（'72）pp21－35

(96) Washizu. K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity." Pergamon Press., ('70) pp246

(97) Whitman. R., Bailey. W., "Use of Computers for Slope Stability Analysis." J. Soil Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., Vol.93., No.SM4., ('67) pp475-498

(98) Wu. T., Loh. A., Malvern. L., "Study of Failure of Soils." J. Soil Mech. & Found. Div., Proc. ASCE., Vol.89., No.SM4.,

('67) pp475-498

(Y)

(99) 山田嘉明，〝マトリックス法材料力学〟コンピューターによる構造工学講座Ⅰ－３－Ａ。培風館刊（'７１）ｐｐ３５－４２

(100) 山口柏樹，木村孟，成田国朝〝アースダムの経時的沈下に関する理論的研究〟東京工業大学土木工学科技報№１１（'７１）ｐｐ１７－２１

(101) 山本善之，山田善一，〝マトリックス構造解析の誤差論〟コンピューターによる構造工学講座　Ⅱ－５－Ｂ，培風館刊　（'７２）ｐｐ７～２２，ｐｐ１２１－１３７

(102) 山田善一，竹宮宏和〝不規則外力による多自由度系の応答解析とその長大つり橋　タワー・ピアー系の耐震解析への応用〟土木学会論文報告集№１６８，（'６８）ｐｐ１７－２７

(103) 山内二郎，森口繁一，一松信，〝電子計算機のための数値計算法－Ⅰ〟培風館刊（'６５）ｐｐ７－２２，ｐｐ１２１－１３７

(Z)

(104) Zienkiewicz. O., Cheung. Y., "The Finite Element Method in Structural and Continum Mechanics." McGraw-Hill Book., ('67)

(105) Zienkiewicz. O., Valliappin. S., King. I., "Elusto-Plastic Solutions of Engineering Problems.- Initial Stress Finite Element Approach- " Int. J. for Numerical Method in Eng., Vol.1., ('69) pp75-100

(106) Zienkiewicz. O., "The Finite Element Method in Engineering Science." McGraw-Hill Book., London., ('71)

(107) op.cit. (106) pp347-368