ヒステリシス素子を含む強制振動系における分岐現象の数値解析

1990年 12月

松尾哲司

ヒステリシス素子を含む強制振動系

における分岐現象の数値解析

１９９０年１２月

松尾哲司

目次

第1章　緒言

1．1　本研究の背景と研究の目的

電気工学の分野において，強磁性体素子や半導体素子などの非線形素子は，機器を構成する主要な素子となっている．このため，非線形素子を含む系の解析は，van der Polによる真空管発振器の研究に始まり，古くから重要課題の1つとして研究がなされてきた．このような非線形系においては，系のパラメータの連続的な変化に対して，系の振舞いの質的な変化が不連続に生じることがある．このような現象は分岐現象(1)(2)と呼ばれ，電気工学の分野に限らず様々な分野において観察されている．分岐現象の研究は，古くはEulerによる弾性柱の座屈の研究に始まる．その後，Poincaréによって幾何学的な手法が導入され，現在の分岐理論の基礎が築かれた．現在，分岐理論は非線形力学の中心的な理論として(1)(3)，自然科学の分野の範囲に限らず，社会科学や経済学など広範な分野で応用されるに至っている．

近年における分岐理論あるいは非線形力学の発展は，計算機の発達と，それに伴う数値解析手法の発達によるところが大きい．例えば，非線形微分方程式の初期値問題や2点境界値問題などに対する数値解法(4)-(6)の発達に伴い，非線形強制振動系における定常カオス現象(3)(7)などの新しい現象が発見および解析されるようになった．この他，連続変形法を用いた，非線形方程式の求解および解曲線の追跡の手法など，非線形系を数値解析する様々な手法が開発され，分岐現象の解析に応用されている．

工学の分野において用いられている非線形素子の中には，強磁性体素子や強誘電体素子を始めとして，ヒステリシス特性を有するものが少なくない．中でも，強磁性体素子は，発電機や変圧器などの磁心として，また，磁気ディスクなどの記憶素子としてなど広範な分野で用いられている．このようなヒステリシス素子の特性を表現するための方法は幾つか提案されており(8)-(13)，その中でも，Chuaの方法(11)，バックラッシュ要素を組み合わせる方法(12)，プライザッハモデルによる方法(8)など幾つかの方法は回路解析にも用いられている．この中のプライザッハモデルは，強磁性体の磁化機構を説明するために1935年にPreisachによって提案されたモデルであり，その後，理論的に整理され(14)-(16)，現在では，様々なヒステリシス特性をよく表現し，かつ，数学的な取扱いにも適したモデルとして広く用いられている(17)　(20)．

しかし，回路解析の立場から見ると，プライザッハモデルに限らず，ヒステリシス素子の特性表現は一般に複雑であり，必ずしも回路方程式の記述や解析に適した表現にはなっていない．特に，強制振動系においては，基本調波振動，分数調波振動など様々な周期振動が存在し，ヒステリシス特性のマイナーループを考慮する必要がしばしば生じるために，ヒステリシス特性の解析的な取扱いが容易でない．このため，上述のような分岐現象の解析の際にヒステリシス特性が考慮されることは極めて少く，殆ど研究されていない．しかし，ヒステリシス特性が存在するために生じる周期振動の分岐現象[10]も存在し，このような現象の解析は，ヒステリシス素子を含む機器の設計の上からも重要である．従って，ヒステリシス素子を含む系固有の現象を解析するため，また，精度の高い解析を行うためにも，素子のヒステリシス特性を考慮した分岐現象の解析法の確立が望まれる．

以上の点を踏まえて，本論文では研究の目的を，大きく分けて次の２つに置いている．

① ヒステリシス素子を含む非線形系における周期振動の分岐現象を数値解析する１つの手法を確立すること

② ①の手法を用いてヒステリシス素子を含む非線形系における周期振動の分岐現象を解析し，素子のヒステリシス特性が分岐現象に与える影響を調べること．

ただし，本論文では解析の対象を強制振動系に限って研究を行うことにする．

１．２　本論文の概要

本論文は，本章を含めて９章で構成されている．

第２章では，次章以降の準備として，プライザッハモデルを用いたヒステリシス特性の表現方法について述べる．最初に，プライザッハモデルを用いてヒステリシス特性を表現するためのアルゴリズムを示す．次に，解析の際の取扱いを容易にするため，ヒステリシス関数を，過去の時点の値を変数に持つ関数として表現し，その上で，ヒステリシス関数の各変数による微分計算について述べる．

第３章では，ヒステリシス素子を含む強制振動系における定常解析の方法について述べる．まず，ヒステリシス素子を含む強制振動系の状態方程式を与え，その変分方程式を導く．次に，ヒステリシスループが不飽和ループとなる場合には，周期解が無限集合をなす場合があることを示す．さらに，この無限集合の中から

幾つかの周期解を求める方法を示し，最後に，その周期解の安定判別法を示す．

第４章では，ヒステリシス素子を含む強制振動系における基本調波周期振動の分岐について述べる．最初に，系のパラメータの変化に対する定常特性の変化を，連続変形法[21] [23]を用いて調べる方法を述べる．次に，特性曲線（解曲線）の特異点の前後における周期解の安定性の変化の仕方について，ヒステリシス素子を含まない強制振動系の場合と比較しながら述べる．さらに，解曲線に現れる単純極限点と単純分岐点の検出と算出の方法などを示し，最後に，分岐集合[24]の追跡について述べる．

第５章では，分数調波周期解の分岐について述べる．最初に，基本調波周期振動の解曲線から，分数調波周期振動の解曲線が分岐するための条件を示す．次に，その分岐点の検出と算出，および，分岐点におけるbranch switching[22][23]の方法を示す．

第６章では，前章までに述べた解析法を用いて，２階の強制振動系における分岐現象の解析を行う．まず，ヒステリシス特性のメジャーループの面積を連続的に変化させることが可能なようにヒステリシス特性を与える方法を述べる．次に，第３章で述べた定常解析法の解析例を示し，解析法の有効性を示す．次に，第４章と第５章で述べた方法を用いて，２階の並列共振回路と直列共振回路について，基本調波周期振動および分数調波周期振動の分岐現象の解析を行い，ヒステリシス特性が系の分岐現象に与える影響を調べる．最後に，それまでに得られた解析結果と，系の状態方程式を定常状態に至るまで数値積分して得られる解析結果とを比較する．また，ヒステリシス素子を含む２階の強制振動系におけるカオス現象について述べる．

第７章では，第３章で述べた，周期解が無限集合をなす場合について，周期解の集合の性質について調べる．

第８章では，２個のヒステリシス素子を含む強制振動系における分岐現象の数値解析について述べる．まず，２個のヒステリシス素子を含む強制振動系における定常解析の方法を示し，次に，その解析例を示す．

第９章は，結言であり，全体のまとめである．

第２章　ヒステリシス特性の表現

２．１　プライザッハモデルを用いたヒステリシス特性の表現

２.１.１　プライザッハモデル

本論文では，ヒステリシス素子として主に鉄心入りコイルを想定し，また，その特性をプライザッハモデル(8)(14)(15)(16)を用いて表すことにする．

プライザッハモデルは，強磁性体の磁化機構を説明するためにPreisachによって提案されたモデルであり，様々なヒステリシス特性をよく表現し，かつ，数学的な取扱いや計算機シミュレーションにも適したモデルとして広く用いられている(17)-(20)．

プライザッハモデルでは，強磁性体は多数の磁気双極子の集合体として表現される．強磁性体を構成する磁気双極子は，各々，図２.１の角形ヒステリシス特性を示すものとする．図２.１の双極子は，磁界ηが増加して$\eta=\eta_u$になると，磁化Ｊは$-1/2$から$1/2$へ跳躍し（正に磁化され），減少して$\eta=\eta_v$になると，逆に$1/2$から$-1/2$に跳躍する（負に磁化される）．このような双極子の分布を与える分布関数を，η_uとη_vを用いて定義する．すなわち，$J=1/2$への跳躍が生じる磁界の値が区間［η_u, $\eta_u+d\eta_u$］に属し，かつ，$J=-1/2$への跳躍が生じる磁界の値が区間［η_v, $\eta_v+d\eta_v$］に属する双極子の数は，$K(\eta_u,\eta_v)d\eta_u d\eta_v$により定まるものとし，$K(\eta_u,\eta_v)$をプライザッハ分布関数と呼ぶ．正，負の飽和磁界の強さをη_S，$-\eta_S$で表すと，逆方向に回る角形ヒステリシス特性はないものとして，$K(\eta_u,\eta_v)$の定義域は，

$$D_K:\ -\eta_S \leqq \eta_v \leqq \eta_u \leqq \eta_S \tag{2.1}$$

で表される３角領域（図２.２）となる．磁界ηの変化に応じて，領域D_Kにおける双極子の磁化状態が変化することにより，強磁性体全体の磁化ｘが変化する．すなわち，強磁性体の磁化ｘと磁界ηの関係は，

$$x = H(\eta) \tag{2.2}$$

ただし，

$$H(\eta) \equiv \iint_{D(\eta)} K(\eta_u,\eta_v)\, d\eta_u d\eta_v + H_{min} \tag{2.3}$$

（$D(\eta)$：積分領域　，H_{min}：定数）

によって与えられる．ここに，$D(\eta)$は領域D_Kにおいて，双極子が正に磁化されている部分領域であり，その領域はプライザッハ図表の原理に基づいて定められ

る．プライザッハ図表の原理については文献(18)などに詳しい．また，プライザッハ図表の原理を用いた計算法も文献(18)に示されている．鉄心入りコイルにおける電流ηに対する磁束xの関係も，式(2.2),(2.3)により表すことができる．

第３章以降に述べるように，連続変形法を用いた解析や，分岐点の算出を行う際には，$H(\eta)$が微分可能であることが必要である．文献(18)に示された計算法では，分布関数Kが離散化した分布関数表で与えられ，加えて，積分領域$D(\eta)$の変化の仕方も不連続となっているために，ηの変化に対する$H(\eta)$の変化は連続的でない．従って，本論文で行われる解析には，文献(18)の計算法は適さない．そこで，以後の解析に適するような$H(\eta)$の計算法を考えることにする．

２．１．２　計算の方法

$H(\eta)$が微分可能となるように，分布関数Kを連続関数で与えることができ，かつ，ηの変化に対する積分領域$D(\eta)$の変化が連続的に行われるような計算方法を考える．第３章以降，解析は数値的に行われるものとし，時間tは，$t=t_{[0]}, t_{[1]}, \cdots$のように時点で与えられるものとする（以後，時点に関するインデックスを［ ］付きの添字で示す）．従って，η，Hの時間変化も，$\eta=\eta_{[0]}, \eta_{[1]}, \cdots$，$H=H_{[0]}, H_{[1]}, \cdots$の時点系列で表されるものとする．このとき，与えられたηの時点系列（$\eta_{[p]}$，$p=0,1,\cdots$）に対する，Hの時点系列（$H_{[p]}=H(\eta_{[p]})$，$p=0,1,\cdots$）の計算を，プライザッハ図表の原理に従って，以下の要領で行うことにする．

まず，積分領域$D(\eta)$を次のように表現する．積分領域の境界は図２．３に示すように線分のつながりとなる．ここでは，積分領域の境界を構成する線分は，図２．３のように全てη_u軸またはη_v軸に平行であるとし，図２．４のような斜めの線分は存在しないとする．時点$t_{[p]}$における境界を構成する線分の数を$m_{[p]}$とすると，線分の端点の数は，$m_{[p]}+1$個となる．そこで，

$\eta_u=\eta_S$　または　$\eta_v=-\eta_S$

上にある端点の座標を$(\eta_u(0), \eta_v(0))$とし，そこから端点の座標を順に$(\eta_u(1), \eta_v(1))$，$(\eta_u(2), \eta_v(2))$，…とし，最後の

$\eta_v=\eta_u$

上にある端点の座標を$(\eta_u(m_{[p]}), \eta_v(m_{[p]}))$（$=(\eta_{[p]}, \eta_{[p]})$）とする（図２．３）．また，アルゴリズムの都合上，点$(\eta_u(-1), \eta_v(-1))$を，

$$(\eta_u(-1), \eta_v(-1))=(\eta_S, -\eta_S) \qquad (2.4)$$

と定義しておく．このように領域$D(\eta)$は，境界線分の数$m_{[p]}$および端点の座標で表現される．

次に，積分領域$D(\eta)$の変化の仕方および$H(\eta)$の計算法を考える．いま，時点$t_{[p-1]}$における積分領域が図２．５のようであったとし，この時点における$H_{[p-1]}$は求められているとする．このとき，$\eta_{[p]}$の値によって，領域Dは次のように変化し，$H_{[p]}$は次のように計算される．

(i)　$\eta_{[p-1]}<\eta_{[p]}$ ($<\eta_s$) である場合（ηが増加する場合）

この場合，$\eta_u \leqq \eta_{[p]}$の領域にある双極子は全て正に磁化され，それ以外の領域にある双極子の磁化状態は変化しない．このとき，

$$\eta_u(k)<\eta_{[p]}<\eta_u(k-1)$$

を満たすkが存在し，時点$t_{[p]}$における積分領域は図２．６(a)のようにる．従って，$H_{[p]}$は，

$$H_{[p]}=H_{[p-1]}+\delta H_1+\delta H_2+\cdots+\delta H_j \tag{2.5}$$

$$\delta H_i=\iint_{\delta D_i} K(\eta_u,\eta_v)\ d\eta_v d\eta_u \qquad (i=1,2,\cdots,j) \tag{2.6}$$

で与えられる．ここで，各δH_i ($i=1,2,\cdots,j$) は，

$$\begin{aligned}
\delta H_1 &= \varDelta H(\eta_u(m_{[p-1]}-1),\eta_u(m_{[p-1]}-2),\eta_v(m_{[p-1]}-1)) \\
\delta H_2 &= \varDelta H(\eta_u(m_{[p-1]}-3),\eta_u(m_{[p-1]}-4),\eta_v(m_{[p-1]}-3)) \\
&\ \vdots \\
\delta H_j &= \varDelta H(\eta_u(k),\eta_{[p]},\eta_v(k))
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ただし，

$$\varDelta H(\eta_a,\eta_b,\eta_c)\equiv\int_{\eta_a}^{\eta_b}\int_{\eta_c}^{\eta_u} K(\eta_u,\eta_v)\ d\eta_v d\eta_u \tag{2.8}$$

で与えられる．積分領域の変化に伴って，境界線分の数および端点の座標も，

$$m_{[p]}:=k+1$$

$$(\eta_u(m_{[p]}),\ \eta_v(m_{[p]})):=(\eta_{[p]},\ \eta_{[p]})$$

$$(\eta_u(m_{[p]}-1),\ \eta_v(m_{[p]}-1)):=(\eta_{[p]},\ \eta_v(k))$$

と更新される（図２．６(b)）．

(ii) $\eta_{[p-1]}>\eta_{[p]}$ ($>-\eta_s$) である場合（ηが減少する場合）

この場合，$\eta_v \geqq \eta_{[p]}$の領域にある双極子は全て負に磁化され，それ以外の領域にある双極子の磁化状態は変化しない．このとき，

$$\eta_v(k)>\eta_{[p]}>\eta_v(k-1)$$

を満たすkが存在し，時点$t_{[p]}$における積分領域は図２.７(ａ)のようにる．従って，$H_{[p]}$は，

$$H_{[p]}=H_{[p-1]}-\delta' H_1-\delta' H_2-\cdots-\delta' H_j \tag{2.9}$$

$$\delta' H_i=\iint_{\delta' D_i} K(\eta_u,\eta_v)\,d\eta_u d\eta_v \qquad (i=1,2,\cdots,j) \tag{2.10}$$

で与えられる．ここで，各$\delta' H_i$ ($i=1,2,\cdots,j$) は，

$$\begin{aligned}
\delta' H_1 &= \nabla H(\eta_v(m_{[p-1]}-1),\eta_v(m_{[p-1]}),\eta_u(m_{[p-1]}))\\
\delta' H_2 &= \nabla H(\eta_v(m_{[p-1]}-3),\eta_v(m_{[p-1]}-2),\eta_u(m_{[p-1]}-2))\\
&\ \vdots\\
\delta' H_j &= \nabla H(\eta_{[p]},\eta_v(k),\eta_u(k))
\end{aligned} \tag{2.11}$$

ただし，

$$\nabla H(\eta_a,\eta_b,\eta_c)\equiv\int_{\eta_a}^{\eta_b}\int_{\eta_v}^{\eta_c} K(\eta_u,\eta_v)\,d\eta_u d\eta_v \tag{2.12}$$

で与えられる．積分領域の変化に伴って，境界線分の数および端点の座標も，

$$m_{[p]}:=k+1$$

$$(\eta_u(m_{[p]}),\ \eta_v(m_{[p]})):=(\eta_{[p]},\ \eta_{[p]})$$

$$(\eta_u(m_{[p]}-1),\ \eta_v(m_{[p]}-1)):=(\eta_u(k),\ \eta_{[p]})$$

と更新される（図２.７(ｂ)）．

このように，$H_{[p]}$の計算には，式(2.8),(2.12)の台形領域の積分（図２.８(ａ)(ｂ)）が必要である．式(2.8),(2.12)の積分については，後に具体的な分布関数Kが与えられた際に述べることにする．

次に，以上の計算を行うためのアルゴリズムを示す．

２.１.３　アルゴリズム

ηの時点系列 ($\eta_{[p]}$，$p=0,\cdots,N$) からHの時点系列 ($H_{[p]}$，$p=0,\cdots,N$) を計算するためのアルゴリズムを以下に示す．

Step０：時点$t_{[0]}$における積分領域（境界線分の数$m_{[0]}$と各端点の座標）を定め，$H_{[0]}$を求めておく．$p:=1$

Step１：$\eta_{[p]}=\eta_{[p-1]}$のときは，$H_{[p]}:=H_{[p-1]}$　としてStep６へ．

Step２：$\eta_{[p]}\geqq\eta_s$（正方向の飽和）のときは，

$$H_{[p]}:=H_{max}\ ,\qquad m_{[p]}:=0$$

$$\eta_u(0):=\eta_s\ ,\qquad \eta_v(0):=\eta_s$$

としてStep6へ.

Step3 : $\eta_{[p]} \leqq -\eta_s$（負方向の飽和）のときは,

$$H_{[p]} := H_{min} \quad , \quad m_{[p]} := 0$$

$$\eta_u(0) := -\eta_s \quad , \quad \eta_v(0) := -\eta_s$$

としてStep6へ.

Step4 : $\eta_{[p]} > \eta_{[p-1]}$のとき,

$\eta_u(k) < \eta_{[p]}$を満たす最小のkを見つけ,

$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]} - k}{2}\right) \qquad (\mathrm{int}：小数切捨)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + \varDelta H(\eta_u(k), \eta_{[p]}, \eta_v(k)) + \sum_{i=1}^{j} \varDelta H(\eta_u(k+2i), \eta_u(k+2i-1), \eta_v(k+2i))$$

$$m_{[p]} := k + 1$$

$$\eta_u(m_{[p]}) := \eta_{[p]} \quad , \quad \eta_v(m_{[p]}) := \eta_{[p]}$$

$$\eta_u(m_{[p]} - 1) := \eta_{[p]}$$

としてStep6へ.

Step5 : $\eta_{[p]} < \eta_{[p-1]}$のとき,

$\eta_v(k) > \eta_{[p]}$を満たす最小のkを見つけ,

$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]} - k}{2}\right)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} - \nabla H(\eta_{[p]}, \eta_v(k), \eta_u(k)) - \sum_{i=1}^{j} \nabla H(\eta_v(k+2i-1), \eta_v(k+2i), \eta_u(k+2i))$$

$$m_{[p]} := k + 1$$

$$\eta_u(m_{[p]}) := \eta_{[p]} \quad , \quad \eta_v(m_{[p]}) := \eta_{[p]}$$

$$\eta_v(m_{[p]} - 1) := \eta_{[p]}$$

としてStep6へ.

Step6 : $p < N$のときは$p := p + 1$としてStep1へ.

そうでなければ終了.

ここで, Step1におけるH_{max}は,

$$H_{max} \equiv \iint_{D_K} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u\, d\eta_v + H_{min} \tag{2.13}$$

で定義される定数である.

2．2　ヒステリシス関数

2.2.1　ヒステリシス関数の取扱い

前節で述べたように，ηが時点系列$\eta_{[0]}, \eta_{[1]}, \cdots$で与えられる場合を考える．式(2.3)より，時点$t_{[p]}$における$H_{[p]}$は

$$H_{[p]} = H(\eta_{[p]}) = \iint_{D_{[p]}} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u d\eta_v + H_{min} \tag{2.14}$$

ただし，$D_{[p]} = D(\eta_{[p]})$

で与えられる．このとき$D_{[p]}$は，その時点の$\eta_{[p]}$の値のみならず，前時点までの$\eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}$の値によってその領域が定まっている．従って，$D_{[p]}$は，

$$D_{[p]} = D_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \tag{2.15}$$

と表される．従って，$H_{[p]}$も

$$\begin{aligned} H_{[p]} &= H_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \\ &= \iint_{D_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]})} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u d\eta_v + H_{min} \end{aligned} \tag{2.16}$$

と表される．このように，ヒステリシス関数は，現時点の$\eta_{[p]}$のみならず前時点までの系列$\eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}$の関数として表現することができる．

以後の解析には，ヒステリシス関数$H(\eta)$として，式(2.16)ではなく，これに線形項を加えた，

$$\begin{aligned} H(\eta_{[p]}) &= H_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \eta_{[1]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \\ &= l_s \cdot \eta_{[p]} + \iint_{D_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]})} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u d\eta_v + H_{min} \end{aligned} \tag{2.17}$$

（l_s：定数）

を用いることにする．これは，実際の非線形インダクタが，飽和時にもインダクタンスを持っていることに対応するものである（図２．９参照）．

2.2.2　ヒステリシス関数の微分

ヒステリシス関数(2.17)はηの時点系列$\eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p]}$に対する関数である．第３章以降の解析の際に，この関数を各$\eta_{[i]}$（$i = 0, \cdots, p$）で微分することが必要となる．ここでは，式(2.17)で与えられる$H_{[p]}$の$\eta_{[i]}$（$i = 0, \cdots, p$）に関する微分計算について説明する．

まず，例を挙げて，$H_{[p]}$の微分計算について説明する．いま，図２．１０のよ

うなηの時点系列が与えられたとすると，時点$t_{[p]}$における積分領域$D_{[p]}$は図2．11のようになる．ここで，$\eta_{[k]}$が微小変化したとすると，$D_{[p]}$は図2．12のように微小変化する．従って，$\eta_{[k]}$の微小変化$\Delta\eta_{[k]}$に対する$H_{[p]}$の微小変化$\Delta H_{[p]}$は，

$$\Delta H_{[p]}=\iint_{\Delta D} K(\eta_u,\eta_v)\,d\eta_u\,d\eta_v \fallingdotseq \Delta\eta_{[k]}\int_{\eta_{[j]}}^{\eta_{[p]}} K(\eta_{[k]},\eta_v)\,d\eta_v \tag{2.18}$$

で与えられる．従って，

$$\frac{\partial H_{[p]}}{\partial\eta_{[k]}}=\lim_{\Delta\eta_{[k]}\to 0}\frac{\Delta H_{[p]}}{\Delta\eta_{[k]}}=\int_{\eta_{[j]}}^{\eta_{[p]}} K(\eta_{[k]},\eta_v)\,d\eta_v \tag{2.19}$$

が得られる．同様にして，

$$\frac{\partial H_{[p]}}{\partial\eta_{[p]}}=1_s+\int_{\eta_{[p]}}^{\eta_{[k]}} K(\eta_u,\eta_{[p]})\,d\eta_u,\quad \frac{\partial H_{[p]}}{\partial\eta_{[j]}}=\int_{\eta_{[k]}}^{\eta_s} K(\eta_u,\eta_{[j]})\,d\eta_u \tag{2.20}$$

が得られる．また，$\eta_{[i]}$（$i\neq j,k,p$）が微小変化しても，領域$D_{[p]}$は変化しないので，

$$\frac{\partial H_{[p]}}{\partial\eta_{[i]}}=0 \qquad (i\neq j,k,p) \tag{2.21}$$

である．さらに，式(2.19),(2.20)より，

$$\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial\eta_{[p]}{}^2}=\int_{\eta_{[p]}}^{\eta_{[k]}}\frac{\partial K(\eta_u,\eta_{[p]})}{\partial\eta_{[p]}}\,d\eta_u - K(\eta_{[p]},\eta_{[p]}) \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial\eta_{[k]}{}^2}=\int_{\eta_{[j]}}^{\eta_{[p]}}\frac{\partial K(\eta_{[k]},\eta_v)}{\partial\eta_{[k]}}\,d\eta_v \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial\eta_{[p]}\partial\eta_{[k]}}=K(\eta_{[k]},\eta_{[p]}),\qquad \frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial\eta_{[k]}\partial\eta_{[j]}}=-K(\eta_{[k]},\eta_{[j]}) \tag{2.24}$$

などの$H_{[p]}$の2階微分が得られる．

次に，$H_{[p]}$の微分の一般的な表現を考える．上の例の場合，図2．12に示したように，$\eta_{[k]}$が微小変化すると，$D_{[p]}$の境界の，

$(\eta_u=\eta_{[k]},\ \eta_{[j]}\leqq\eta_v\leqq\eta_{[p]})$

の部分が微小移動する．このように，$\eta_{[k]}$の微小変化によって微小移動する$D_{[p]}$の境界の線分を，

$\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[k]}$

と表記することにする．上の例の場合，同様にして，境界の線分

$(\eta_{[p]} \leqq \eta_u \leqq \eta_{[k]}, \ \eta_v = \eta_{[p]})$, $(\eta_{[k]} \leqq \eta_u \leqq \eta_S, \ \eta_v = \eta_{[j]})$

は，それぞれ，

$\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[p]}$, $\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[j]}$

と表記されることになる．また，また，$\eta_{[i]}$ $(i \neq j, k, p)$ が微小変化しても，領域 $D_{[p]}$ の境界は移動しないので，

$\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]}$ $(i \neq j, k, p)$

は存在しない．

上に述べた表記法を用いると，式(2.17)で表される $H_{[p]}$ の一階微分を，一般に，

$$\frac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}} = \begin{cases} l_S + \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]}} K(\eta_{[p]}, \eta_v)\, d\eta_v & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]} // \eta_v \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array} \right) \\ l_S + \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]}} K(\eta_u, \eta_{[p]})\, d\eta_u & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]} // \eta_u \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array} \right) \end{cases} \tag{2.25}$$

（ただし，「$\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[p]} // \eta_v$ 軸」は，境界線分 $\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[p]}$ と η_v 軸が平行であることを表す．他も同様．）

$$\frac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]}} = \begin{cases} 0 & (\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[i]} \text{が存在しない場合}) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[i]}} K(\eta_{[i]}, \eta_v)\, d\eta_v & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]}/\partial \eta_{[i]} // \eta_v \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array} \right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[i]}} K(\eta_u, \eta_{[i]})\, d\eta_u & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]}/\partial \eta_{[i]} // \eta_u \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array} \right) \end{cases} \tag{2.26}$$

$(i = 0, \cdots, p-1)$

と表すことができる．また $H_{[p]}$ の２階微分も，

$$\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}{}^2} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]}} \frac{\partial K(\eta_{[p]}, \eta_v)}{\partial \eta_{[p]}} d\eta_v + K(\eta_{[p]}, \eta_{[p]}) & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]} // \eta_v \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array} \right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]}} \frac{\partial K(\eta_u, \eta_{[p]})}{\partial \eta_{[p]}} d\eta_u - K(\eta_{[p]}, \eta_{[p]}) & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]}/\partial \eta_{[p]} // \eta_u \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array} \right) \end{cases} \tag{2.27}$$

$$
\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]}{}^2} = \begin{cases} 0 & (\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]} \text{が存在しない場合}) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]}} \frac{\partial K(\eta_{[i]}, \eta_v)}{\partial \eta_{[i]}} d\eta_v & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]} // \eta_v \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]}} \frac{\partial K(\eta_u, \eta_{[i]})}{\partial \eta_{[i]}} d\eta_u & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]} // \eta_u \text{軸} \\ \text{の場合} \end{array}\right) \end{cases} \tag{2.28}
$$

$$
\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]} \partial \eta_{[j]}} = \begin{cases} 0 & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]} \text{と} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[j]} \text{が} \\ \text{点}(\eta_{[i]}, \eta_{[j]})\text{および} \\ \text{点}(\eta_{[j]}, \eta_{[i]})\text{を共有しない場合} \end{array}\right) \\ K(\eta_{[i]}, \eta_{[j]}) & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]} \text{と} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[j]} \text{が} \\ \text{点}(\eta_{[i]}, \eta_{[j]})\text{を共有する場合} \end{array}\right) \\ -K(\eta_{[j]}, \eta_{[i]}) & \left(\begin{array}{l} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[i]} \text{と} \partial D_{[p]} / \partial \eta_{[j]} \text{が} \\ \text{が点}(\eta_{[j]}, \eta_{[i]})\text{を共有する場合} \end{array}\right) \end{cases} \tag{2.29}
$$

（$i, j = 0, \cdots, p$，ただし，$i < j$ とする）

で与えられる．

2.2.3　ヒステリシス関数の逆関数

ヒステリシス関数(2.17)を用いると，非線形インダクタに流れる電流ηに対する磁束xの特性を

$$
x_{[p]} = H_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \tag{2.30}
$$

と表すことができる．しかし，電気回路の中に非線形インダクタがある場合，通常は，磁束が状態変数に選ばれる．その場合には，磁束xに対して電流ηが求められなければならない．従って，式(2.30)の逆関数，

$$
\eta_{[p]} = H_{[p]}{}^{-1}(x_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \tag{2.31}
$$

が必要となる．逆関数(2.31)は，付録Aに示すアルゴリズムにより計算することができる．

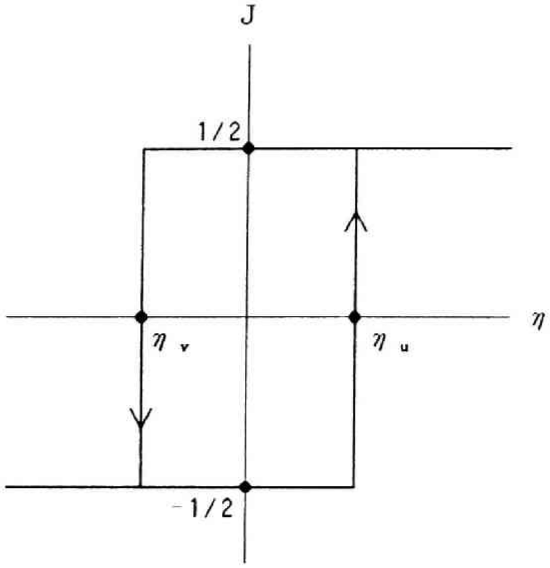


図２．１　磁気双極子の特性

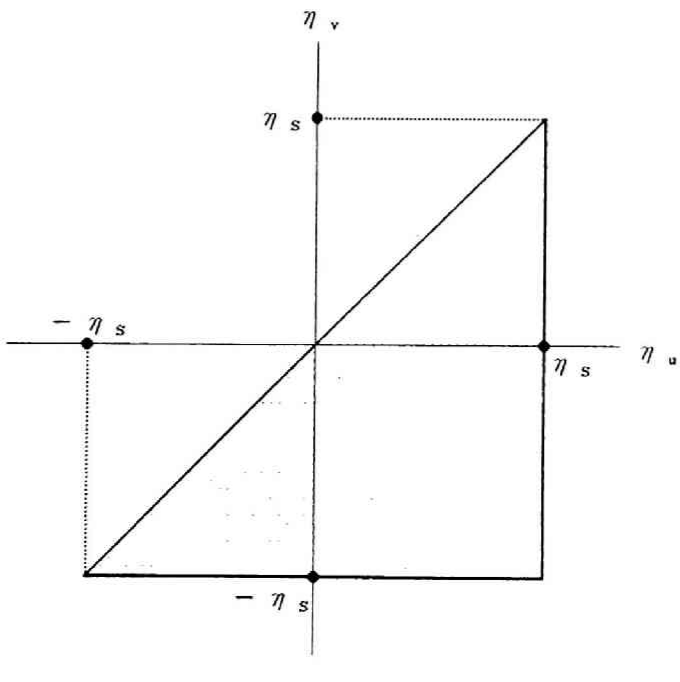


図２．２　分布関数の定義域D_K

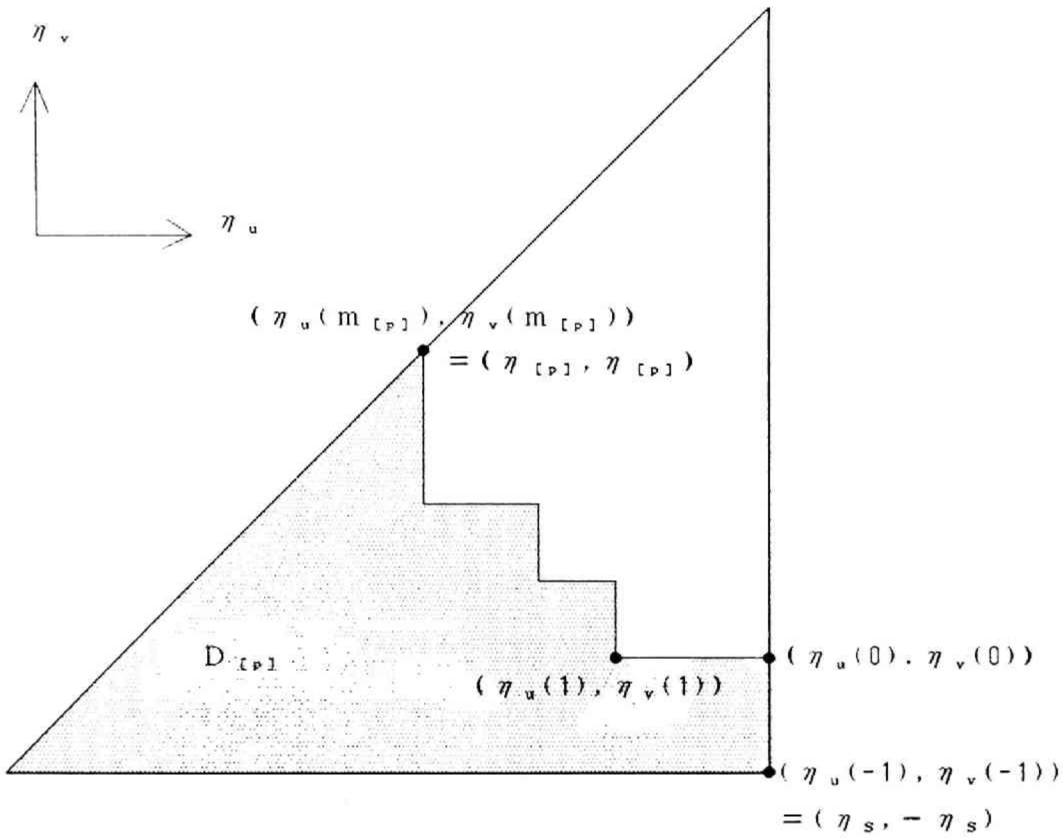


図２．３　領域$D_{[p]}$の表現

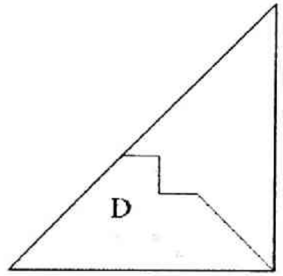


図２．４
斜めの境界線を持つ磁化状態

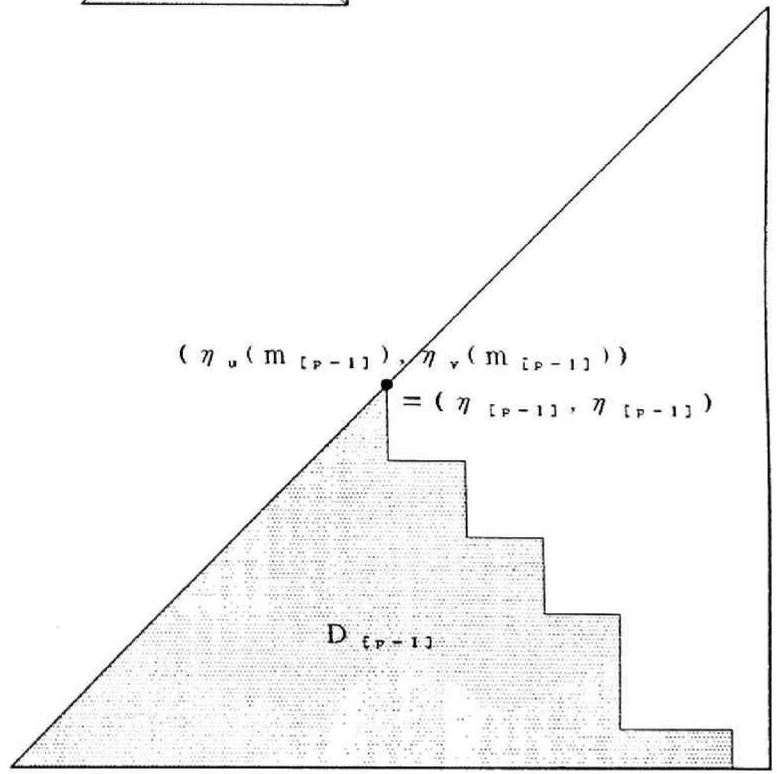
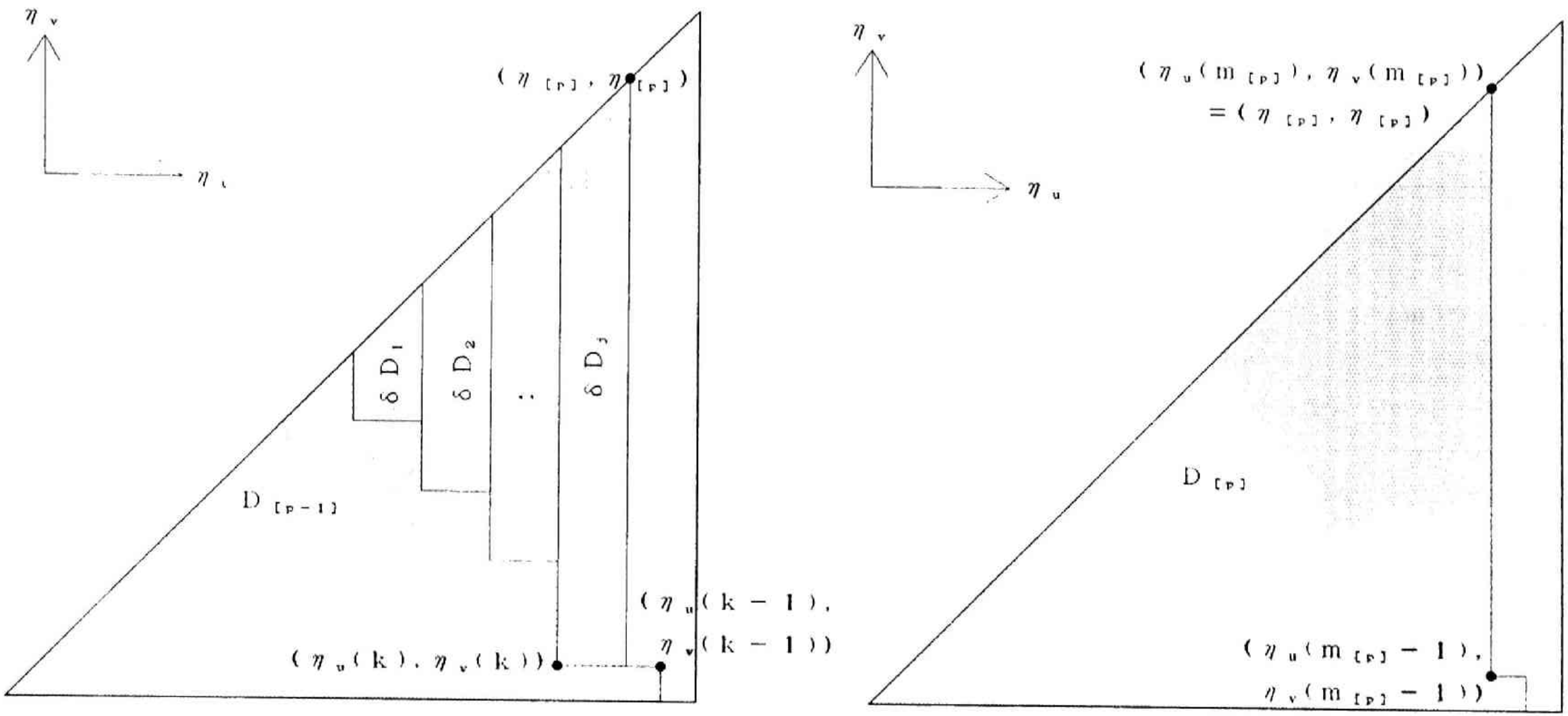


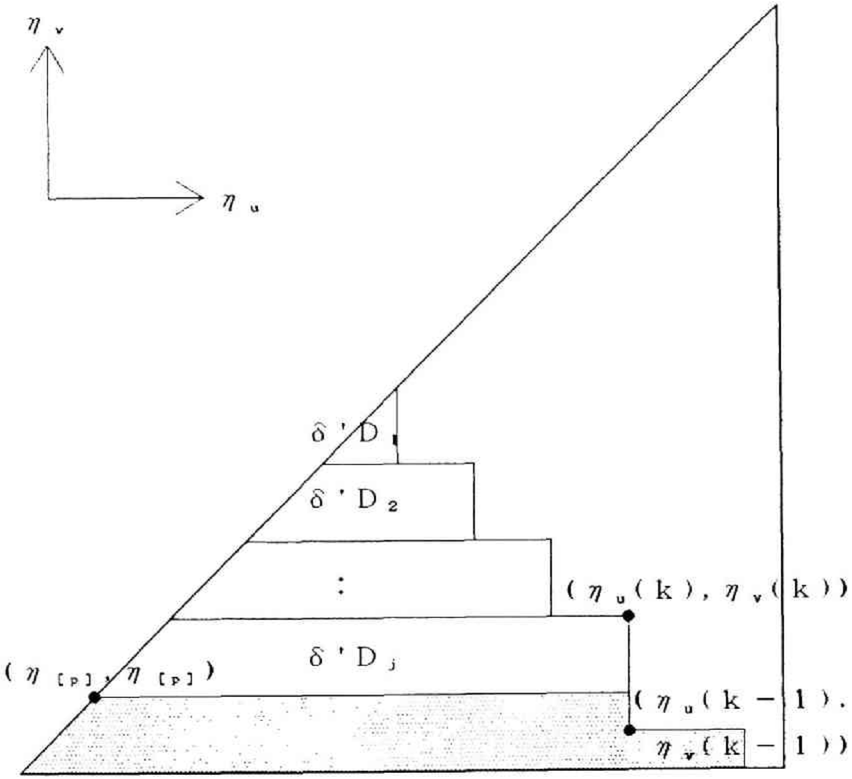
図２．５　時点$t_{[p-1]}$における磁化状態



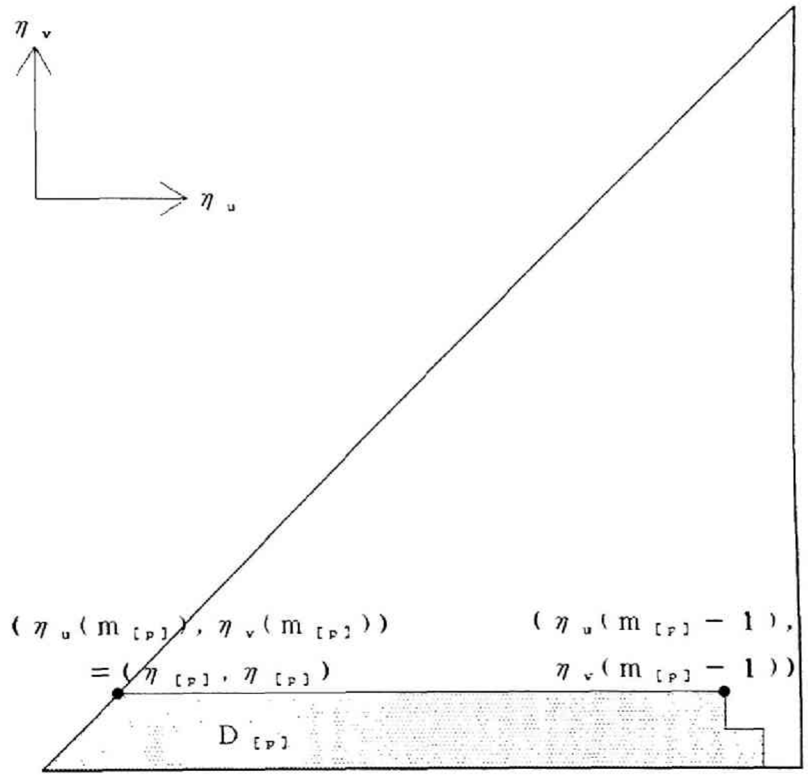
（a）　積分領域の変化

（b）　時点 $t_{[p]}$ における磁化状態

図２．６　$\eta_{[p]} > \eta_{[p-1]}$ の場合

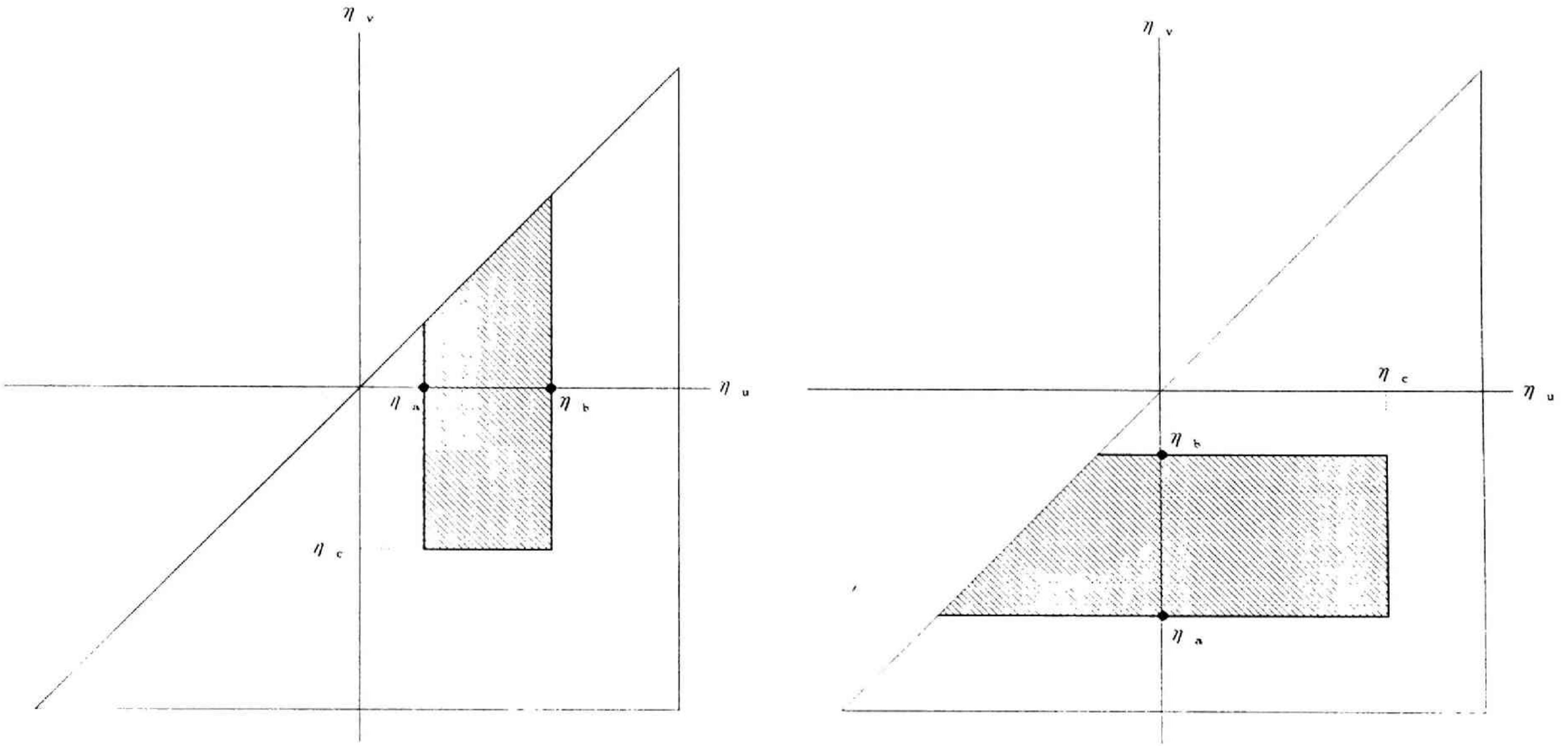


（ａ）　積分領域の変化



（ｂ）　時点 $t_{[p]}$ における磁化状態

図２．７　$\eta_{[p]} < \eta_{[p-1]}$ の場合



（a）　⊿H　　　　（b）　ΓH

図２．８　⊿H，ΓHの計算の際の積分領域

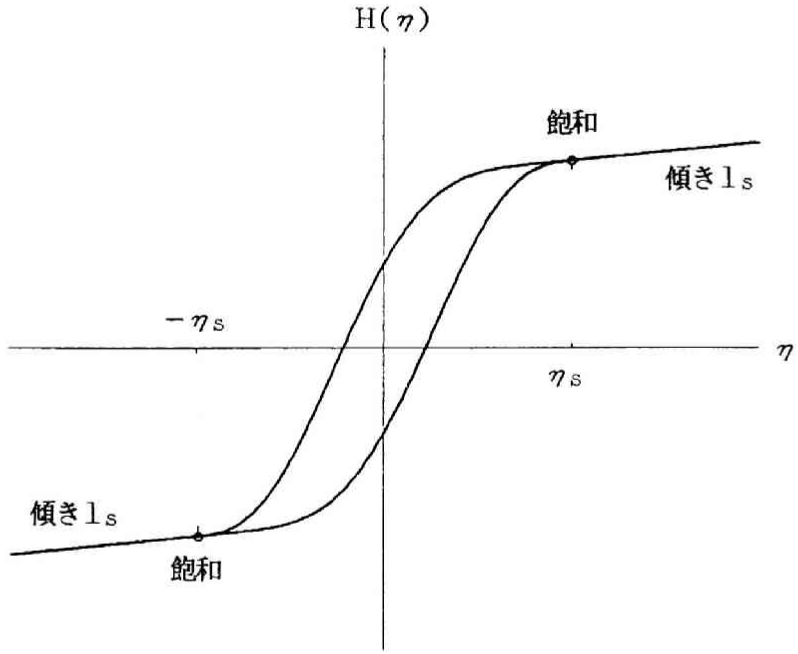


図２．９　飽和時のインダクタンス

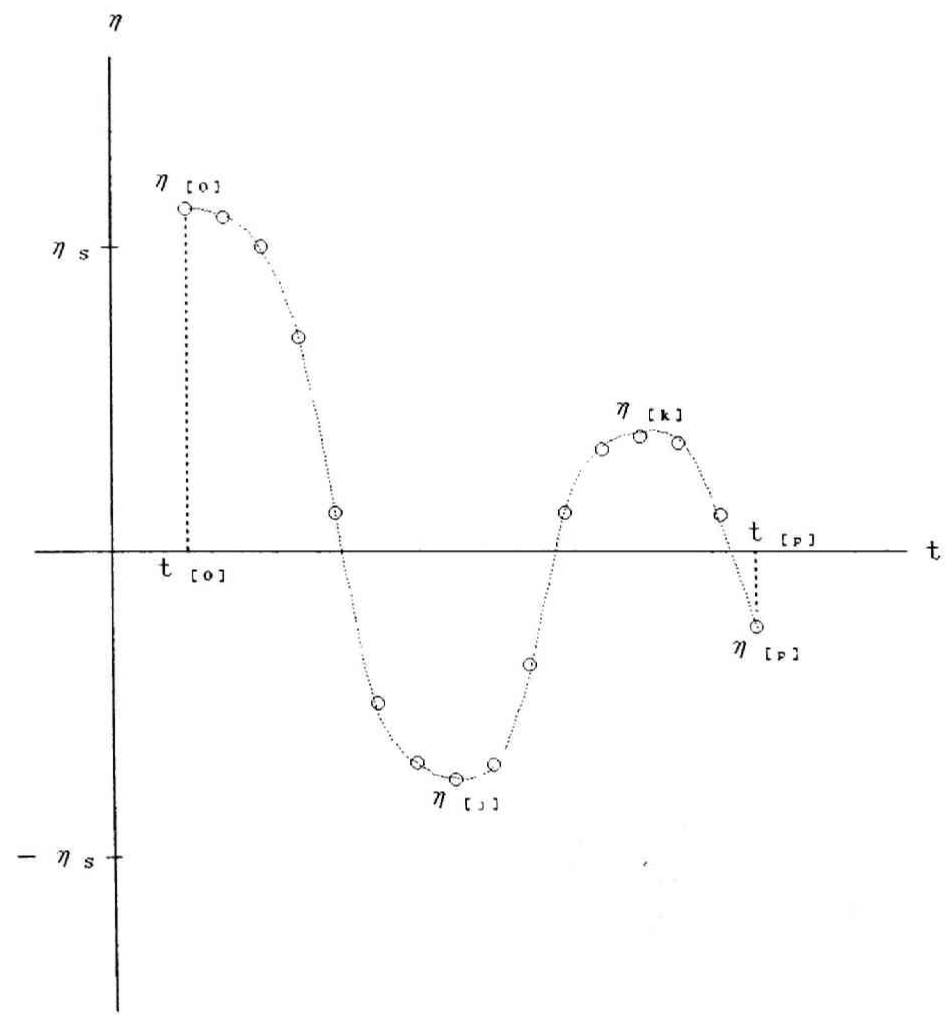


図２．１０　ηの時点系列

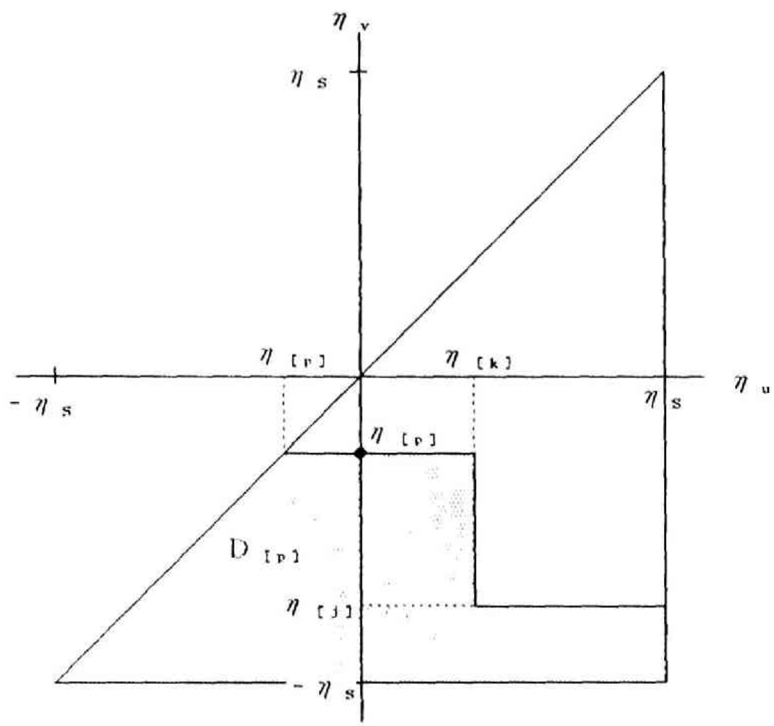


図２．１１　積分領域$D_{[r]}$

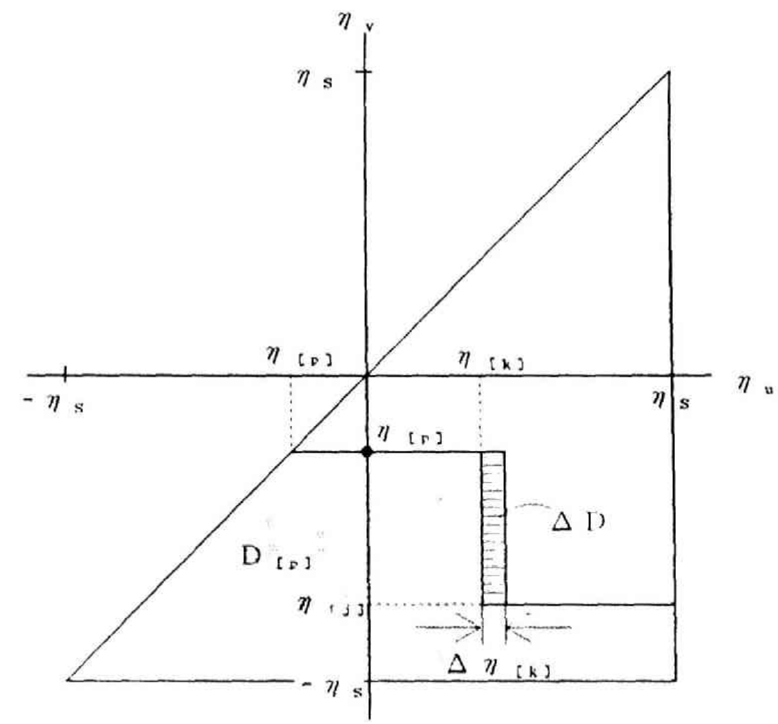


図２．１２　$D_{[r]}$の微小変化

第３章　ヒステリシス素子を含む強制振動系の定常解析

３．１　系の状態方程式と変分方程式

３．１．１　状態方程式

本論文では，周期入力を持つ強制振動系を取り扱う．系のヒステリシス素子は１個とし，系の状態方程式を，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t,x,y) \\ g(t,x,y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ \mathbb{b} \end{bmatrix} \eta(x) \tag{3.1}$$

ただし，

t ：時刻，$(x, \mathbb{y}) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$：状態変数ベクトル

$f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$，$\mathbb{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$

$(a, \mathbb{b}) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$：定数ベクトル

とする．ここで，f，$\mathbb{g}$ は t に関して周期 T の周期関数であるとする．また，$\eta(x)$は，プライザッハモデルによるヒステリシス関数

$$x = H(\eta) \tag{3.2}$$

の逆関数で与えられるものとする．以後，表記の便宜のため，

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ \mathbb{y} \end{bmatrix},\ \ \mathbb{f}(t,\mathbb{x}) = \begin{bmatrix} f(t,x,\mathbb{y}) \\ \mathbb{g}(t,x,\mathbb{y}) \end{bmatrix},\ \ \mathbb{a} = \begin{bmatrix} a \\ \mathbb{b} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

として，式(3.1) を，

$$d\mathbb{x}/dt = \mathbb{f}(t,\mathbb{x}) + \mathbb{a}\,\eta(x) \tag{3.4}$$

とも書くことにする．

解析を数値的に行うために，周期Ｔを分割し，状態方程式(3.4)を離散化する．説明を簡単にするために，周期ＴをＮ等分してEuler法を用いて積分を行うことにすると，式(3.4)から，

$$\mathbb{x}_{[p+1]} = \mathbb{x}_{[p]} + \Delta t\ (\mathbb{f}_{[p]} + \mathbb{a}\,\eta_{[p]}) \tag{3.5}$$

ただし，

$$\begin{aligned} &\Delta t = T/N \ \ , \quad t_{[p]} = t_{[0]} + p\Delta t \\ &\mathbb{f}_{[p]} = \mathbb{f}(t_{[p]}, \mathbb{x}_{[p]}) \ \ , \quad \eta_{[p]} = \eta(x_{[p]}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．ここで，第２章で述べたように，$x_{[p]}$と$\eta_{[p]}$の関係は，

$$\eta_{[p]} = H_{[p]}{}^{-1}(x_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \tag{3.7}$$

あるいは，

$$\mathbf{x}_{[p]} = H_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) \tag{3.8}$$

と表される．以後，$\mathbb{f}_{[p]}$および $H_{[p]}$はそれぞれの変数について微分可能であることを仮定する．

3．1．2　第１変分方程式

次に，周期解の求解や安定性の判別などの解析の際に必要な変分方程式[25]を，ここで導出しておく．

$\mathbb{x}_{[0]}$の微小変化により，$\mathbb{x}$およびηの時点系列が，

$$\mathbb{x}_{[0]}, \mathbb{x}_{[1]}, \cdots, \mathbb{x}_{[p]} \rightarrow \mathbb{x}_{[0]}+\delta\mathbb{x}_{[0]}, \mathbb{x}_{[1]}+\delta\mathbb{x}_{[1]}, \cdots, \mathbb{x}_{[p]}+\delta\mathbb{x}_{[p]}$$

$$\eta_{[0]}, \eta_{[1]}, \cdots, \eta_{[p]} \rightarrow \eta_{[0]}+\delta\eta_{[0]}, \eta_{[1]}+\delta\eta_{[1]}, \cdots, \eta_{[p]}+\delta\eta_{[p]}$$

のように微小変化するとすれば，式(3.5)より，

$$\delta\mathbb{x}_{[p+1]} = \delta\mathbb{x}_{[p]} + \Delta t\ (\delta\mathbb{f}_{[p]} + \mathbb{a}\,\delta\eta_{[p]}) \tag{3.9}$$

ただし，

$$\delta\mathbb{f}_{[p]} = \mathbb{f}(t_{[p]}, \mathbb{x}_{[p]}+\delta\mathbb{x}_{[p]}) - \mathbb{f}(t_{[p]}, \mathbb{x}_{[p]})$$

$$\begin{aligned}\delta\eta_{[p]} = {} & H_{[p]}^{-1}(\mathbf{x}_{[p]}+\delta\mathbf{x}_{[p]} \mid \eta_{[0]}+\delta\eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}+\delta\eta_{[p-1]}) \\ & - H_{[p]}^{-1}(\mathbf{x}_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]})\end{aligned} \tag{3.10}$$

が成り立つ．式(3.10)において，$\delta\mathbb{x}_{[p]}$および$\delta\eta_{[0]}, \cdots, \delta\eta_{[p-1]}$に関して２次以上の項を無視すると，

$$\delta\mathbb{f}_{[p]} = \frac{\partial\mathbb{f}_{[p]}}{\partial\mathbb{x}_{[p]}}\delta\mathbb{x}_{[p]} \tag{3.11}$$

$$\delta\eta_{[p]} = \frac{\partial\eta_{[p]}}{\partial\mathbf{x}_{[p]}}\delta\mathbf{x}_{[p]} + \sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial\eta_{[p]}}{\partial\eta_{[i]}}\delta\eta_{[i]} \tag{3.12}$$

が得られるので，式(3.9),(3.11),(3.12)より，式(3.5)の（初期値に関する）第１変分方程式，

$$\begin{aligned}\delta\mathbb{x}_{[p+1]} = {} & (\mathbb{1} + \Delta t\frac{\partial\mathbb{f}_{[p]}}{\partial\mathbb{x}_{[p]}})\,\delta\mathbb{x}_{[p]} + \mathbb{a}\,\Delta t\frac{\partial\eta_{[p]}}{\partial\mathbf{x}_{[p]}}\delta\mathbf{x}_{[p]} \\ & + \mathbb{a}\,\Delta t\sum_{i=0}^{p-1}\frac{\partial\eta_{[p]}}{\partial\eta_{[i]}}\delta\eta_{[i]}\end{aligned} \tag{3.13}$$

（$\mathbb{1}$：n×n単位行列）

が得られる．式(3.13)右辺第３項は，ηが前時点までの履歴$\eta_{[0]}$、$\cdots$，$\eta_{[p-1]}$の影響を受けることに由来する項で，ηがヒステリシス関数である場合にのみ現れる．以後，この項を履歴項と呼ぶことにする．

履歴項は，変分によるηの履歴の微小変化によって，$\mathbf{x}-\eta$特性が微小変化す

ることから生じる．例えば，(x，η)が，図３．１(ａ)のように，時点$t_{[J]}$までメジャーループに沿って増加し，$t_{[J]}$において減少に転じたとすると，その時点のηの値によって，時点$t_{[J]}$以降の$x-\eta$曲線が変化する．すなわち，$\eta=\eta_{[J]}$（□印）の場合と$\eta=\eta_{[J]}+\delta\eta_{[J]}$（○印）の場合とでは，$t_{[J]}$以後の$x-\eta$曲線が，曲線ＡとＢのように異なる（図３．１(ａ))．このため，図３．１(ｂ)に示すように，時点$t_{[P]}$（$>t_{[J]}$）におけるηの微小変化$\delta\eta_{[P]}$は，xの微小変化$\delta x_{[P]}$による微小変化$\delta\eta_X$と，曲線ＡとＢの違いに由来する微小変化$\delta\eta_H$の和，

$$\delta\eta_{[P]}=\delta\eta_X+\delta\eta_H=\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial x_{[P]}}\delta x_{[P]}+\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial\eta_{[J]}}\delta\eta_{[J]} \qquad (3.14)$$

で与えられる．この場合，式(3.14)の右辺第２項が履歴項に相当する．式(3.14)を一般的に表現した式が式(3.12)である．$x-\eta$特性がメジャーループ上のみを動く場合には，$x-\eta$特性は定曲線となり変化しないので履歴項は現れない．

初期値に関する変分方程式は，次式のように，離散化した状態方程式(3.5)および式(3.7)を $x_{[0]}$で微分することによっても得ることができる．

$$\frac{\partial x_{[P+1]}}{\partial x_{[0]}}=\left(1+\Delta t\frac{\partial f_{[P]}}{\partial x_{[P]}}\right)\frac{\partial x_{[P]}}{\partial x_{[0]}}+a\Delta t\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial x_{[0]}} \qquad (3.15)$$

$$\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial x_{[0]}}=\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial x_{[P]}}\frac{\partial x_{[P]}}{\partial x_{[0]}}+\sum_{I=0}^{P-1}\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial\eta_{[I]}}\frac{\partial\eta_{[I]}}{\partial x_{[0]}} \qquad (3.16)$$

ただし，

$$\partial x_{[0]}/\partial x_{[0]}=1 \qquad (3.17)$$

である．式(3.16)の右辺第２項は履歴項である．

式(3.13),(3.16)の$\partial\eta_{[P]}/\partial x_{[P]}$，$\partial\eta_{[P]}/\partial\eta_{[I]}$は次のようにして計算される．まず，式(3.8)を$x_{[0]}$で微分すると，

$$\frac{\partial x_{[P]}}{\partial x_{[0]}}=\frac{\partial H_{[P]}}{\partial x_{[0]}}=\sum_{I=0}^{P}\frac{\partial H_{[P]}}{\partial\eta_{[I]}}\frac{\partial\eta_{[I]}}{\partial x_{[0]}} \qquad (3.18)$$

となる．式(3.18)の$\partial H_{[P]}/\partial\eta_{[I]}$は２．２．２に述べたようにして求めることができる．式(3.18)より，

$$\frac{\partial\eta_{[P]}}{\partial x_{[0]}}=\frac{1}{\dfrac{\partial H_{[P]}}{\partial\eta_{[P]}}}\left(\frac{\partial x_{[P]}}{\partial x_{[0]}}-\sum_{I=0}^{P-1}\frac{\partial H_{[P]}}{\partial\eta_{[I]}}\frac{\partial\eta_{[I]}}{\partial x_{[0]}}\right) \qquad (3.19)$$

が得られる．式(3.16),(3.19)を比較して，

$$\frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial x_{[p]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}}} \quad , \quad \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \eta_{[i]}} = \frac{-1}{\dfrac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}}} \frac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]}} \tag{3.20}$$

を得る.

連続系(3.4)の場合には，ηの履歴がηの時点系列でなく連続関数で与えられるために，変分方程式の導出が、離散系と比較して困難である.

3.1.3　第2変分方程式

さらに，分岐点の算出などの際に必要な第2変分方程式を，ここで導出しておく. 式(3.15)をさらに,

$$\mathbb{x}_{[0]} = (x_{1[0]},\ x_{2[0]},\ \cdots,\ x_{n[0]})^{tr} \quad (\mathrm{tr}：転置を表す) \tag{3.21}$$

で微分すると，状態方程式(3.5)の（初期値に関する）第2変分方程式,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathbb{x}_{[p+1]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} = &\left(\mathbb{1} + \Delta t \frac{\partial \mathbb{f}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[p]}}\right) \frac{\partial^2 \mathbb{x}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} \\ &+ \Delta t \frac{\partial^2 \mathbb{f}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[p]}{}^2}\left(\frac{\partial \mathbb{x}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}}, \frac{\partial \mathbb{x}_{[p]}}{\partial x_{k[0]}}\right) \\ &+ \mathbb{a} \Delta t \frac{\partial^2 \eta_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}}\end{aligned} \tag{3.22}$$

$(k = 1, \cdots, n)$

ただし,
$$\frac{\partial^2 \mathbb{f}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[p]}{}^2}\left(\frac{\partial \mathbb{x}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}}, \frac{\partial \mathbb{x}_{[p]}}{\partial x_{k[0]}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathbb{f}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[p]} \partial x_{j[p]}} \frac{\partial \mathbb{x}_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \frac{\partial x_{j[p]}}{\partial x_{k[0]}}$$

が得られる. 式(3.22)の $\partial^2 \eta_{[p]} / \partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}$ は次のようにして計算される. まず，式(3.18)をさらに $x_{k[0]}$ で微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} = &\sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]}} \frac{\partial^2 \eta_{[i]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} \\ &+ \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]} \partial \eta_{[j]}} \frac{\partial \eta_{[i]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \frac{\partial \eta_{[j]}}{\partial x_{k[0]}}\end{aligned} \tag{3.23}$$

が得られる. 式(3.23)の $\partial^2 H_{[p]} / \partial \eta_{[i]} \partial \eta_{[j]}$ は，２．２．２に述べたようにして求めることができる. 式(3.23)より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \eta_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}}} \Bigg(&\frac{\partial^2 x_{[p]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]}} \frac{\partial^2 \eta_{[i]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]} \partial x_{k[0]}} \\ &- \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[i]} \partial \eta_{[j]}} \frac{\partial \eta_{[i]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \frac{\partial \eta_{[j]}}{\partial x_{k[0]}} \Bigg)\end{aligned} \tag{3.24}$$

を得る. 式(3.24)のΣ以降の項は，第1変分方程式の履歴項に由来する項であり，これを，第2変分方程式の履歴項と呼ぶことにする.

3．2　不飽和ループを作る周期解

微分方程式(3.4)の周期解($x(t)$, $y(t)$)に対して，$x-\eta$曲線はヒステリシスループを作る．このループの中で，$\eta(x)$の振幅が小さく，ヒステリシス特性の飽和領域に達しないループ，すなわち，

$$-\eta_S < \eta_{min} \leqq \eta(x(t)) \leqq \eta_{max} < \eta_S \tag{3.25}$$

η_{min}：$\eta(x(t))$の最小値　，η_{max}：$\eta(x(t))$の最大値

を満たすようなループを不飽和ループと呼ぶことにする．本節では，周期解が不飽和ループを作る場合について，いくつかの考察を行う．以下，再び，磁性体用語を用いて説明する．

微分方程式(3.4)の定常周期解が不飽和ループを作るとき，定常状態において，プライザッハ分布関数の定義域は，図３．２に示すように，４つの領域，

D_+ ($\eta_u \leqq \eta_{max}$, $\eta_v \leqq \eta_{min}$)：常に正に磁化されている領域

D_- ($\eta_u \geqq \eta_{max}$, $\eta_v \geqq \eta_{min}$)：常に負に磁化されている領域

D_0 ($\eta_u \geqq \eta_{max}$, $\eta_v \leqq \eta_{min}$)：正に磁化されている領域と負に磁化されている領域が混在している領域（ただし，ηの定常振動に伴って，双極子の磁化状態は変化しない）

D_* ($\eta_u \leqq \eta_{max}$, $\eta_v \geqq \eta_{min}$)：ηの定常振動に伴って，双極子が磁化状態を変化させる領域

に分割される．領域D_0において，正に磁化されている部分領域をD_{0+}，負に磁化されている部分領域をD_{0-}と呼ぶことにする．領域D_0は，定常状態に至るまでの過程によってよって，様々な形でD_{0+}とD_{0-}とに分割される．例えば，完全消磁の状態（図３．３）から図３．４(ａ)のように徐々に振幅が増大して定常状態に達する場合には，領域D_0の磁化状態は図３．５(ａ)のようになる．また，図３．４(ｂ)のように飽和の状態から徐々に振幅が減少して．定常状態に達する場合には，領域D_0の磁化状態は図３．５(ｂ)のようになる．

周期解が不飽和ループを作る場合には，領域D_0の磁化状態の違いにより，様々な周期解が存在することがある．

Duffing方程式の非線形項をヒステリシス関数とした，次の系を例にとって考える．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ B\cos t - k\cdot y - \eta(x) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

式(3.26)の周期解の１つを（$x_{@}(t)$, $y_{@}(t)$）とし，それに対応する$x_{@}-$

$\eta(x_{@})$ループは不飽和ループであるとする．このとき，プライザッハモデルにおけるマイナーループの相似性[26]より，

$$x_{\#}(t)=x_{@}(t)+d \qquad (d:\text{定数}) \tag{3.27}$$

に対しても，

$$\eta(x_{\#}(t))=\eta(x_{@}(t)) \tag{3.28}$$

が成り立つ(図３．６参照)．従って，$(x_{\#}(t),\ y_{@}(t))$も微分方程式(3.26)の解となる．dはループがメジャーループに接しない範囲であれば任意の定数であるので，式(3.27)を満たす$x_{\#}(t)$は無数にある．従って，微分方程式(3.26)の周期解は無数に存在することになる．

式(3.27)をみたす周期解の中で，図３．６のループ(－)のようにループがメジャーループの上昇曲線に接している場合の周期解を$(x_{-}(t), y_{@}(t))$とし，ループ(＋)のようにループがメジャーループの下降曲線に接している場合の周期解を$(x_{+}(t), y_{@}(t))$とする．ループがメジャーループの上昇曲線に接するのは図３．７(a)のように領域D_0がすべて負に磁化されている場合であり，下降曲線に接するのは同図(b)のように領域D_0がすべて正に磁化されている場合である．従って，$x_{-}(t)$と，$x_{+}(t)$の間には，

$$x_{+}(t)=x_{-}(t)+d_{max} \tag{3.29}$$

$$d_{max}=\int_{-\eta_s}^{\eta_{min}}\int_{\eta_{max}}^{\eta_s} K(\eta_u,\eta_v)\,d\eta_u\,d\eta_v \tag{3.30}$$

の関係がある．この$x_{-}(t)$およびd_{max}を用いると，式(3.27)をみたす$x_{\#}(t)$を，

$$x_{\#}(t)=x_{-}(t)+d' \tag{3.31}$$

$$0 \leqq d' \leqq d_{max} \tag{3.32}$$

ただし，

$$d'\equiv\iint_{D_{0+}} K(\eta_u,\eta_v)\,d\eta_u\,d\eta_v \tag{3.33}$$

のように表すことができる．

この例にみたように，周期解の作るx－ηループが不飽和ループとなる場合には，微分方程式(3.4)における周期解が有限個にとどまらず，無限集合をなすことがある．この周期解の集合について，詳しくは第７章で述べることにして，次節では，この集合の中の周期解の１つを求める方法について述べる．

3．3　Shooting法を用いた周期解の求解

3.3.1　時点$t_{[0]}$における磁化状態

周期解を，Poincaré写像の不動点を探索することにより求める場合を考える．離散系(3.5)の出発点$\mathbb{x}_{[0]}$に対してその1周期後の値$\mathbb{x}_{[N]}$が等しいと置き，

$$\mathbb{F}(\mathbb{x}_{[0]}) = \mathbb{x}_{[0]} - \mathbb{x}_{[N]} = \mathbb{0} \qquad (3.34)$$

方程式(3.34)を満たす$\mathbb{x}_{[0]}$をNewton法などで探索する[6]．式(3.34)中の$\mathbb{x}_{[N]}$は，$\mathbb{x}_{[0]} = (x_{[0]}, y_{[0]})$から出発して，式(3.5)を$p = 0,\cdots,N-1$について順に計算することにより得られる．しかし，出発点の$x_{[0]}$を与えても，

$$H(-\eta_s) < x_{[0]} < H(\eta_s) \qquad (3.35)$$

の場合には，図3．8に示すように，それに対する$\eta(x_{[0]})$は一意的には定まらない．さらに，図3．9に示すように，点$(x_{[0]}, \eta(x_{[0]}))$を与えても，その点を通る$x-\eta$特性曲線を一意的に定められない．これは，$x_{[0]}$を与えただけでは，時点$t_{[0]}$における，プライザッハの双極子の磁化状態が定まらないためである．そこで，時点$t_{[0]}$における磁化状態を，次のようにして定める．

3．2節で述べたように，定常状態において，分布関数の定義域は，図3．2に示した4つの領域に分けられる．この中の領域D_0の磁化状態は，定常状態に至るまでの過程によりに定まる．しかし，一般に，定常状態に至る過程は様々であり，これを特定することはできない．従って，定常状態に至る過程を適当に仮定して，領域D_0の磁化状態を設定する必要がある　前節の式(3.26)の系の例からも分かるように，仮定する領域D_0の磁化状態が異なれば得られる周期解が異なるので，周期解の集合の中からなるべく所望の解が得られるように領域D_0の磁化状態の設定を行う必要がある．ここでは，領域D_0の磁化状態として，図3．5(a)に示すように，

$\eta_v < \eta_u$　の部分は正に磁化

$\eta_v > \eta_u$　の部分は負に磁化

という状態を仮定することにする．これは，図3．4(a)に示したように，完全消磁の状態から徐々に振幅が増大して定常状態に達する場合に生じる磁化状態である．ただし，第2章では，領域Dの境界をなす線分として図2．4のような斜めの線分は仮定していなかったが，以後，完全消磁の状態を実現できるように，直線

$$\eta_v = -\eta_u \qquad (3.36)$$

上にある線分に限って，斜めの境界線分の存在を許すことにする（従って，2．1節で示したアルゴリズムは付録Bのように変更される）．磁化状態の仮定とし

ては，図３．５（ａ）の状態以外にも，種々考えられるが，その他の磁化状態を仮定する場合については，第７章で述べることにする．

領域D_*は，ηの周期振動によって，磁化状態が変化する領域である．周期解の場合には，ηは，

$$\eta_{[0]},\eta_{[1]},\cdots,\eta_{[N-1]},\eta_{[0]},\eta_{[1]},\cdots,\eta_{[N-1]}$$

の繰り返しとなることから，$x_{[0]}$の他に，時点$t_{[0]}$までのηの履歴として($\eta_{[1]},\eta_{[2]},\cdots,\eta_{[N-1]}$)を与えれば$D_*$の磁化状態が定まる．このとき，$\eta_{[0]}$は，

$$\eta_{[0]}=H_{[0]}^{-1}(x_{[0]}\mid\eta_{[1]},\cdots,\eta_{[N-1]}) \tag{3.37}$$

と表される．このように，式(3.5)を$p=0$から順に計算していくためには，一般には，出発点の$x_{[0]}$のみならず，ηの時点系列($\eta_{[1]},\cdots,\eta_{[N-1]}$)を与える必要がある．しかし，次のようにして出発点（$x_{[0]}$，$t_{[0]}$）を選べば，時点$t_{[0]}$において時点系列($\eta_{[1]},\cdots,\eta_{[N-1]}$)は不要となる．

D_0の磁化状態を図３．５（ａ）のように仮定すると，$|\eta(x)|$が最大値（これを，η_Mとおく）をとる時刻において，磁化状態は図３．１０（ａ）（ｂ）のようになり，$\eta(x(t))$の周期振動の波形によらずに，η_Mの値のみによって磁化状態が定まる．また，このときのxの値をx_Mとすると，η_Mとx_Mの関係は，ηの履歴によらずに，

$$x_M=H_I(\eta_M) \tag{3.38}$$

$H_I(\eta)$：$H(\eta)$の初期磁化特性（完全消磁の状態からηを単調に増加または減少して得られる特性）

と表される．従って，$|\eta(x)|$が最大となる時刻を時点$t_{[0]}$に選ぶと，$x_{[0]}$を与えるだけで，

$$\eta_{[0]}=\eta_I(x_{[0]}) \tag{3.39}$$

$\eta_I(x)=H_I^{-1}(x)$：$\eta(x)$の初期磁化特性

のようにηの値を定めることができ，式(3.37)のように，$t_{[0]}$以前の履歴，$\eta_{[1]},\cdots,\eta_{[N-1]}$を必要としない．従って，出発点の$x_{[0]}$および$t_{[0]}$を与えれば，式(3.5)を$p=0,\cdots,N-1$について順に計算して行くことができる．以上の理由から，周期解を求める際には，$|\eta(x)|$が最大になる時刻を時点$t_{[0]}$に選ぶことにする．ただし，$|\eta(x)|$が最大となる時刻は未知であるので，Poincaré写像の不動点の探索の際，$x_{[0]}$のみならず，$t_{[0]}$も未知数として探索する必要がある．

3.3.2 周期解の求解

3.3.1で述べたことより，方程式(3.34)の代わりに，$x_{[0]}, y_{[0]}, t_{[0]}$を未知数とする方程式，

$$\mathbb{F}(x_{[0]}, y_{[0]}, t_{[0]}) = \begin{bmatrix} x_{[0]} - x_{[N]} \\ y_{[0]} - y_{[N]} \\ f(t_{[0]}, x_{[0]}, y_{[0]}) + a \cdot \eta_{I}(x_{[0]}) \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{3.40}$$

を解いて周期解を求める．ここで，方程式(3.40)の第１式，第２式は，$\mathbb{x}_{[0]}$がPoincaré写像の不動点となるための条件式であり，第３式は，時刻$t_{[0]}$においてxが極値をとる（従って，$\eta(x)$が極値をとる）ための条件式である．方程式(3.40)の，$\mathbb{x}_{[N]} = (x_{[N]}, y_{[N]})$は，状態方程式(3.5)の計算を，初期値（$\mathbb{x}_{[0]}$, $t_{[0]}$）から出発して$p=0,\cdots,N-1$について順に行うことにより得られる．従って，$\mathbb{x}_{[N]}$は$\mathbb{x}_{[0]}$のみならず$t_{[0]}$の関数であり，

$$\mathbb{x}_{[N]} = \mathbb{x}_{[N]}(\mathbb{x}_{[0]},\ t_{[0]}) \tag{3.41}$$

と書くことができる．

方程式(3.40)の解法にはNewton法を用いるとする．すなわち，適当な推測値$x_{[0]}^{(0)}, y_{[0]}^{(0)}, t_{[0]}^{(0)}$を与えて，Newton反復，

$$\begin{bmatrix} x_{[0]}^{(j+1)} \\ y_{[0]}^{(j+1)} \\ t_{[0]}^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{[0]}^{(j)} \\ y_{[0]}^{(j)} \\ t_{[0]}^{(j)} \end{bmatrix} - (D\mathbb{F})^{-1}\mathbb{F}(x_{[0]}^{(j)}, y_{[0]}^{(j)}, t_{[0]}^{(j)}) \tag{3.42}$$

$$(j = 0, 1, \cdots)$$

を繰り返すことにより，解を求める．ここで，$D\mathbb{F}$は，

$$D\mathbb{F}(x_{[0]}, y_{[0]}, t_{[0]})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\partial x_{[N]}}{\partial x_{[0]}} & -\dfrac{\partial x_{[N]}}{\partial y_{[0]}} & -\dfrac{\partial x_{[N]}}{\partial t_{[0]}} \\ -\dfrac{\partial y_{[N]}}{\partial x_{[0]}} & \mathbb{1}_{n-1} - \dfrac{\partial y_{[N]}}{\partial y_{[0]}} & -\dfrac{\partial y_{[N]}}{\partial t_{[0]}} \\ \dfrac{\partial f_{[0]}}{\partial x_{[0]}} + a\dfrac{\partial \eta_{I}}{\partial x_{[0]}} & \dfrac{\partial f_{[0]}}{\partial y_{[0]}} & \dfrac{\partial f_{[0]}}{\partial t_{[0]}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{1} - \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial t_{[0]}} \\ \dfrac{\partial e_{[0]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} & \dfrac{\partial e_{[0]}}{\partial t_{[0]}} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

（$\mathbb{1}_{n-1}$：(n-1)×(n-1)単位行列　，$e_{[0]} = f_{[0]} + a\,\eta_{I}(x_{[0]})$）

で与えられるJacobian行列である.

ここで，方程式(3.40)の第３式は，時刻$t_{[0]}$において，$\eta(x)$が極値をとるという条件にすぎない．従って，方程式(3.40)の解が求められた後，$x_{[0]}$が式(3.35)を満たす場合（不飽和の場合）には，時刻$t_{[0]}$において$|\eta(x)|$が最大であるかどうか，すなわち，

$$|\eta_{[0]}| \geqq |\eta_{[p]}| \quad (p=1,\cdots,N-1) \tag{3.44}$$

が満たされるかどうかを調べ，式(3.44)が満たされない場合は推測値($x_{[0]}{}^{(0)}$, $y_{[0]}{}^{(0)}, t_{[0]}{}^{(0)}$)を変えて，Newton法をやり直す必要がある．$x_{[0]}$が式(3.35)を満たさない場合（飽和している場合）には，$x_{[0]}$に対して，$\eta(x_{[0]})$が一意的に定まるので，式(3.44)の条件を満たす必要はない．

式(3.43)のJacobian行列DFの中の，$\partial \mathbb{x}_{[N]}/\partial \mathbb{x}_{[0]}$は，初期値に関する第１変分方程式(3.15)の計算を，式(3.17)から出発して，$p=0$から$N-1$まで行うことにより得られる．また，$\partial \mathbb{x}_{[N]}/\partial t_{[0]}$についても同様に，$t_{[0]}$に関する第１変分方程式（付録C．１参照）を用いて得ることができる．

３．４　Parallel Shooting法を用いた周期解の求解

前節では，方程式(3.40)を解く際に，状態方程式(3.5)において，始点の時刻$t_{[0]}$を$|\eta(x)|$が最大となる時刻とした．従って，$|\eta_{max}| > |\eta_{min}|$の場合は$\eta(x)$が最大となる時刻を$t_{[0]}$にとり，$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$の場合は$\eta(x)$が最小となる時刻を$t_{[0]}$にとることになる．ここで，系のあるパラメータの変化に対する，方程式(3.40)の解の変化を考える．詳しくは第４章で述べるが，

$$\mathbb{F}(\mathbb{x}_{[0]},\ t_{[0]};\ \alpha) = \mathbb{0} \quad (\alpha \in \mathbb{R}：系のパラメータ) \tag{3.45}$$

とおき，式(3.40)を満たす$(\mathbb{x}_{[0]}, t_{[0]}, \alpha)$の集合（解曲線）を連続変形法(21)(22)(23)を用いて追跡することにより，パラメータαの変化に対する周期解の変化を調べることができる．その際に，パラメータの変化の変化により，図３．１１(a)に示すように$|\eta_{max}| > |\eta_{min}|$である周期解から$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$である周期解へ，またはその逆への移行が生じることがある．この時，始点$t_{[0]}$とするべき時刻（$|\eta(x)|$が最大となる時刻）が不連続に変化することになり，解曲線$(\mathbb{x}_{[0]}, t_{[0]}, \alpha)$の追跡に支障が生じる．同様の問題は，図３．１１(b)のように，パラメータの変化によって，２つの極大値（または極小値）の大小が交代する場合にも生じる．

また，周期解の作るヒステリシスループが不飽和ループとなる場合やマイナーループを持つ場合には，図３．１２に示すように，ｘが増加から減少に，または，減少から増加に転じる時点において，$\eta(x)$の微係数に不連続を生じる．このため，式(3.15),(3.22)のような変分方程式の積分が正確に行われないために，特異点の算出（第４章）などの際に支障が生じる場合がある．

以上のような問題を回避するためには，$\eta(x)$が極値をとる時刻を境界として，１周期を幾つかのsubinterval（以下，区間と呼ぶ）に分割した上で，parallel shooting[5]の手法を応用して解析することが効果的である．以下，簡単のために，$\eta(x)$が最大となる時刻と最小となる時刻とで１周期を２つの区間に分割する場合について説明する（$\eta(x)$が極値をとる時刻が多数ある場合には，必要に応じて区間数を増やせばよい）．

３．４．１　状態方程式

$\eta(x)$が最大となる時刻を積分の始点（$t_{[1,0]}$とおく）とし，１周期$t_{[1,0]}$～$t_{[1,0]}+T$を$\eta(x)$が最小となる時刻（$t_{[2,0]}$とおく）で２分する．次に，得られた２つの区間，

区間１：$t_{[1,0]} \leqq t \leqq t_{[2,0]}$

区間２：$t_{[2,0]} \leqq t \leqq t_{[1,0]}+T$

それぞれを，さらにＮ等分して，状態方程式(3.4)を離散化すると，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{x}_{[1,p+1]} &= \mathbb{x}_{[1,p]} + \Delta t_1 (\mathbb{f}_{[1,p]} + \mathbb{a}\,\eta_{[1,p]}) \\
&\quad \Delta t_1 = (t_{[2,0]} - t_{[1,0]})/N \\
\mathbb{x}_{[2,p+1]} &= \mathbb{x}_{[2,p]} + \Delta t_2 (\mathbb{f}_{[2,p]} + \mathbb{a}\,\eta_{[2,p]}) \\
&\quad \Delta t_2 = (t_{[1,0]} + T - t_{[2,0]})/N
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&t_{[q,p]} = t_{[q,0]} + p\Delta t_q\ , \qquad \mathbb{f}_{[q,p]} = \mathbb{f}(t_{[q,p]}, \mathbb{x}_{[q,p]}) \\
&\eta_{[q,p]} = \eta(x_{[q,p]}) \qquad\qquad (p = 0,\cdots,N-1,\ q = 1,2)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

が得られる．

この場合においても，ηが最大となる時点において，図３．１０(ａ)($|\eta_{max}| \geqq |\eta_{min}|$の場合)，(ｂ)($|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$の場合）に示す双極子の磁化状態を仮定する．このとき，$\eta_{[q,p]}$は次のように表されることになる．

(i)　$|\eta_I(x_{[1,0]})| \geqq |\eta_I(x_{[2,0]})|$のとき

$$\eta_{[1,0]} = \eta_I(x_{[1,0]}) = H_I{}^{1}(x_{[1,0]}) \tag{3.48}$$

となり，このとき，$\eta_{[1,p]}$ ($p=1,\cdots,N-1$) は，

$$\eta_{[1,p]}=H_{[1,p]}{}^{-1}(x_{[1,p]} \mid \eta_{[1,0]},\cdots,\eta_{[1,p-1]}) \tag{3.49}$$

と表される．また，$\eta_{[2,p]}$ は，区間２におけるηの履歴のみならず，前区間の区間１におけるηの履歴の影響を受けるので，

$$\begin{aligned}\eta_{[2,p]}&=\eta(x_{[2,p]})\\&=H_{[2,p]}{}^{-1}(x_{[2,p]} \mid \eta_{[1,0]},\cdots,\eta_{[1,N-1]},\eta_{[2,0]},\cdots,\eta_{[2,p-1]})\end{aligned} \tag{3.50}$$

で表される．但し，仮定より，

$$\eta_{[2,0]}<\eta_{[1,p]}<\eta_{[1,0]} \quad (1\leqq p\leqq N-1) \tag{3.51}$$

であるので，プライザッハモデルの原理により，時点 $t_{[2,0]}$以降において $\eta_{[1,1]},\cdots,\eta_{[1,N-1]}$の履歴を考慮する必要はないので，$\eta_{[2,p]}$ は，もう少し簡単に，

$$\eta_{[2,p]}=H_{[2,p]}{}^{-1}(x_{[2,p]} \mid \eta_{[1,0]},\eta_{[2,0]},\cdots,\eta_{[2,p-1]}) \tag{3.52}$$

と表される．

(ii) $|\eta_I(x_{[1,0]})|<|\eta_I(x_{[2,0]})|$ のとき

同様にして，

$$\eta_{[2,0]}=\eta_I(x_{[2,0]})=H_I{}^{-1}(x_{[2,0]}) \tag{3.53}$$

$$\eta_{[2,p]}=H_{[2,p]}{}^{-1}(x_{[2,p]} \mid \eta_{[2,0]},\cdots,\eta_{[2,p-1]}) \tag{3.54}$$

$$\eta_{[1,p]}=H_{[1,p]}{}^{-1}(x_{[1,p]} \mid \eta_{[2,0]},\eta_{[1,0]},\cdots,\eta_{[1,p-1]}) \tag{3.55}$$

と表される．

3.4.2 変分方程式

状態方程式(3.46)を $\mathbb{x}_{[1,0]}$で微分すると，$\mathbb{x}_{[1,0]}$に関する第１変分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,p+1]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}&=\left(\mathbb{1}+\Delta t_1\frac{\partial \mathbb{f}_{[1,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,p]}}\right)\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}+\mathbb{a}\Delta t_1\frac{\partial \eta_{[1,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}\\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,p+1]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}&=\left(\mathbb{1}+\Delta t_2\frac{\partial \mathbb{f}_{[2,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,p]}}\right)\frac{\partial \mathbb{x}_{[2,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}+\mathbb{a}\Delta t_2\frac{\partial \eta_{[2,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}\end{aligned} \tag{3.56}$$

($p=1,\ \cdots,\ N-1$)

が得られる．ただし，出発点は，

$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}=\mathbb{1} \quad , \quad \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}=\mathbb{O} \tag{3.57}$$

である．ここで，

(i)　$|\eta_I(x_{[1,0]})| \geqq |\eta_I(x_{[2,0]})|$のとき

式(3.49),(3.52)より，

$$
\begin{aligned}
x_{[1,p]} &= H_{[1,p]}(\eta_{[1,p]} \mid \eta_{[1,0]},\cdots,\eta_{[1,p-1]})\\
x_{[2,p]} &= H_{[2,p]}(\eta_{[2,p]} \mid \eta_{[1,0]},\eta_{[2,0]},\cdots,\eta_{[2,p-1]})
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

であるから，これを$x_{[1,0]}$で微分して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_{[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,l]}} \frac{\partial \eta_{[1,l]}}{\partial x_{[1,0]}}\\
\frac{\partial x_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} + \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,l]}} \frac{\partial \eta_{[2,l]}}{\partial x_{[1,0]}}
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_{[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,l]}} \frac{\partial \eta_{[1,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right)\\
\frac{\partial \eta_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,l]}} \frac{\partial \eta_{[2,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right)
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

が得られる．区間２の出発点において，$\partial x_{[2,0]} / \partial x_{[1,0]} = 0$であるが，式(3.60)より，

$$
\frac{\partial \eta_{[2,0]}}{\partial x_{[1,0]}} = \frac{-1}{\dfrac{\partial H_{[2,0]}}{\partial \eta_{[2,0]}}} \frac{\partial H_{[2,0]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} \quad (\neq 0)
\tag{3.61}
$$

であるので，$\partial x_{[2,p]} / \partial x_{[1,0]}$（$p = 1,\cdots,N$）が存在する（０とならない）．すなわち，$\eta_{[2,p]}$が区間１の履歴の影響を受けるために，区間２においても$x_{[1,0]}$に関する変分方程式を考慮する必要がある．

(ii)$|\eta_I(x_{[1,0]})| < |\eta_I(x_{[2,0]})|$のとき

同様にして，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_{[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,l]}} \frac{\partial \eta_{[1,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right)\\
\frac{\partial \eta_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,l]}} \frac{\partial \eta_{[2,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right)
\end{aligned}
\tag{3.62}
$$

が得られる．よって，区間２については，式(3.56),(3.57),(3.62)より，

$$
\frac{\partial x_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = 0 \qquad (p = 0,\cdots,N)
\tag{3.63}
$$

が得られる．すなわち，$\eta_{[2,p]}$は区間１の履歴の影響を受けないので，区間２において$\mathbb{x}_{[1,0]}$に関する変分方程式を考慮する必要はない．

$\mathrm{t}_{[1,0]}$，$\mathbb{x}_{[2,0]}$などについての第１変分方程式も同様にして得られる（付録Ｃ．２に状態方程式(3.46)の第１変分方程式をまとめて示す）．また，状態方程式(3.46)の第２変分方程式も，第１変分方程式から同様にして得ることができる．

３．４．３　周期解の求解

周期解は，未知数（$\mathbb{x}_{[1,0]}$，$\mathbb{x}_{[2,0]}$，$\mathrm{t}_{[1,0]}$，$\mathrm{t}_{[2,0]}$）に対する方程式，

$$\mathbb{F}(\mathbb{x}_{[1,0]},\mathbb{x}_{[2,0]},\mathrm{t}_{[1,0]},\mathrm{t}_{[2,0]})=\begin{bmatrix}\mathbb{x}_{[1,0]}-\mathbb{x}_{[2,N]}\\ \mathbb{x}_{[2,0]}-\mathbb{x}_{[1,N]}\\ \mathrm{f}_{[1,0]}+\mathrm{a}\,\eta_{[1,0]}\\ \mathrm{f}_{[2,0]}+\mathrm{a}\,\eta_{[2,0]}\end{bmatrix}=\mathbb{0} \tag{3.64}$$

を解くことにより求められる．ただし，方程式(3.64)の第１，２式は，$\mathbb{x}_{[1,0]}$がPoincaré写像の不動点となるための条件式であり，第３，４式は，時点$\mathrm{t}_{[1,0]}$および$\mathrm{t}_{[2,0]}$においてxが極値をとるための条件式である．この場合，$\mathrm{t}_{[1,0]}$と$\mathrm{t}_{[2,0]}$の双方を独立変数にとっているので，$|\eta_{max}|$と$|\eta_{min}|$の大小が交代しても解曲線の追跡に支障は生じない．また，xが極値をとる時刻を区間の境界としたことにより，$\eta(\mathrm{x})$の微係数が不連続となる時刻を積分区間内から除くことができる．

方程式(3.64)の，$\mathbb{x}_{[1,N]}$,$\mathbb{x}_{[2,N]}$は，状態方程式(3.46)の計算を，初期値($\mathbb{x}_{[1,0]}$,$\mathrm{t}_{[1,0]}$)および($\mathbb{x}_{[2,0]}$,$\mathrm{t}_{[2,0]}$)から出発して，それぞれ$\mathrm{p}=0,\cdots,N-1$について順に行うことにより得られる．ただし，次のように，$\eta(\mathrm{x})$が前区間の履歴の影響を受けることに留意する必要がある．

(i)　$|\eta_1(\mathrm{x}_{[1,0]})|\geqq|\eta_1(\mathrm{x}_{[2,0]})|$のとき

式(3.46),(3.47),(3.49)より，$\mathbb{x}_{[1,N]}$は，$\mathbb{x}_{[1,0]}$および$\mathrm{t}_{[1,0]}$,$\mathrm{t}_{[2,0]}$の関数であり，

$$\mathbb{x}_{[1,N]}=\mathbb{x}_{[1,N]}(\mathbb{x}_{[1,0]},\ \mathrm{t}_{[1,0]},\ \mathrm{t}_{[2,0]}) \tag{3.65}$$

と表される．式(3.46),(3.47),(3.52)より，$\mathbb{x}_{[2,N]}$は，$\mathbb{x}_{[2,0]}$,$\mathrm{t}_{[2,0]}$,$\mathrm{t}_{[1,0]}$のみならず，$\eta_{[1,0]}$の関数でもあるので，

$$\mathbb{x}_{[2,N]}=\mathbb{x}_{[2,N]}(\mathbb{x}_{[2,0]},\ \mathrm{t}_{[2,0]},\ \mathrm{t}_{[1,0]},\ \eta_{[1,0]}) \tag{3.66}$$

と表される．

(ii) $|\eta_I(\mathbb{x}_{[1,0]})| < |\eta_I(\mathbb{x}_{[2,0]})|$ のとき

同様にして，

$$\mathbb{x}_{[1,N]} = \mathbb{x}_{[1,N]}(\mathbb{x}_{[1,0]},\ t_{[1,0]},\ t_{[2,0]},\ \eta_{[2,0]}) \tag{3.67}$$

$$\mathbb{x}_{[2,N]} = \mathbb{x}_{[2,N]}(\mathbb{x}_{[2,0]},\ t_{[2,0]},\ t_{[1,0]}) \tag{3.68}$$

と表される．

$\mathbb{F}$ のJacobian行列の計算は，３．３節と同様にして，変分方程式(3.56)などを利用して得ることができる（付録C．３参照）．

３．５　周期解の安定判別

３．５．１　領域D_0の磁化状態の違いによる安定性の違い

３．３節あるいは３．４節で述べた方法で，微分方程式(3.4)の周期解の一つ（これを$\mathbb{x}_@(t)$とおく）が得られたとし，この周期解は不飽和ループを作るとする．３．３節および３．４節では，図３．５(a)のようなD_0の磁化状態（図の領域D_{0+}を$D_{0+@}$とする）を仮定していた．微分方程式(3.4)の周期解の集合の中には，仮定するD_0の磁化状態のみが$\mathbb{x}_@(t)$と異なる周期解，すなわち，

$$\mathbb{x}_\#(t) = \mathbb{x}_@(t) \tag{3.69}$$

かつ，

$$D_{0+\#} \neq D_{0+@} \tag{3.70}$$

$$\iint_{D_{0+\#}} K\ d\eta_u d\eta_v = \iint_{D_{0+@}} K\ d\eta_u d\eta_v \tag{3.71}$$

（$D_{0+\#}$：$\mathbb{x}_\#(t)$に対して仮定される領域D_{0+}）

を満たす周期解$\mathbb{x}_\#(t)$が存在する．これは，プライザッハモデルの原理より，式(3.71)が成り立っていれば，

$$\eta(\mathbb{x}_\#(t)) = \eta(\mathbb{x}_@(t)) \tag{3.72}$$

が成立するからである．$\mathbb{x}_@(t)$と$\mathbb{x}_\#(t)$は領域D_{0+}の形が異なるだけの同じ周期解であるが，領域D_{0+}の形が異なるために，$\mathbb{x}_@(t)$と$\mathbb{x}_\#(t)$とでは周期解の安定性が異なる場合がある．これは，

$$H(\eta_@) = H(\eta_\#) \tag{3.73}$$

（ただし，$\eta_@ = \eta(\mathbb{x}_@)$，$\eta_\# = \eta(\mathbb{x}_\#)$）

であっても，微小変分$\delta\eta$を与えると，

$$H(\eta_{@}+\delta\eta)\neq H(\eta_{\#}+\delta\eta) \tag{3.74}$$

となる場合があるためである．これは，以下に述べる理由による．

ここでは，３．４節で述べた，１周期を２区間に分割するparallel shooting法を用いる場合を考える．時点$t_{[1,0]}$（ηが最大となる時点）において，$\eta_{[1,0]}$に微小変化$\delta\eta_{[1,0]}$（＞０）を与えたとし，この微小変化による$H(\eta)$の変化量を$\delta H_{[1,0]}$とする．時点$t_{[1,0]}$においてD_0の磁化状態が異なると，同じ微小変化$\delta\eta_{[1,0]}$を与えても，図３．１３(a)(b)に示すように領域$D_{[1,0]}$の変化量の違いのために$\delta H_{[1,0]}$が異なる．すなわち，$\delta H_{[1,0]}$は式(2.25)より，

$$\begin{aligned}\delta H_{[1,0]} &= \frac{\partial H_{[1,0]}}{\partial\eta_{[1,0]}}\delta\eta_{[1,0]} \\ &= \delta\eta_{[1,0]}\left\{\int_{\partial D_{[1,0]}/\partial\eta_{[1,0]}} K(\eta_{[1,0]},\eta_v)\,d\eta_v + 1_s\right\}\end{aligned} \tag{3.75}$$

で与えられるが，領域D_0の磁化状態が異なると，境界線分$\partial D_{[1,0]}/\partial\eta_{[1,0]}$が異なるために，$\delta H_{[1,0]}$が異なる．同様のことは，他の時点における境界線分$\partial D_{[q,p]}/\partial\eta_{[1,0]}$についても言える．$\eta_{[q,p]}$（$p=0,\cdots,N-1$，$q=1,2$）が等しくても，図３．１４に示すように，領域$D_0$の磁化状態によって$\partial D_{[q,p]}/\partial\eta_{[1,0]}$は異なる．また，境界線分$\partial D_{[q,p]}/\partial\eta_{[2,0]}$についても同様のことが言える．しかし，境界線分$\partial D_{[q,p]}/\partial\eta_{[j,i]}$（$i\neq 0$，$j=1,2$）は，領域$D_{\#}$（$\eta_{min}\leqq\eta_u\leqq\eta_{max}$，$\eta_{min}\leqq\eta_v\leqq\eta_{max}$）の範囲内に存在するので，領域$D_0$の磁化状態の影響を受けない．

このように，周期解が不飽和ループを作る場合，領域D_0の磁化状態により周期解の安定性が異なる．従って，周期解が無限集合をなす場合，３．３節あるいは３．４節に述べた方法で周期解の１つを得て安定判別ができたとしても，その判別結果から，他の周期解の安定性を知ることはできない．また，領域D_0の磁化状態を，式(3.69),(3.71)を満たすものに限ったとしても，様々な長さの境界線分$\partial D_{[q,p]}/\partial\eta_{[j,0]}$（$j=1,2$）を考えることができ，その全ての場合について安定判別をすることは容易でない．そこで，以下のように磁化状態をいくつか仮定し，その場合についてのみ安定判別を行うことにする．

３．４節で述べた仮定より，時点$t_{[1,0]}$，$t_{[2,0]}$において，

$$\eta_{[1,0]}=\eta_{max}\quad,\quad \eta_{[2,0]}=\eta_{min} \tag{3.76}$$

となっている．ここでは，

$$|\eta_{max}|\geqq|\eta_{min}|$$

を仮定し，次の２つの場合を考える．

① 図３．４（ａ）のように完全消磁の状態から振幅が徐々に大きくなって，定常状態に達する場合．この場合，磁化状態は図３．５（ａ）のようになっている．時点 $t_{[1,0]}$ および $t_{[2,0]}$ において，η が微小変化すると，積分領域Ｄは図３．１５（ａ）（ｂ）のように微小変化する．従って，境界線分は，

$$\begin{aligned} &\partial D_{[1,0]}/\partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max},\ -\eta_{max} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\partial D_{[2,0]}/\partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max},\ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned} \tag{3.77}$$

となる．

② 図３．４（ｂ）のように振幅が徐々に小さくなって定常状態に達する場合，あるいは，図３．４（ｃ）のように振幅の大きさが振動しながら定常状態に達する場合．この場合，磁化状態は図３．５（ｂ）のようになっている．時点 $t_{[1,0]}$ および $t_{[2,0]}$ において，η が微小変化すると，積分領域Ｄは図３．１６（ａ）（ｂ）のように微小変化する．従って，境界線分は，

$$\begin{aligned} &\partial D_{[1,0]}/\partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max},\ \eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\partial D_{[2,0]}/\partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max},\ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned} \tag{3.78}$$

となる．

①の磁化状態は，３．３節および３．４節において周期解を求める際に仮定した状態である．②の磁化状態（図３．５（ｂ））は，３．３および３．４節で仮定した状態とは異なっている．しかし，式(3.78)が成り立っていれば特に図３．５（ｂ）のような形の磁化状態を仮定する必要はなく，従って，図３．１７（ａ）（ｂ）に示すように，磁化状態の形は図３．４（ａ）の状態と等しく，境界線分 $\partial D_{[q,0]}/\partial \eta_{[q,0]}$ （$q=1,2$）についてのみ式(3.78)が成り立っていると仮定してもよい．

本論文では，上の①②の状態を代表的な磁化状態と考えて，この２つの場合についてのみ安定判別を行うことにする．すなわち，３．４節に述べた方法で周期解を求めた場合，その周期解に対して，式(3.77)および式(3.78)の境界線分の２つの場合を仮定して（式(3.78)を仮定する場合の磁化状態は図３．１７に示す状態とする），安定判別を行うことにする．ただし，$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$ の場合は，式(3.77)の代わりに，境界線分は，

$$\begin{aligned} &\partial D_{[1,0]}/\partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max},\ \eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\partial D_{[2,0]}/\partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq -\eta_{min},\ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned} \tag{3.79}$$

を用いるとする（図３．１８参照）．また，３．３節に述べた方法で周期解を求めた場合には，境界線分は，

① $|\eta_{max}| \geqq |\eta_{min}|$ の場合

$$\partial D_{[0]} / \partial \eta_{[0]} : (\eta_u = \eta_{max},\ -\eta_{max} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \tag{3.80}$$

$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$ の場合

$$\partial D_{[0]} / \partial \eta_{[0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq -\eta_{min},\ \eta_v = \eta_{min}) \tag{3.81}$$

② $|\eta_{max}| \geqq |\eta_{min}|$ の場合

$$\partial D_{[0]} / \partial \eta_{[0]} : (\eta_u = \eta_{max},\ \eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \tag{3.82}$$

$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$ の場合

$$\partial D_{[0]} / \partial \eta_{[0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max},\ \eta_v = \eta_{min}) \tag{3.83}$$

の２つの場合を仮定して安定判別を行う．

３．５．２　安定判別の方法

通常，周期解の安定性は，変分方程式の特性数[25]から判別できる．ところが，変分方程式(3.15),(3.56)などは，履歴項の存在のため，周期係数ではあるが同次形の微分方程式（を離散化したもの）ではなく，特性数が定義されない．そこで，ここでは，次のように特性数による方法に相当する方法で安定性を判別する．

３．５．２．１　［３．３節の方法で周期解を求める場合］

時点 $t_{[0]}$ において，$\mathbf{x}_{[0]}$ に摂動 $\delta \mathbf{x}_{[0]}$ が与えられたとすると，式(3.41)より，１周期後の摂動量 $\delta \mathbf{x}_{[N]}$ は，

$$\delta \mathbf{x}_{[N]} = \frac{\partial \mathbf{x}_{[N]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} \delta \mathbf{x}_{[0]} \tag{3.84}$$

で与えられる．従って，周期解に摂動が加わった場合における，時間の経過に伴う摂動量の増減は，$\partial \mathbf{x}_{[N]} / \partial \mathbf{x}_{[0]}$ の固有値から評価できると考えられる．そこで，方程式(3.40)から得られた周期解の初期値($\mathbf{x}_{[0]}$, $\mathbf{y}_{[0]}$, $t_{[0]}$)に対して，式(3.80)または式(3.81)，および，式(3.82)または式(3.83)をそれぞれ仮定した場合について，$\partial \mathbf{x}_{[N]} / \partial \mathbf{x}_{[0]}$ とその固有値を求め，全ての固有値の絶対値が１未満であればその周期解は安定，絶対値が１を越える固有値が存在すれば周期解は不安定であると判定することにする．以後，式(3.80)または式(3.81)を仮定して判別する方法を安定判別法①，式(3.82)または式(3.83)を仮定して判別する方法を安定判別法②と呼ぶことにする．

履歴項のない場合には，変分方程式(3.15)は同次形微分方程式を離散化したものとなるので，$\partial \mathbf{x}_{[N]} / \partial \mathbf{x}_{[0]}$ の固有値は，変分方程式の特性数と一致する．

3.5.2.2 ［3．4節の方法で周期解を求める場合］

上の場合と同様に考えて，次のようにして安定性を判別する．

(i) $|\eta_I(x_{[1,0]})| \geqq |\eta_I(x_{[2,0]})|$のとき

時点$t_{[1,0]}$において，$x_{[1,0]}$に摂動$\delta x_{[1,0]}$が与えられたとすると，式(3.65)より，時点$t_{[2,0]}=t_{[1,N]}$における摂動量$\delta x_{[2,0]}$は，

$$\delta x_{[2,0]} = \delta x_{[1,N]} = \frac{\partial x_{[1,N]}}{\partial x_{[1,0]}} \delta x_{[1,0]} \tag{3.85}$$

で与えられる．従って，式(3.66),(3.85)より，時点$t_{[2,N]}$（$=t_{[1,0]}+T$）における摂動量$\delta x_{[2,N]}$は，

$$\begin{aligned}\delta x_{[2,N]} &= \frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial x_{[2,0]}} \delta x_{[2,0]} + \frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \delta \eta_{[1,0]} \\ &= \left(\frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial x_{[2,0]}} \frac{\partial x_{[1,N]}}{\partial x_{[1,0]}} + \frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} \right) \delta x_{[1,0]}\end{aligned} \tag{3.86}$$

で与えられる．従って，式(3.77)および式(3.78)をそれぞれ仮定した場合について，行列，

$$\frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial x_{[2,0]}} \frac{\partial x_{[1,N]}}{\partial x_{[1,0]}} + \frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} \tag{3.87}$$

を求め，この行列の固有値の絶対値が全て1未満であれば周期解は安定，絶対値が1を越える固有値が存在すれば周期解は不安定と判別する．

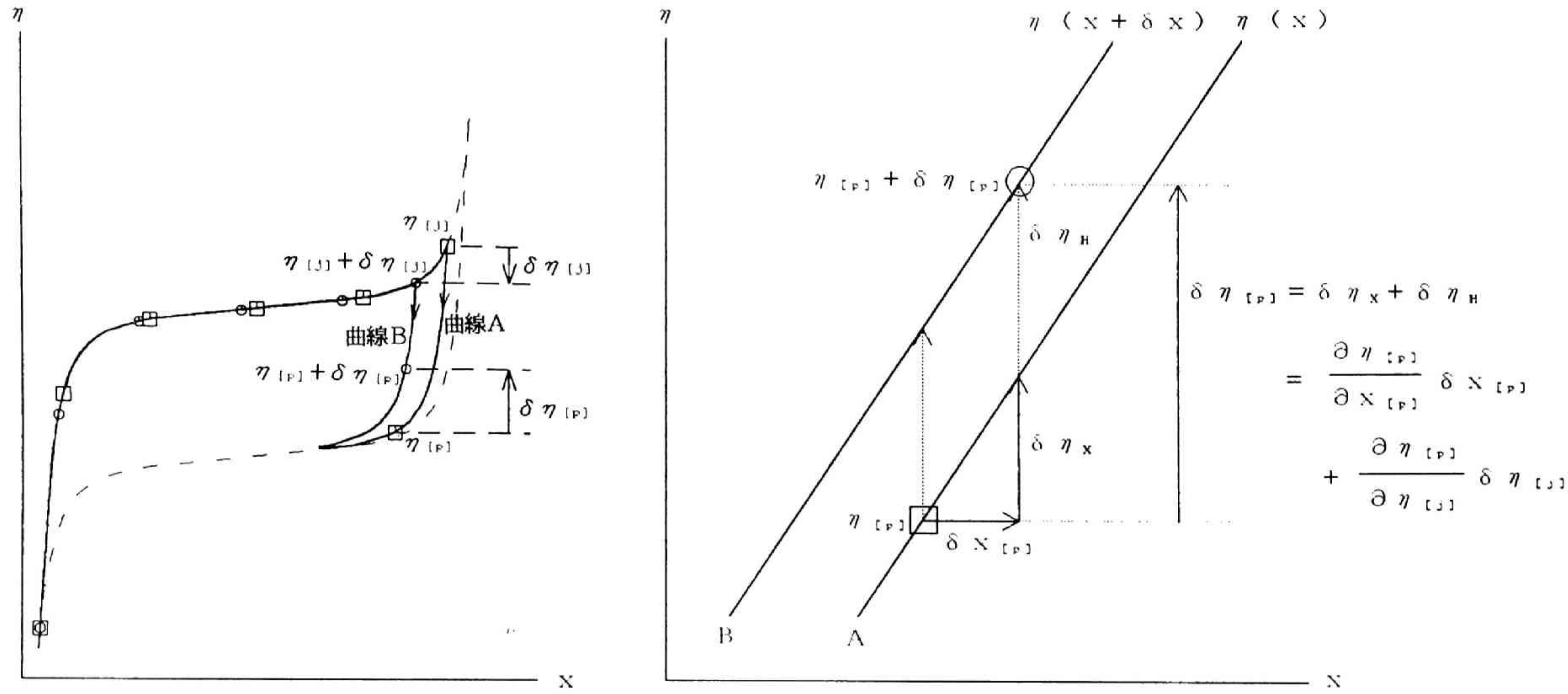
(ii) $|\eta_I(x_{[1,0]})| < |\eta_I(x_{[2,0]})|$のとき

同様にして，式(3.79)および式(3.78)をそれぞれ仮定した場合について，行列，

$$\frac{\partial x_{[1,N]}}{\partial x_{[1,0]}} \frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial x_{[2,0]}} + \frac{\partial x_{[1,N]}}{\partial \eta_{[2,0]}} \frac{\partial \eta_{[2,0]}}{\partial x_{[2,0]}} \tag{3.88}$$

を求め，この行列の固有値から安定判別を行う．

以上の解析に必要な，$\partial x_{[1,N]} / \partial x_{[1,0]}$などの諸量は，状態方程式(3.46)の変分方程式(3.56)などを利用して得ることができる（付録C．4参照）．以後，同様に，式(3.77)または式(3.79)を仮定して判別する方法を安定判別法①，式(3.78)を仮定して判別する方法を安定判別法②と呼ぶことにする．



(a)　　　　(b)　(a)の拡大図

図3.1　x－η曲線の変化

図３．２
領域D_Kの分割

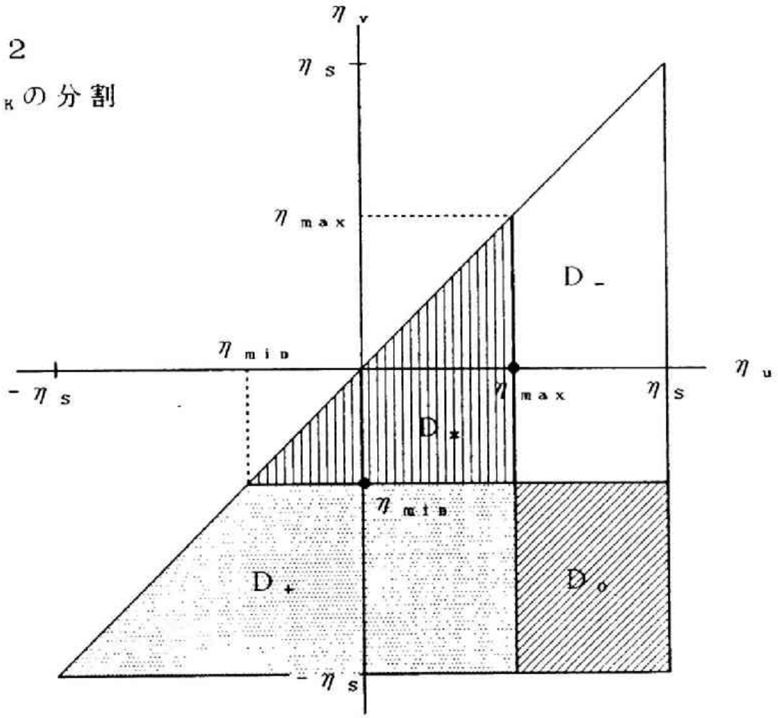
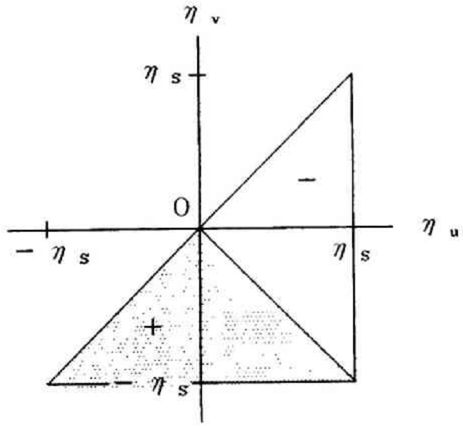


図３．３
完全消磁状態



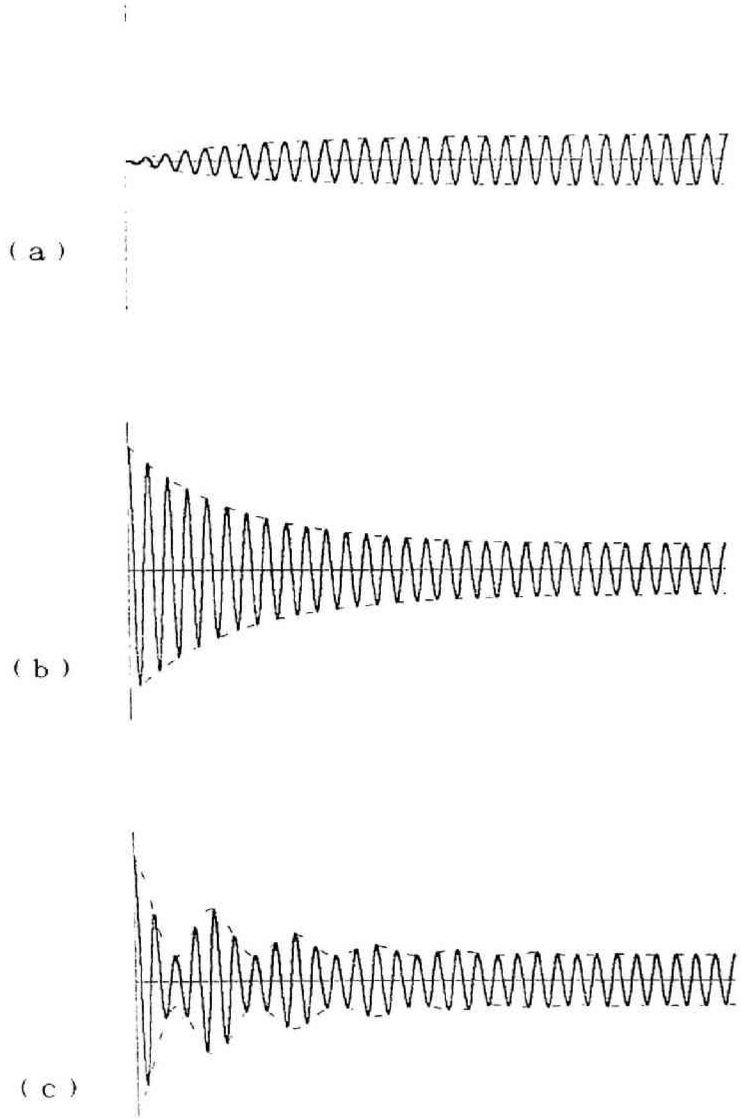
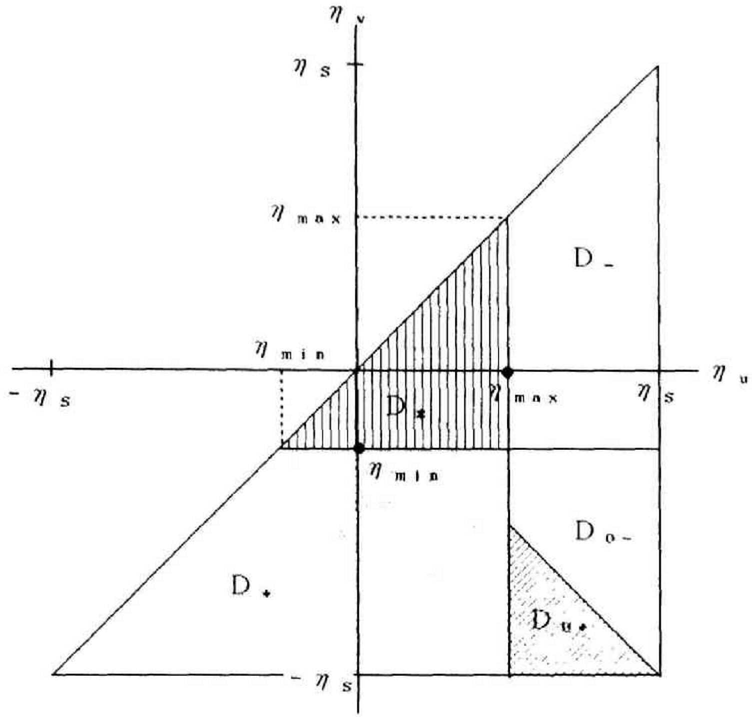
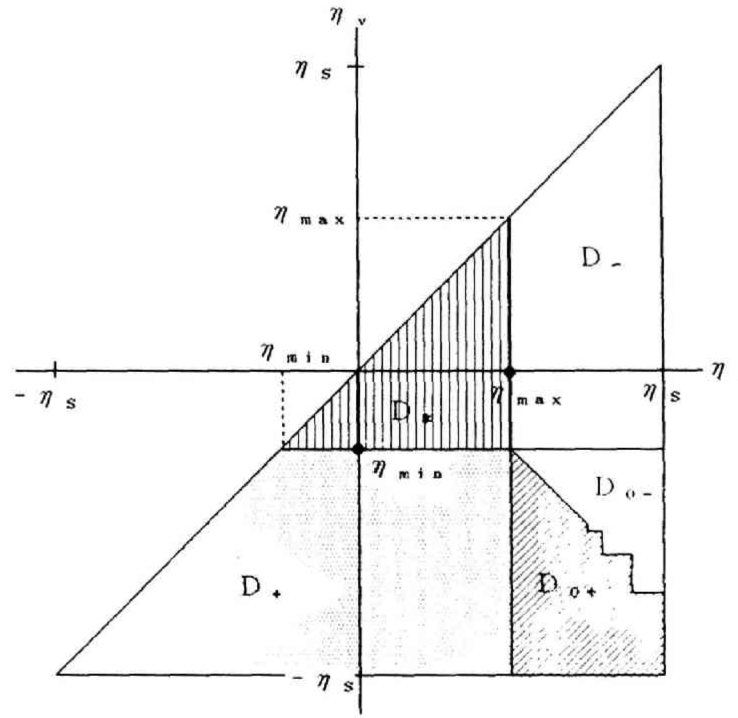


図３．４　定常状態に至るまでの過程の例



（a）　図３．４（a）のような

過渡状態を経た場合



（b）　図３．４（b）のような

過渡状態を経た場合

図３．５　定常状態における磁化状態の例

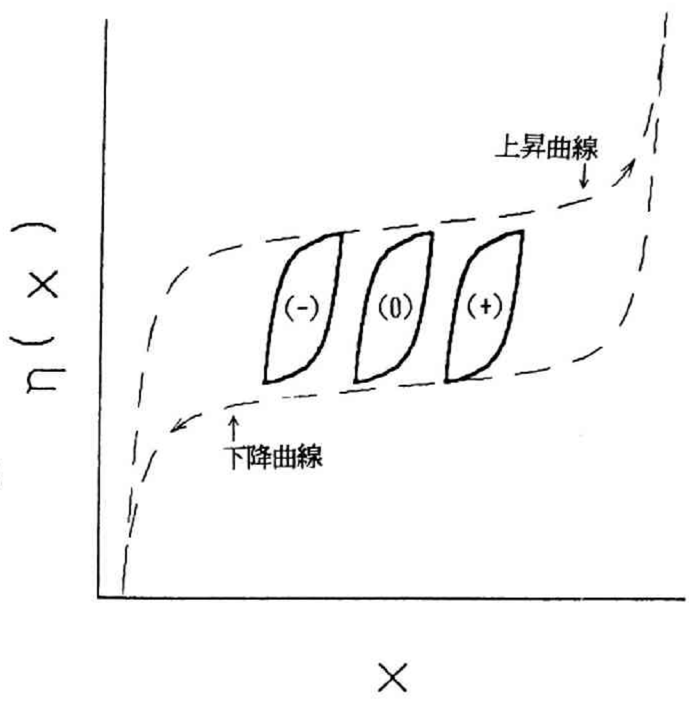


図３．６　x－ηループの相似

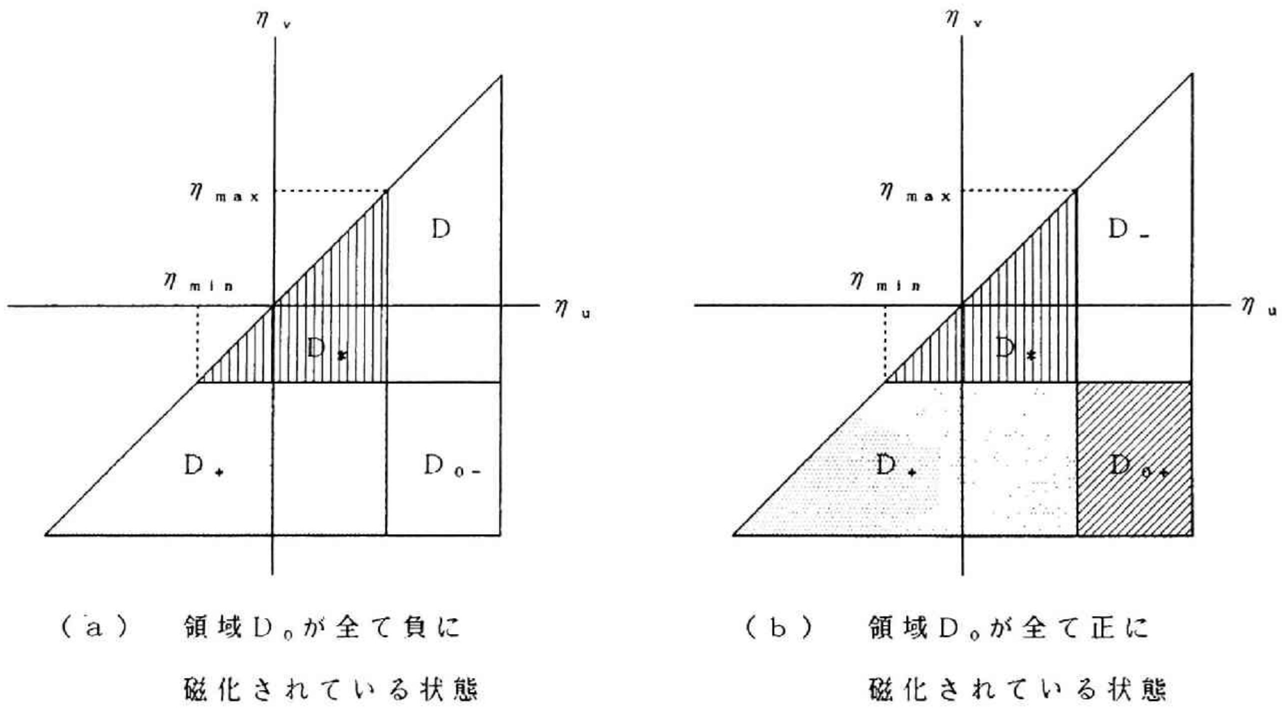


図３．７　領域D$_0$の磁化状態の例

（x－ηループがメジャーループに接する場合）

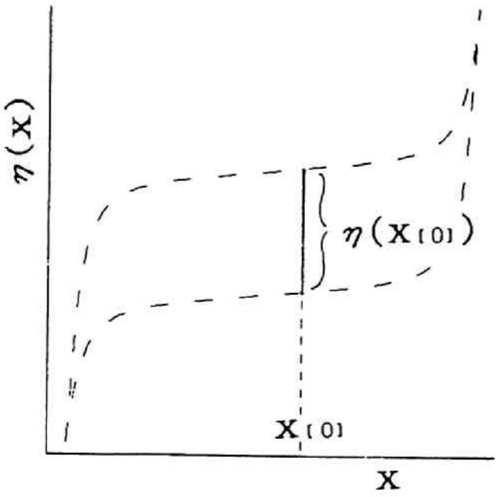


図３．８　$X_{[0]}$に対し，$\eta_{[0]}$が一意的に定まらないことを示す図

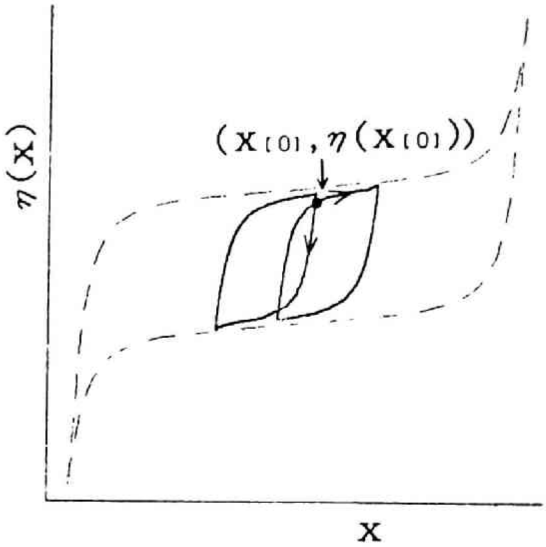
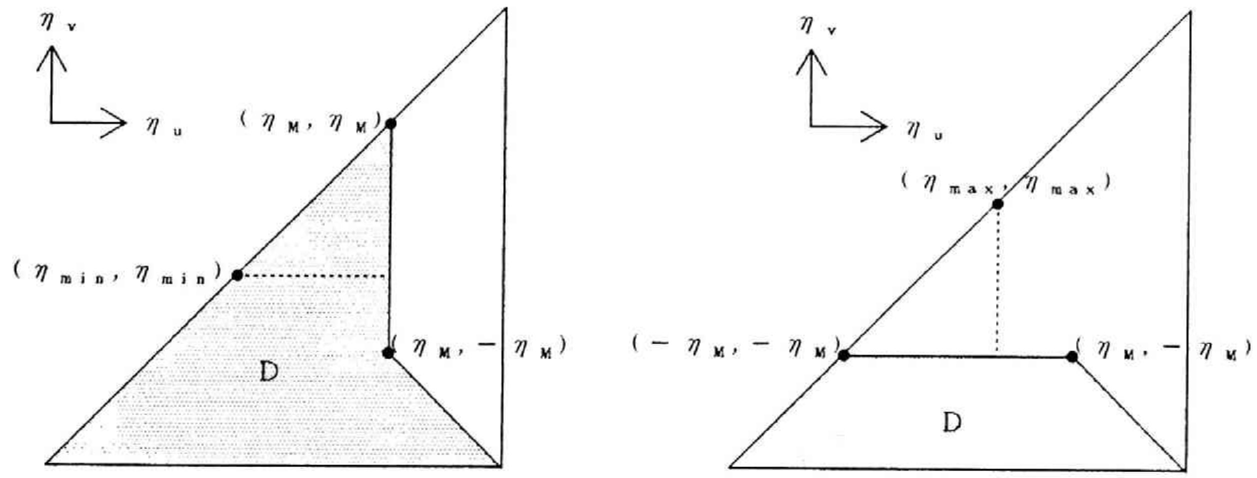


図３．９　点($X_{[0]}$, η($X_{[0]}$))を通る$X-\eta$曲線が一意的に定まらないことを示す図



（ａ）　$|\eta_{max}| > |\eta_{min}|$ の場合
($\eta_M = |\eta_{max}|$)

（ｂ）　$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$ の場合
($\eta_M = |\eta_{min}|$)

図３．１０　$|\eta(X)|$の最大時における磁化状態

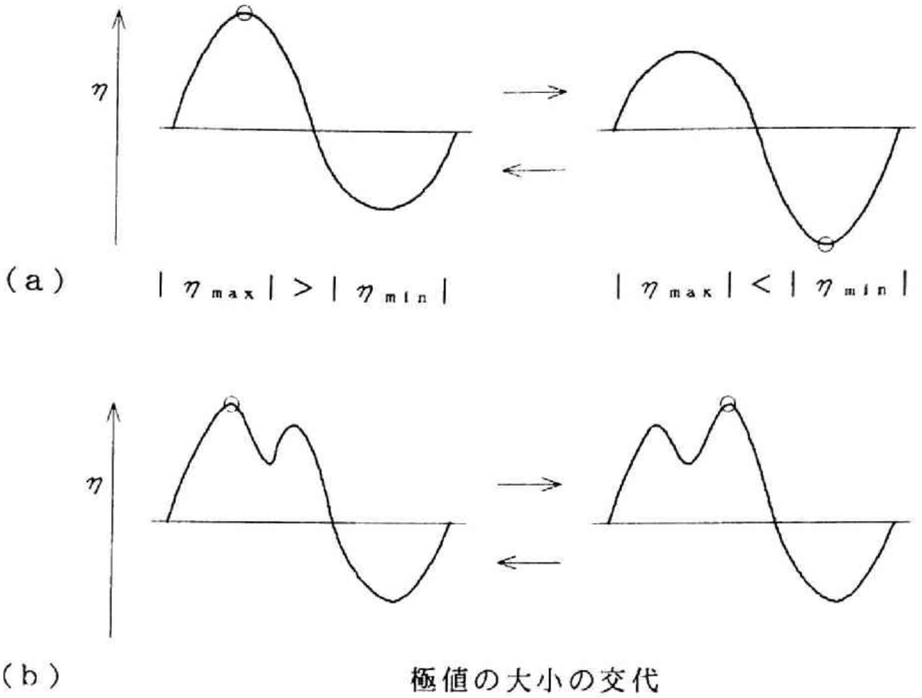


図3.11　η(x)が最大となる時刻（○印）が不連続に変化する例

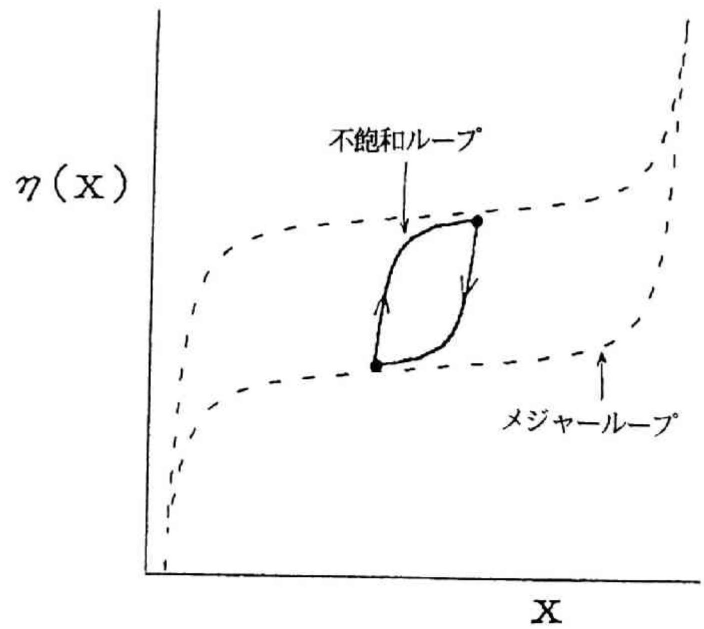
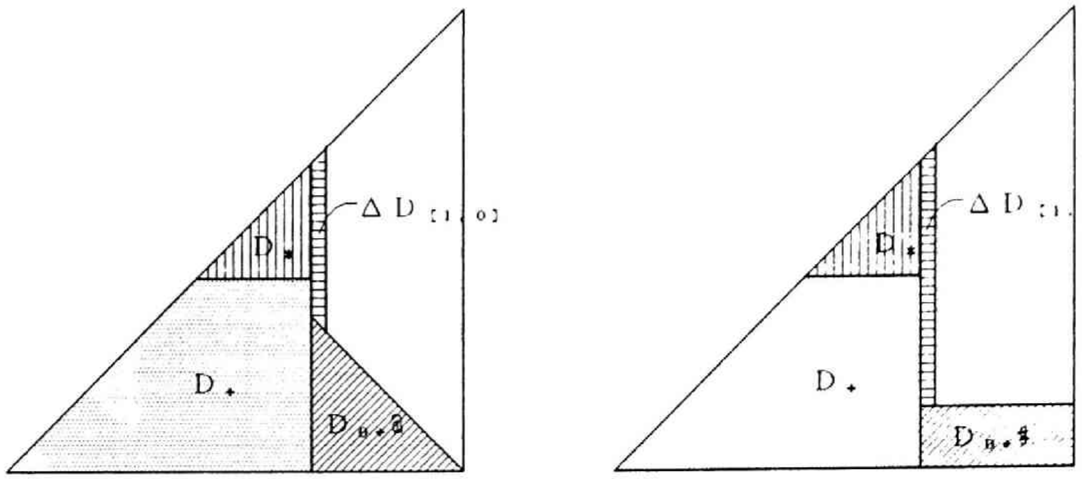
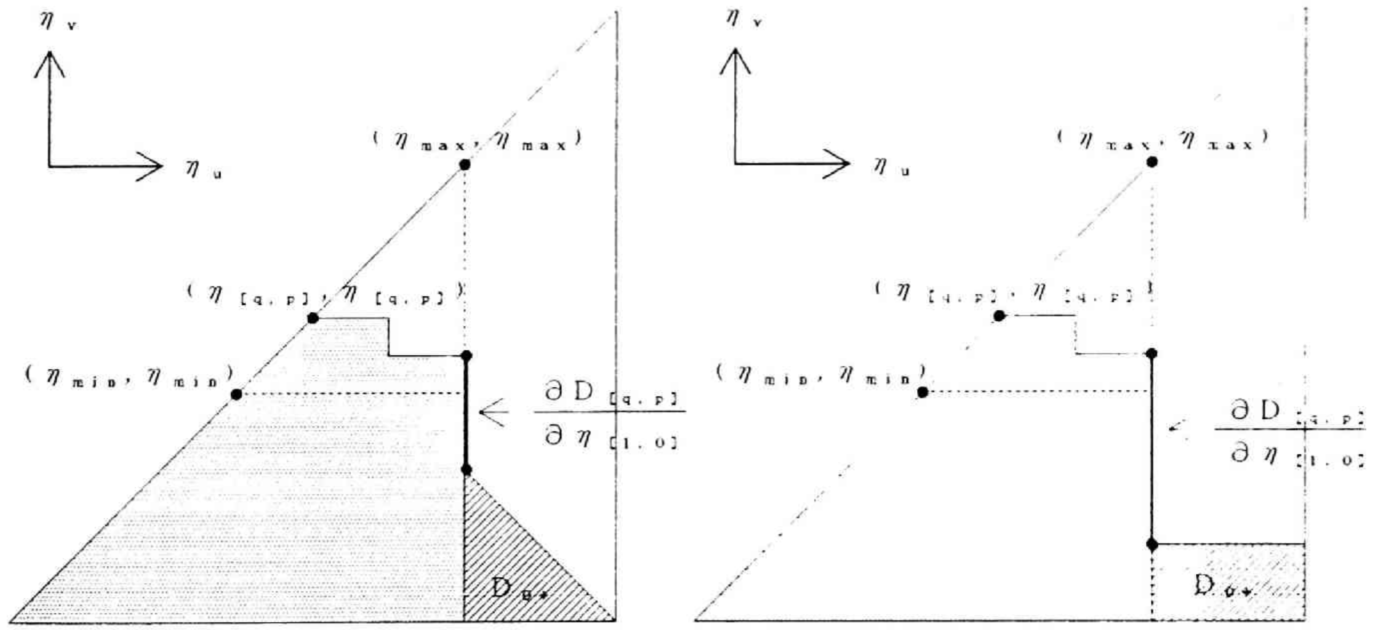


図3.12　η(x)の微係数の不連続（●印）



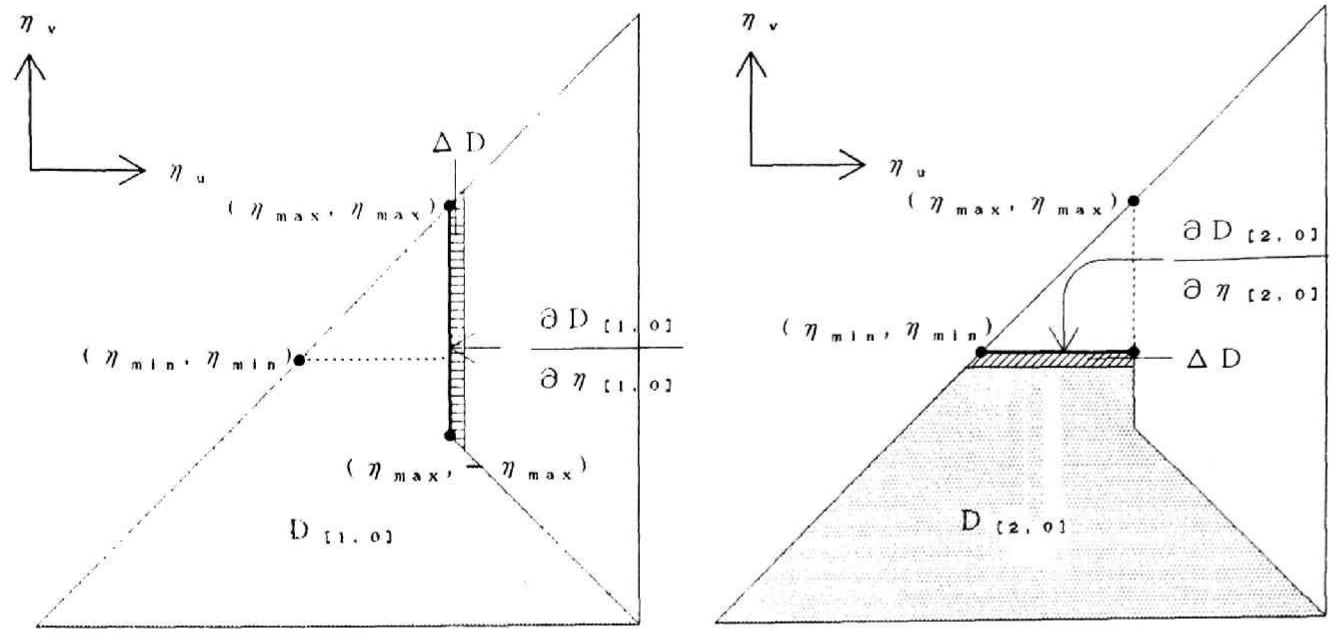
（ａ）　　　　　　（ｂ）

図３．１３　領域$D_{\theta +}$の違いによる微小変化$\Delta D_{[1,0]}$の違い



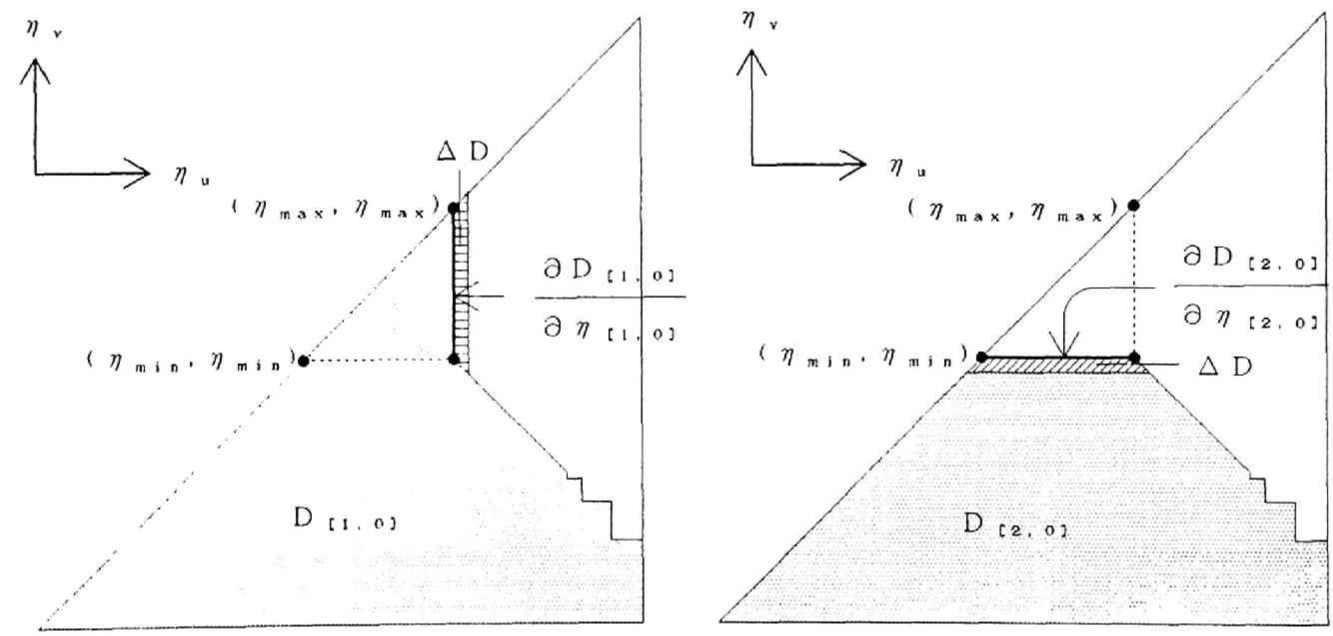
（ａ）　　　　　　（ｂ）

図３．１４　境界線分　$\partial D_{[q,p]} / \partial \eta_{[1,0]}$



（ａ）　境界線分　$\partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]}$　　（ｂ）　境界線分　$\partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]}$

図３．１５　判別法①を用いる際に仮定する境界線分



（ａ）　境界線分　$\partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]}$　　（ｂ）　境界線分　$\partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]}$

図３．１６　判別法②を用いる際に仮定する境界線分

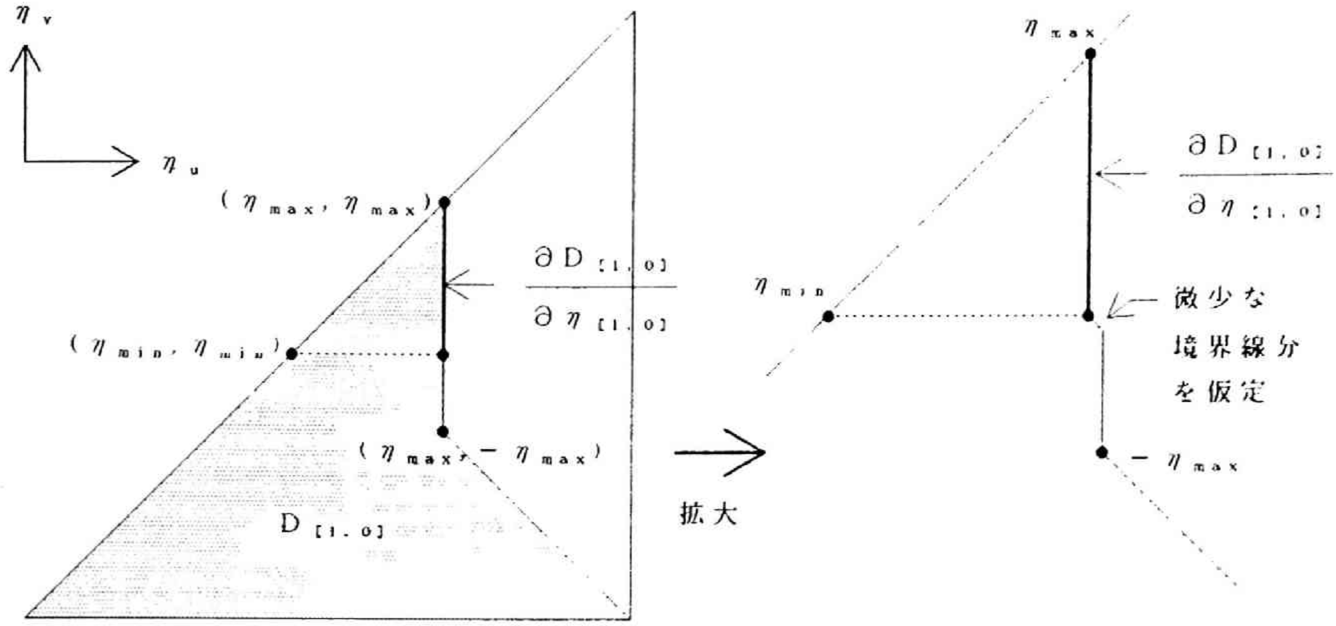


図３．１７　判別法②を用いる際に仮定する境界線分

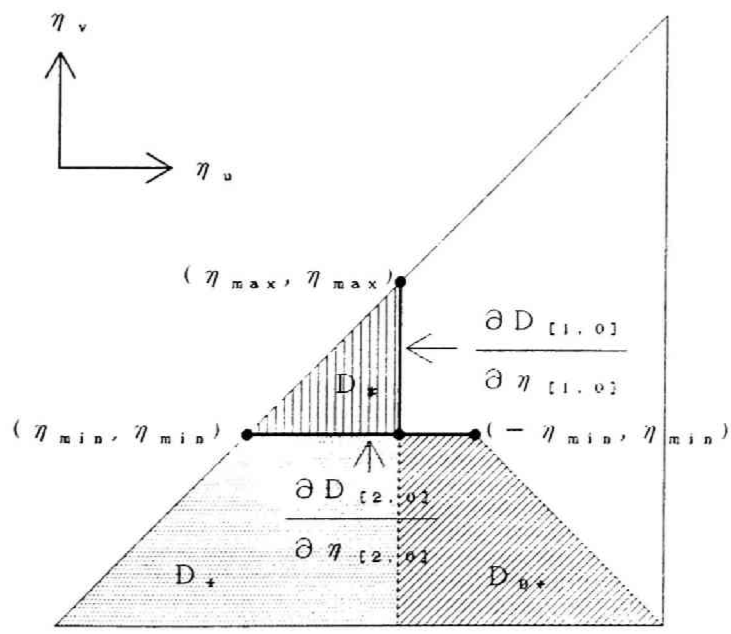


図３．１８　判別法①を用いる際に仮定する境界線分

（$|\eta_{max}| < |\eta_{min}|$ の場合）

第４章　基本調波周期振動の分岐現象の解析

本章では，ヒステリシス素子を含む強制振動系(3.4)における基本調波周期振動の分岐について述べる．

４．１　連続変形法を用いた定常解析

表記の便宜のため，本章では，周期解を求めるための方程式(3.40),(3.64)をまとめて，

$$\mathbb{F}(\mathbb{z})=\mathbb{0} \tag{4.1}$$

と書くことにする．ただし，$\mathbb{z}$はm次元ベクトルであり，方程式(3.40)の場合，

$$\mathbb{z}=\begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[0]} \\ t_{[0]} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^m,\ m=n+1) \tag{4.2}$$

であり，方程式(3.64)の場合，

$$\mathbb{z}=\begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]} \\ \mathbb{x}_{[2,0]} \\ t_{[1,0]} \\ t_{[2,0]} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^m,\ m=2n+2) \tag{4.3}$$

とする．

系のあるパラメータの変化に対する，方程式(4.1)の解の変化を連続変形法[21][22][23]を用いて調べる．すなわち，

$$\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}})=\mathbb{F}(\mathbb{z}\,;\alpha) \quad (\alpha \in \mathbb{R}：系のパラメータ)$$

ただし，(4.4)

$$\tilde{\mathbb{z}}=\begin{bmatrix} \mathbb{z} \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{m+1}) \tag{4.5}$$

とおき，解曲線，

$$\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}}(\theta))=\mathbb{0} \quad (\theta：解曲線の弧長) \tag{4.6}$$

を追跡することにより，パラメータαの変化に対する周期解の変化を調べる．解曲線の追跡の方法は文献(21)〜(23)などに詳しい（解曲線の追跡の方法については，付録Ｄで簡単に述べる）．解曲線の追跡に必要な，Jacobian行列$D\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}})$は，

$$D\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}})=\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}},\ \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \alpha}\right) \tag{4.7}$$

で与えられる．$\partial \mathbb{F} / \partial \mathbb{z}$は方程式(3.40),(3.64)におけるJacobian行列に他ならない．また，$\partial \mathbb{F} / \partial \alpha$についても，状態方程式(3.5),(3.46)の$\alpha$に関する第1変分方程式（付録C参照）を用いて，$\partial \mathbb{F} / \partial \mathbb{z}$と同様に求めることができる．

4．2　周期振動の分岐と安定性の変化

本節では，解曲線(4.6)に現れる単純特異点の前後における，周期解の安定性の変化について述べる．

4．2．1　単純特異点と解曲線の分岐

単純特異点は，解曲線(4.6)において，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}}\right) = m - 1 \tag{4.8}$$

を満たす点であり，解曲線上にしばしば現れる．単純特異点は，$\partial \mathbb{F} / \partial \tilde{\mathbb{z}}$のrankによって，単純極限点（simple limit point, turning point, saddle-node）と単純分岐点（simple bifurcation point）に分類される．すなわち，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \tilde{\mathbb{z}}}\right) = m \tag{4.9}$$

のとき単純極限点，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \tilde{\mathbb{z}}}\right) = m - 1 \tag{4.10}$$

のとき単純分岐点となる．

ここで，

$$\Delta_z \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}}\right) \quad , \quad \dot{\alpha} \equiv \frac{d\alpha}{d\theta} \tag{4.11}$$

とおく．単純極限点においては，Δ_z, $\dot{\alpha}$は共に0となる．図４．１に示すように，単純極限点（□印）の前後で$\dot{\alpha}$の符号が変化し，このとき，Δ_zの符号も同時に変化する(1)(2)(22)．

単純分岐点は，さらに，pitchfork分岐点とtranscritical分岐点とに分類され（図４．２(ａ)(ｂ)），それぞれ，

(i) pitchfork分岐点（図(ａ)の○印）においては

一方の解曲線（図４．２(ａ)の曲線Ａ）では，

分岐点において$\Delta_z = 0$，$\dot{\alpha} \neq 0$

分岐点の前後でΔ_zの符号が変化するが，$\dot{\alpha}$の符号は変化しない

他方の解曲線（図４．２（ａ)の曲線Ｂ）では，

分岐点において$\Delta_z = 0$，$\dot{\alpha} = 0$

分岐点の前後で$\dot{\alpha}$の符号が変化するが，Δ_zの符号は変化しない

(ii)transcritical分岐点（図(ｂ)の◇印）においては

両方の解曲線において

分岐点において$\Delta_z = 0$，$\dot{\alpha} \neq 0$

分岐点の前後でΔ_zの符号が変化するが，$\dot{\alpha}$の符号は変化しない

といった性質を持つ(1)(2)(22)．

次に，方程式(3.40)および方程式(3.64)を用いて周期解を求める場合について，Δ_zの符号変化と周期解の安定性の変化との間の関係について述べる．

４．２．２　Parallel　Shooting法を用いない場合

まず，方程式(3.40)を用いて周期解を求める場合を考える．

$$\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbb{F}_1(\mathbb{z})}{\partial \mathbb{z}} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2(\mathbb{z})}{\partial \mathbb{z}} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_1(\mathbb{z}) &= \mathbb{x}_{[0]} - \mathbb{x}_{[N]} \qquad (\in \mathbb{R}^n) \\ F_2(\mathbb{z}) &= f_{[0]} + a\,\eta_I(\mathbb{x}_{[0]}) \qquad (\in \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

とおく．付録Ｅ．１より，式(3.4)を時間に関して離散化する際に生じる誤差が小さければ，

$$\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \mathbb{z}} = \left[\mathbb{1} - \frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \ , \ -\frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial t_{[0]}} \right] \fallingdotseq \left(\mathbb{1} - \frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \right) \left[\mathbb{1} \ , \ -\mathbb{e}_{[0]} \right] \tag{4.14}$$

ただし，　$\mathbb{e}_{[0]} = \mathbb{f}_{[0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[0]}$

が成り立つ．ここでは，離散化による誤差は十分に小さいと考えて，式(4.14)において等号が成立するものとすると，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \mathbb{z}} \right) = \mathrm{rank}\left(\mathbb{1} - \frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \right) \tag{4.15}$$

が成り立つ．また，

$$\Delta_x \equiv \det\left(\mathbb{1} - \frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}} \right) \tag{4.16}$$

とおく．$\partial \mathbb{x}_{[N]} / \partial \mathbb{x}_{[0]}$の固有値を$\mu_i$（$i = 1, \cdots, n$）とおくと，

$$\Delta_x = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mu_i) \tag{4.17}$$

が成り立つ．ただし，周期解を求める際には式(3.80)または(3.81)の境界線分を仮定するので，ここでは，安定判別の際にも式(3.80)または(3.81)の境界線分を仮定して $\partial \mathbb{x}_{[N]} / \partial \mathbb{x}_{[0]}$ を求める（判別法①を用いる）ものとする．式(4.8)が成り立つとき，rank（$\partial \mathbb{F}_1 / \partial \mathbb{z}$）は，

$$\text{(i)}\ \mathrm{rank}\left(\partial \mathbb{F}_1 / \partial \mathbb{z}\right) = n - 1 \quad (= m - 2) \tag{4.18}$$

$$\text{(ii)}\ \mathrm{rank}\left(\partial \mathbb{F}_1 / \partial \mathbb{z}\right) = n \quad (= m - 1) \tag{4.19}$$

の２通りの値をとり得る．

(i) rank（$\partial \mathbb{F}_1 / \partial \mathbb{z}$）$= n - 1$ の場合

この場合，式(4.15),(4.16),(4.18)より，特異点において $\Delta_x = 0$ となる．また，特異点の前後で Δ_z の符号が変化するときは，Δ_x の符号も同時に変化する．従って，式(4.17)より，$\Delta_z = 0$ のとき，固有値 μ_i（$i = 1, \cdots, n$）の中に，

$$\mu_i = 1$$

となる μ_i が存在し，また，特異点の前後で Δ_z の符号が変化するとき，この μ_i は，１を実軸上で横切る．従って，μ_i 以外の固有値の絶対値はすべて１未満である場合には，Δ_z の符号の変化とともに，周期解の安定性が交代（安定⇄不安定）する．

(ii) rank（$\partial \mathbb{F}_1 / \partial \mathbb{z}$）$= n$ の場合

この場合，特異点において $\Delta_x \neq 0$ である．従って，特異点の前後で周期解の安定性の変化は起こらない．この単純特異点は，次に説明するように極値が消滅する点である．パラメータ α の変化によって，図４．３に示すように，$x(t)$ の２つの極値が同時に消滅する場合がある．方程式(3.40)第３式は，時点 $t_{[0]}$ において x が極値をとる条件式であるので，時点 $t_{[0]}$ における極値がこのような過程で消滅すると，同時に方程式(3.40)の解も消滅する．このとき，多くの場合，解曲線は，図４．４に示すように極値の消滅点において折り返し，従って，極値の消滅点は単純極限点となる．極限点通過後の解曲線は，図４．４に示すように，元の周期解（極限点通過前の曲線上の解）と，時点 $t_{[0]}$ とする時刻が異なるだけの実質的には同じ周期解の解曲線である．従って，極限点の前後で，安定性は変化しない．

(i)の場合に見られる周期解の安定性の変化の仕方は，ヒステリシス素子のない強制振動系の場合と同様である．(ii)の場合における，周期解の安定性の変化を伴わない特異点の存在は，方程式(3.34)と方程式(3.40)との違いに由来するものであり，系におけるヒステリシス素子の有無とは関係がない．

上の議論では，式(4.16)における $\partial \mathbb{x}_{[N]} / \partial \mathbb{x}_{[0]}$ を求める際に，式(3.80)または(3.81)の境界線分を仮定していた．従って，安定判別の際に式(3.82)または(3.83)の境界線分を仮定して $\partial \mathbb{x}_{[N]} / \partial \mathbb{x}_{[0]}$ を求める場合（判別法②を用いる場合）には，上の議論は成立せず，従って，式(4.18)が成り立っている場合においても，特異点の前後における周期解の安定性の変化の仕方が，ヒステリシス素子のない強制振動系の場合と異なる場合がある（６．４節参照）．

４．２．３ Parallel Shooting法を用いる場合

次に，方程式(3.64)を用いて周期解を求める場合を考える．ここでは，$|\eta_{max}| \geqq |\eta_{min}|$ となる場合について考察する．同様に，

$$\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbb{F}_1(\mathbb{z})}{\partial \mathbb{z}} \\ \dfrac{\partial \mathbb{F}_2(\mathbb{z})}{\partial \mathbb{z}} \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

ただし，

$$\mathbb{F}_1(\mathbb{z}) = \begin{pmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]} - \mathbb{x}_{[2,N]} \\ \mathbb{x}_{[2,0]} - \mathbb{x}_{[1,N]} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{F}_2(\mathbb{z}) = \begin{pmatrix} f_{[1,0]} + a\eta_{[1,0]} \\ f_{[2,0]} + a\eta_{[2,0]} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

$(\mathbb{F}_1 \in \mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{F}_2 \in \mathbb{R}^2)$

とおく．ここでも，付録Ｅ．１より，式(3.4)を時間に関して離散化する際に生じる誤差が小さければ，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[2,0]}} \\ \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[2,0]}} \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \dfrac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} \\ -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{e}_{[1,0]} & \mathbb{0} \\ \mathbb{0} & \mathbb{e}_{[2,0]} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

ただし，　$\mathbb{e}_{[1,0]} = \mathbb{f}_{[1,0]} + \mathbb{a}\eta_{[1,0]}$，$\mathbb{e}_{[2,0]} = \mathbb{f}_{[2,0]} + \mathbb{a}\eta_{[2,0]}$

が成り立つ．従って，離散化による誤差は十分に小さいと考えて，式(4.22)において等号が成立するものとすると，式(3.65),(3.66),(4.21)より，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \mathbb{z}}\right)=\mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{1}-\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}}\dfrac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} \\ -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & \mathbb{1} \end{bmatrix}\right) \tag{4.23}$$

が成り立つ．また，

$$\Delta_x \equiv \det\left(\begin{bmatrix} \mathbb{1}-\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}}\dfrac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} \\ -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & \mathbb{1} \end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\mathbb{1}-\left\{\frac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}+\frac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}}\frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}\right\}\right) \tag{4.24}$$

とおく．式(3.87)の行列の固有値を μ_i ($i=1,\cdots,n$) とおくと，

$$\Delta_x=\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_i) \tag{4.25}$$

が成り立つ．ただし，周期解を求める際には式(3.77)の境界線分を仮定するので，ここでは，安定判別の際にも式(3.77)の境界線分を仮定して式(3.87)の行列を求める（判別法①を用いる）ものとする．式(4.8)が成り立つとき，rank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) は，

(i) rank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) $=2n-1$ ($=m-3$) (4.26)

(ii) rank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) $=2n$ ($=m-2$) (4.27)

の２通りの値をとる．

(i) rank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) $=2n-1$ の場合

この場合，4.2.2のrank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) $=n-1$ の場合と同様に，特異点において $\Delta_x=0$ となり，また，特異点の前後で Δ_z の符号が変化するときは，Δ_x の符号も同時に変化する．従って，周期解の安定性の変化の仕方は，ヒステリシス素子のない強制振動系の場合と同様である．

(ii) rank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) $=2n$ の場合

この場合，4.2.2のrank ($\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z}$) $=n$ の場合と同様に，特異点において $\Delta_x\neq 0$ であり，特異点の前後で周期解の安定性の変化は起こらない．この単純特異点も，極値が消滅する点であり，やはり，多くの場合，単純極限点となる．このように極値が消滅する点が単純極限点となることを利用すると，4.3.2で述べるように，ヒステリシスループにマイナーループが発生する点を算出することができる．

安定判別の際に式(3.78)の境界線分を仮定して式(3.87)の行列を求める場合

（判別法②を用いる場合）には，上の議論は成立せず，式(4.26)が成り立っている場合においても，特異点の前後における周期解の安定性の変化の仕方が，ヒステリシス素子のない強制振動系の場合と異なる場合がある（6．4節参照）．

4．3　単純特異点の算出

4．3．1　単純極限点の算出

解曲線(4.6)上の単純極限点の検出および算出の方法を述べる．解曲線(4.6)の追跡は，付録Dに示すように，解曲線上の点列 $\tilde{\mathbb{z}}_{<i>}$（$i=0,1,\cdots$）を順次探索して行くことにより行われる．4．2．1で述べたように，単純極限点の前後において，Δ_z, $\dot{\alpha}$ の符号が共に変化する．従って，点列 $\tilde{\mathbb{z}}_{<i>}$（$i=0,1,\cdots$）の中に，

$$\Delta_{z<i>}\cdot\Delta_{z<i+1>}<0 \quad \text{および} \quad \dot{\alpha}_{<i>}\cdot\dot{\alpha}_{<i+1>}<0 \tag{4.28}$$

ただし，

$$\Delta_{z<i>}=\Delta_z\,|_{\,\tilde{\mathbb{z}}=\tilde{\mathbb{z}}_{<i>}}, \quad \dot{\alpha}_{<i>}=\dot{\alpha}\,|_{\,\tilde{\mathbb{z}}=\tilde{\mathbb{z}}_{<i>}} \tag{4.29}$$

を満たす2点 $\tilde{\mathbb{z}}_{<i>}$，$\tilde{\mathbb{z}}_{<i+1>}$が存在すれば，この2点の間に単純極限点があると判断することにする．以上のようにして検出された単純極限点は，次のようにして算出される．

単純極限点は，$\tilde{\mathbb{z}}$およびベクトル $\mathbb{u}$（$\in\mathbb{R}^m$）を未知数とする方程式，

$$\mathbb{G}_L(\tilde{\mathbb{z}},\mathbb{u})=\begin{bmatrix}\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}})\\[4pt] \dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{z}}\mathbb{u}\\[4pt] \|\mathbb{u}\|^2-1\end{bmatrix}=\mathbb{0} \tag{4.30}$$

をNewton法で解くことによって算出することができる(21)(27)(28)．$\mathbb{G}_L$のJacobian行列 $D\mathbb{G}_L$は，

$$D\mathbb{G}_L=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\tilde{\mathbb{z}}} & \mathbb{O}\\[6pt] \dfrac{\partial}{\partial\tilde{\mathbb{z}}}\left(\dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{z}}\mathbb{u}\right) & \dfrac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{z}}\\[6pt] \mathbb{o} & 2\mathbb{u}^{tr}\end{bmatrix} \tag{4.31}$$

（tr：転置を表す）

で与えられる．$(\partial\mathbb{F}/\partial\mathbb{z})\mathbb{u}$は，状態方程式の第1変分方程式を積分することにより，また，その$\tilde{\mathbb{z}}$による微分は，第2変分方程式を積分することにより求めることができる（付録F参照）．

このように，単純極限点の算出の際には，状態方程式の第1および第2変分方程式の積分が必要なので，$\eta(x)$の微係数が不連続となる時刻を積分区間内から除くために，3．4節で述べたparallel shooting法を用いることが望ましい．3．4節では，時点$t_{[1,0]}$および$t_{[2,0]}$において，$\dot{x}=0$を仮定し，方程式(3.64)を得た．しかし，単純極限点を求める際には，付録Gに述べる理由により，時点$t_{[1,0]}$および$t_{[2,0]}$において厳密に$\dot{x}=0$とせず，微小な摂動を与えて，周期解を求めるための方程式を，

$$\mathbb{F}(\mathbb{z})=\begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]}-\mathbb{x}_{[2,N]} \\ \mathbb{x}_{[2,0]}-\mathbb{x}_{[1,N]} \\ f_{[1,0]}+a\eta_{[1,0]}+\varepsilon \\ f_{[2,0]}+a\eta_{[2,0]}-\varepsilon \end{bmatrix}=\mathbb{0} \qquad (\varepsilon>0：微小量) \tag{4.32}$$

とする方がよい．以後，$\mathbb{F}(\mathbb{z})$を表記する際には，煩雑を避けるためεを省略して表記するが，本節以降においても，特異点を算出する際には式(4.32)のように微小摂動を与えた方程式を用いるものとする．

4．3．2　マイナーループ発生点の算出

パラメータの変化によって，図4．5(a)～(c)のように，周期解の作るヒステリシスループにマイナーループが発生したり消滅したりする場合がある．4．3．1で述べた単純極限点の算出法を利用すると，このようなマイナーループの発生(消滅)が起きる点を算出することができる．

$\eta(x(t))$が，最大値と最小値の他に，極大値と極小値を，

$$-\eta_s<\eta<\eta_s$$

の範囲に持つとき，図4．5(a)のように，$x-\eta(x)$ループはマイナーループを持つ．パラメータの変化により，この極大値および極小値が消滅すると，図4．5(b)(c)のようにマイナーループも消滅する．

図4．6(a)(b)のように$\eta(x)$が4つの極値を持つ場合，同図のように，1周期を2つの区間あるいは4つの区間に分割して周期解を求めることができる．1周期を2つの区間に分割する場合には，パラメータの変化により，図4．7のように，極値が2つ消滅しても，そのままマイナーループを作らない解に移行できる．

1周期を4つの区間に分割する場合には，4つの極値の存在を仮定しているために，パラメータが変化して2つの極値が消滅した場合，2つの極値しか持たない解へは移行できない．従って，解曲線は，図4．8のように，極値が消滅する地

点で折り返さなければならないので，２つの極値が消滅する点，すなわち，マイナーループが消滅する点は，解曲線上の単純極限点となる．この単純極限点を４．３．１で述べたようにして算出することにより，マイナーループが消滅する点（発生する点）を算出することができる．極限点通過後の解曲線は，図４．８に示すように，元の周期解（極限点通過前の曲線上の解）と，１周期の区間の分割の仕方だけが異なる（図４．６(c)参照）実質的には同じ周期解の解曲線となる．

４．３．３　単純分岐点の算出とBranch Switching

単純分岐点の前後において，Δ_zおよび$\dot{\alpha}$の符号は４．２．１で述べたように変化する．従って，点列$\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i\rangle}$（$i=0,1,\cdots$）の中に，

$$\Delta_{z\langle i\rangle}\cdot\Delta_{z\langle i+1\rangle}<0 \quad \text{および} \quad \dot{\alpha}_{\langle i\rangle}\cdot\dot{\alpha}_{\langle i+1\rangle}>0$$

または，　(4.33)

$$\Delta_{z\langle i\rangle}\cdot\Delta_{z\langle i+1\rangle}>0 \quad \text{および} \quad \dot{\alpha}_{\langle i\rangle}\cdot\dot{\alpha}_{\langle i+1\rangle}<0$$

を満たす２点$\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i\rangle}$，$\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}$が存在すれば，この２点の間に単純分岐点があると判断することにする．このようにして検出された単純分岐点は，以下のようにして算出される．

単純分岐点を算出するための方法は種々提案されている[23][28]が，ここでは，以下のようにして単純分岐点を算出する．単純分岐点においては，

$$\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \tilde{\mathbb{z}}}\tilde{\mathbb{u}}_a=\mathbb{0}\ ,\quad \frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \tilde{\mathbb{z}}}\tilde{\mathbb{u}}_b=\mathbb{0} \tag{4.34}$$

$$(\tilde{\mathbb{u}}_a,\tilde{\mathbb{u}}_b\in\mathbb{R}^{m+1},\ \tilde{\mathbb{u}}_a \not\parallel \tilde{\mathbb{u}}_b)$$

を満たす$\mathbb{0}$でないベクトル$\tilde{\mathbb{u}}_a$，$\tilde{\mathbb{u}}_b$が存在し，

$$\tilde{\mathbb{u}}_a=\begin{pmatrix}\mathbb{u}_a\\0\end{pmatrix}\ ,\quad \tilde{\mathbb{u}}_b=\begin{pmatrix}\mathbb{u}_b\\1\end{pmatrix}\quad (\mathbb{u}_a,\mathbb{u}_b\in\mathbb{R}^m) \tag{4.35}$$

とおくことができる．このことを利用して，未知数$\tilde{\mathbb{z}}$，$\mathbb{u}_a$，$\mathbb{u}_b$，$\kappa(\in\mathbb{R})$に対する方程式，

$$\mathbb{G}_B(\tilde{\mathbb{z}},\mathbb{u}_a,\mathbb{u}_b,\kappa)=\begin{pmatrix}\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}})+\kappa\cdot\mathbb{u}_a\\ \dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}}\mathbb{u}_a\\ \dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}}\mathbb{u}_b+\dfrac{\partial \mathbb{F}}{\partial \alpha}\\ \|\mathbb{u}_a\|^2-1\\ \|\mathbb{u}_b\|^2-1\end{pmatrix}=\mathbb{0} \tag{4.36}$$

をNewton法で解くことにより，単純分岐点を算出できる．方程式(4.36)の解が得られたときに，$\kappa=0$であれば，分岐点は'完全な'分岐点であり，$\kappa\neq 0$であれば，分岐点は'不完全な'分岐点である[23]（図4.9参照）．$\mathbb{G}_B$のJacobian行列の計算方法は，$D\mathbb{G}_L$の計算方法に準じる．

このようにして算出された単純分岐点において，branch switchingを次のようにして行う[22][23]．

単純分岐点においては，

$$\mathbb{v}^{tr}\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \widetilde{\mathbb{z}}}=\mathbb{o} \qquad (\mathbb{v}\in \mathbb{R}^m,\ \mathbb{v}\neq \mathbb{0}) \tag{4.37}$$

を満たすベクトル$\mathbb{v}$が存在する．単純分岐点における接線ベクトルを，

$$\dot{\widetilde{\mathbb{z}}}=r_a\widetilde{\mathbb{u}}_b+r_b\widetilde{\mathbb{u}}_b \tag{4.38}$$

と置くと，r_a，r_bに関する2次方程式，

$$\begin{aligned}&\mathbb{v}^{tr}\frac{\partial^2 \mathbb{F}}{\partial \widetilde{\mathbb{z}}^2}(r_a\widetilde{\mathbb{u}}_a+r_b\widetilde{\mathbb{u}}_b,\ r_a\widetilde{\mathbb{u}}_a+r_b\widetilde{\mathbb{u}}_b)\\&\quad=A_{aa}r_a^2+2A_{ab}r_ar_b+A_{bb}r_b^2=0\end{aligned} \tag{4.39}$$

ただし，

$$A_{ik}=\mathbb{v}^{tr}\frac{\partial^2 \mathbb{F}}{\partial \widetilde{\mathbb{z}}^2}(\widetilde{\mathbb{u}}_i,\widetilde{\mathbb{u}}_k)=\mathbb{v}^{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial \widetilde{\mathbb{z}}}\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \widetilde{\mathbb{z}}}\widetilde{\mathbb{u}}_i\right)\right\}\widetilde{\mathbb{u}}_k \tag{4.40}$$

$(i,\ k=a,\ b)$

が得られる．方程式(4.39)により，r_a，r_bの比が2通り定まるので，分岐点において交差する2曲線の方向を知ることができる．式(4.40)の{}内については，$\mathbb{G}_B$のJacobian行列の成分として既に計算済みであるので，これを用いて，A_{ik}を容易に求めることができる．

4.3.4　分岐集合の探索

表記の便宜のため，単純極限点および単純分岐点を算出するための方程式(4.30)(4.36)をまとめて，

$$\mathbb{G}(\mathbb{Z})=\mathbb{0} \tag{4.41}$$

と書くことにする．ただし，方程式(4.30)の場合，$\mathbb{Z}$は，

$$\mathbb{Z}=\begin{bmatrix}\widetilde{\mathbb{z}}\\ \mathbb{u}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{z}\\ \alpha\\ \mathbb{u}\end{bmatrix} \tag{4.42}$$

であり，方程式(4.36)の場合，$\mathbb{Z}$は，

$$\mathbb{Z}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathbb{Z}}\\ \mathfrak{u}_a\\ \mathfrak{u}_b\\ \kappa\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbb{Z}\\ \alpha\\ \mathfrak{u}_a\\ \mathfrak{u}_b\\ \kappa\end{bmatrix} \tag{4.43}$$

とする．ここで，系のα以外のあるパラメータをβとおく．4．1節と同様に連続変形法を用いると，βの変化に対する方程式(4.41)の解$\mathbb{Z}$の変化を調べることができる．すなわち，

$$\mathbb{G}(\mathbb{Z})=\mathbb{G}(\mathbb{Z}\ ;\ \beta) \tag{4.44}$$

ただし，

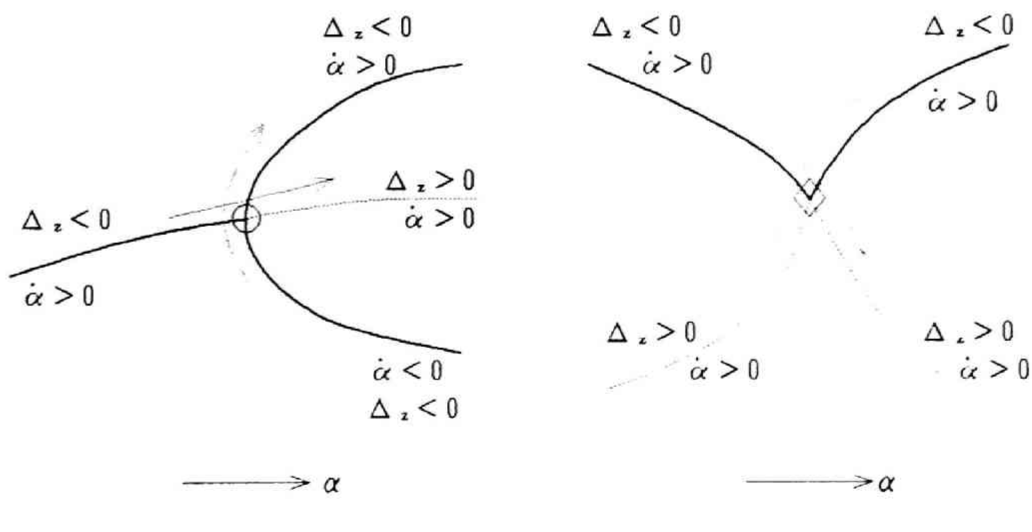
$$\mathbb{Z}=\begin{bmatrix}\mathbb{Z}\\ \beta\end{bmatrix} \tag{4.45}$$

とおき，解曲線

$$\mathbb{G}(\mathbb{Z})=\mathbb{0} \tag{4.46}$$

を追跡することにより，単純極限点あるいは単純分岐点の集合（分岐集合）を追跡することができる．

図４．１　単純極限点（□印）と，極限点付近における，Δ_z, $\dot{\alpha}$の符号変化の例



（ａ）pitchfork分岐点（○印）　　（ｂ）transcritical分岐点（◇印）

図４．２　単純分岐点と，分岐点付近における，Δ_z, $\dot{\alpha}$の符号変化の例

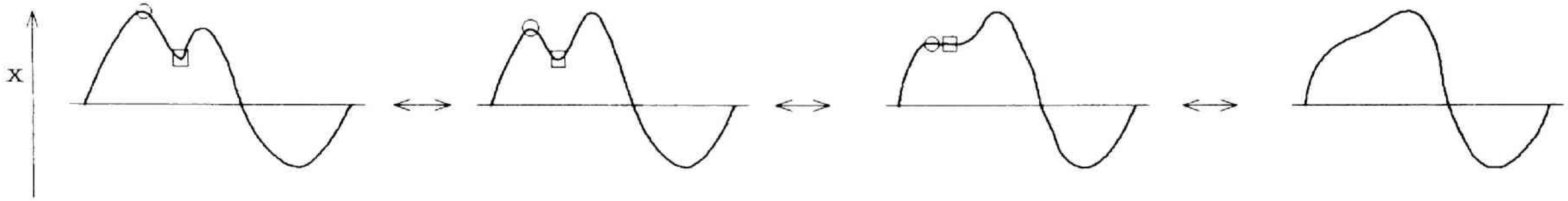


図４．３　極値の消滅（○印：極大値，□印：極小値）

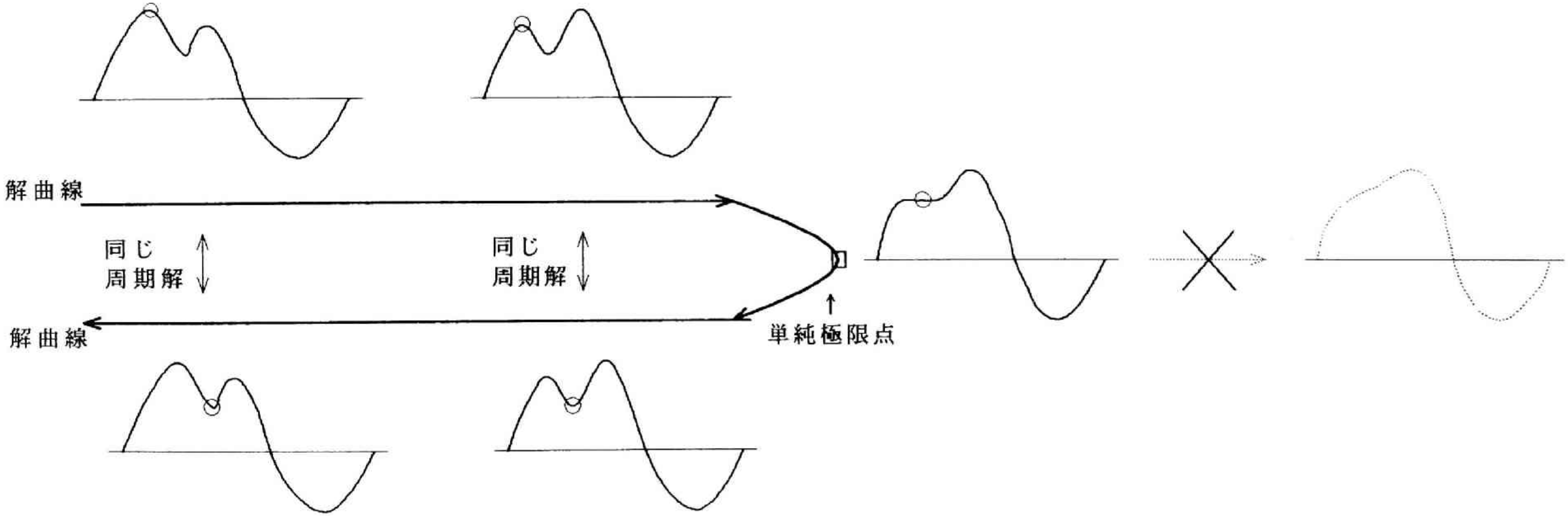


図４．４　極値の消滅に伴う時点ｔ$_{[0]}$の移動（○印：ｔ$_{[0]}$となる時点）

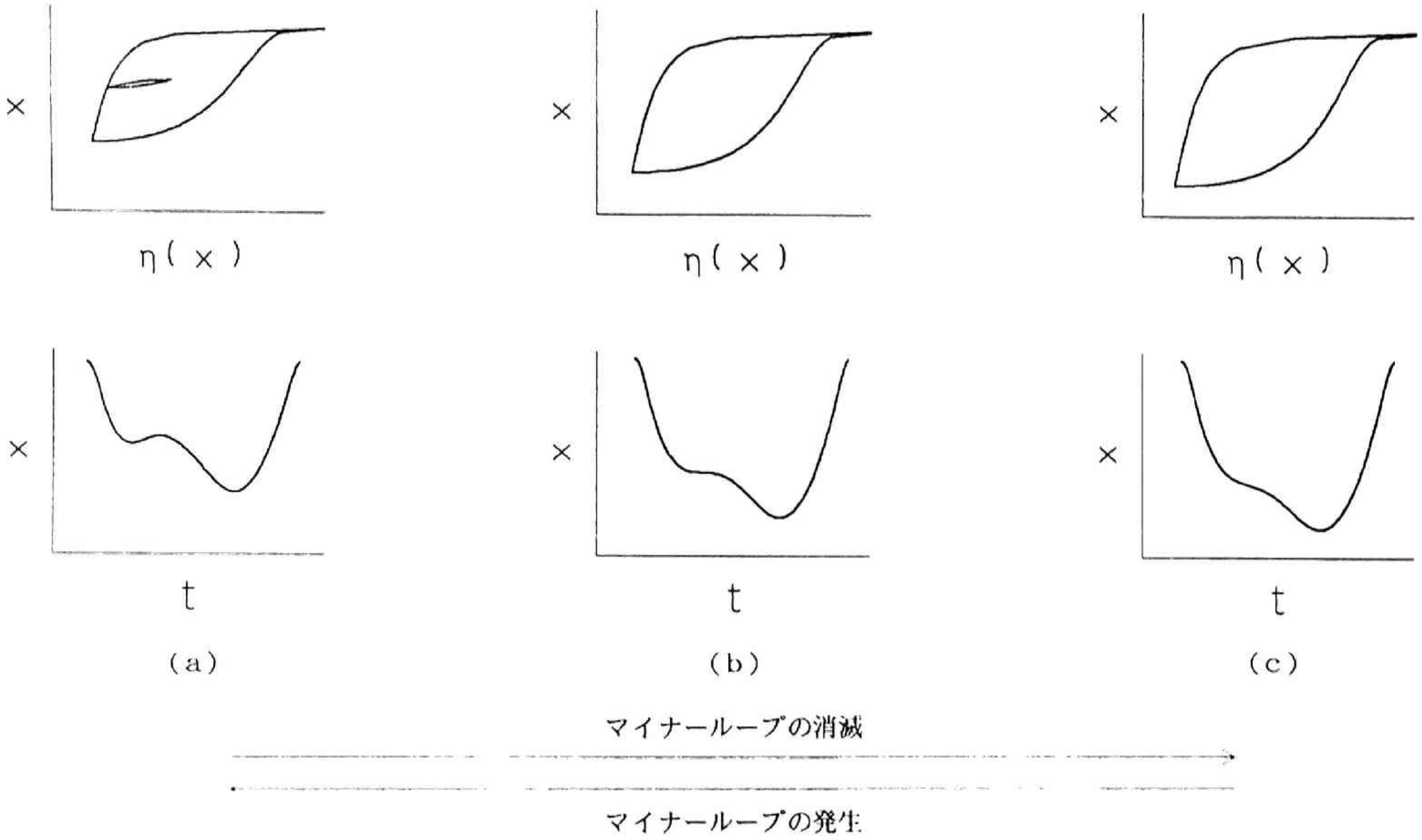
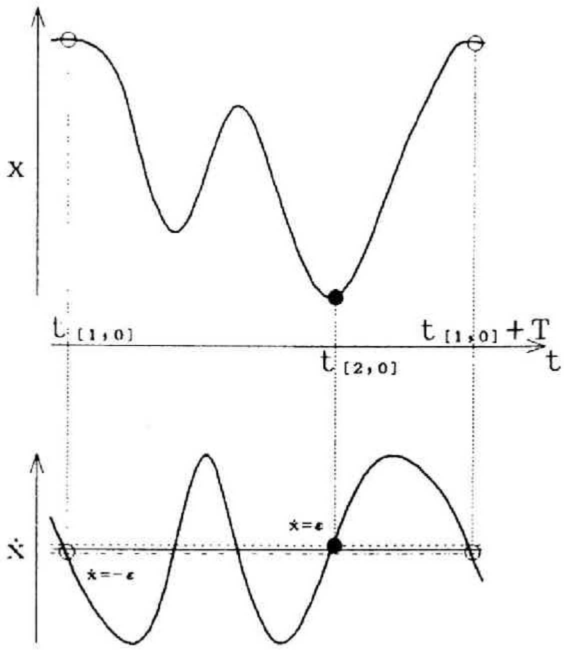
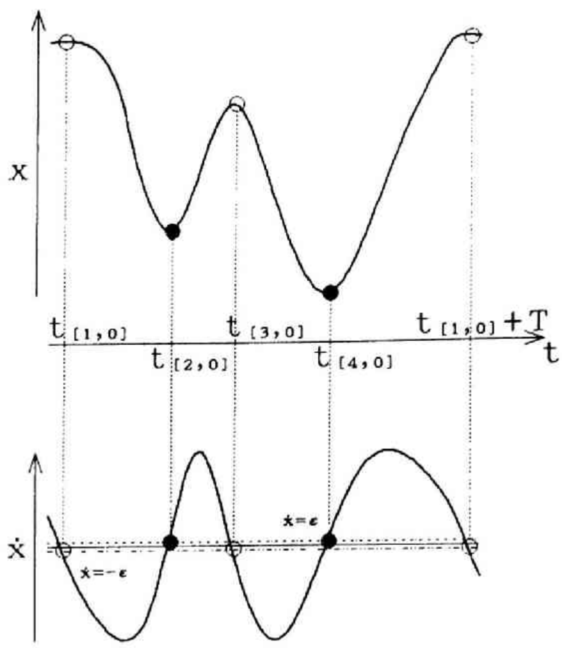


図4．5　マイナーループの発生と消滅



（a） ２区間に分割する場合



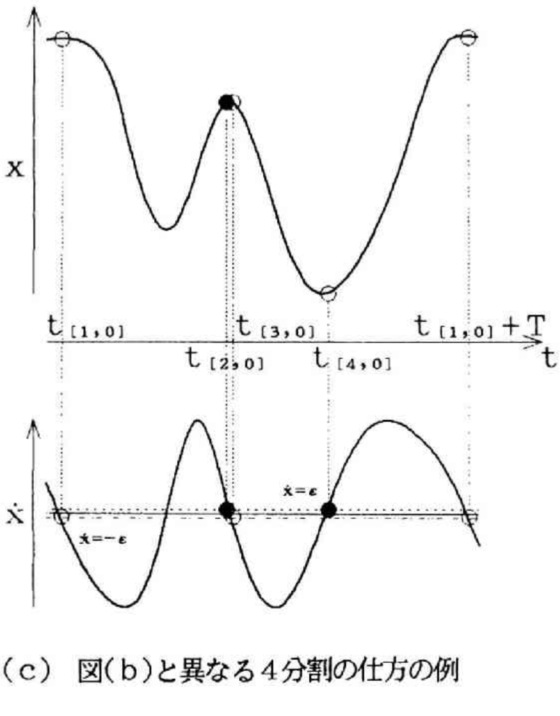
（b） ４区間に分割する場合（通常の４分割）

図４．６　周期Ｔの分割の仕方

○印：$t_{[1,0]}$，$t_{[3,0]}$，$t_{[1,0]}+T$
（$\dot{x}=-\varepsilon$）

●印：$t_{[2,0]}$，$t_{[4,0]}$
（$\dot{x}=\varepsilon$）

……：$\dot{x}=\varepsilon$
－－：$\dot{x}=-\varepsilon$



（c） 図（b）と異なる４分割の仕方の例

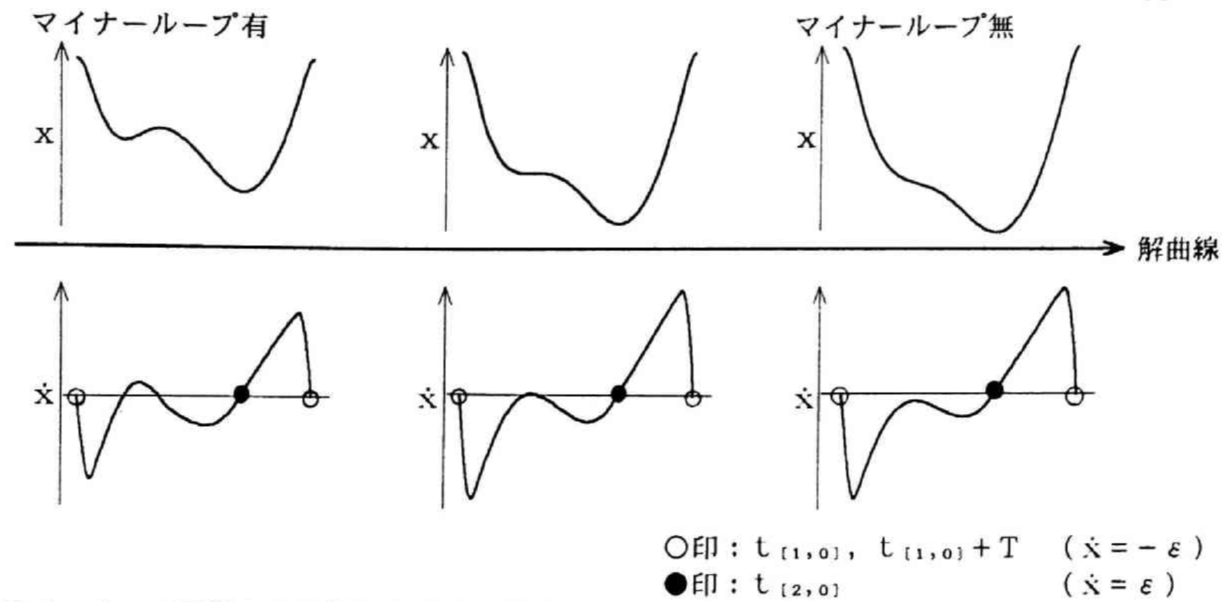


図４．７　１周期を２区間に分割する場合

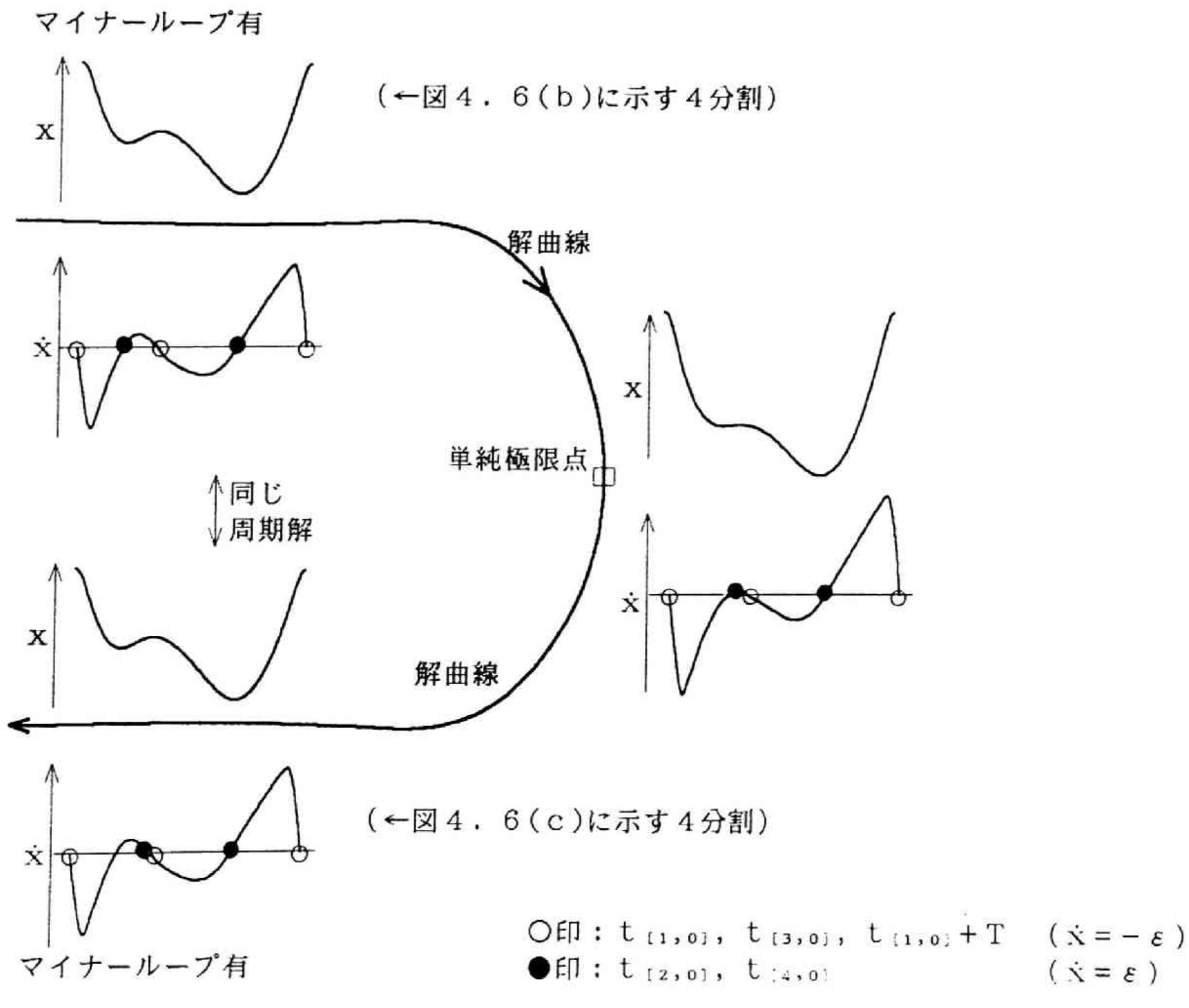
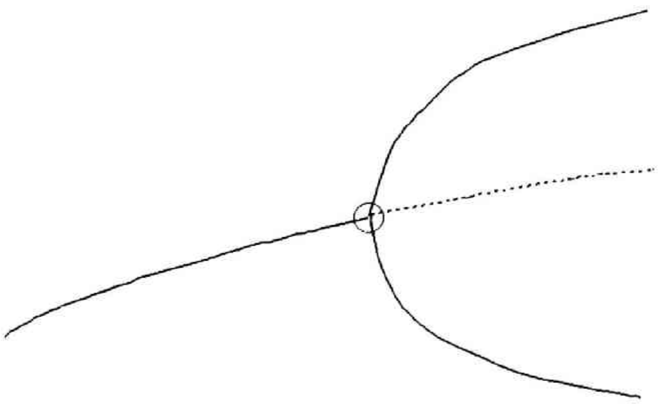
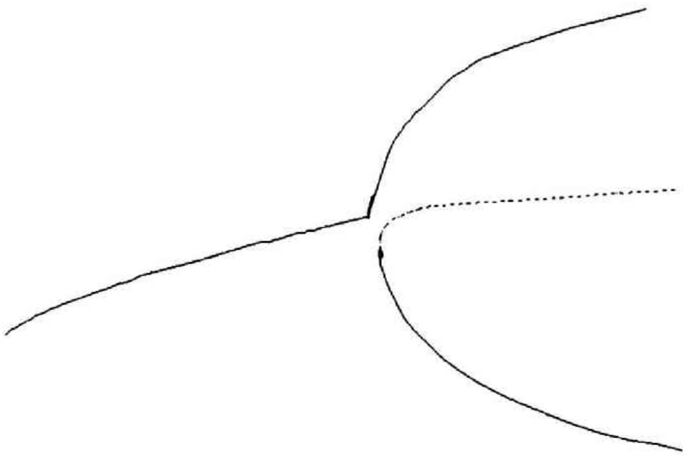


図４．８　４区間に分割する場合



（ａ）　’完全な’分岐（○印：分岐点）



（ｂ）　’不完全な’分岐

図４．９　’完全な’分岐と’不完全な’分岐

第５章　分数調波周期振動の分岐現象の解析

５．１　分数調波周期解の分岐

５.１.１　分数調波周期解の解曲線

本章では説明の都合上，基本調波周期解の解曲線を与える式を，

$$\mathbb{F}_{(1)}(\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)}) = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{[1,0]} - \mathbb{X}_{[2,N]} \\ f_{[1,0]} + a\eta_{[1,0]} \\ \mathbb{X}_{[2,0]} - \mathbb{X}_{[1,N]} \\ f_{[2,0]} + a\eta_{[2,0]} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.1}$$

ただし，

$$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_{(1)} \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{m(1)+1}) \tag{5.2}$$

$$\mathbb{Z}_{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}_{[1,0]} \\ t_{[1,0]} \\ \mathbb{X}_{[2,0]} \\ t_{[2,0]} \end{bmatrix} (\in \mathbb{R}^{m(1)},\ m_{(1)} = 2n)$$

と書くことにする（前章までと，変数および方程式の順序が異なる）．

本節では，図５．１のように，１／Ｍ分数調波周期解（Ｍ倍周期解）の周期ＭＴを２Ｍ個の区間に分割し（ｘが極値をとる時刻を $t_{[1,0]}, t_{[2,0]}, \cdots, t_{[2M,0]}$ とする），１／Ｍ分数調波周期解を求めることにする．２Ｍ個の区間をそれぞれＮ等分して，状態方程式(3.4)を離散化すると，

$$\mathbb{X}_{[q,p+1]} = \mathbb{X}_{[q,p]} + \Delta t_q (\mathbb{f}_{[q,p]} + \mathbb{a}\eta_{[q,p]}) \tag{5.3}$$

ただし，

$$\Delta t_q = \begin{cases} (t_{[q+1,0]} - t_{[q,0]})/N & (q = 1,2,\cdots,2M-1) \\ (t_{[1,0]} + MT - t_{[2M,0]})/N & (q = 2M) \end{cases}$$

$$t_{[q,p]} = t_{[q,0]} + p\Delta t_q \ ,\ \mathbb{f}_{[q,p]} = \mathbb{f}(t_{[q,p]}, \mathbb{X}_{[q,p]}) \tag{5.4}$$

$$\eta_{[q,p]} = \eta(x_{[q,p]}) \qquad (q = 1,\cdots,2M\ ,\ p = 0,\cdots,N-1)$$

が得られる．１／Ｍ分数調波周期解の解曲線は，

$$\mathbb{F}_{(M)}(\widetilde{\mathbb{z}}_{(M)}) = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]} - \mathbb{x}_{[2M,N]} \\ \mathbb{f}_{[1,0]} + a\,\eta_{[1,0]} \\ \mathbb{x}_{[2,0]} - \mathbb{x}_{[1,N]} \\ \mathbb{f}_{[2,0]} + a\,\eta_{[2,0]} \\ \vdots \\ \mathbb{x}_{[2M,0]} - \mathbb{x}_{[2M-1,N]} \\ \mathbb{f}_{[2M,0]} + a\,\eta_{[2M,0]} \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.5}$$

ただし,

$$\widetilde{\mathbb{z}}_{(M)} = \begin{bmatrix} \mathbb{z}_{(M)} \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{m(M)+1})$$

$$\mathbb{z}_{(M)} = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]} \\ t_{[1,0]} \\ \mathbb{x}_{[2,0]} \\ t_{[2,0]} \\ \vdots \\ \mathbb{x}_{[2M,0]} \\ t_{[2M,0]} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{m(M)},\ m_{(M)} = M\,m_{(1)}) \tag{5.6}$$

で表される.

基本調波周期解の解曲線(5.1)上の点$\widetilde{\mathbb{z}}_{(1)}$に対して,

$$\widetilde{\mathbb{z}}_{(M)}{}^1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbb{z}_{(M)}{}^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{z}_{(M)}{}^1 \equiv \begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]}{}^1 \\ t_{[1,0]}{}^1 \\ \mathbb{x}_{[2,0]}{}^1 \\ t_{[2,0]}{}^1 \\ \vdots \\ \mathbb{x}_{[2M,0]}{}^1 \\ t_{[2M,0]}{}^1 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,0]}{}^1 \\ t_{[1,0]}{}^1 \\ \mathbb{x}_{[2,0]}{}^1 \\ t_{[2,0]}{}^1 \\ \alpha^1 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbb{z}}_{(1)}, \quad \begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[2i-1,p]}{}^1 \\ t_{[2i-1,p]}{}^1 \\ \mathbb{x}_{[2i,p]}{}^1 \\ t_{[2i,p]}{}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[1,p]}{}^1 \\ t_{[1,p]}{}^1 + (i-1)T \\ \mathbb{x}_{[2,p]}{}^1 \\ \mathbb{x}_{[2,p]}{}^1 + (i-1)T \end{bmatrix}$$

$$(i = 1,\cdots,M\ ,\ p = 0,\cdots,N) \tag{5.8}$$

とおくと，$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^1$は解曲線(5.5)上の点となっている．すなわち，式(5.5)を満たす$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}$の集合は，基本調波周期解の解曲線$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^1$を含んでいる．また，解曲線(5.1)上の点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)}$について，

$$\mathbb{P}=\begin{bmatrix} \mathbb{1} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \mathbb{O} & \mathbb{0} \\ \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial t_{[1,0]}} & \mathbb{O} & 0 \\ -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \mathbb{1} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[2,0]}} \\ \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial \eta_{[1,0]}}\dfrac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & 0 & \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} & \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial t_{[2,0]}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{Q}=\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}}\dfrac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} & \mathbb{0} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[2,0]}} \\ \mathbb{O} & 0 & \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial \eta_{[2,0]}}\dfrac{\partial \eta_{[2,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} & 0 \\ \mathbb{O} & \mathbb{0} & -\dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \eta_{[2,0]}}\dfrac{\partial \eta_{[2,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}} & \mathbb{0} \\ \mathbb{O} & 0 & \mathbb{O} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

ただし，$e_{[q,0]}=f_{[q,0]}+a\eta_{[q,0]}\quad(q=1,2)$

とおくと，$\partial\mathbb{F}_{(1)}/\partial\mathbb{Z}_{(1)}$は，

$$\frac{\partial\mathbb{F}_{(1)}}{\partial\mathbb{Z}_{(1)}}=\mathbb{P}+\mathbb{Q} \tag{5.10}$$

と書ける．ただし，

$$\begin{aligned} &|\eta_{[1,0]}|\geqq|\eta_{[2,0]}|\text{のとき，}\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial \eta_{[2,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial e_{[1,0]}}{\partial \eta_{[2,0]}}=0 \\ &|\eta_{[1,0]}|\leqq|\eta_{[2,0]}|\text{のとき，}\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial e_{[2,0]}}{\partial \eta_{[1,0]}}=0 \end{aligned} \tag{5.11}$$

である．このとき，点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)}$と式(5.7),(5.8)の対応関係にある点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^1$において，$\partial\mathbb{F}_{(M)}/\partial\mathbb{Z}_{(M)}$は，

$$\frac{\partial\mathbb{F}_{(M)}}{\partial\mathbb{Z}_{(M)}}=\begin{bmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{P} & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{Q} & \mathbb{P} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{Q} & \mathbb{P} \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

で与えられる．ここで，

$$\Delta_{z(M)} \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{Z}_{(M)}}\right) \quad , \lambda_{(M,k)} \equiv \exp(j\frac{2\pi k}{M}) \quad (j：虚数単位) \tag{5.13}$$

$$\Delta_{z(M,k)} \equiv \det(\mathbb{P} + \lambda_{(M,k)}\mathbb{Q}) \tag{5.14}$$

とおくと，付録Hより，

$$\Delta_{z(M)} = \prod_{k=0}^{M-1} \Delta_{z(M,k)} \tag{5.15}$$

が成り立ち，また，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{Z}_{(M)}}\right) = \sum_{k=0}^{M-1} \mathrm{rank}(\mathbb{P} + \lambda_{(M,k)}\mathbb{Q}) \tag{5.16}$$

が成り立つ．

5.1.2 分数調波周期解の分岐

解曲線 $\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^1$ 上において，ある点が特異点となるための条件は，

$$\Delta_{z(M)} = 0 \tag{5.17}$$

で与えられる．ここで，

$$\det(\mathbb{P} + \lambda_{(M,M-k)}\mathbb{Q}) = \det(\mathbb{P} + \lambda_{(M,k)}\mathbb{Q}) \tag{5.18}$$

であるので，式(5.17)の条件は，

$$0 \leqq k \leqq M/2 \tag{5.19}$$

の範囲に，

$$\Delta_{z(M,K)} = \det(\mathbb{P} + \lambda_{(M,k)}\mathbb{Q}) = 0 \tag{5.20}$$

を満たす整数kが存在することと同値である．ここでは，式(5.19),(5.20)を満たす整数kは高々1個であるとし，その整数をKとおく．すなわち，

$$\Delta_{z(M,k)} = \det(\mathbb{P} + \lambda_{(M,k)}\mathbb{Q}) \begin{cases} = 0 & (k = K) \\ \neq 0 & (k \neq K) \end{cases} \tag{5.21}$$

とする．このとき，$\lambda_{(M,K)}$の値によって，特異点は次のように分類される．

(i) $\lambda_{(M,K)} = 1$ $(K = 0)$ のとき

このとき，

$$\Delta_{z(1)} = \det(\mathbb{P} + \mathbb{Q}) = 0 \tag{5.22}$$

であるので，この点は基本調波周期解の特異点である．従って，この点において分数調波周期解は一般には分岐しない．

(ii) $\lambda_{(M,K)} = -1$ $(K = M/2, \text{M は偶数})$ のとき

このとき，

$$\det(\mathbb{P}-\mathbb{Q}) = \Delta_{z(2,1)} = 0 \tag{5.23}$$

である．従って，

$$\Delta_{z(2)} = 0 \tag{5.24}$$

となる．式(5.21)の仮定より，

$$\Delta_{z(1)} = \det(\mathbb{P}+\lambda_{(M,0)}\mathbb{Q}) = \det(\mathbb{P}+\mathbb{Q}) \neq 0 \tag{5.25}$$

であるので，この点において基本調波周期解は分岐せず，従って，この点は，基本調波周期解の解曲線 $\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}$ から１／２分数調波周期解（倍周期解）が分岐する点（倍周期分岐点）となる．

(iii) $\lambda_{(M,K)} \neq \pm 1$ のとき

このとき，$\lambda_{(M,K)} \notin \mathbb{R}$ である．ＭとＫの最大公倍数を g とし，

$$M = gM' \ ,\ K = gK' \tag{5.26}$$

とおく．このとき，

$$\det(\mathbb{P}+\exp(j\frac{2\pi K'}{M'})\mathbb{Q}) = \Delta_{z(M',K')} = 0 \tag{5.27}$$

となり，従って，

$$\Delta_{z(M')} = 0 \tag{5.28}$$

となる．式(5.21)の仮定より式(5.25)が成り立つので，この点において基本調波周期解は分岐せず，従って，この点は，基本調波周期解の解曲線 $\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}$ から１／Ｍ'分数調波周期解（Ｍ'倍周期解）が分岐する点（Ｍ'倍周期分岐点）となる．ＭとＫが互いに素の場合には，Ｍ倍周期分岐点となる．

次節において，倍周期分岐点の検出と算出の方法などについて述べる．また，次々節において，Ｍ倍周期分岐点の検出と算出の方法などについて述べる．

５．２　倍周期解の分岐

５．２．１　倍周期分岐点の検出と算出

本節では，基本調波周期解の解曲線 $\tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}$（あるいは $\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)}$）上に現れる倍周期分岐点の検出および算出の方法を述べる．５．１．２より，倍周期分岐点となるための条件は，

$$\Delta_{z(2,1)} = \det(\mathbb{P}-\mathbb{Q}) = 0 \tag{5.29}$$

で与えられる．倍周期分岐点を$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$とおき，基本周期解の解曲線(5.1)上において，点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$と式(5.7),(5.8)の対応関係にある点を$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$とおく．ここでは，

$$\mathrm{rank}\ (\mathbb{P}-\mathbb{Q}) = m_{(1)} - 1 \tag{5.30}$$

を仮定する．このとき，式(5.16),(5.25),(5.30)および(I.4)（付録I）より，

$$\mathrm{rank}\ \left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(2)}}{\partial \mathbb{Z}_{(2)}}\right) = \mathrm{rank}\ \left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(2)}}{\partial \widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}}\right) = m_{(2)} - 1 \tag{5.31}$$

が成り立ち，点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$は，解曲線，

$$\mathbb{F}_{(2)}(\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}) = \mathbb{0} \tag{5.32}$$

上の単純分岐点となる．

点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$は，解曲線(5.32)上の単純分岐点であるので，４．３．３で述べたようにして，分岐点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$を検出および算出することができる．しかし，ここでは，基本調波周期解の解曲線$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)}$を追跡している場合に，解曲線上に現れる点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$を検出および算出する方法を述べる．

解曲線$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}$では，分岐点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$の前後において$\Delta_{z(2)}$の符号が変化する．従って，式(5.15),(5.25)より，分岐点の前後において，$\Delta_{(2,1)} = \det\ (\mathbb{P}-\mathbb{Q})$の符号が変化する．そこで，点列$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)\langle i\rangle}$（$i = 0,1,\cdots$）の中に，

$$\Delta_{z(2,1)\langle i\rangle} \cdot \Delta_{z(2,1)\langle i+1\rangle} < 0 \tag{5.33}$$

ただし，

$$\Delta_{z(2,1)\langle i\rangle} = \Delta_{z(2,1)} \Big|_{\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)} = \widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)\langle i\rangle}} \tag{5.34}$$

を満たす２点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)\langle i\rangle}$，$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)\langle i+1\rangle}$が存在すれば，この２点の間に倍周期分岐点があると判断することにする．

倍周期分岐点は，未知数$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$および$\mathbb{u}\ (\in \mathbb{R}^{m(1)})$に関する方程式，

$$\mathbb{G}_{(2)}(\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}, \mathbb{u}) = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{(1)}(\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}) \\ (\mathbb{P}-\mathbb{Q})\mathbb{u} \\ \|\mathbb{u}\|^2 - 1 \end{bmatrix} = \mathbb{0} \tag{5.35}$$

を解くことにより求められる．ここで，$\mathbb{u}$は行列（$\mathbb{P}-\mathbb{Q}$）の右零固有ベクトルである．方程式(5.35)の解法は方程式(4.30)の解法に準じる．倍周期分岐点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$は，$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$から式(5.7),(5.8)の対応関係を用いて得られる．

５．２．２ Branch Switching

倍周期分岐点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$は，解曲線$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(2)}$における単純分岐点であるので，４．３．

3と同様にしてbranch switchingを行うことができる．

倍周期分岐点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{1}{}_{sb}$においては，

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{(2)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}}\tilde{\mathbb{u}}_{a}=\mathbb{0}\quad,\quad \frac{\partial \mathbb{F}_{(2)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}}\tilde{\mathbb{u}}_{b}=\mathbb{0}\quad,\quad \mathbb{v}^{tr}\frac{\partial \mathbb{F}_{(2)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}}=\mathbb{0} \tag{5.36}$$

$(\tilde{\mathbb{u}}_{a},\tilde{\mathbb{u}}_{b}\in\mathbb{R}^{m(2)+1},\ \mathbb{v}\in\mathbb{R}^{m(2)},\ \tilde{\mathbb{u}}_{a}\not\parallel\tilde{\mathbb{u}}_{b})$

を満たす$\mathbb{0}$でないベクトル$\tilde{\mathbb{u}}_{a}$，$\tilde{\mathbb{u}}_{b}$，$\mathbb{v}$が存在する．倍周期分岐点における接線ベクトルを，

$$\dot{\tilde{\mathbb{Z}}}_{(2)}=r_{a}\tilde{\mathbb{u}}_{a}+r_{b}\tilde{\mathbb{u}}_{b} \tag{5.37}$$

と置くと，r_a，r_bに関する２次方程式，

$$\mathbb{v}^{tr}\frac{\partial^{2}\mathbb{F}_{(2)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{2}}(r_{a}\tilde{\mathbb{u}}_{a}+r_{b}\tilde{\mathbb{u}}_{b},\ r_{a}\tilde{\mathbb{u}}_{a}+r_{b}\tilde{\mathbb{u}}_{b})$$

$$=A_{aa}r_{a}{}^{2}+2A_{ab}r_{a}r_{b}+A_{bb}r_{b}{}^{2}\ =\ 0 \tag{5.38}$$

ただし，

$$A_{ik}=\mathbb{v}^{tr}\frac{\partial^{2}\mathbb{F}_{(2)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}{}^{2}}(\tilde{\mathbb{u}}_{i},\tilde{\mathbb{u}}_{k})=\mathbb{v}^{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(2)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(2)}}\tilde{\mathbb{u}}_{i}\right)\right\}\tilde{\mathbb{u}}_{k} \tag{5.39}$$

$(i,\ k=a,\ b)$

が得られる．方程式(5.38)により，r_a，r_bの比が２通り定まるので，分岐点において交差する２曲線の方向を知ることができる．

５．３　M倍周期解の分岐

５．３．１　M倍周期分岐点の検出と算出

本節では，基本調波周期解の解曲線$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}$（あるいは$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)}$）上に現れるM倍周期分岐点の検出および算出の方法を述べる（ただし，$M\neq 1,2$とする）．５．１．２より，M倍周期分岐点となるための条件は，

$$\Delta_{z(M,K)}=\det(\mathbb{P}+\lambda_{(M,K)}\mathbb{Q})=0\quad（ただし，整数M,Kは互いに素） \tag{5.40}$$

で与えられる．M倍周期分岐点を$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$とおき，基本周期解の解曲線(5.1)上において，点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$と式(5.7),(5.8)の対応関係にある点を$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$とおく．ここでは，

$$\mathrm{rank}(\mathbb{P}+\lambda_{(M,K)}\mathbb{Q})=m_{(1)}-1 \tag{5.41}$$

となる場合について述べる．このとき，

$$\mathrm{rank}(\mathbb{P}+\lambda_{(M,M-K)}\mathbb{Q})=\mathrm{rank}(\mathbb{P}+\lambda_{(M,K)}\mathbb{Q})=m_{(1)}-1 \tag{5.42}$$

となる．従って，式(5.16),(5.21),(5.41),(5.42)および(I.4)（付録Ｉ）より，M倍周期分岐点$\tilde{\mathbb{z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$においては，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{z}_{(M)}}\right)=\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \tilde{\mathbb{z}}_{(M)}}\right)=m_{(M)}-2 \qquad (5.43)$$

となり，点$\tilde{\mathbb{z}}_{(M)}$は解曲線(5.5)上の単純特異点ではない．

前節と同様に，基本調波周期解の解曲線(5.1)を追跡している場合に，解曲線上に現れる$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)sb}$を検出および算出する方法を述べる．分岐点においては，$\Delta_{z(M,K)}$および$\Delta_{z(M,M-K)}$が同時に０となる．分岐点付近においては，

$$\begin{aligned}&\Delta_{z(M,K)}\cdot\Delta_{z(M,M-K)}=|\Delta_{z(M,K)}|^2\geqq 0\\ &\Delta_{z(M,k)}\neq 0\quad(k\neq K,\ M-K)\end{aligned} \qquad (5.44)$$

である．式(5.44)より，$\Delta_{z(M)}$は分岐点において０となるが，その前後において$\Delta_{z(M)}$の符号は変化しない．そこで，，点列$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)\langle i\rangle}$（$i=0,1,\cdots$）の中に，

$$\begin{cases}|\Delta_{z(M,K)\langle i\rangle}|<|\Delta_{z(M,K)\langle i-1\rangle}|\\ |\Delta_{z(M,K)\langle i\rangle}|<|\Delta_{z(M,K)\langle i+1\rangle}|\\ |\Delta_{z(M,K)\langle i\rangle}|<\varepsilon_{\Delta}\qquad(\varepsilon_{\Delta}>0\text{：適当な閾値})\end{cases} \qquad (5.45)$$

ただし，

$$\Delta_{z(M,1)\langle i\rangle}=\Delta_{z(M,1)}\Big|_{\tilde{\mathbb{z}}_{(1)}=\tilde{\mathbb{z}}_{(1)\langle i\rangle}} \qquad (5.46)$$

を満たす３点$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)\langle i-1\rangle}$，$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)\langle i\rangle}$，$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)\langle i+1\rangle}$が存在すれば，点$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)\langle i\rangle}$の付近にM倍周期分岐点があると判断することにする．

式(5.41)より，M倍周期分岐点においては，

$$(\mathbb{P}+\lambda_{(M,K)}\mathbb{Q})(\mathbb{u}_R+j\,\mathbb{u}_I)=\mathbb{0}\qquad(j\text{：虚数単位}) \qquad (5.47)$$

すなわち，

$$\begin{bmatrix}\mathbb{P}+\lambda_R\mathbb{Q} & -\lambda_I\mathbb{Q}\\ \lambda_I\mathbb{Q} & \mathbb{P}+\lambda_R\mathbb{Q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{u}_R\\ \mathbb{u}_I\end{bmatrix}=\mathbb{0} \qquad (5.48)$$

ただし，

$$\lambda_R=\mathrm{Re}(\lambda_{(M,K)}),\quad \lambda_I=\mathrm{Im}(\lambda_{(M,K)})$$

をみたすベクトル$\mathbb{u}_R,\mathbb{u}_I$（$\in\mathbb{R}^{m(1)}$）が存在する．従って，M倍周期分岐点は，未知数$\tilde{\mathbb{z}}_{(1)sb}$，$\mathbb{u}_R$，$\mathbb{u}_I$，$\beta(\in\mathbb{R})$に対する方程式，

$$\mathbb{G}_{(M)}(\tilde{\mathbb{z}}_{(1)sb},\mathbb{u}_R,\mathbb{u}_I,\beta)=\begin{bmatrix}\mathbb{F}_{(1)}(\tilde{\mathbb{z}}_{(1)sb})\\ (\mathbb{P}+\lambda_R\mathbb{Q})\mathbb{u}_R-\lambda_I\mathbb{Q}\mathbb{u}_I\\ \lambda_I\mathbb{Q}\mathbb{u}_R+(\mathbb{P}+\lambda_R\mathbb{Q})\mathbb{u}_I\\ \|\mathbb{u}_R\|^2-1\\ \|\mathbb{u}_I\|^2-1\end{bmatrix}=\mathbb{0} \qquad (5.49)$$

を解くことにより求められる．ここで，βは系のα以外のパラメータである（分岐点が単純特異点でないために必要なパラメータ次元が２となる）．方程式(5.49)の解法は方程式(4.36)の解法に準じる．M倍周期分岐点$\mathbb{Z}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$は，$\mathbb{Z}_{1}{}_{,sb}$から式(5.7),(5.8)の対応関係を用いて得られる．

5.3.2 Branch Switching

式(5.43)より，分岐点$\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$において，

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\widetilde{\mathbb{u}}_a=\mathbb{0}\ ,\ \frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\widetilde{\mathbb{u}}_b=\mathbb{0}\ ,\ \frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\widetilde{\mathbb{u}}_c=\mathbb{0}$$
$$\mathbb{v}_a{}^{tr}\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}=\mathbb{o}\ ,\ \mathbb{v}_b{}^{tr}\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}=\mathbb{o} \tag{5.50}$$

$(\widetilde{\mathbb{u}}_a,\widetilde{\mathbb{u}}_b,\widetilde{\mathbb{u}}_c\in\mathbb{R}^{m(M)+1},\ \mathbb{v}_a,\mathbb{v}_b\in\mathbb{R}^{m(M)},\ \widetilde{\mathbb{u}}_a\nparallel\widetilde{\mathbb{u}}_b\nparallel\widetilde{\mathbb{u}}_c,\ \mathbb{v}_a\nparallel\mathbb{v}_b)$

を満たす$\mathbb{0}$でないベクトル$\widetilde{\mathbb{u}}_a,\widetilde{\mathbb{u}}_b,\widetilde{\mathbb{u}}_c,\mathbb{v}_a,\mathbb{v}_b$が存在する．分岐点における接線ベクトルを，

$$\dot{\widetilde{\mathbb{Z}}}_{(M)}=r_a\widetilde{\mathbb{u}}_b+r_b\widetilde{\mathbb{u}}_b+r_c\widetilde{\mathbb{u}}_c \tag{5.51}$$

と置くと，r_a,r_b,r_cに関する連立２次方程式，

$$\begin{aligned}&A_{aa}r_a{}^2+A_{bb}r_b{}^2+A_{cc}r_c{}^2\\&\quad+2A_{ab}r_ar_b+2A_{bc}r_br_c+2A_{ca}r_cr_a=0\\&B_{aa}r_a{}^2+B_{bb}r_b{}^2+B_{cc}r_c{}^2\\&\quad+2B_{ab}r_ar_b+2B_{bc}r_br_c+2B_{ca}r_cr_a=0\end{aligned} \tag{5.52}$$

ただし，

$$\begin{aligned}A_{ik}&=\mathbb{v}_a{}^{tr}\frac{\partial^2\mathbb{F}_{(M)}}{\partial\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^2}(\widetilde{\mathbb{u}}_i,\widetilde{\mathbb{u}}_k)=\mathbb{v}_a{}^{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\left(\frac{\partial\mathbb{F}_{(M)}}{\partial\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\widetilde{\mathbb{u}}_i\right)\right\}\widetilde{\mathbb{u}}_k\\B_{ik}&=\mathbb{v}_b{}^{tr}\frac{\partial^2\mathbb{F}_{(M)}}{\partial\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^2}(\widetilde{\mathbb{u}}_i,\widetilde{\mathbb{u}}_k)=\mathbb{v}_b{}^{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\left(\frac{\partial\mathbb{F}_{(M)}}{\partial\widetilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\widetilde{\mathbb{u}}_i\right)\right\}\widetilde{\mathbb{u}}_k\end{aligned} \tag{5.53}$$

$(i,\ k=a,\ b,\ c)$

が得られる．方程式(5.52)により定まるr_a,r_b,r_cの比から，分岐点において交差する曲線の方向を知ることができる．ただし，方程式(5.52)により定まるr_a,r_b,r_cの比は高々４通りである．従って，分岐点において５本以上の曲線が交差する場合については，式(5.51),(5.52),(5.53)からは曲線の方向を定めることができない．

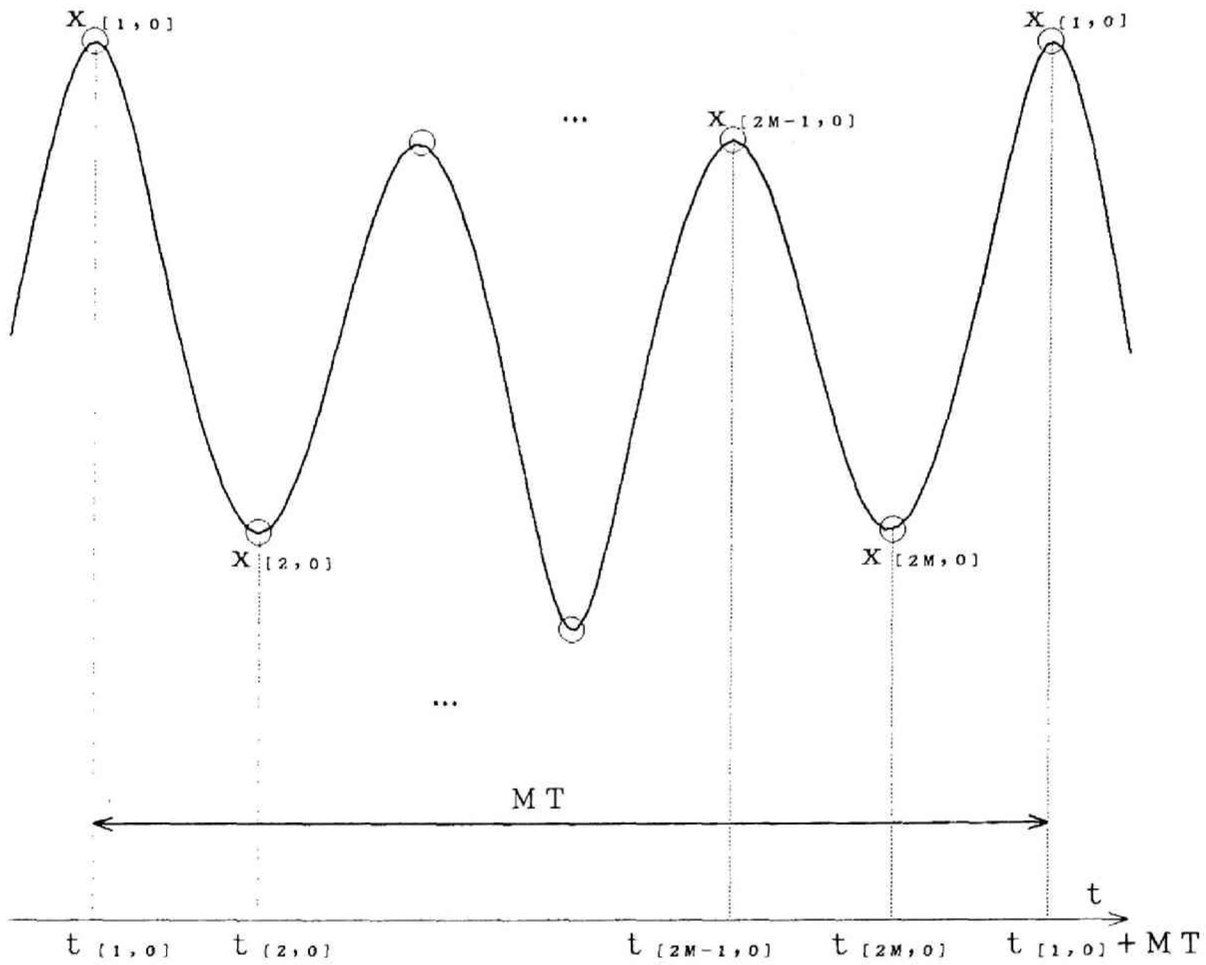


図５．１　周期ＭＴの分割

第６章　２階の強制振動系における分岐現象

６．１　ヒステリシス特性

６．１．１　ヒステリシス特性の連続変形

ヒステリシス特性の違いによる系の定常特性の変化を調べるためには，特性を容易に変化させることが可能なようにヒステリシス特性を与えることが必要である．そこで，本論文では，次のように素子のヒステリシス特性を与える．まず，ヒステリシス関数$\eta(x)$を１つ適当に与える（本論文では，ヒステリシス関数$H(\eta)$の逆関数として，６．１．２に示すように与える）．次に，$\eta(x)$の心線特性（$c(x)$とおく）を適当に定める（６．１．３参照）．その上で，素子のヒステリシス特性を，パラメータｈ（$\in \mathbb{R}$）を用いて，

$$\xi(x) = h \cdot \eta(x) + (1-h) \cdot c(x) \tag{6.1}$$

で与える．$h=0$の時，$\xi(x)$は心線特性$c(x)$となり，ヒステリシス特性を持たなくなる．$h=1$の時，$\xi(x)$は$\eta(x)$と等しくなり，元のヒステリシス特性となる．例えば，$\eta(x)$および$c(x)$を図６．１(a)(b)のように与え，$h \geqq 0$および$h \leqq 0$の範囲でｈの値を変化させると，$\xi(x)$の特性は，それぞれ，図６．１(c)(d)のように変化する．図から分かるように，$h \neq 0$の時，$\xi(x)$はヒステリシス特性を示し，$|h|$が増加するとヒステリシスループの面積が増加する．ただし，$h<0$の場合は，ループの回り方が，$h>0$の場合に対して逆になっている．従って，式(6.1)を用いて，可飽和インダクタにおける磁束(x)－電流(ξ)特性を表す場合を考えると，$h>0$では，素子においてエネルギーが消費される（ヒステリシス損が発生する）のに対し，$h<0$では，素子においてエネルギーが発生することになる．全般的にいえば，ｈの増加とともにヒステリシス損が増加（エネルギーの発生量が減少）し，ｈの減少とともにヒステリシス損が減少（エネルギーの発生量が増加）することになる．

素子のヒステリシス特性をこのように与えることにより，例えば，パラメータｈを連続的に変化させて，ヒステリシス損の変化に対する周期解の分岐の様子を調べるなどの解析が可能となる．

６．１．２　プライザッハ分布関数

ヒステリシス関数$H(\eta)$（あるいは逆関数$\eta(x)$）の特性は，プライザッハ分

布関数によって定まる．本論文では，次の３点，

① 式(2.8),(2.12)の積分を解析的に行うことができること

（これは，式(2.8),(2.12)の計算の際，数値積分を用いるより，解析的に積分を行う方が，計算時間と精度の面において有利であるためである）．

② 実際の強磁性体において測定される双極子の分布となるべく近い分布を示すこと．

③ $H(\eta)$の微係数が，$\eta=\pm\eta_s$において連続になるように，定義域の境界，

$$\eta_u=\eta_s \quad \text{および} \quad \eta_v=-\eta_s \tag{6.2}$$

において，分布関数の値が０となること．

に留意して，分布関数として，

$$K(\eta_u,\eta_v)=K_0(\eta_s{}^2-\eta_u{}^2)^2(\eta_s{}^2-\eta_v{}^2)^2 \tag{6.3}$$

（$K_0\in\mathbb{R}$：定数）

を用いることにする．このとき，式(2.8),(2.12)の$\varDelta H$および∇Hは，それぞれ，

$$\begin{aligned}&\varDelta H(\eta_{ua},\eta_{ub},\eta_v)\\&=K_0[V(\eta_{ub})-V(\eta_{ua})-W(\eta_v)\{W(\eta_{ub})-W(\eta_{ua})\}]\\&\nabla H(\eta_{va},\eta_{vb},\eta_u)\\&=K_0[-V(\eta_{vb})+V(\eta_{va})+W(\eta_u)\{W(\eta_{vb})-W(\eta_{va})\}]\end{aligned} \tag{6.4}$$

ただし，

$$\begin{aligned}V(\eta)&=\frac{1}{50}\eta^{10}-\frac{2\eta_s{}^2}{15}\eta^8+\frac{19\eta_s{}^4}{45}\eta^6-\frac{2\eta_s{}^6}{3}\eta^4+\frac{\eta_s{}^8}{2}\eta^2\\W(\eta)&=\frac{1}{5}\eta^5-\frac{2\eta_s{}^2}{3}\eta^3+\eta_s{}^4\eta\end{aligned} \tag{6.5}$$

で与えられる．

実際の強磁性体において測定される双極子の分布は，図６．２（ａ）に示すように，

$$\eta_v=-\eta_u \quad (0<\eta_u<\eta_s)$$

付近のある１点$(\eta_c,-\eta_c)$ $(0<\eta_c<\eta_s)$に分布密度の最大値を持ち，その点から離れるに従って分布密度が減少するという形を示すことが多い．式(6.3)で表される双極子の分布は，図６．２（ｂ）に示されるように，

$$\eta_u=\eta_v=0$$

に分布密度の最大値を持つ形を示し，図６．２（ａ）の分布とは少し異なっているが，①と③の条件を満たし，また，式(2.8),(2.12)の計算式が比較的簡単であることから，式(6.3)の分布関数を用いることにする．

本論文では，式(2.17),(6.3)で与えられるヒステリシス関数$H(\eta)$において，各パラメータの値を，

$$\eta_s=1 \quad , \quad l_s=0.05 \quad , \quad K_0=0.95\frac{225}{64} \quad , \quad H_{min}=-0.95 \tag{6.6}$$

として以下の解析に用いる．この場合の$H(\eta)$の特性を図６．３に示す．

６．１．３　心線特性

ヒステリシス特性$\eta=H^{-1}(x)$の心線特性を次のように与える．

ヒステリシス特性$H(\eta)$のメジャーループ（飽和ループ）の上昇特性を$H_+(\eta)$とし，下降特性を$H_-(\eta)$とする．式(6.3)の分布関数を用いる場合，$H_+(\eta)$および$H_-(\eta)$は，

$$\begin{aligned} H_+(\eta)&=l_s\cdot\eta+K_0\{V(\eta)+\frac{8\eta_s^5}{15}W(\eta)+\frac{32\eta_s^{10}}{225}\}+H_{min} \\ H_-(\eta)&=l_s\cdot\eta+K_0\{-V(\eta)+\frac{8\eta_s^5}{15}W(\eta)-\frac{32\eta_s^{10}}{225}\}+H_{max} \end{aligned} \tag{6.7}$$

ただし，

$$H_{max}=K_0\frac{128\eta_s^{10}}{225}+H_{min}$$

で与えられる．これらの，$H_+(\eta)$および$H_-(\eta)$を用いて，本論文では，次のように２種類の心線特性を定める．

（Ｉ）　$H_+(\eta)$と$H_-(\eta)$の相加平均，

$$H_c(\eta)=\frac{H_+(\eta)+H_-(\eta)}{2}=K_0\frac{8\eta_s^5}{15}W(\eta)+l_s\cdot\eta \tag{6.8}$$

を考え，この逆関数を心線特性として，

$$c(x)=H_c^{-1}(x) \tag{6.9}$$

とする．この心線特性を心線特性Ｉと呼ぶことにする．

（II）　$H_+(\eta)$および$H_-(\eta)$の逆関数の相加平均をとって，

$$c(x)=\frac{H_+^{-1}(x)+H_-^{-1}(x)}{2} \tag{6.10}$$

とする．この心線特性を心線特性IIと呼ぶことにする

パラメータの値が式(6.6)で与えられる場合，式(6.7)～(6.10)より，心線特性ＩおよびIIは，それぞれ，図６．４(ａ)(ｂ)のようになる．また，このとき，式(6.1)で表される$\xi(x)$の特性は，図６．５(ａ)(ｂ)（心線特性Ｉの場合）および図６．６(ａ)(ｂ)（心線特性IIの場合）のようになる．図６．５，図６．６から分か

るように，｜h｜が大きい部分では，x－ξ特性に，dξ／dx＜0となる部分が生じ，歪んだx－ξ特性（図6.7）となる場合がある．dξ／dxが負となる部分が現れないhの範囲は，大体，

心線特性Ⅰの場合　－0.5～4.2

心線特性Ⅱの場合　－1.7～1.7

となっている．従って，hが正の場合を主に扱うのであれば心線特性Ⅰを用い，また，hが正の場合と負の場合とを比較する場合には心線特性Ⅱを用いるなど，場合に応じて，2つの心線特性を使い分けることにする．

6．2　2階の強制振動系

本章では，図6.8に示す並列共振回路，および，図6.9に示す直列共振回路における周期振動の分岐現象を解析する．ただし，両共振回路において，可飽和インダクタはヒステリシス特性を持つとする．

6.2.1　並列共振回路

図6.8の回路において，可飽和インダクタの鎖交磁束ϕおよび，キャパシタの電荷qを状態変数にとり，状態方程式，

$$\begin{aligned} d\phi/d\tau &= q/C \\ dq/d\tau &= J\cos\omega\tau + J_0 - q/RC - i(\phi) \end{aligned} \tag{6.11}$$

を得る．可飽和インダクタの飽和磁束Φ_sおよび飽和電流$I_s(=i(\Phi_s))$を用いて，ϕおよびiを規格化して，

$$x=\phi/\Phi_s \quad , \quad \xi = i/I_s \tag{6.12}$$

とし，さらに，

$$t=\frac{\tau}{\left(\frac{\Phi_s}{I_s}C\right)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad y=\frac{q}{(\Phi_s I_s C)^{1/2}} \tag{6.13}$$

と変数変換すると，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ B\cos\nu t + B_0 - k\cdot y - \xi(x) \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

が得られる．ただし，

$$B=\frac{J}{I_s} \quad , \quad B_0=\frac{J_0}{I_s} \quad , \quad \nu=\left(\frac{\Phi_s}{I_s}C\right)^{\frac{1}{2}}\omega \quad , \quad k=\frac{1}{R}\left(\frac{\Phi_s}{I_sC}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.15}$$

であり，また，$\xi(x)$は式(6.1)で与えられるものとする．式(6.14)は，Duffing方程式における非線形項を，ヒステリシス関数$\xi(x)$とした式になっている．

6.2.2　直列共振回路

図6.9の回路において，可飽和インダクタの鎖交磁束ϕおよび，キャパシタの電荷qを状態変数にとり，状態方程式，

$$\begin{aligned} d\phi/d\tau &= E\cos\omega\tau - R\cdot i(\phi) - q/C \\ dq/d\tau &= i(\phi) \end{aligned} \tag{6.16}$$

を得る．可飽和インダクタの飽和磁束Φ_sおよび飽和電流$I_s(=i(\Phi_s))$を用いて，ϕおよびiを規格化して，

$$x = \phi/\Phi_s \quad , \quad \xi = i/I_s \tag{6.17}$$

とし，さらに，

$$t = \frac{\tau}{\left(\frac{\Phi_s}{I_s}C\right)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad y = \frac{q}{(\Phi_s I_s C)^{1/2}} \tag{6.18}$$

と変数変換すると，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\cos\nu t - k\cdot\xi(x) - y \\ \xi(x) \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

が得られる．ただし，

$$B = E\left(\frac{C}{\Phi_s I_s}\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \nu = \left(\frac{\Phi_s}{I_s}C\right)^{\frac{1}{2}}\omega \quad , \quad k = R\left(\frac{I_s C}{\Phi_s}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.20}$$

であり，また，$\xi(x)$は式(6.1)で与えられるものとする．

6．3　Shooting法を用いた定常解析

本節では，3．3節，3．5節で述べた方法を用いて，式(6.14)の並列共振回路について実際に解析を行った例を示し，変分方程式の履歴項の必要性を確かめるなど，幾つかの考察を行う．

まず，式(6.14),(6.1)において，

$$B = 0.5 \quad , \quad k = 0.1 \quad , \quad h = 3\ (\text{心線特性 I}) \quad , \quad \nu = 1 \quad , \quad B_0 = 0 \tag{6.21}$$

とした場合について，方程式(3.40)を解いて得られた5つの解を表6.1に示す．ただし，1周期を128分割し，第3章で述べたEuler法の代わりにRunge-Kutta法を用いて離散化を行った．得られた5つの周期解について，$x(t)$の波形（2周期）

と対応する$x-\xi(x)$ループを図６．１０に示す．図６．１１に，Newton法の推測値（$x_{[0]}{}^{(0)}, y_{[0]}{}^{(0)}, t_{[0]}{}^{(0)}$）を（0.4, 0.0, -5）とした場合(ａ)と，（0.85, 0.0, -5）とした場合(ｂ)について，Newton法の収束の様子を示す（実線）．ただし，(ａ)は表６．１の周期解①へ，(ｂ)は周期解②に収束する．図６．１１には，第１変分方程式の履歴項の効果を見るために，式(3.16),(C.3)（付録Ｃ）から履歴項を取り去って，

$$\frac{\partial \eta_{[P]}}{\partial x_{[0]}}=\frac{\partial \eta_{[P]}}{\partial x_{[P]}}\frac{\partial x_{[P]}}{\partial x_{[0]}} \quad , \quad \frac{\partial \eta_{[P]}}{\partial t_{[0]}}=\frac{\partial \eta_{[P]}}{\partial x_{[P]}}\frac{\partial x_{[P]}}{\partial t_{[0]}} \qquad (6.22)$$

として変分方程式(3.15)および(C.1)を計算した場合の収束の様子も示している（破線）．図６．１１を見ると，履歴項を無視すると，Jacobian行列が正しく求められないのでNewton法が収束しないことが分かる．表６．１の解①②について，

(ａ)変分方程式(3.15),(3.16)を積分

(ｂ)変分方程式(3.15),(6.22)（履歴項無視）を積分

(ｃ)中央差分を用いて数値微分

の３通りの方法で，$\partial \mathbf{x}_{[N]}/\partial \mathbf{x}_{[0]}$を計算した結果を表６．２に示す．ただし，ここでは，式(3.80)の境界線分を仮定して変分方程式の積分を行った．表６．２を見ると，(ａ)と(ｃ)はよく一致しているが，(ｂ)は(ａ)(ｃ)とは異なっており，変分方程式の履歴項を無視すると，$\mathbf{x}_{[0]}$に実際に微小変化を与えた場合における$\mathbf{x}_{[N]}$の微小変化を正しく求められないことが分かる．ヒステリシス素子のない非線形系の場合，一般に初期値に関する第１変分方程式は周期係数線形同次微分方程式となり，Liouvilleの公式[25]が成り立つ．しかし，変分方程式(3.15),(3.16)は，履歴項の存在のため，同次形の微分方程式（を離散化したもの）ではないために，Liouvilleの公式は一般には成立しない．系(6.14)の第１変分方程式において，仮にLiouvilleの公式が成り立つとすると，$\partial \mathbf{x}_{[N]}/\partial \mathbf{x}_{[0]}$の２つの固有値の積は，

$$\exp(-2\pi k) \fallingdotseq 0.53349 \qquad (6.23)$$

と等しいはずである．表６．２を見ると，履歴項を無視した(ｂ)の場合は，変分方程式が周期係数線形同次微分方程式（を離散化したもの）となるために固有値の積は式(6.23)の値と（ほぼ）等しくなっているが，(ａ)(ｃ)では，固有値の積は式(6.23)の値と等しくない．

表６．２を見ると，(ａ)と(ｃ)とでは値が若干異なっている．これは，$\dot{x}=0$における$\eta(x)$の微係数の不連続（付録Ｇ参照）に起因する誤差のためであると考

えられる．そこで，方程式(4.32)と同様，方程式(3.40)の第３式に微小摂動εを与えて，

$$
F(x_{[0]}, y_{[0]}, t_{[0]}) = \begin{bmatrix} x_{[0]} - x_{[N]} \\ y_{[0]} - y_{[N]} \\ f_{[0]} + a \cdot \eta_{[0]} + \varepsilon \end{bmatrix} = 0 \tag{6.24}
$$

とし，この方程式を解いて得られる解を表６．３に示す（ただし，解①②④では$\varepsilon = 10^{-5}$，解③⑤では$\varepsilon = -10^{-5}$とした）．表６．３の解①②について，先に示した３通りの場合について，$\partial x_{[N]} / \partial x_{[0]}$を計算した結果を表６．４に示す．表６．４を見ると，この場合は(ａ)と(ｃ)がかなりの精度で一致していることが分かる．次に，方程式(6.24)を用いた場合について，表６．３の周期解の安定判別を行った結果を表６．５に示す．表６．５を見ると，解②③では判別法によって判別結果が異なっている．このように判別結果が異なっている場合については，６．６節で改めて考察する．なお，解①では$\eta_{min} = -\eta_{max}$であるため，また，解④⑤では$x-\eta$ループが飽和ループとなり領域D_0が存在しないために，判別法①②で同一の判別結果となっている．

６．４　基本調波周期振動の分岐

本節では，第３章および第４章で述べた方法を用いて，６．２節の並列共振回路および直列共振回路における，基本調波周期振動の分岐現象について解析を行う．ただし，ここでは，第３章，第４章で述べたEuler法の代わりにRunge-Kutta法を用いて状態方程式(6.14)，(6.19)の離散化を行う．また，周期$T = 2\pi / \nu$を２つの区間に分割し，各区間をそれぞれ６４分割したparallel shootingを用いて解析を行う．

６．４．１　並列共振回路における分岐

６．４．１．１　［振幅特性］

まず，式(6.14),(6.1)の状態方程式において，パラメータｈ，ｋ，ν，B_0の値をそれぞれ，

$h = 1$（従って，$\xi(x) = \eta(x)$），$k = 0.1$，$\nu = 1$，$B_0 = 0$

とした場合について，パラメータＢの変化に対する方程式(3.64)の解の変化を図６．１２(ａ)～(ｄ)に示す．ただし，図６．１２(ａ)(ｂ)は，$0 \leqq B \leqq 20$の範囲につ

いて，また，図６．１２(ｃ)(ｄ)はその中の$0 \leqq B \leqq 2.4$の範囲について，それぞれ，

(ａ)，(ｃ)：$x_{[1,0]}$（ｘの最大値）および$x_{[2,0]}$（ｘの最小値）の変化

(ｂ)，(ｄ)：$t_{[1,0]}$および$t_{[2,0]}$の変化

を示している．式(3.64),(6.14)より，パラメータの値に関わらず，

$$y_{[1,0]} = y_{[2,0]} = 0 \qquad (6.25)$$

であるので，$y_{[1,0]}$と$y_{[2,0]}$の変化については図を示していない．なお，図の実線および破線は，それぞれ周期解が安定および不安定である部分を示している．ただし，図６．１２に示す周期解では，２つの安定判別法①②で同じ安定判別結果が得られる．以後，安定判別法を特に表記していない場合については，両安定判別法において判別結果が一致するものとする．また，解曲線における単純極限点および単純分岐点を，それぞれ，図中に□印と○印で示す．参考のため，図６．１３(ａ)～(ｄ)に，周期解の求解の際に得られるｘの時点系列，

$$x_{[1,0]}, x_{[1,1]}, \cdots, x_{[1,N-1]}, x_{[2,0]}, x_{[2,1]}, \cdots, x_{[2,N-1]}$$

を用いて，周期解の各調波成分を求めた結果を示す．ただし，

図(ａ)は，$0 \leqq B \leqq 2.4$における，基本調波成分（X_1），第３調波成分（X_3）

図(ｂ)は，$0 \leqq B \leqq 2.4$における，直流成分（X_0），第２調波成分（X_2）

図(ｃ)は，$0 \leqq B \leqq 20$における，基本調波成分（X_1），第３調波成分（X_3），第５調波成分（X_5）

図(ｄ)は，$0 \leqq B \leqq 20$における，直流成分（X_0），第２調波成分（X_2）第４調波成分（X_4）

を示す．また，$B = 0.4$における３つの周期解，および，$B = 7$における５つの周期解について，$x(t)$の波形（２周期）および$x - \xi(x)$ループを，それぞれ，図６．１４（$B = 0.4$），図６．１５（$B = 7$）に示す

次に，パラメータｋ，ν，B_0を，

$$k = 0.1 \ , \ \nu = 1 \ , \ B_0 = 0$$

とし，心線特性Ｉを用いて，

$$h = 0, 1, 2, 3, 4$$

とした場合，および，心線特性IIを用いて，

$$h = 0, 0.5, 1, 1.5$$

とした場合について，$0 \leqq B \leqq 2.4$の範囲における振幅特性を，それぞれ図６．１６(ａ)および(ｂ)に示す．また，心線特性ＩおよびIIを用い，

$$k = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 \ , \ h = 0 \ , \ \nu = 1 \ , \ B_0 = 0$$

とした場合の周期解の変化を，それぞれ図６．１７(ａ)および(ｂ)に示す．図６．１６(ａ)では，ｈ＝3，4（心線特性Ⅰ）の場合に，non-resonant state(29)において単純分岐点が発生することが特徴的である．これに対し，図６．１７では，ｋの増加に伴って単純極限点が消滅している．図６．１８(ａ)～(ｄ)に，ｈ＝3（心線特性Ⅰ）の場合に，ｋ＝0.1，1とした場合について，分岐枝を含めた振幅特性を示す．ただし，

図(ａ)は，ｋ＝0.1として，安定判別に判別法①を用いた場合

図(ｂ)は，ｋ＝0.1として，安定判別に判別法②を用いた場合

図(ｃ)は，ｋ＝1として，安定判別に判別法①を用いた場合

図(ｄ)は，ｋ＝1として，安定判別に判別法②を用いた場合

を示している．また，図６．１８では，後の説明に用いるために，各特異点にアルファベットを付した．図６．１８を見ると，特異点Ⓒ,Ⓔ,Ⓔ'の前後では，周期解の安定性の変化の仕方が判別法①と②とで異なっていることが分かる．図６．１８から分かるように，判別法②を用いると，単純極限点Ⓔ,Ⓔ'の前後で周期解の安定性が変化しないなど，周期解の安定性の変化の仕方がヒステリシス素子のない通常の強制振動系の場合と異なる場合がある（４．２節参照）．安定判別法の違いによる判別結果の違いについては，６．６節で考察する．また，

$B=0.5$，$h=3$（心線特性Ⅰ），$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$

とした場合における５つの周期解について，$x(t)$の波形および$x-\xi(x)$ループを図６．１０に示す（６．３節参照）．

図６．１９(ａ)～(ｆ)に，$0 \leqq B \leqq 20$の範囲における振幅特性を示す．ただし，

(ａ)，(ｂ)は　$h=0,\ 3$（心線特性Ⅰ），$k=0.1$

(ｃ)，(ｄ)は　$h=0,\ 3$（心線特性Ⅰ），$k=1$

(ｅ)，(ｆ)は　$h=0,\ 1.5$（心線特性Ⅱ），$k=0.1$

の場合を示す．また，

$B=7$，$k=0.1$，$h=0,\ 1,\ 2,\ 3$（心線特性Ⅰ），$\nu=1$，$B_0=0$

とした場合に得られる周期解の１つ（図６．１５の周期解③に相当する解）について，$x-\xi$ループを図６．２０に示す．図６．１９を見ると，Ｂが大きい範囲では，ヒステリシス特性の違いによる振幅特性の変化は小さいことが分かる．これは，図６．２０に示した$x-\xi$ループの例から分かるように，Ｂが大きい範囲では，ξの振幅に対してヒステリシスループの幅が相対的にかなり小さくなるために，ヒステリシス特性が系の特性に及ぼす影響が小さくなっているためと考えられる．

6．4．1．2　［角周波数特性］

$0.5 \leqq \nu \leqq 3.5$の範囲における角周波数特性を図６．２１，図６．２２に示す．ただし，図６．２１，図６．２２はそれぞれ，心線特性Ⅰを用いて，

図６．２１：$B=0.1$　，$k=0.01$　，$h=0,\ 0.35,\ 1$　，$B_0=0$

図６．２２：$B=0.5$　，$k=0.05$　，$h=0,\ 1.75,\ 2.5$　，$B_0=0$

の場合を示す．いずれの場合も，ｈのある範囲において，角周波数特性に島状領域(10)(12)が現れることが分かる．

6．4．1．3　［ヒステリシス損の変化と抵抗損の変化］

まず，心線特性Ⅱを用いて，

$B=0.2,\ 0.45$　，$h=0,\ 1$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

とし，ｋを$-1.5 \leqq k \leqq 1.5$の範囲で変化させた場合を図６．２３(ａ)(ｂ)に，

$B=0.2,\ 0.45$　，$k=0.0001,\ 0.2$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

とし，ｈを$-2 \leqq h \leqq 2$の範囲で変化させた場合を図６．２４(ａ)(ｂ)に示す．図６．２３を見ると，$h=0 \to 1$とヒステリシス損が増加するにしたがって，損失を補う方向（ｋが小さくなる方向）に特性曲線が移動することが分かる．また，図６．２４より，同様に，$k=0.0001 \to 0.2$と抵抗損が増加するにしたがって，損失を補う方向（ｈが小さくなる方向）に特性曲線が移動することが分かる．図６．２３，図６．２４を見ると，non-resonant stateでは，$h>0$の場合には，$k<0$の範囲にも安定解が存在し，また，$k>0$の場合には$h<0$の範囲にも安定解が存在することが分かる．これに対し，resonant state(29)では，周期解の安定性の判別結果が，ｋの正負のみによって決まっており，ｈの大小に依存していない．これは，resonant stateでは，振動の振幅が大きく，$x-\xi$ループが飽和ループとなるためであると考えられる．すなわち，resonant stateでは，ヒステリシス損は，振動の振幅の（微小な）変化に対しても一定であるので，周期解の安定性に直接には影響しなくなるためと考えられる．

次に，心線特性Ⅰを用いて，

$B=0.2,\ 0.4,\ 0.7$　，$h=0$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

とし，ｋを$-1.5. \leqq k \leqq 1.5$の範囲で変化させた場合を図６．２５に，

$B=0.2,\ 0.4,\ 0.7$　，$k=0.1$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

とし，ｈを$-0.5 \leqq h \leqq 4.5$の範囲で変化させた場合を図６．２６(ａ)(ｂ)に示す．図６．２５では，心線特性Ⅱと同様の特性曲線が得られている．図６．２６では，

non-resonant stateにおいて単純分岐点が発生している．

6．4．1．4　［強制振動項に直流分を加えた場合の振幅特性］

ここでは，式(6.14)において，$B_0 \neq 0$とした場合の振幅特性を求める．

$B_0 = 0.2, 0.4$　，$k = 0.1$　，$h = 0$（心線特性Ｉ）　，$\nu = 1$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 1.5$の範囲の振幅特性を図６．２７(ａ)(ｂ)に，

$B_0 = 0.2, 0.4$　，$k = 0.1$　，$h = 1.5$（心線特性Ｉ），$\nu = 1$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 1.5$の範囲の振幅特性を図６．２８(ａ)(ｂ)に，

$B_0 = 0.05, 0.2, 0.4$　，$k = 0.1$　，$h = 3$（心線特性Ｉ）　，$\nu = 1$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 1.5$の範囲の振幅特性を図６．２９(ａ)～(ｈ)に示す．各図において，各アルファベットを付した特異点は，直流分が０の場合の図６．１８に示す特異点と対応している．図６．２７～図６．２９から分かるように，B_0の増減に伴って，特異点の発生や消滅が起きる．例えば，$h = 1.5, 3$（図６．２８，図６．２９）の場合には，B_0の増加に伴って単純極限点Ⓐ Ⓑは消滅し，新たに，単純極限点Ⓗ Ⓘが発生している．６．４．３に示すように，分岐集合の探索を行うことにより，このような特異点の発生および消滅について詳しく調べることができる．

6．4．2　直列共振回路における分岐

6．4．2．1　［振幅特性］

式(6.19),(6.1)の直列共振回路において，

$k = 0.1$　，$h = 0, 1, 2, 3, 4$（心線特性Ｉ）　，$\nu = 1$

とした場合について，$0 \leqq B \leqq 2.4$の範囲の振幅特性を図６．３０に示す．また，

$k = 0.01, 0.1, 0.5, 1.0$　，$h = 0$（心線特性Ｉ）　，$\nu = 1$　，

とした場合の振幅特性を図６．３１に示す．図６．３０を見ると，直列共振回路の場合においても，$h = 3, 4$（心線特性Ｉ）とすると，non-resonant stateにおいて単純分岐点が発生することが分かる．図６．３２(ａ)(ｂ)に，$h = 3$（心線特性Ｉ）の場合に，$k = 0.1$とした場合について，分岐枝を含めた周期解の変化を示す．図６．３２では，特異点Ⓒ Ⓔ Ⓔ'の前後で，周期解の安定性の変化の仕方が判別法①と②とで異なっている．

図６．３３(ａ)～(ｄ)に，$0 \leqq B \leqq 20$の範囲における振幅特性を示す．ただし，

(ａ)，(ｂ)は，$h = 0, 3$（心線特性Ｉ）　，$k = 0.1$

(ｃ)，(ｄ)は，$h = 0, 3$（心線特性Ｉ）　，$k = 0.02$

の場合を示す．直列共振回路の場合も，Ｂが大きい範囲では，ヒステリシス特性の違いによる振幅特性の変化は小さい．

６．４．２．２　［角周波数特性］

$0.3 \leqq \nu \leqq 2.4$の範囲における角周波数特性を図６．３４，図６．３５に示す．ただし，

図６．３４は，$B=0.1$　，$k=0.01$　，$h=0,\ 0.3,\ 1$（心線特性Ｉ）

図６．３５は，$B=0.5$　，$k=0.05$　，$h=0,\ 1.5,\ 2$（心線特性Ｉ）

の場合を示す．いずれの場合も，並列共振回路と同様，ｈのある範囲において，角周波数特性に島状領域[19]が現れることが分かる．

６．４．２．３　［ヒステリシス損の変化と抵抗損の変化］

心線特性IIを用いて，

$B=0.2,\ 0.45$　，$h=0,\ 1$　　　　，$\nu=1$

とし，ｋを$-1.5 \leqq k \leqq 1.5$の範囲で変化させた場合を図６．３６（ａ）（ｂ）に示す．また，

$B=0.2,\ 0.45$　，$k=0.0001,\ 0.2$　，$\nu=1$

とし，ｈを$-2 \leqq h \leqq 2$の範囲で変化させた場合を図６．３７（ａ）（ｂ）に示す．いずれの場合も，並列共振回路と同様の結果が得られている．

６．４．３　分岐集合

６．４．３．１　［Ｂとｋ，Ｂとｈの変化］

最初に，図６．１６，図６．１７（並列共振回路），図６．３０，図６．３１（直列共振回路）に示した振幅特性上の単純極限点（図６．１８の特異点Ⓐ Ⓑ）の集合を探索する．まず，パラメータｈ，νを

$h=0,\ 1$（心線特性Ｉ）　，$\nu=1$　，$B_0=0$（並列共振回路の場合）

と固定した場合に，単純極限点となる（ｋ，Ｂ）の集合を探索した結果を，図６．３８（並列共振回路），および，図６．３９（直列共振回路）に示す．いずれの場合にも，ｋを大きくすると極限点が消滅する．次に，パラメータｋ，νを

$k=0.1,\ 0.2$　，$\nu=1$　，$B_0=0$（並列共振回路の場合）

として心線特性Ｉを用いた場合に，単純極限点となる（ｈ，Ｂ）の集合を探索した結果を，図６．４０（並列共振回路），および，図６．４１（直列共振回路）に示す

（実線）．ただし，図6．40，図6．41には，図6．18，図6．32に示す単純分岐点©Ⓓの集合も示している（破線）．この場合，図に示した範囲では，hを大きくしても極限点は消滅しない．

次に，図6．19（並列共振回路），図6．33（直列共振回路）に示した振幅特性上の単純分岐点の集合を探索する．まず，パラメータh，νを

$h=0$ （心線特性Ｉ）　，$\nu=1$　，$B_0=0$(並列共振回路の場合)

とした場合に，単純分岐点となる(k，B)の集合を探索した結果を，図6．42（並列共振回路），および，図6．43（直列共振回路）に示す．直列共振回路における単純分岐点は，先に示した単純極限点，あるいは並列共振回路における単純分岐点と比較して，小さなkの値で消滅する．これは，大振幅時には，非線形インダクタの平均的なインダクタンスが低下し，図6．9の直列共振回路では，R－C直列回路の部分に大部分の電圧がかかるために，抵抗素子の影響が大きくなるためであると考えられる．次に，並列共振回路において，

$k=0.1,\ 0.5$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

として心線特性Ｉを用いた場合，および，直列共振回路において，

$k=0.01,\ 0.05$　，$\nu=1$

として心線特性Ｉを用いた場合に，単純分岐点となる(h，B)の集合を探索した結果を，それぞれ，図6．44（並列共振回路），および，図6．45（直列共振回路）に示す．図に示した範囲では，hの変化に対する単純分岐点の変化は小さい．

6．4．3．2　［νとhの変化］

図6．21，図6．22，図6．34，図6．35に示した角周波数特性曲線上の単純極限点の集合を探索する．パラメータB，kを

$B=0.1$　，$k=0.01,\ 0.02,\ 0.05$　，$B_0=0$(並列共振回路の場合)

および，

$B=0.5$　，$k=0.05,\ 0.1,\ 0.2$　，$B_0=0$(並列共振回路の場合)

として心線特性Ｉを用いた場合に，単純極限点となる(h，ν)の集合を探索した結果を，図6．46(a)(b)（並列共振回路），および，図6．47(a)(b)（直列共振回路）に示す．並列共振回路において，

$(B,k)=(0.1,0.01)$、$(0.5,0.05)$の場合

および，直列共振回路において，

$(B,k)=(0.1,0.01)$，$(0.1,0.02)$，$(0.5,0.05)$，$(0.5,0.1)$の場合

には，hが0から増加するに従って，極限点の数が2→4→2→0と変化する．これは，角周波数特性における，島状領域の発生または消滅に伴う極限点の数の変化に対応している．ただし，

(B，k)=(0.1,0.01)(並列，直列)，(0.5,0.05)(並列)，(0.1,0.02)(直列)

の場合と，

(B，k)=(0.5,0.05),(0.5,0.1)(直列)

の場合とでは，h－ν曲線の形が異なっている．これは，次に示すように，hの増加に伴う島状領域の発生の仕方の違いによるものである．直列共振回路において，

B＝0.1　，k＝0.01　，h＝0.28，0.292，0.30（心線特性Ⅰ）

とした場合，および，

B＝0.5　，k＝0.05　，h＝1.3，1.37，1.4（心線特性Ⅰ）

とした場合の角周波数特性を，それぞれ図6.48(a)～(c)および図6.49(a)～(c)に示す．前者の場合，極限点が4つ存在する場合に島状領域が存在するのに対して，後者の場合，極限点が4つ存在する場合に島状領域は存在しない．

その他の，

(B，k)=(0.1,0.05),(0.5,0.2)(並列，直列)，(0.1,0.02),(0.5,0.1)(並列)

の場合には，hの増加に伴い，極限点の数が2→0と変化する．これらの場合には，島状領域は発生しない．

6.4.3.3　[BとB$_0$の変化]

直流分B$_0$を加えた場合の単純極限点の発生および消滅について調べる．パラメータk，h，νを，

k＝0.1　，h＝1，1.5，3（心線特性Ⅰ）　，ν＝1

とした場合について，単純極限点となる(B$_0$,B)の集合を探索した結果を図6.50(a)(b)(c)に示す．図中のアルファベットは，図6.27～図6.29において特異点に付したアルファベットと対応している．図6.50(c)に示すように，h＝3の場合には複雑な分岐集合が得られる．

6.4.4　他の非線形特性を用いる場合との比較

6.4.4.1　[$\xi(x)=x^m$とする場合]

式(6.14)の並列共振回路，および，式(6.19)の直列共振回路において，非線形

特性$\xi(x)$を，

$\xi(x)=x^m$

とした場合の振幅特性を図６．５１～図６．５４に示す．ただし，図６．５１，図６．５２は並列共振回路において，

図６．５１：$k=0.1$ ，$m=3, 5, 9, 15$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$

とした場合の$0\leqq B\leqq 2.4$の範囲の振幅特性

図６．５２：$k=0.1$ ，$m=3$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$

とした場合の$0\leqq B\leqq 24$の範囲の振幅特性

を示し，図６．５３，図６．５４は直列共振回路において，

図６．５３：$k=0.1$ ，$m=3, 5, 9, 15$ ，$\nu=1$

とした場合の$0\leqq B\leqq 2.4$の範囲の振幅特性

図６．５４：$k=0.1$ ，$m=3$ ，$\nu=1$

とした場合の$0\leqq B\leqq 24$の範囲の振幅特性

を示している．全体として，非線形特性を心線特性とした場合の特性と類似した特性になっている．

６．４．４．２　［他のヒステリシス特性を用いる場合］

プライザッハ分布関数を，

$$K(\eta_u,\eta_v)=\frac{K_0}{\cosh^2\{a_c(\eta_u-\eta_c)\}\cdot\cosh^2\{a_c(\eta_v+\eta_c)\}} \tag{6.26}$$

とする．この場合，式(2.8),(2.12)の$\varDelta H$，∇Hは，それぞれ，

$$\begin{aligned}&\varDelta H(\eta_{ua},\eta_{ub},\eta_v)\\&=\frac{K_0}{a_c^2}[\{A-\tanh a_c(\eta_v+\eta_c)\}\{\tanh a_c(\eta_{ub}-\eta_c)-\tanh a_c(\eta_{ua}-\eta_c)\}\\&\qquad+(1-A^2)\log\frac{A+\tanh a_c(\eta_{ub}-\eta_c)}{A+\tanh a_c(\eta_{ua}-\eta_c)}]\\&\nabla H(\eta_{va},\eta_{vb},\eta_u)\\&=\frac{K_0}{a_c^2}[\{A+\tanh a_c(\eta_u-\eta_c)\}\{\tanh a_c(\eta_{vb}+\eta_c)-\tanh a_c(\eta_{va}+\eta_c)\}\\&\qquad-(1-A^2)\log\frac{A-\tanh a_c(\eta_{vb}+\eta_c)}{A-\tanh a_c(\eta_{va}+\eta_c)}]\end{aligned} \tag{6.27}$$

ただし，$A=1/\tanh(2a_c\eta_c)$

で与えられる．また，メジャーループの上昇特性$H_+(\eta)$と下降特性$H_-(\eta)$は，

$$H_+(\eta) = l_s \cdot \eta + \frac{K_0}{a_c^2}\left[(A+P)\{\tanh a_c(\eta-\eta_c)+Q\} + (1-A^2)\log\frac{A+\tanh a_c(\eta-\eta_c)}{A-Q}\right] + H_{min} \tag{6.28}$$

$$H_-(\eta) = l_s \cdot \eta + \frac{K_0}{a_c^2}\left[(A+P)\{\tanh a_c(\eta+\eta_c)-Q\} - (1-A^2)\log\frac{A-\tanh a_c(\eta+\eta_c)}{A-Q}\right] + H_{max}$$

ただし，$P = \tanh a_c(\eta_s - \eta_c)$ ，$Q = \tanh a_c(\eta_s + \eta_c)$

$$H_{max} = \frac{K_0}{a_c^2}\left\{(A+P)(P+Q) + (1-A^2)\log\frac{A+P}{A-Q}\right\} + H_{min}$$

で与えられる．式(6.26)の分布関数は，

- ○ 定義域の境界（式(6.2)）において，分布関数の値が0でないために，$H(\eta)$の微係数が$\eta = \pm\eta_s$において不連続になる．
- ○ ΔH，∇Hなどの計算式が複雑である．

などの欠点を持つが，

- ○ 双極子の分布が，点$(\eta_u, \eta_v) = (\eta_c, -\eta_c)$に分布密度の最大値を持ち，この点から離れるに従って分布密度が減少するという形を示し，従って，実際の強磁性体において測定される双極子の分布（図６．２(ａ)）と近い分布を示す．

といった利点を持っている．式(6.26)の分布関数において，

$\eta_s = 1$，$\eta_c = 0.5$，$a_c = 8$，$l_s = 0.05$，$H_{min} = -0.95$

$$K_0 = \frac{1.9 a_c^2}{(A+P)(P+Q) + (1-A^2)\log\{(A+P)/(A-Q)\}} \tag{6.29}$$

とした場合の$H(\eta)$の特性を図６．５５に示す．

式(6.28)，(6.29)の$H_+(\eta)$，$H_-(\eta)$を用いて，心線特性を式(6.10)で与える．このときの$\xi(x)$の特性を図６．５６(ａ)(ｂ)に示す．

まず，式(6.14)の並列共振回路，および，式(6.19)の直列共振回路において，上記の$\xi(x)$を用いた場合の振幅特性を図６．５７～図６．６０に示す．ただし，図６．５７，図６．５８は，並列共振回路において，

図６．５７：$k = 0.1$ ，$h = 0,\ 0.5,\ 1$ ，$\nu = 1$ ，$B_0 = 0$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 2.4$の範囲における振幅特性

図６．５８：$k=0.1$ ，$h=1$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 20$の範囲における振幅特性

を示し，図６．５９，図６．６０は，直列共振回路において，

図６．５９：$k=0.1$ ，$h=0, 0.5, 1$ ，$\nu=1$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 2.4$の範囲における振幅特性

図６．６０：$k=0.1$ ，$h=1$ ，$\nu=1$

とした場合の$0 \leqq B \leqq 20$の範囲における振幅特性

を示す．図６．５６に示した$\xi(x)$（式(6.26)の分布関数）において$h=1$とした場合のヒステリシスループの面積は，図６．５に示した$\xi(x)$（式(6.3)の分布関数）において$h=3$とした場合のヒステリシスループの面積と大体等しい．しかし，図６．５７の振幅特性を見ると，図６．５６の$\xi(x)$特性を用いて$h=1$とした場合には，図６．１６（ａ）の特性曲線（図６．５の$\xi(x)$特性の場合）と異なり，non-resonant stateにおいて単純分岐点は発生していないことがわかる．従って，単にヒステリシス損を増加させるだけでは，non-resonantにおける単純分岐点は発生しないことが分かる（７．１節参照）．

次に，並列共振回路において，

$h=0.6, 0.75, 0.9$ ，$k=0.05$ ，$B=0.5$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$

とした場合，および，直列共振回路において，

$h=0, 0.5, 1$ ，$k=0.05$ ，$B=0.5$ ，$\nu=1$

とした場合の角周波数特性を，それぞれ，図６．６１（ａ）～（ｃ），図６．６２（ａ）～（ｃ）に示す．いずれの場合も，ｈのある範囲において，角周波数特性に島状領域が現れることが分かる．

６．５　分数調波周期振動の分岐

６．５．１　倍周期振動の分岐

前節で示した特性曲線において，単純特異点以外にも周期解の安定性が変化する点が存在する．これらの点は，一部の例外（図６．２３～図６．２６，図６．３６，図６．３７において，ｋおよびｈの符号の変化に伴って安定性が変化する点）を除いて，すべて倍周期分岐点である．５．２節に述べた方法を用いると，これらの倍周期分岐点を求め，それらの点から分岐する倍周期解の解曲線を追跡することができる．

図６．１２の振幅特性曲線（ただし，$x_{[1,0]}$，$t_{[1,0]}$の特性曲線），図６．１８(ａ)の振幅特性曲線，図６．２７(ａ)の振幅特性曲線（ただし，$B_0=0.2$の場合の特性曲線）に倍周期解の解曲線を書き加えて，それぞれ，図６．６３(ａ)～(ｄ)，図６．６４(ａ)(ｂ)，図６．６５(ａ)(ｂ)に示す．ただし，図中の◎印は倍周期分岐点である．

６．５．２　Ｍ倍周期分岐点の算出

６．５．２．１　［３乗特性を用いる場合］

まず，式(6.14)の並列共振回路において，非線形特性を３乗特性($\xi(x)=x^3$)として，

$\nu=1$ ，$B_0=0$

とした場合について，non-resonant stateおよびresonant stateにおける３倍周期分岐点，４倍周期分岐点，５倍周期分岐点を算出した結果を表６．６に示す．表６．６において，switchが不可となっている分岐点は，５．３．２で述べた方法では，branch switchingができなかったことを示す．これらの点は５本以上の解曲線が交差する分岐点であり，分岐点において式(5.52)，(5.53)を満たすr_a，r_b，r_cの比が不定となるために，式(5.51)～(5.53)からは分岐する解曲線の方向を定めることができない．

次に，非線形特性を３乗特性とした場合について，表６．６に示した分岐点以外の３倍周期分岐点を算出した結果を表６．７に示す（ただし，表６．７には，表６．６に示した３倍周期分岐点も併せて示してある）．また，表６．７の３倍周期分岐点Ⓐ～Ⓗを，

$k=0$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$

の場合における振幅特性曲線上に表して図６．６６(ａ)(ｂ)に示す．

６．５．２．２　［ヒステリシス特性を用いる場合］

非線形特性を，再び，図６．５，図６．６の$\xi(x)$（式(6.3)の分布関数）として，

$h=0, 1, 2, 3$（心線特性Ⅰ）　および　$h=0, 1$（心線特性Ⅱ）　，$B_0=0$

とした場合について，non-resonant stateおよびresonant stateにおける３倍周期分岐点を算出した結果を表６．８に示す．表において，－印は３倍周期分岐点が存在しない（付録Ｊ参照）ことを示す．付録Ｊに述べたように，式(6.14)の並列共振回路において非線形素子がヒステリシス特性を持たない場合には，３倍周期

分岐点において，$k=0$となることがLiouvilleの公式を用いて言える．しかし，非線形素子がヒステリシス特性を持つ場合には，履歴項の存在のためにLiouvilleの公式が成立しない（６．３節参照）ので，３倍周期分岐点において，$k\neq 0$となる場合があることが表６．８から分かる．次に，

$h=0,1$（心線特性Ｉ，Ⅱ）　，$\nu=1$　，$B_0=0$

とした場合について，表６．８に示した分岐点以外の３倍周分岐点を算出した結果を表６．９に示す（ただし，表６．９には，表６．８に示した３倍周期分岐点の一部も併せて示してある）．

図６．６７(a)(b)，図６．６８(a)(b)に，３倍周期分岐点Ⓓ，Ⓔについて，３倍周期分岐点の分岐集合(B,k,h)を探索した結果を示す（ただし，$\nu=1$，$B_0=0$）．図６．６７，図６．６８を見ると，分岐点Ⓔでは，$h=0$の場合にのみ$k=0$となるのに対し，分岐点Ⓓでは，hの値に関わらず$k=0$となることが分かる．これは，分岐点Ⓔにおいては，$x-\eta$ループがマイナーループを持つ飽和ループとなっているために履歴項が存在して，Liouvilleの公式が成立しないのに対して，分岐点Ⓓにおいては，$x-\eta$ループがマイナーループを持たない飽和ループとなっているために履歴項が存在せず，Liouvilleの公式が成立するためである．

６．５．３　３倍周期振動の分岐

６．５．３．１　［３乗特性を用いる場合］

表６．７に示した３倍周期分岐点Ⓐ,Ⓑ,…,Ⓗから分岐する３倍周期解を，それぞれ，３倍周期解Ⓐ,３倍周期解Ⓑ,…,３倍周期解Ⓗと呼ぶことにする．まず，非線形特性を３乗特性とし，

$$k=0.05\quad,\ \nu=1\quad,\ B_0=0 \tag{6.30}$$

とた場合について，３倍周期解ⒶⒸⒹⒺⒻⒼⒽの振幅特性を，それぞれ，図６．６９(a)(b)(c)～図６．７５(a)(b)(c)に示す（３倍周期解Ⓑは，式(6.30)の条件下では存在しない）．ただし，図６．６９～図６．７５では，パラメータＢの変化に対する，

（ａ）$x_{[1,0]}$（ｘの最大値：ただし，極大値の大小の交代のため，ｘの最大値でない部分も存在する）

（ｂ）1/3調波成分，基本調波成分，5/3調波成分，第３調波波成分の振幅

（ｃ）直流成分，2/3調波成分，4/3調波成分の振幅

の変化を示す．図６．６９～図６．７５から分かるように，３倍周期解Ⓐ Ⓓ Ⓔ Ⓗは，直流分や2/3調波成分を持たない．また，３倍周期解Ⓒ Ⓕ Ⓖは，直流分や2/3調波成分を含み，周期解が安定な部分が殆ど存在しない．

６．５．３．２　［ヒステリシス特性を用いる場合］

ここでは，３倍周期解Ⓐ Ⓓ Ⓔ Ⓗの解析を行う．まず，

$k=0.1$　，$h=3$（心線特性Ｉ）　，$\nu=1$

とした場合について，３倍周期解Ⓐの振幅特性を図６．７６（ａ）（ｂ）に示す．ただし，

（ａ）$x_{[1,0]}$（ｘの最大値）

（ｂ）1/3調波成分，基本調波成分，5/3調波成分，第３調波波成分の振幅

の変化を示す．また，

$B=0.9$　，$k=0.1$　，$h=3$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

における２つの周期解について，ｘ（ｔ）の波形およびｘ－ξ（ｘ）ループを図６．７７（ａ）（ｂ）に示す．図６．７６に示した振幅特性曲線上に現れる単純極限点について，分岐集合を探索した結果を図６．７８および図６．７９に示す．ただし，図６．７８は，

$h=3$　，$\nu=1$　，$B_0=0$

とした場合の分岐集合（Ｂ，ｋ）を示し，図６．７９は，

$k=0.0001,\ 0.1$　，$\nu=1$　，$B_0=0$　　(6.31)

とした場合の分岐集合（Ｂ，ｈ）を示す．図６．７８を見ると，ｋを大きくすると単純極限点が消滅する（従って，３倍周期解Ⓐが消滅する）ことが分かる．また，図６．７９を見ると，式(6.31)の条件下では，ｈが小さい範囲では単純極限点が存在しない（従って３倍周期解Ⓐは存在しない）ことが分かる（表６．８においても，ｈが小さい範囲では３倍周期分岐点Ⓐは存在しない）．

次に，

$k=0.1$　，$h=2,\ 3$（心線特性Ｉ），$\nu=1$　，$B_0=0$

とした場合について，３倍周期解Ⓓの振幅特性を図６．８０（ａ）～（ｄ）に示す．ただし，

（ａ）$h=2$における，$x_{[1,0]}$（ｘの最大値）の変化

（ｂ）$h=2$における，1/3調波成分，基本調波成分，5/3調波成分，

第３調波波成分の振幅の変化

（ｃ）$h=3$における，$x_{[1,0]}$（ｘの最大値）の変化

（ｄ）$h=3$における，1/3調波成分，基本調波成分，5/3調波成分，

第３調波波成分の振幅の変化

を示している．また，

$B=1.4$, $k=0.1$, $h=3$, $\nu=1$, $B_0=0$

における２つの周期解について，ｘ(ｔ)の波形およびｘ－ξループを図６．８１(ａ)(ｂ)に示す．図６．８０に示した振幅特性曲線上に現れる単純極限点について，分岐集合を探索した結果を図６．８２(ａ)(ｂ)に示す．ただし，

図６．８２(ａ)は，$h=0,\ 1,\ 2,\ 3$（心線特性Ｉ） , $\nu=1$, $B_0=0$

図６．８２(ｂ)は，$h=0,\ 0.5,\ 1,\ 1.5$（心線特性II） , $\nu=1$, $B_0=0$

とした場合の分岐集合(Ｂ，ｋ)を示す．図６．８２(ａ)（心線特性Ｉ）では，ｈの増加に伴って，単純極限点が存在するｋの範囲（３倍周期解Ⓓが存在するためのｋの範囲）が大きくなる傾向が見られるが，同図(ｂ)（心線特性II）では，そのような傾向は見られない．

同様に，

$k=0.25$, $h=1$, $\nu=1$, $B_0=0$

とした場合について，３倍周期解Ⓔの振幅特性を図６．８３に示す．また，図６．８４(ａ)～(ｄ)に，

$B=6$, $k=0.25$, $h=1$, $\nu=1$, $B_0=0$

における４つの周期解について，ｘ(ｔ)の波形およびｘ－ξループを示す．

同様に，

$k=0.1$, $h=1$, $\nu=1$, $B_0=0$

とした場合について，３倍周期解Ⓗの振幅特性を図６．８５に示す．また，図６．８６(ａ)～(ｄ)に，

$B=16$, $k=0.1$, $h=1$, $\nu=1$, $B_0=0$

における４つの周期解について，ｘ(ｔ)の波形およびｘ－ξループを示す．

６．６　Runge-Kutta法による解析結果

ここでは，状態方程式(6.14)を，適当な初期値から出発して，定常状態と見なせる範囲まで数値積分することにより，式(6.14)の系の定常周期解を求め，６．４節などで得られた結果と比較する．

６．６．１　周期振動の安定性

図６．１８などの特性曲線，あるいは，表６．５に示したように，微分方程式(6.14)の周期解の中には，安定判別法によって判別結果が異なる周期解がある．これは，３．５節に述べたように，式(3.69)～(3.71)のように領域D_0の磁化状態が異なるだけの同じ周期解であっても，D_0の磁化状態の違いによって周期解の安定性が異なることがあるためである．方程式(6.24)では，図６．８７(ａ)に示す磁化状態を仮定しており，解◇2においては，式(3.33)の積分値は，

$$d' = \int_{D_{0+a}} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u\, d\eta_v = 0.0021724 \tag{6.32}$$

となる．ここで，図６．８７(ｂ)に示す磁化状態を仮定すると，式(3.33)の積分値は，

$$d' = \int_{D_{0+b}} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u\, d\eta_v = 0.0021724 \tag{6.33}$$

となり，式(6.32)と等しい積分結果が得られる（ただし，厳密には両者は等しくない）．従って，表６．３の◇2の初期値，および，図６．８７(ａ)(ｂ)のそれぞれの磁化状態から出発して，微分方程式(6.14)を積分すると，領域D_0の磁化状態が異なるだけの同じ周期解が得られると考えられる．ここでは，領域D_0の磁化状態の違いによる周期解の安定性の違いを見るために，表６．３◇2の近傍の初期値，

$$t_0 = -5.20886\ ,\ x(t_0) = 0.85950\ ,\ y(t_0) = 0.0 \tag{6.34}$$

および図６．８７(ａ),(ｂ)の磁化状態から出発して，微分方程式(6.14)を数値積分した結果を，図６．８８(ａ)～(ｃ)，図６．８９(ａ)～(ｃ)に示す（ただし，周期$T = 2\pi$を128等分し，Runge-Kutta法を用いて数値積分を行った）．ただし，図６．８８，図６．８９は，それぞれ，

図（ａ）：Poincaré写像（$x(t_0 + iT)$, $y(t_0 + iT)$）（$i = 0, \cdots, 100$）

図（ｂ）：$\log_{10} \| x(t_0 + iT) - x(t_0 + iT - T) \|$（$i = 1, 2, \cdots, 100$）

図（ｃ）：$x - \xi(x)$曲線

を示している．図６．８８，図６．８９を見ると，図６．８７(ｂ)の磁化状態を仮定した場合（図６．８９）には，そのまま周期解◇2に収束するのに対し，図６．８７(ａ)の磁化状態を仮定した場合（図６．８８）には，次第に周期解◇2から離れて行き，他の安定解に収束することが分かる．従って，周期解◇2は，図６．８７(ａ)の磁化状態を仮定すれば不安定解となるが，図６．８７(ｂ)の磁化状態を仮定すれば安定解となると考えられる．

6.6.2 カオス現象

微分方程式(6.14)において，

$k=0.1$ ， $h=0, 1, 2, 3$ (心線特性Ｉ) ， $\nu=1$ ， $B_0=0$

$B=0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \cdots, 19.5, 20$

として，初期値，

$$t_0=0 \ , \ x(t_0)=0 \ , \ y(t_0)=0 \tag{6.35}$$

から出発した場合について，

$x(t_0+iT)\ (i=101,\cdots,200)$

をプロットした結果を図６．９０(a)($h=0$)，(b)($h=1$)，(c)($h=2$)，(d)($h=3$)に示す．ただし，図において，○，△，＋印は，それぞれ，基本調波周期解，倍周期解，３倍周期解に収束している点を示し，・印はそれらの周期解に収束していない点を示す．図６．９０を見ると，図６．１９などの振幅特性曲線に示した安定解に対応する周期解が図に現れていることが分かる．ただし，図６．１９などの振幅特性曲線においては，$B=3\sim6$の範囲には安定解が存在していないが，図の６．９０においては，周期解がわずかに存在している．これは，図６．１９あるいは図６．６３に示した周期解以外にも周期解が存在するためと考えられる．

図６．９１(a)～(g)に，

$B=5$ ， $k=0.05, 0.1$ ， $h=0, 1, 2, 3$ ， $\nu=1$ ， $B_0=0$

として，式(6.35)の初期値から出発した場合について，

$(x(t_0+iT), y(t_0+iT))\ (i=501,\cdots,1000)$

をプロットした結果を示す．図６．９１ではいずれの場合もカオスアトラクタが得られている．図６．９１を見ると，hが増加すると，kが増加する場合と同様に，アトラクタの幅が小さくなることが分かる．

次に，

$k=0.1$ ， $h=0, 1, 2, 3$ (心線特性Ｉ) ， $\nu=1$ ， $B_0=0$

$B=0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, \cdots, 1.15, 1.2$

として，表６．１０に示す５通りの初期値から出発した場合について，

$x(t_0+iT)$，および，$y(t_0+iT)\ (i=101,\cdots,200)$

をプロットした結果を図６．９２(a)(b)($h=0$)，図６．９３(a)(b)($h=1$)，図６．９４(a)(b)($h=2$)，図６．９５(a)(b)($h=3$)に示す．図６．９３～図６．９５を見ると，Bの小さい範囲においては，５種類の初期値に対して，それぞれ異った周期解が得られている．この部分は，周期解の作るヒステリシスループが

不飽和ループとなっている部分である．従って，３．２節で述べたように，周期解が無限集合をなすために，初期値の違いによって得られる周期解が異なっている．図６．１８の特性曲線で安定解が存在しない$B=0.75\sim0.9$の付近においては，図６．９５においても周期解が得られていない．図６．９６（ａ）に，

$B=0.8$, $k=0.1$, $h=3$（心線特性Ｉ）

として，式(6.35)から出発して，

$(x(t_0+iT+\psi),\ y(t_0+iT+\psi))$ $(i=501,\cdots,1000,\ \psi=0,\pi/2)$

をプロットした結果を示す．また，図６．９６（ｂ）に，$x(t)$の定常波形の一部を示す．図６．９６（ａ）ではカオスアトラクタ状のアトラクタが得られている．

解	$x_{[0]}$	$y_{[0]}$	$t_{[0]}$
①	0.41682	0.0	-4.85785
②	0.85948	0.0	-5.20888
③	-0.85948	0.0	-2.06729
④	1.01890	0.0	-5.74251
⑤	-1.01890	0.0	-2.60092

表６．１　方程式(3.40)の解
（並列共振回路，Ｂ＝0.5，ｋ＝0.1，ｈ＝3(心線特性Ｉ)，ν＝1，B_0＝0）

		(a) （履歴項有り）		(b) （履歴項無し）		(c) （中央差分）	
解①	$\dfrac{\partial x_{[N]}}{\partial x_{[0]}}$	0.3035 -0.1060	-0.0735 0.1467	1.6769 -2.7451	0.4663 -0.4452	0.3024 -0.1070	-0.0646 0.1425
	固有値の積	0.0367		0.5336		0.0362	
解②	$\dfrac{\partial x_{[N]}}{\partial x_{[0]}}$	1.2597 -1.1018	-0.0565 0.2669	-0.8374 2.5604	0.1416 -1.0703	1.2597 -1.1018	-0.0533 0.2705
	固有値の積	0.2740		0.5337		0.2821	

表６．２　$\partial x_{[N]} / \partial x_{[0]}$の計算結果

解	$x_{[0]}$	$y_{[0]}$	$t_{[0]}$	ε
①	0.41682	-0.00001	-4.85783	10^{-5}
②	0.85948	-0.00001	-5.20886	10^{-5}
③	-0.85948	0.00001	-2.06727	-10^{-5}
④	1.01890	-0.00001	-5.74250	10^{-5}
⑤	-1.01890	0.00001	-2.60091	-10^{-5}

表６．３　方程式(6.24)の解
（並列共振回路，Ｂ＝0.5，ｋ＝0.1，ｈ＝3(心線特性Ｉ)，ν＝1，B_0＝0）

解	（ａ） （履歴項有り）	（ｂ） （履歴項無し）	（ｃ） （中央差分）
①	0.3012　-0.0734 -0.1080　0.1427	0.9993　0.3905 -2.6282　-0.4933	0.3012　-0.0734 -0.1080　0.1427
②	1.2597　-0.0554 -1.1018　0.2605	-0.9860　0.1381 3.5977　-1.0448	1.2597　-0.0554 -1.1018　0.2605

表６．４　$\partial \mathbf{x}_{[N]} / \partial \mathbf{x}_{[0]}$の計算結果

解	判別法①		判別法②	
	固有値	判別結果	固有値	判別結果
①	0.1027, 0.3411	安定	0.1027, 0.3411	安定
②	0.2027, 1.3174	不安定	0.3963, 0.0409	安定
③	0.2027, 1.3174	不安定	0.3963, 0.0409	安定
④	-0.7206, -0.0931	安定	-0.7206, -0.0931	安定
⑤	-0.7206, -0.0931	安定	-0.7206, -0.0931	安定

表６．５　表６．３の解の安定判別結果

		(B, k)		switch
3倍周期分岐点	Ⓐ	0.2553	0.0	可
	Ⓑ	0.4140	0.0	不可
4倍周期分岐点	Ⓐ	0.1970	0.0	不可
	Ⓑ	0.4307	0.0	不可
5倍周期分岐点	Ⓐ	0.1596	0.0	不可
	Ⓑ	0.2975	0.0	不可
	Ⓒ	0.3937	0.0	不可
	Ⓓ	0.4365	0.0	不可

(a)non-resonant stateにおける分岐点

		(B, k)		switch
3倍周期分岐点	Ⓒ	0.3577	0.0	不可
	Ⓓ	1.3489	0.0	可
4倍周期分岐点	Ⓒ	0.2053	0.0	不可
	Ⓓ	1.6618	0.0	不可
5倍周期分岐点	Ⓔ	0.1331	0.0	不可
	Ⓕ	0.5082	0.0	不可
	Ⓖ	1.1074	0.0	不可
	Ⓗ	1.8424	0.0	不可

(b)resonant stateにおける分岐点

表6.6　3倍，4倍，5倍周期分岐点（並列共振回路，3乗特性，$\nu=1$，$B_0=0$）

分岐点	(B, k)		switch
Ⓐ	0.2553	0.0	可
Ⓑ	0.4140	0.0	不可
Ⓒ	0.3577	0.0	不可
Ⓓ	1.3489	0.0	可
Ⓔ	18.033	0.0	可
Ⓕ	19.196	0.0	不可
Ⓖ	12.774	0.0	不可
Ⓗ	17.638	0.0	可

表6.7　3倍周期分岐点（並列共振回路，3乗特性，$\nu=1$，$B_0=0$）

分岐点	ν	h＝0(Ⅱ)	h＝0(Ⅰ)	h＝1	h＝2(Ⅰ)	h＝3(Ⅰ)
Ⓐ	1	−	−	−	−	0.572 -0.824
	2.5	4.961 0.0	4.265 0.0	5.403 -0.112	5.628 -0.196	5.736 -0.249
Ⓑ	1	0.153 0.0	−	−	0.463 -0.547	0.588 -0.706
	2.5	5.567 0.0	5.489 0.0	5.576 -0.026	5.672 -0.062	5.773 -0.101
Ⓒ	1	0.174 0.0	0.170 0.0	0.315 0.0	0.558 0.0	0.815 0.0
Ⓓ	1	0.731 0.0	0.736 0.0	0.776 0.0	0.895 0.0	1.067 0.0

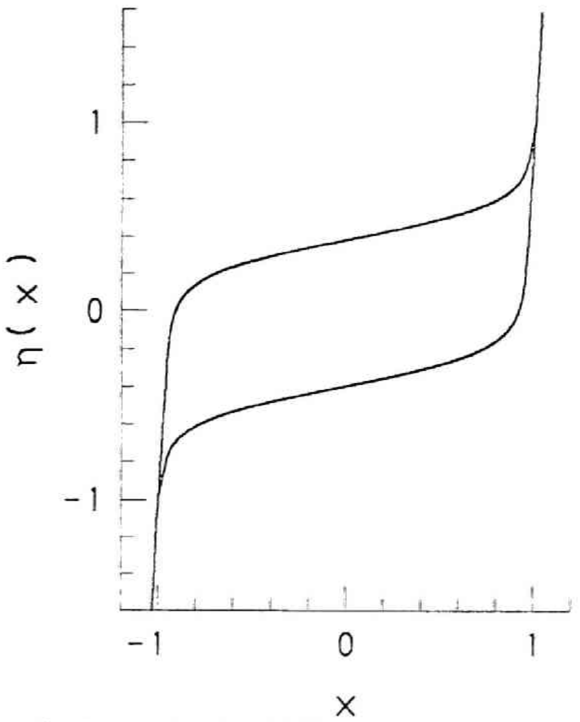
表6．8　3倍周期分岐点（(B，k)の値）　$B_0=0$

分岐点	h＝0(Ⅱ)	h＝0(Ⅰ)	h＝1	switch
Ⓐ	−	−	−	可
Ⓑ	0.153 0.0	−	−	不可
Ⓒ	0.174 0.0	0.170 0.0	0.315 0.0	不可
Ⓓ	0.731 0.0	0.736 0.0	0.776 0.0	可
Ⓔ	17.60 0.0	17.50 0.0	17.65 -0.020	可
Ⓕ	17.67 0.0	17.55 0.0	17.67 -0.015	不可
Ⓖ	7.061 0.0	7.117 0.0	6.937 -0.011	不可
Ⓗ	10.04 0.0	10.10 0.0	9.942 -0.005	可

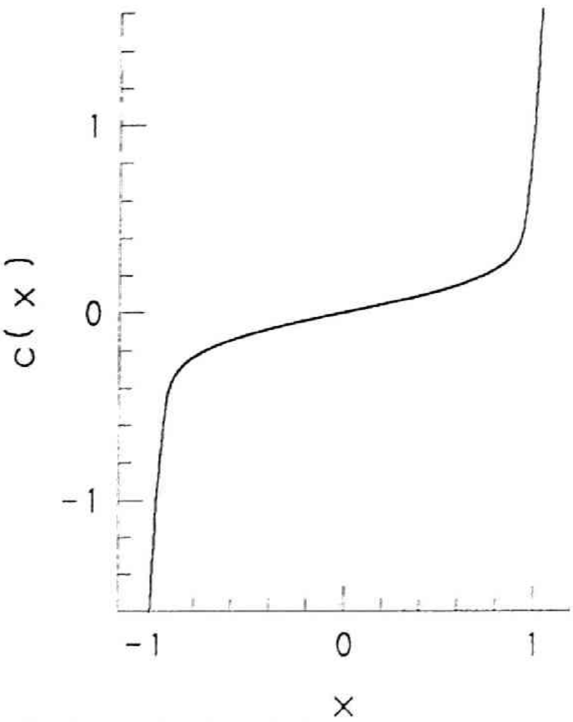
表6．9　3倍周期分岐点（(B，k)の値）　$\nu=1$，$B_0=0$

	t_0	$x(t_0)$	$y(t_0)$
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0
3	0.0	0.0	1.0
4	0.0	-1.0	0.0
5	0.0	0.0	-1.0

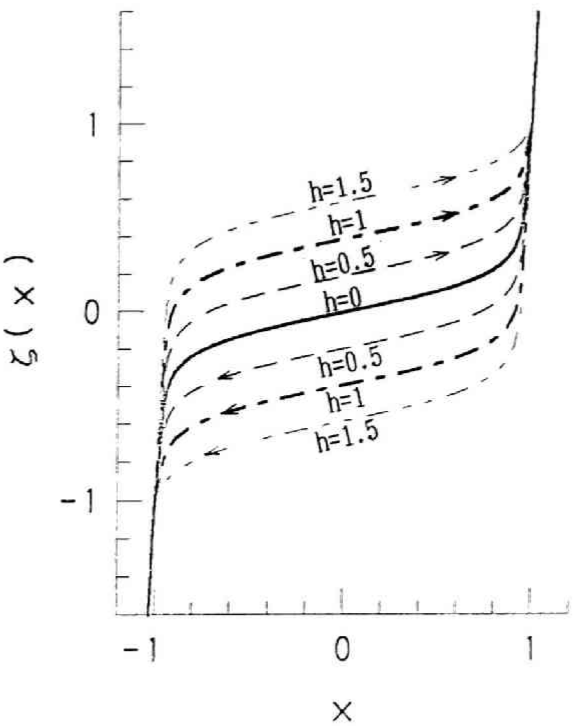
表６．１０　５種類の初期値



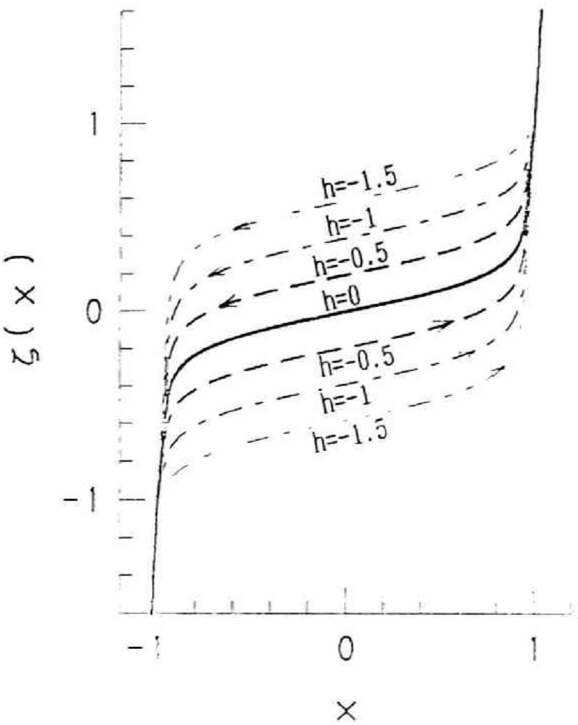
（a） η（x）の特性



（b） c（x）の特性

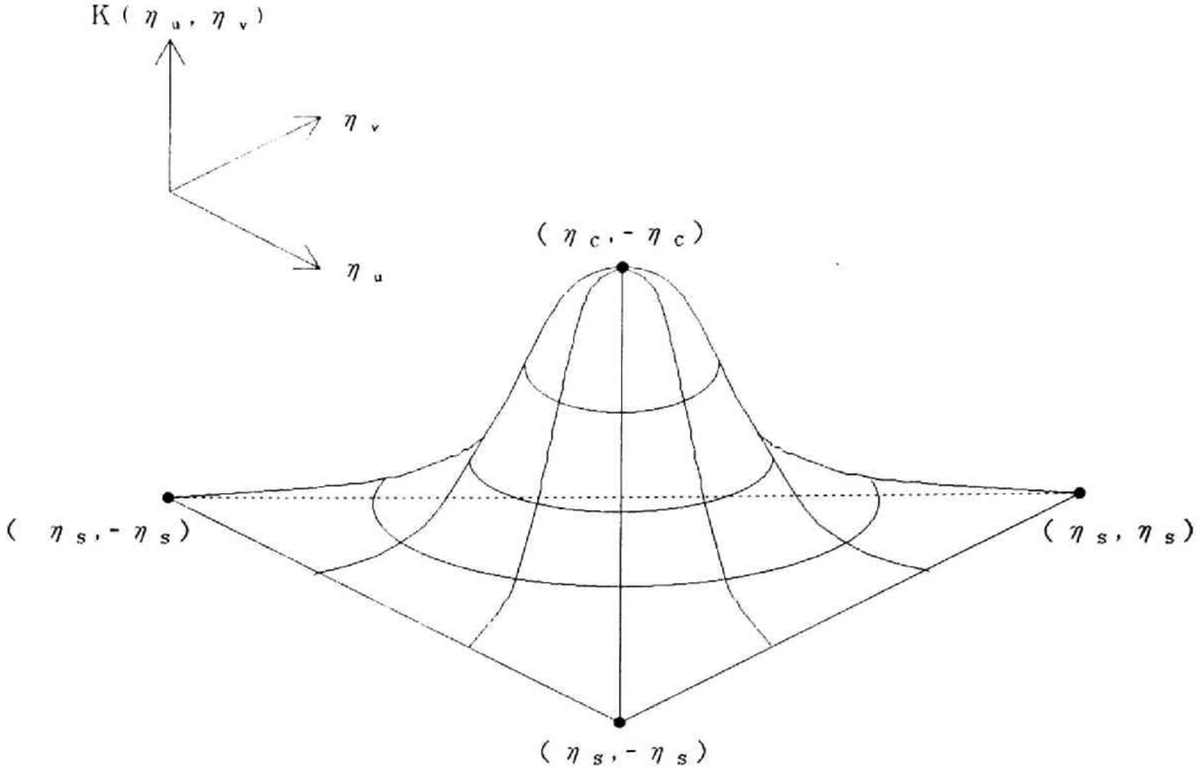


（c） ξ（x）の特性（h ≧ 0）

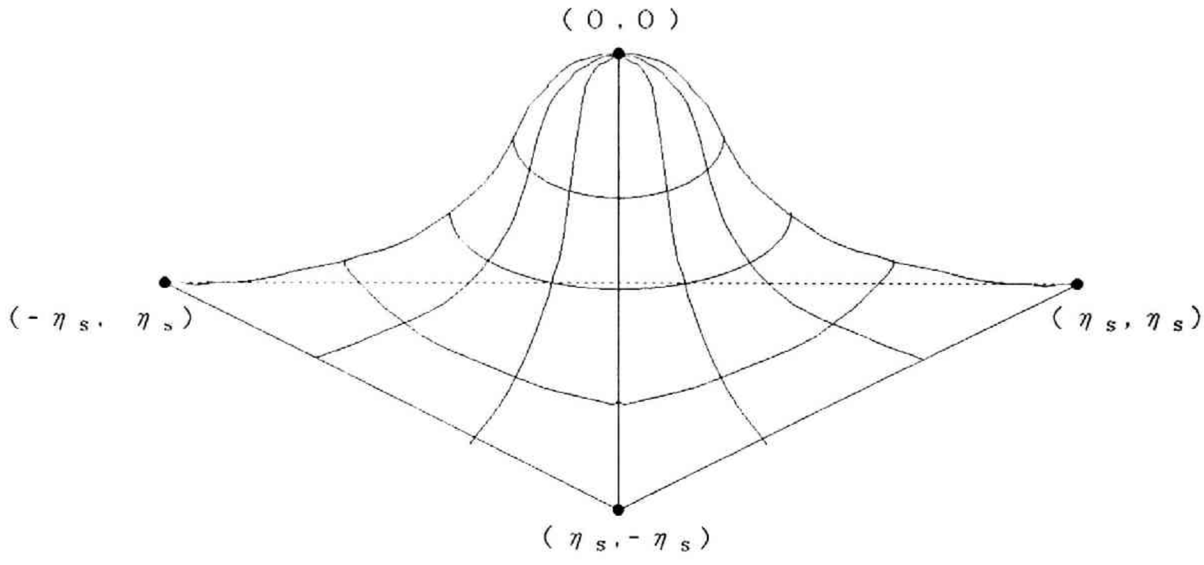


（d） ξ（x）の特性（h ≦ 0）

図６．１　式(6.1)で与えられるヒステリシス特性



（ａ）　実際の強磁性体における双極子の分布



（ｂ）　式(6.3)の分布関数で表される双極子の分布

図６．２　双極子の分布の様子（模式図）

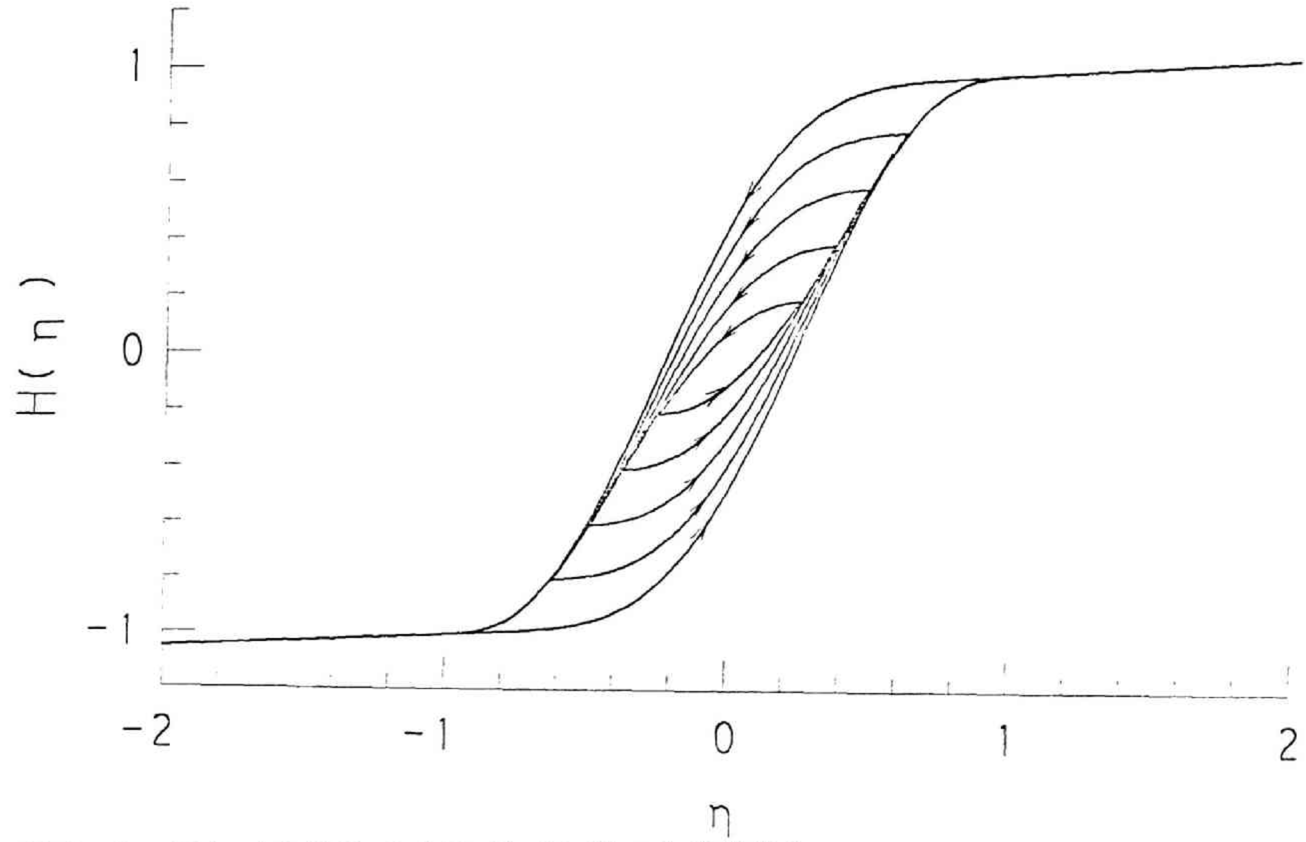
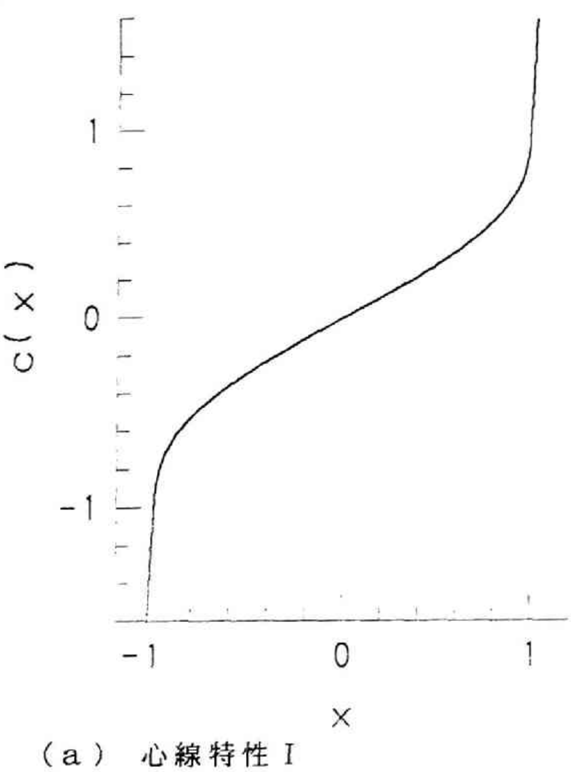
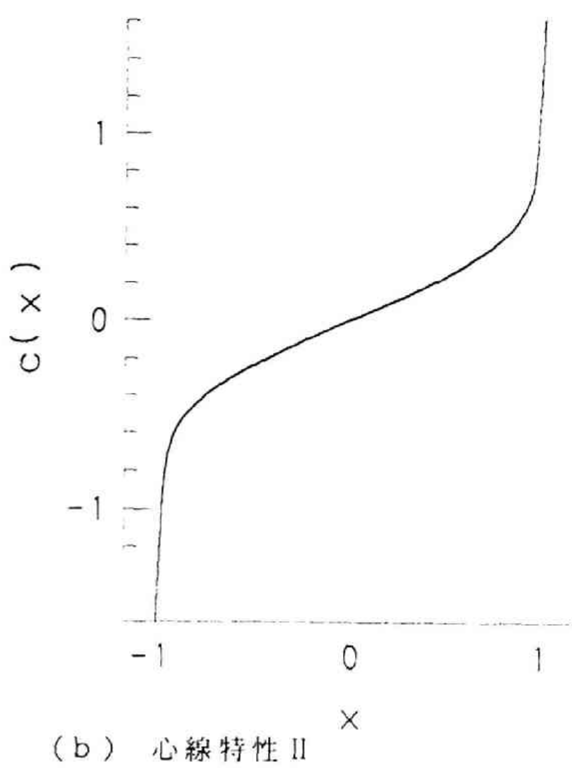


図６．３　H（η）の特性（式(6.3),(6.6)の分布関数）

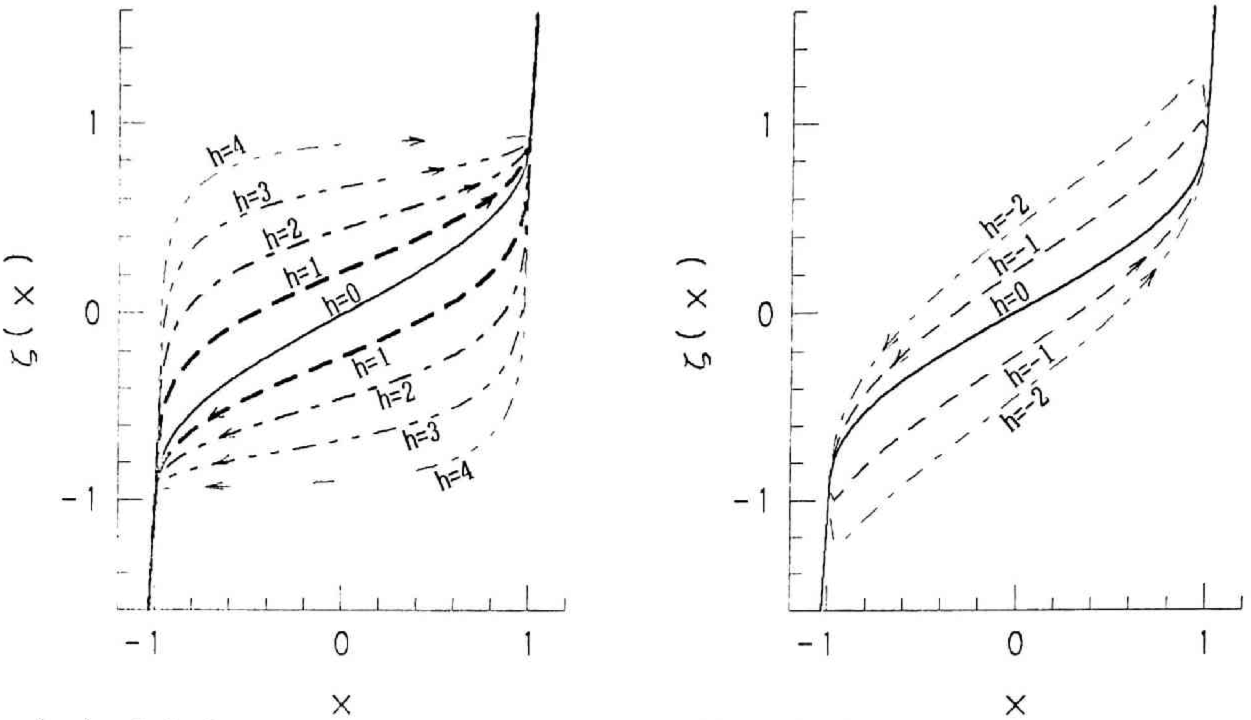


（a）　心線特性Ⅰ



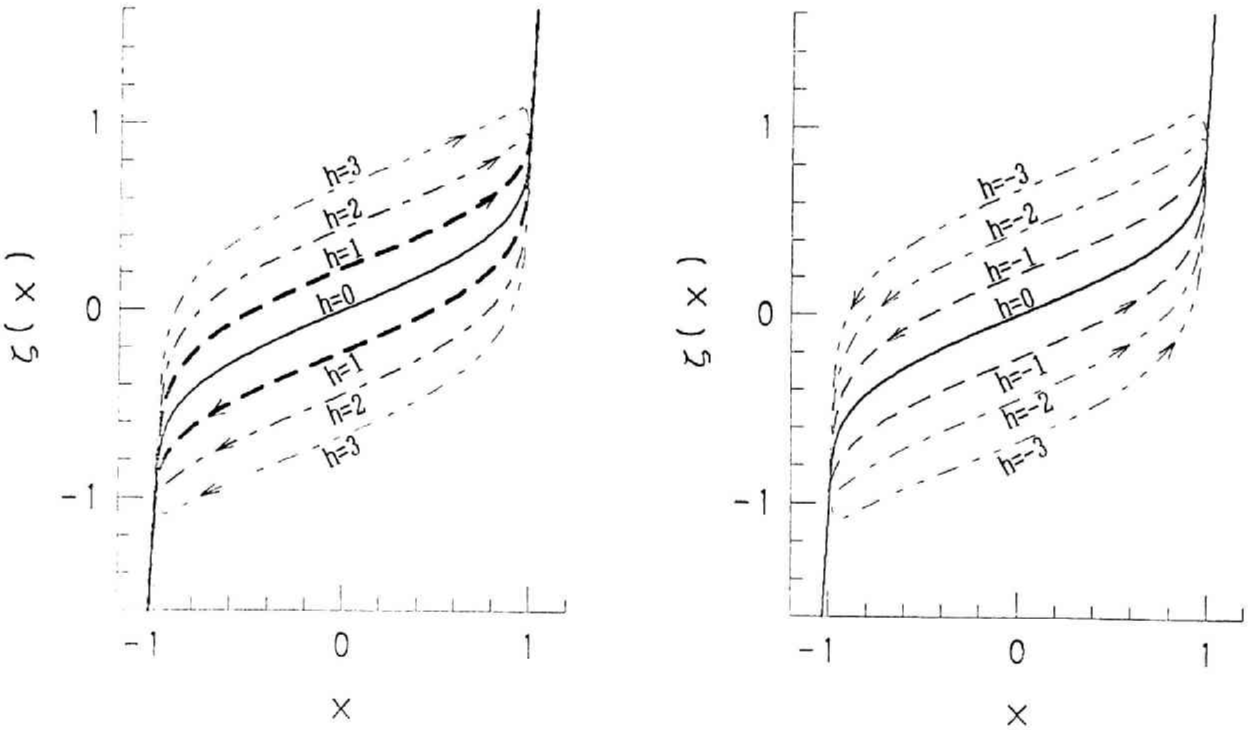
（b）　心線特性Ⅱ

図６．４　心線特性Ⅰと心線特性Ⅱ



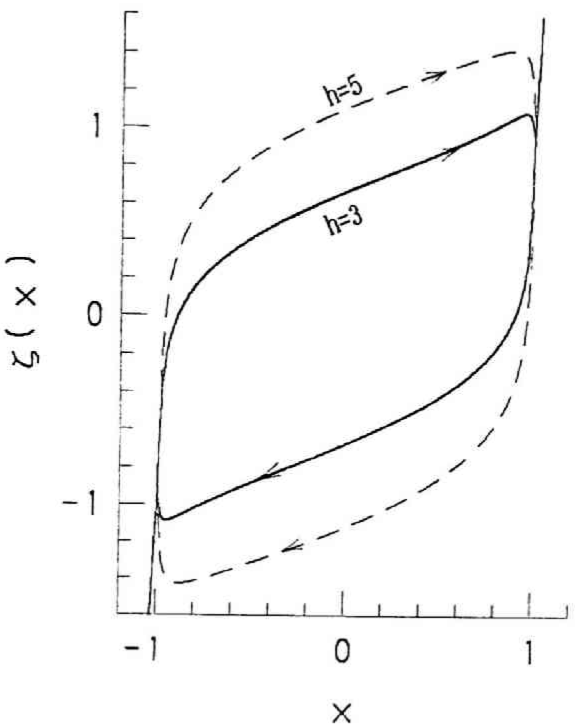
（a） h ≧ 0　　　　　　　　　　（b） h ≦ 0

図６．５　ξ（x）の特性（心線特性Ｉを用いた場合）

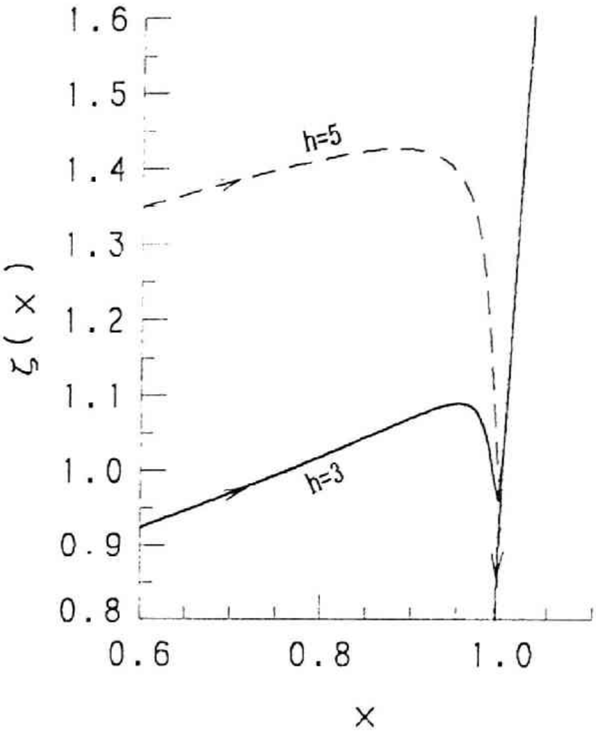


（a） h ≧ 0　　　　　　　　　　（b） h ≦ 0

図６．６　ξ（x）の特性（心線特性Ⅱを用いた場合）



（a） h = 3, 5（心線特性Ⅱ）
の場合のξ(x)の特性



（b） 図(a)の拡大図

図6.7 歪んだヒステリシス特性の例

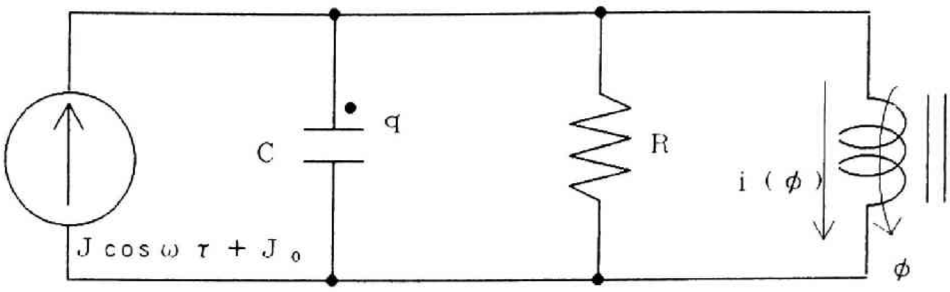


図６．８　並列共振回路

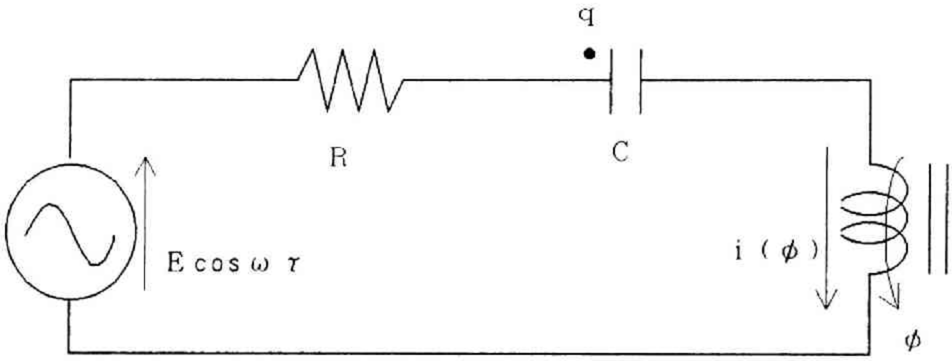
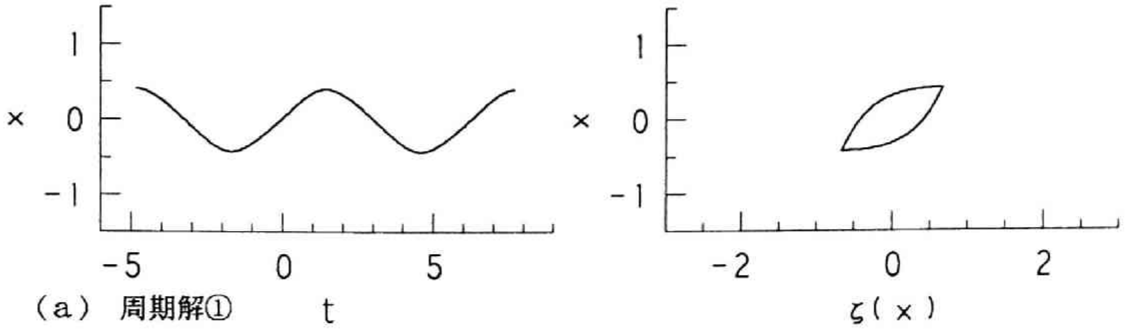
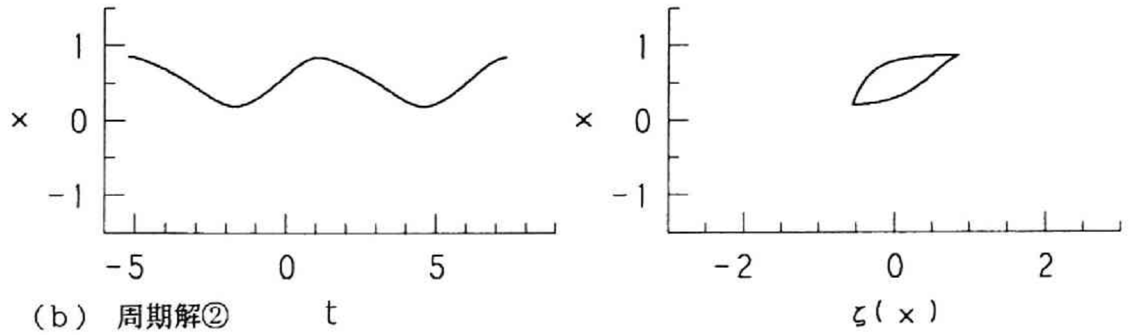


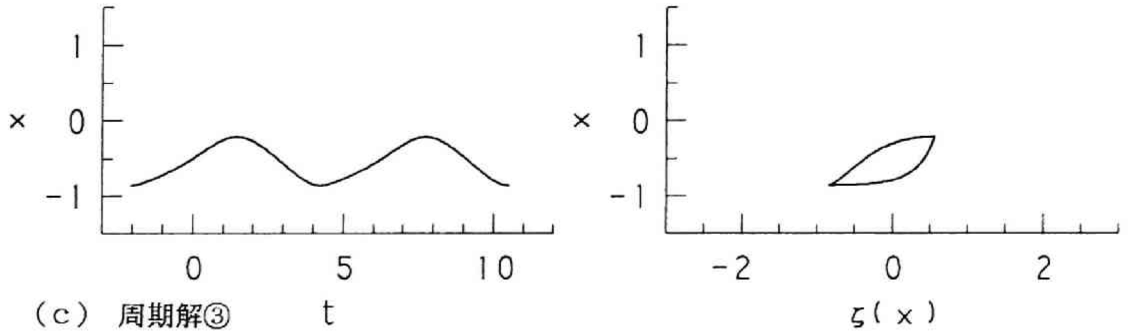
図６．９　直列共振回路



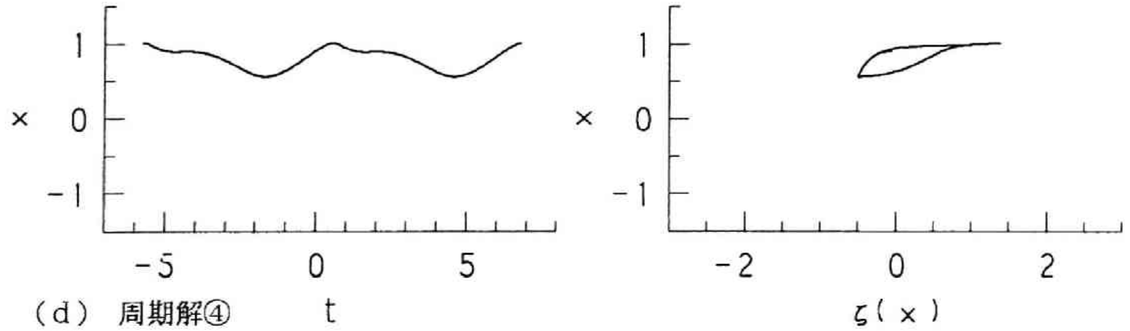
（a） 周期解①



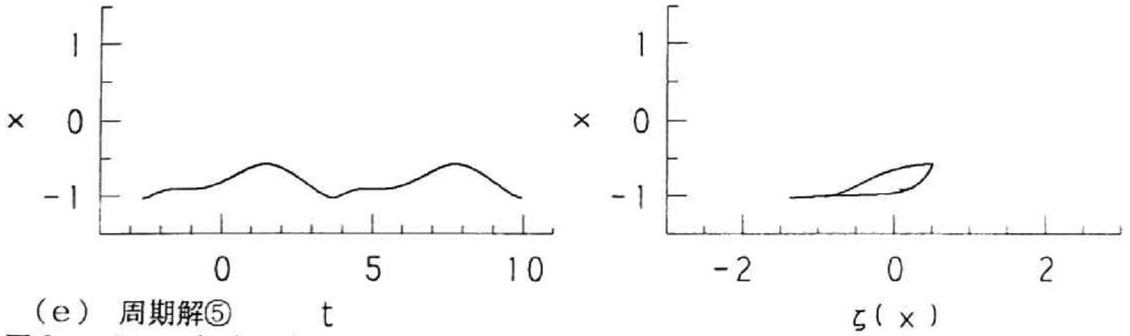
（b） 周期解②



（c） 周期解③

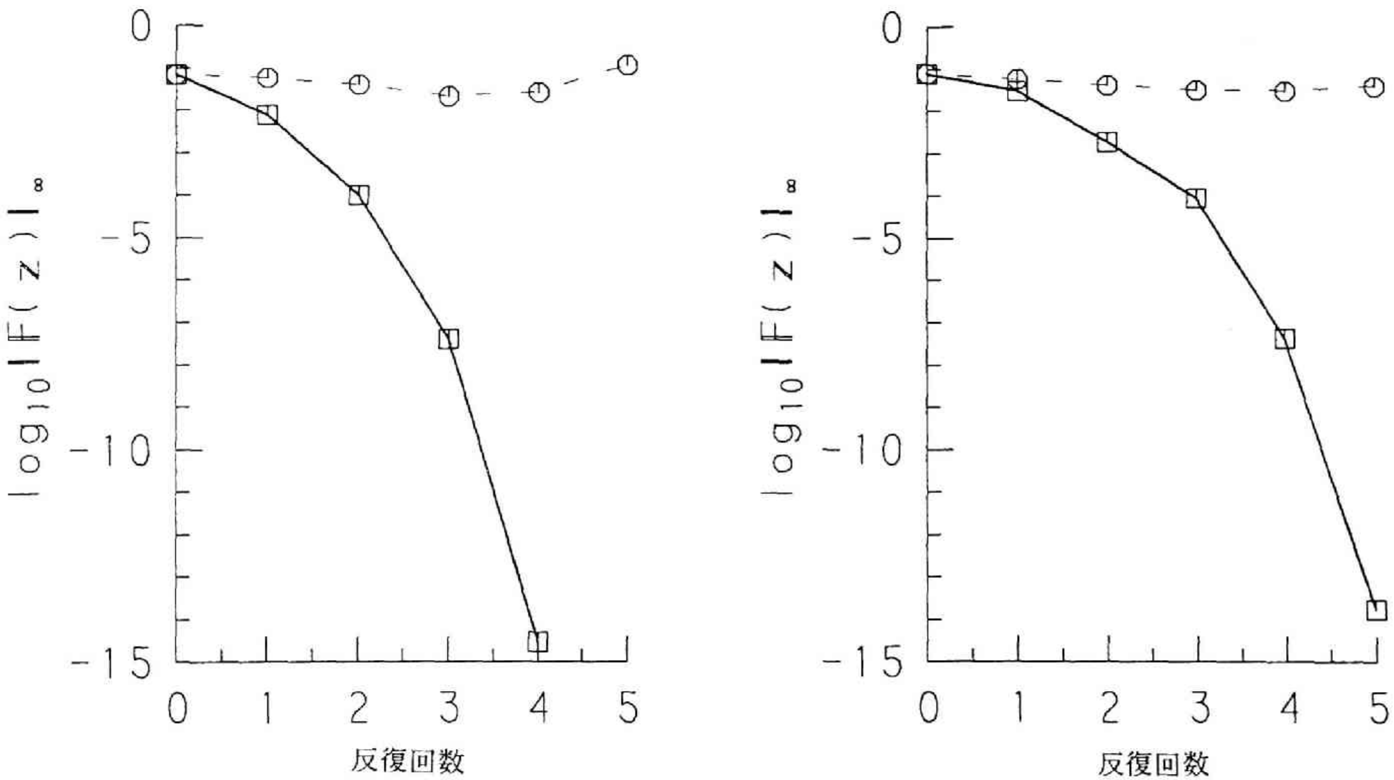


（d） 周期解④



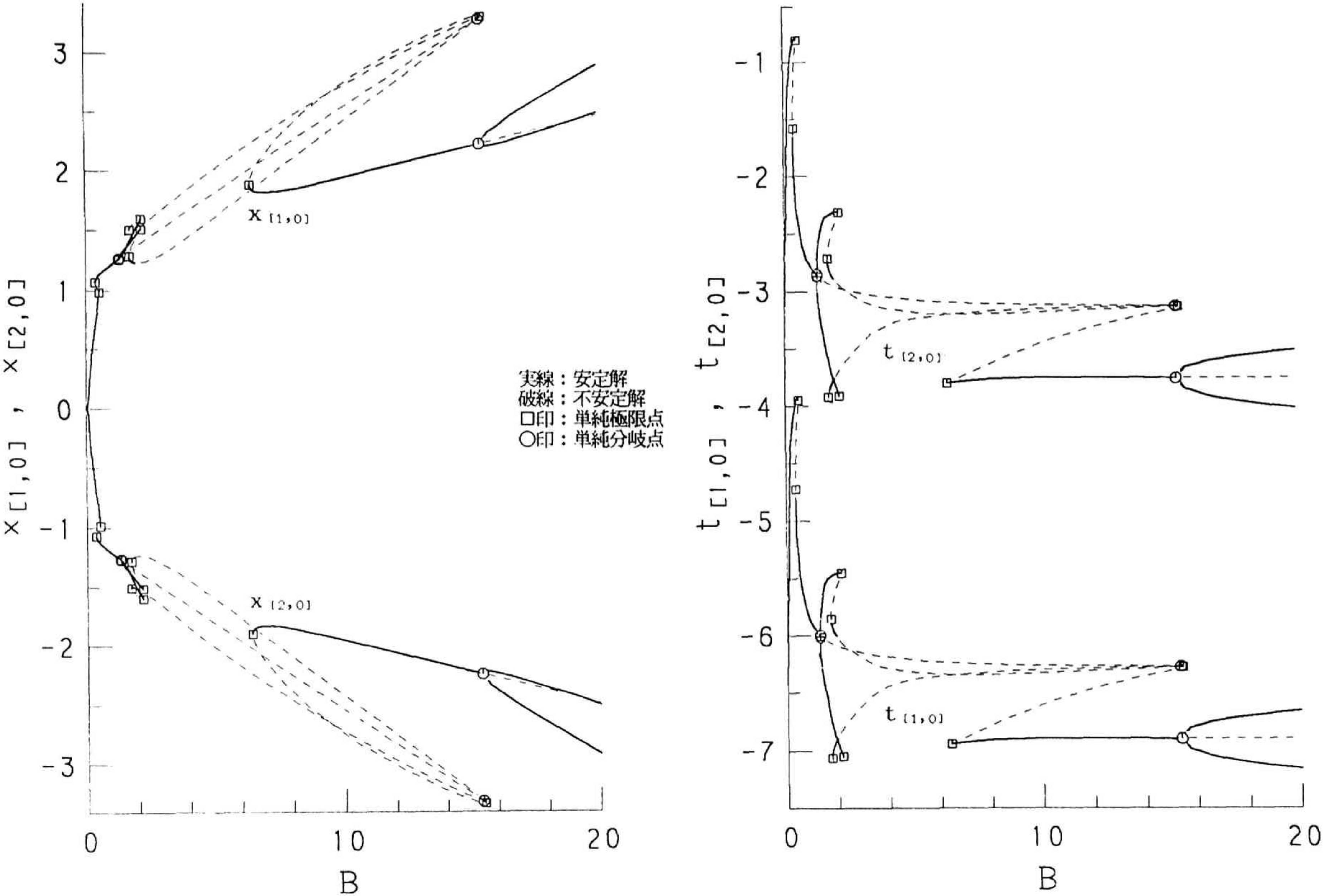
（e） 周期解⑤

図６．１０　x(t)の波形とx－ζループ（B＝0.5，h＝3，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0)



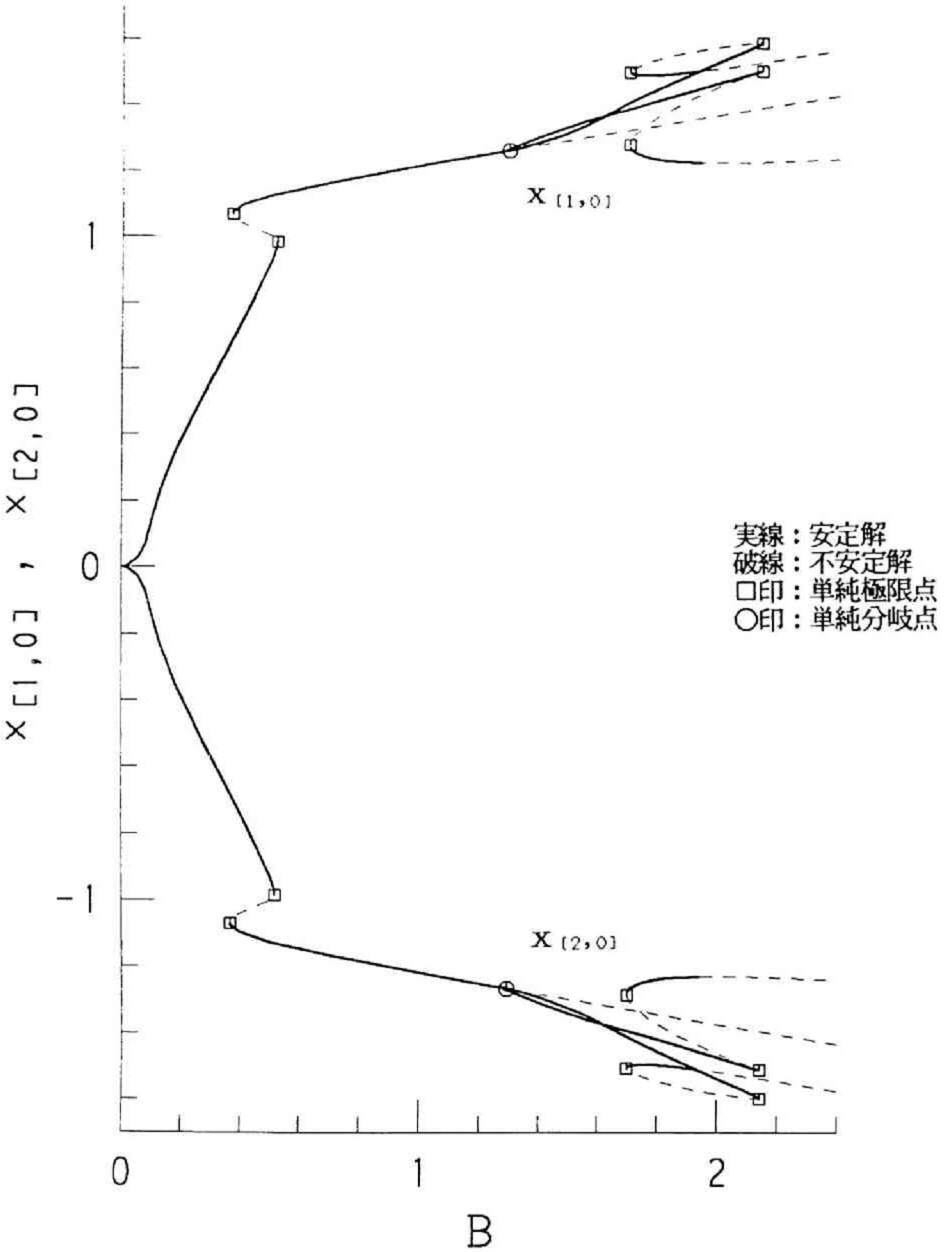
（a）出発点（0.4，0，-5）（→解①に収束）　　（b）出発点（0.85，0，-5）（→解②に収束）

図６．１１　Newton法の収束（実線：履歴項あり，破線：履歴項なし）

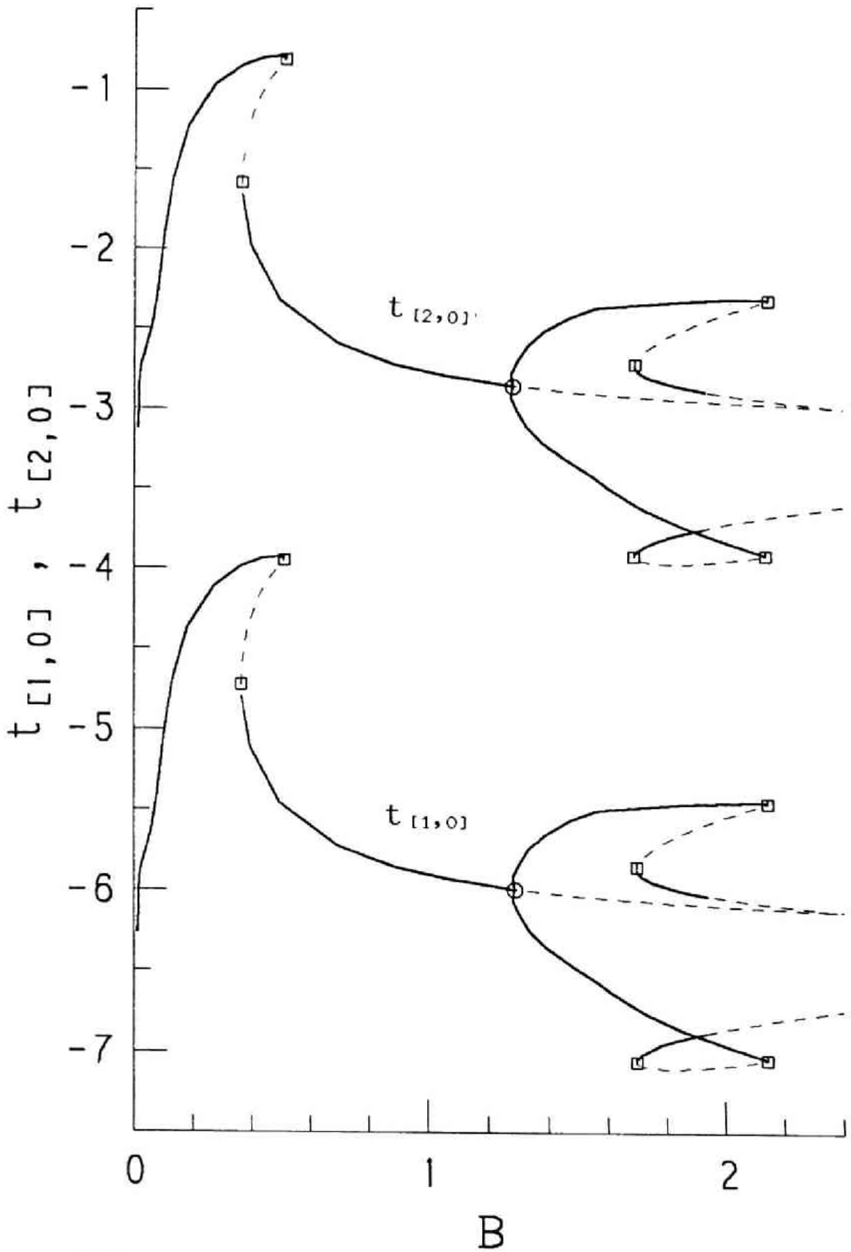


(a) $x_{[1,0]}$, $x_{[2,0]}$の変化 (0≦B≦20)　　(b) $t_{[1,0]}$, $t_{[2,0]}$の変化 (0≦B≦20)

図6.12　振幅特性（並列共振回路，$h=1$，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$）

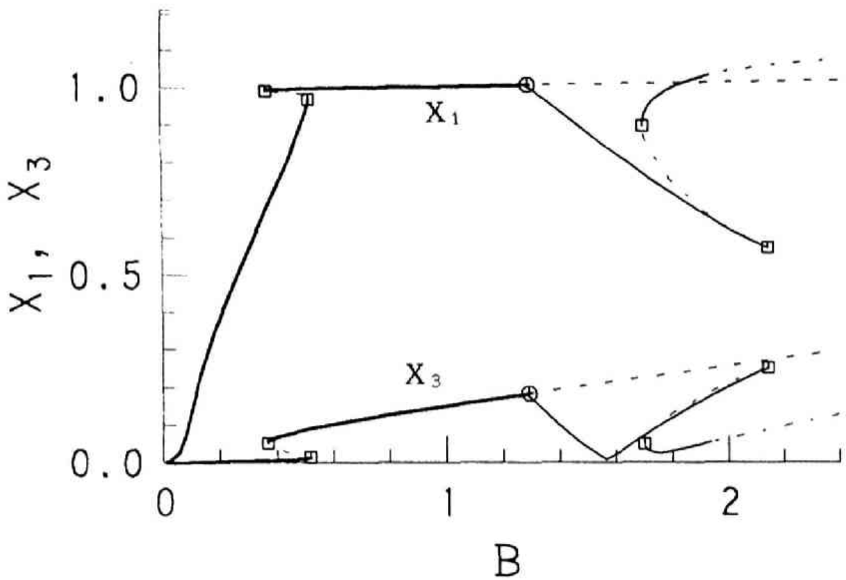


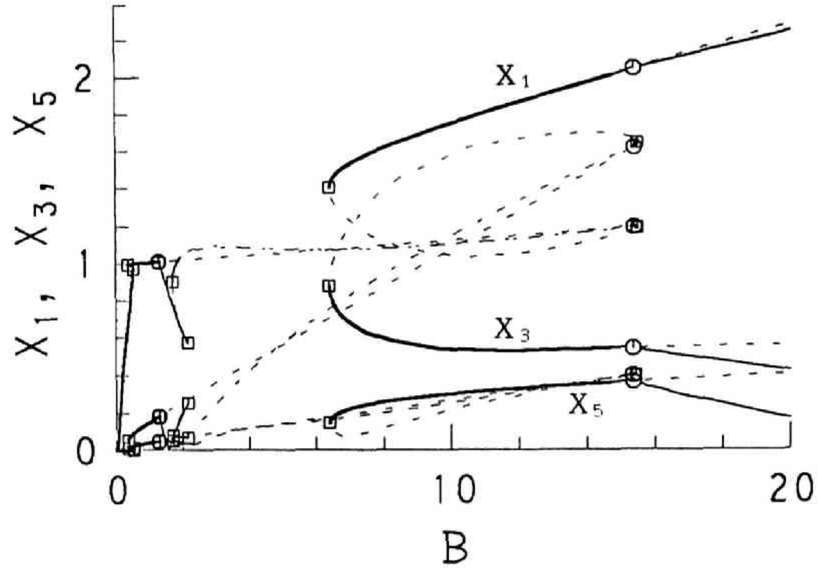
(c)　x [1,0] , x [2,0]の変化 (0≦B≦2.4)



(d)　t [1,0] , t [2,0]の変化 (0≦B≦2.4)

図6.12　振幅特性 (並列共振回路, h=1, k=0.1, ν=1, B_0=0)



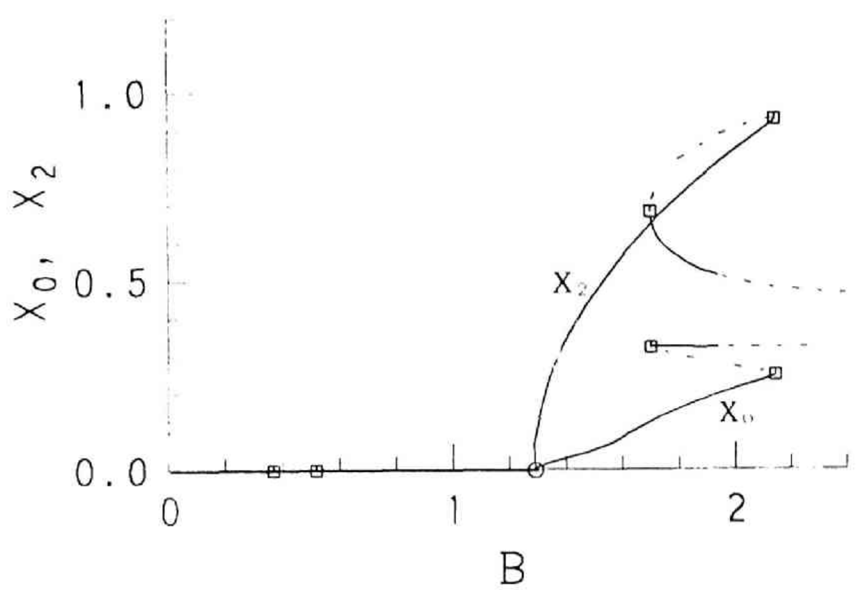


（a） 基本調波成分，第3調波成分（$0 \leqq B \leqq 2.4$） ↑

（b） 直流成分，第2調波成分（$0 \leqq B \leqq 2.4$） ↓

（c） 基本調波成分，第3調波成分，第5調波成分（$0 \leqq B \leqq 20$） ↑

（d） 直流成分，第2調波成分，第4調波成分（$0 \leqq B \leqq 20$） ↓



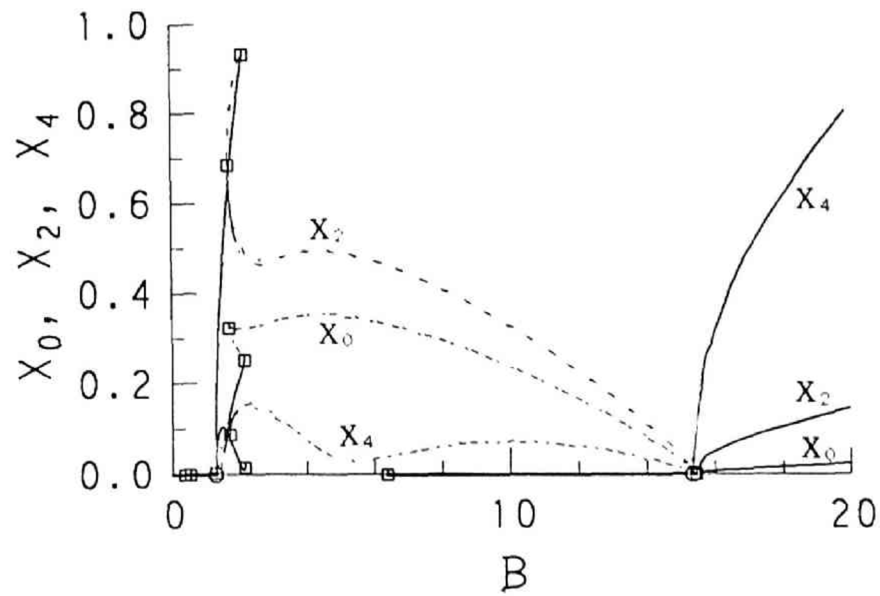


図6.13　各調波成分の変化（並列共振回路，$h=1$，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$）

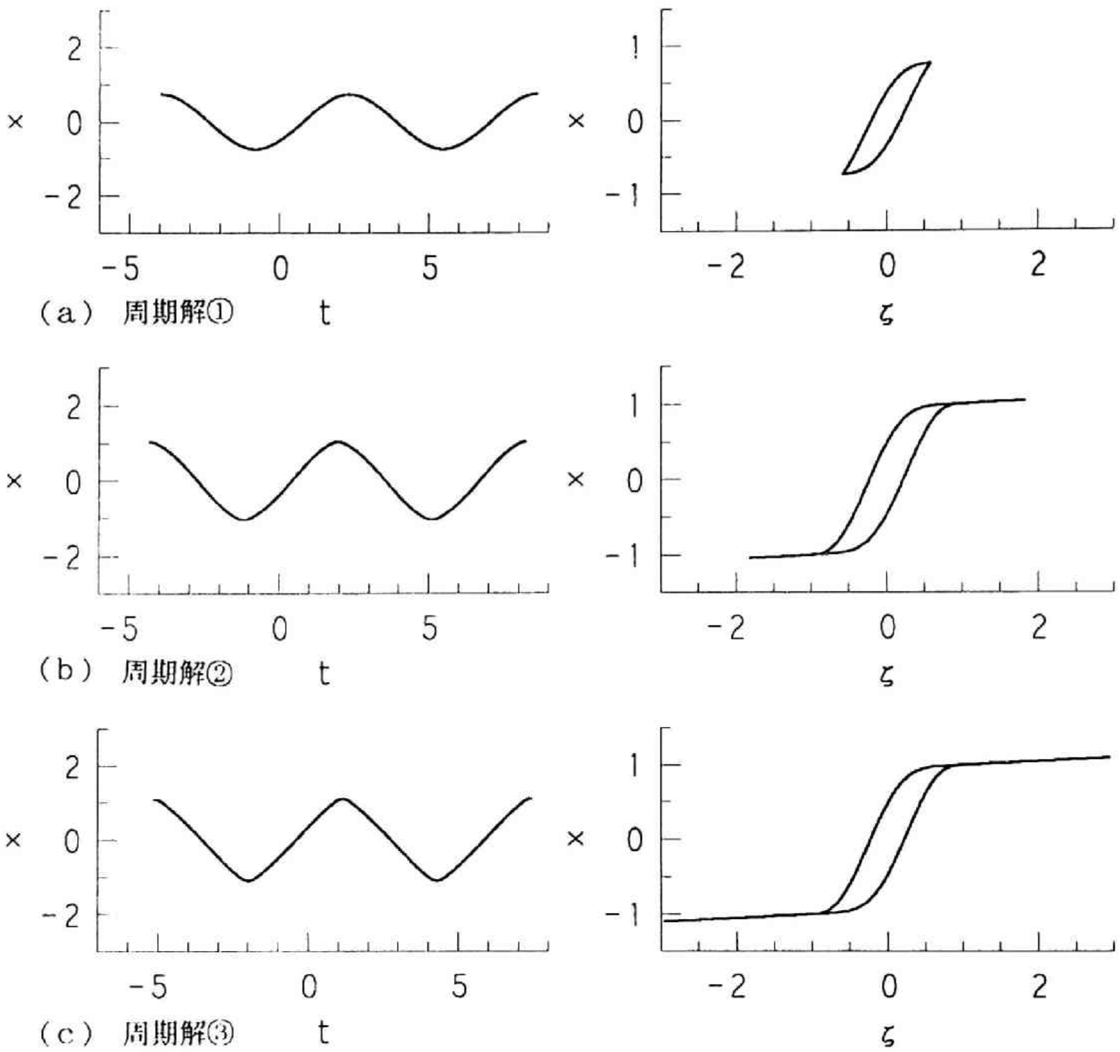


図6.14　x(t)の波形と$x-\zeta$ループ($B=0.4$, $h=1$, $k=0.1$, $\nu=1$, $B_0=0$)

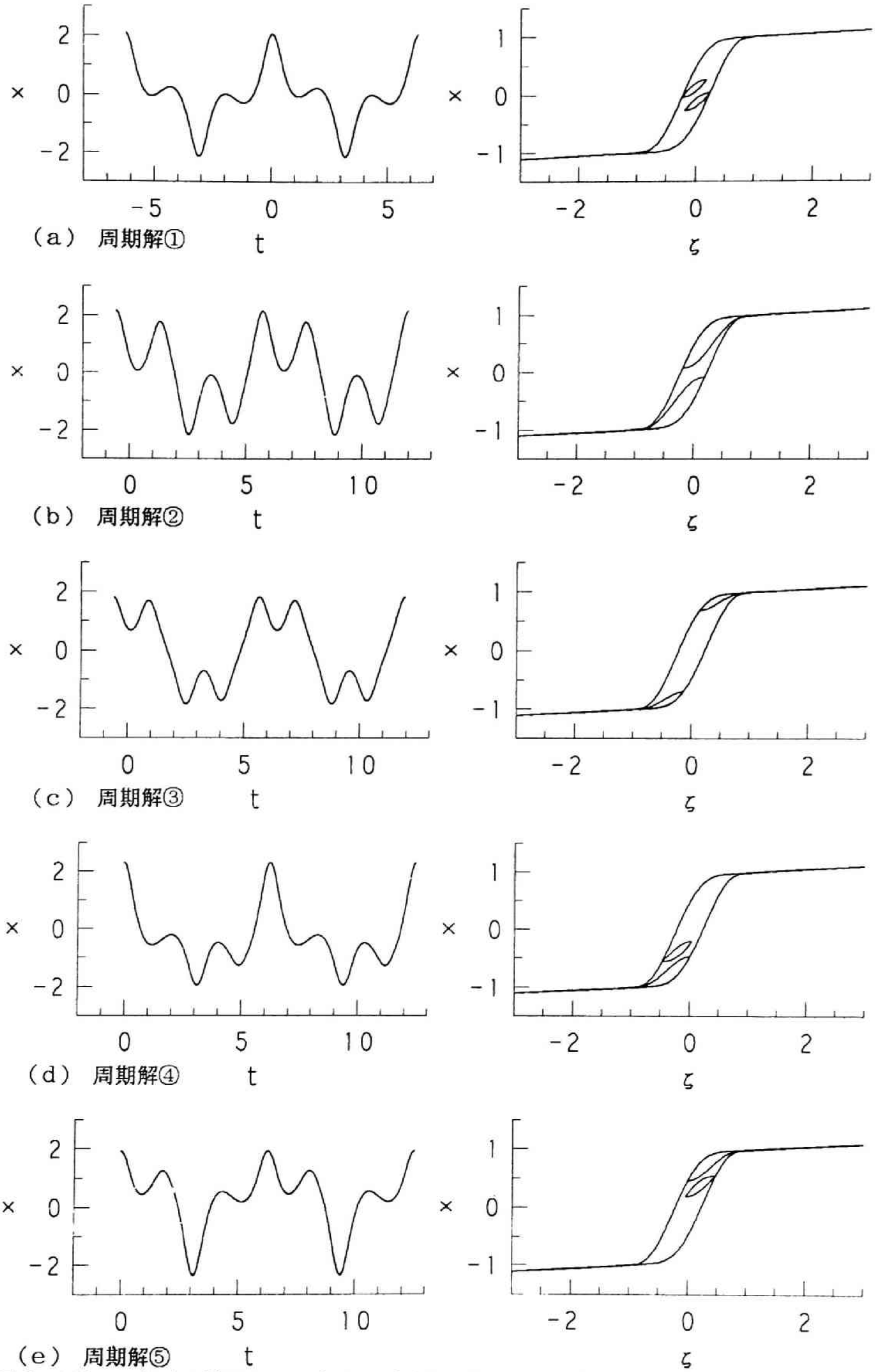
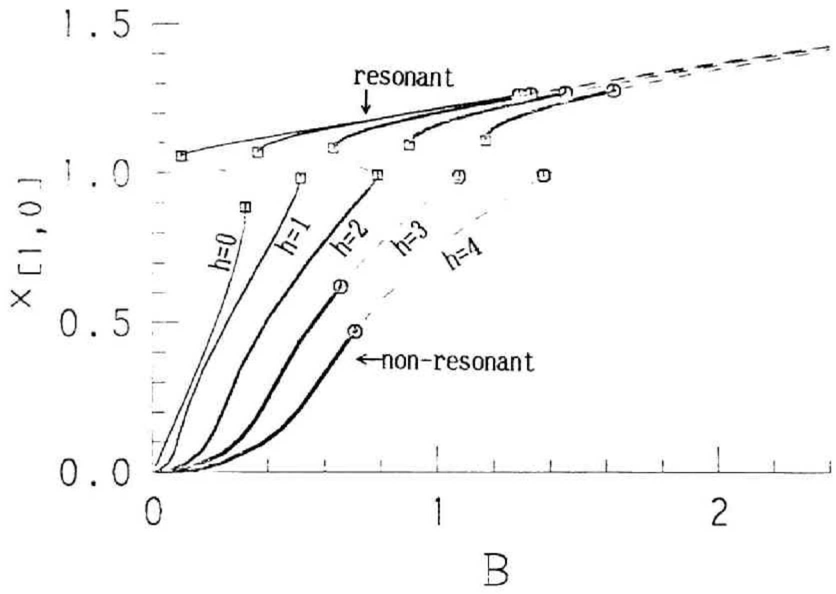


図6.15　x(t)の波形とx−ζループ ($B=7$, $h=1$, $k=0.1$, $\nu=1$, $B_0=0$)



(a) 心線特性Ⅰ ↑

(b) 心線特性Ⅱ ↓

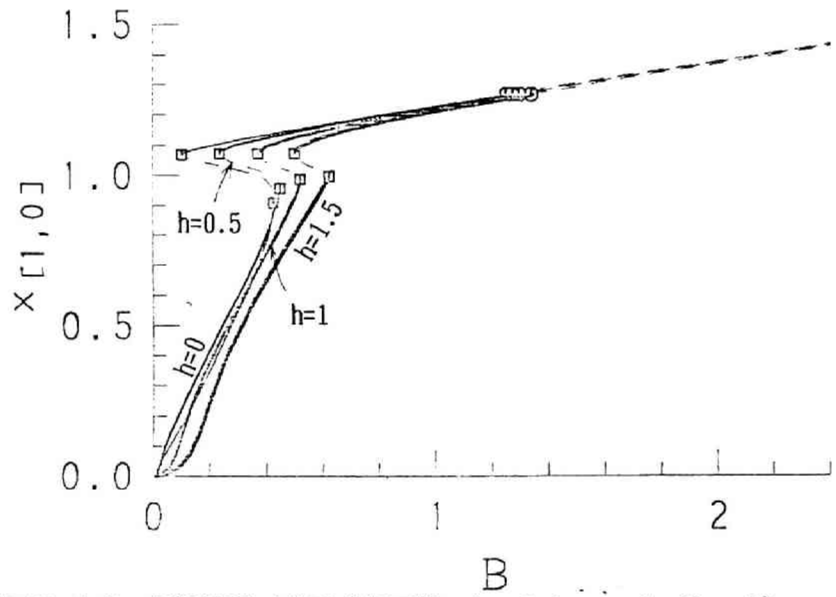
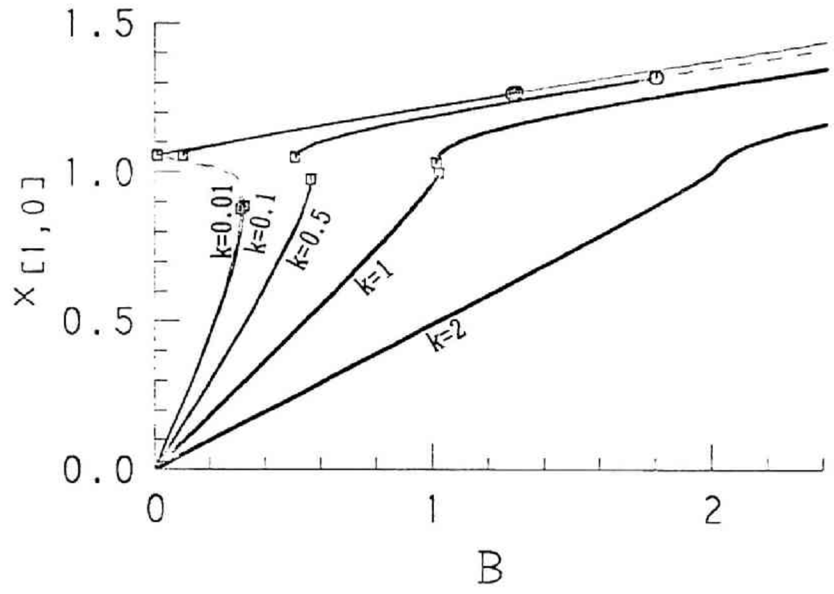


図6.16 振幅特性（並列共振回路，k＝0.1，$\nu=1$，$B_0=0$）



(a) 心線特性Ⅰ ↑

(b) 心線特性Ⅱ ↓

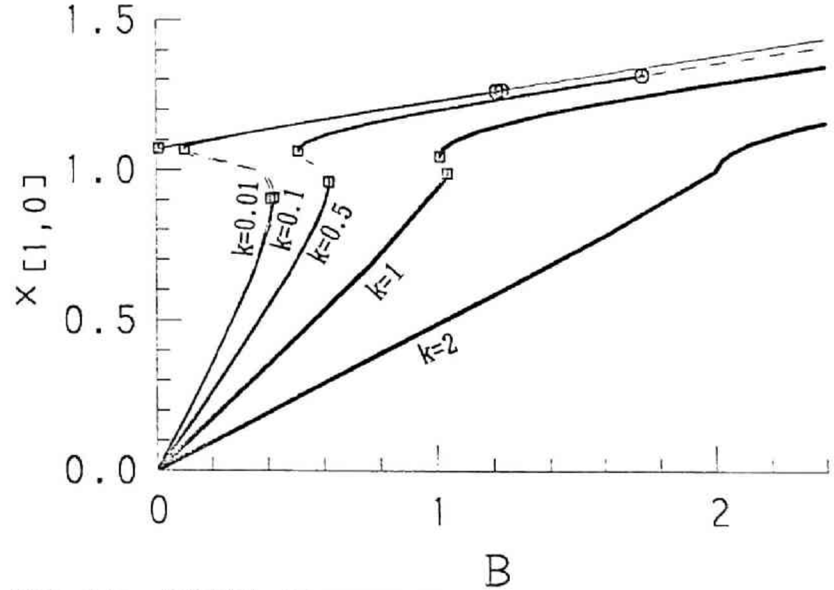
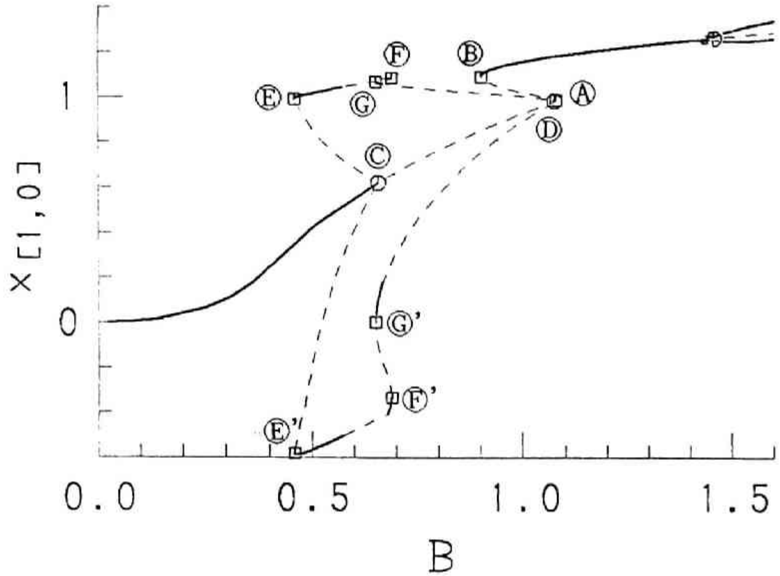
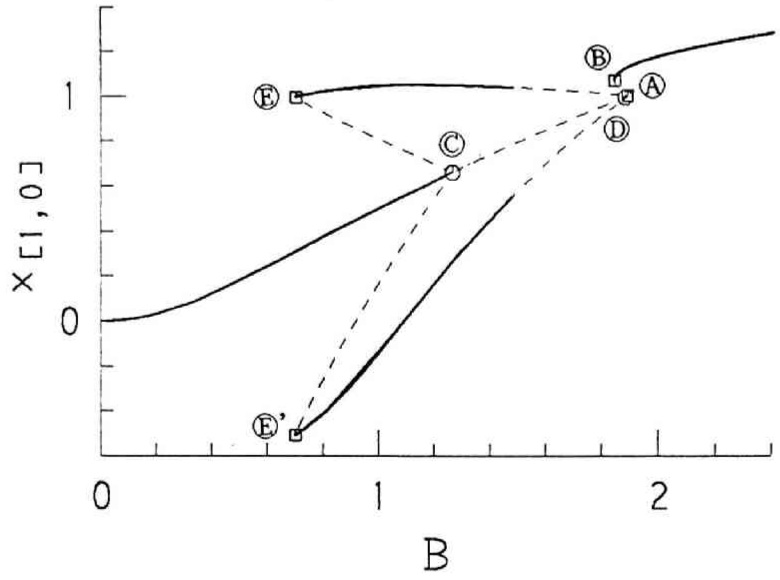


図6.17 振幅特性（並列共振回路，h＝1，$\nu=1$，$B_0=0$）



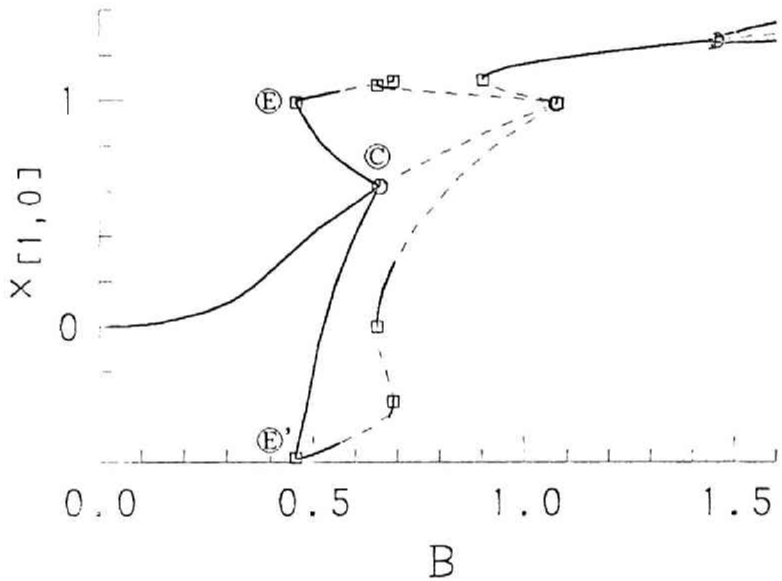


(a)　k＝0.1（安定判別法①）　↑

(b)　k＝0.1（安定判別法②）　↓

(c)　k＝1（安定判別法①）　↑

(d)　k＝1（安定判別法②）　↓



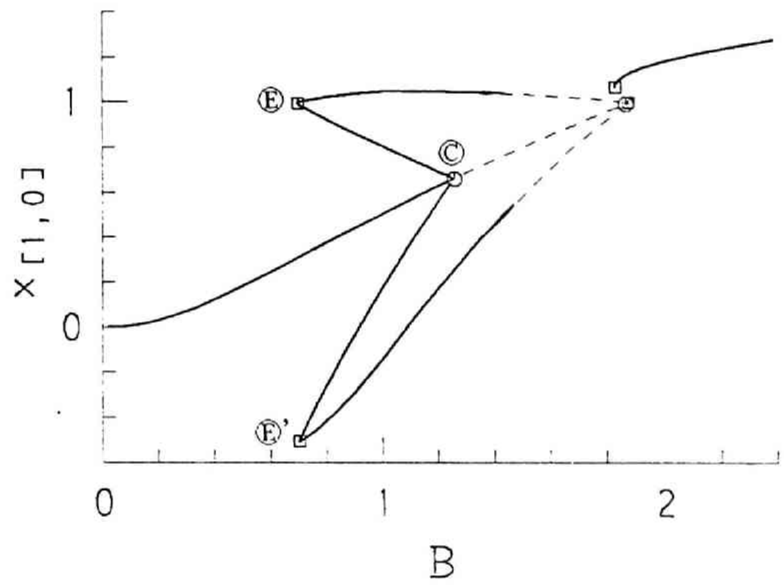
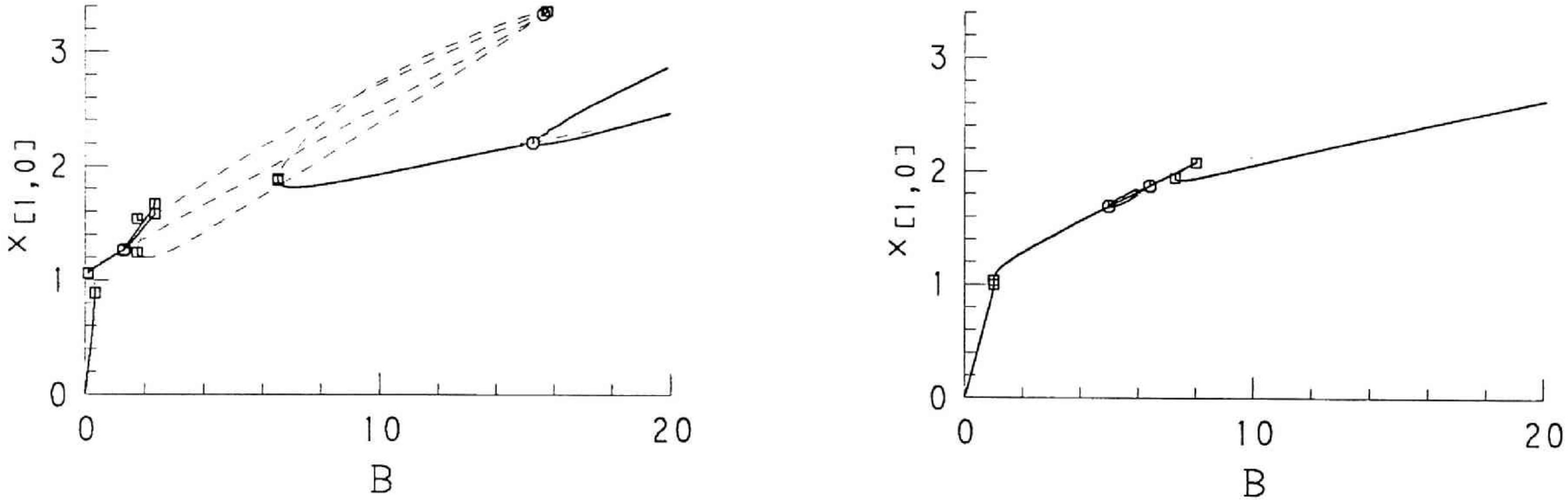


図6.18　振幅特性（並列共振回路，h＝3（心線特性Ⅰ），$\nu=1$，$B_0=0$）



(a) h=0（心線特性Ⅰ），k=0.1　↑

(b) h=3（心線特性Ⅰ），k=0.1　↓

(c) h=0（心線特性Ⅰ），k=1　↑

(d) h=3（心線特性Ⅰ），k=1　↓

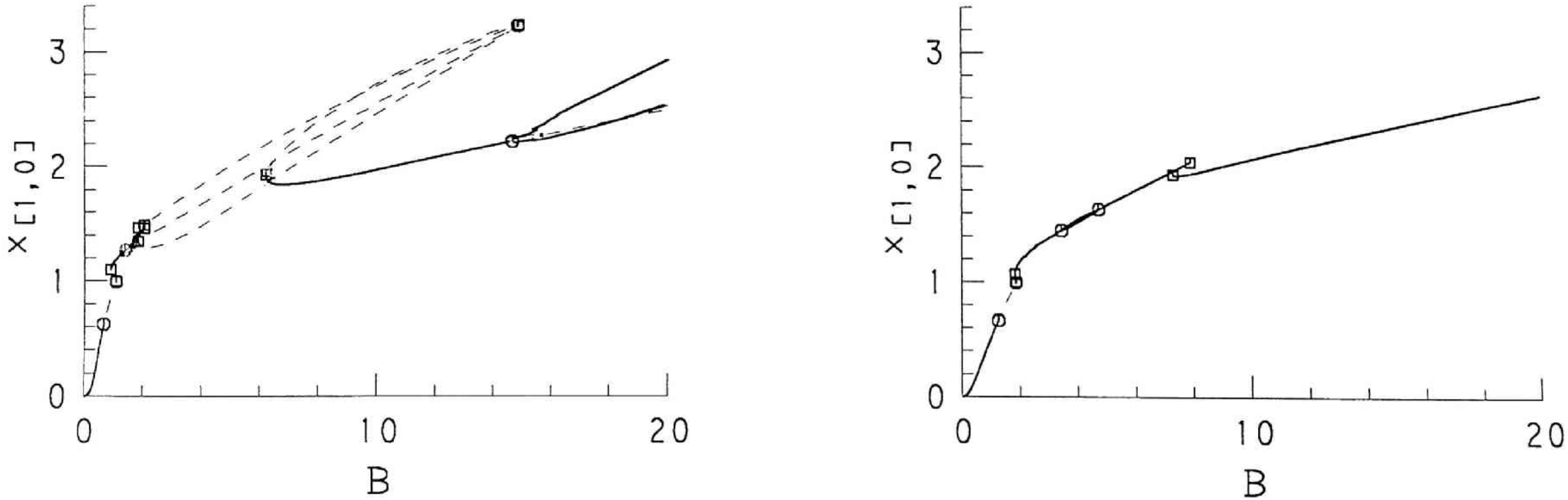
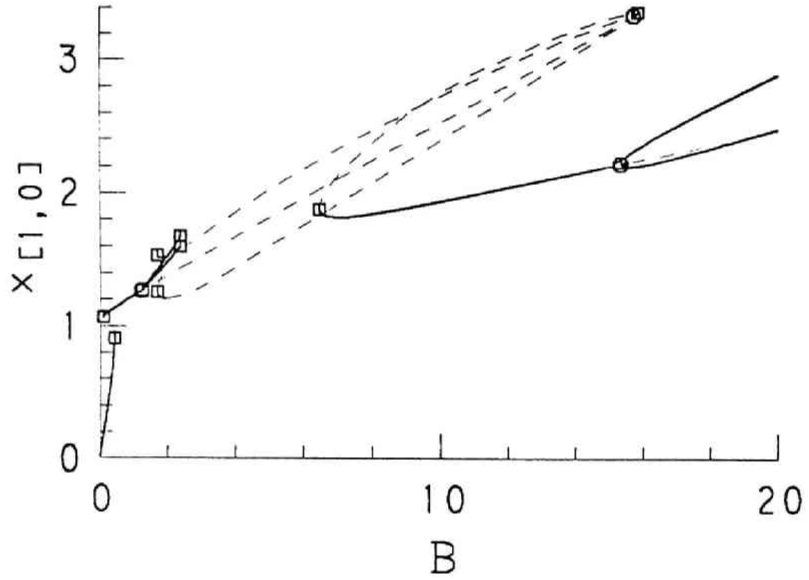


図6.19　振幅特性（並列共振回路，$\nu=1$，$B_0=0$）



(e) h=0 (心線特性II), k=0.1 ↑

(f) h=1.5 (心線特性II), k=0.1 ↓

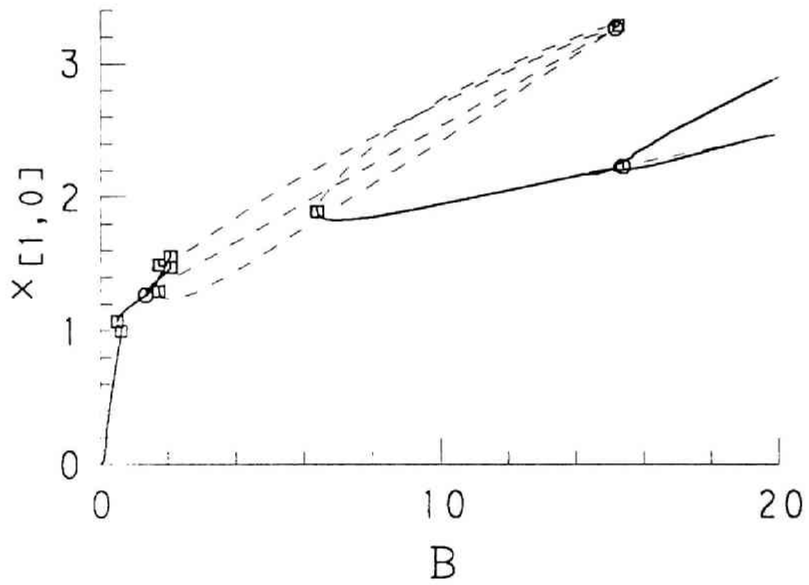


図6.19 振幅特性 (並列共振回路, $\nu=1$, $B_0=0$)

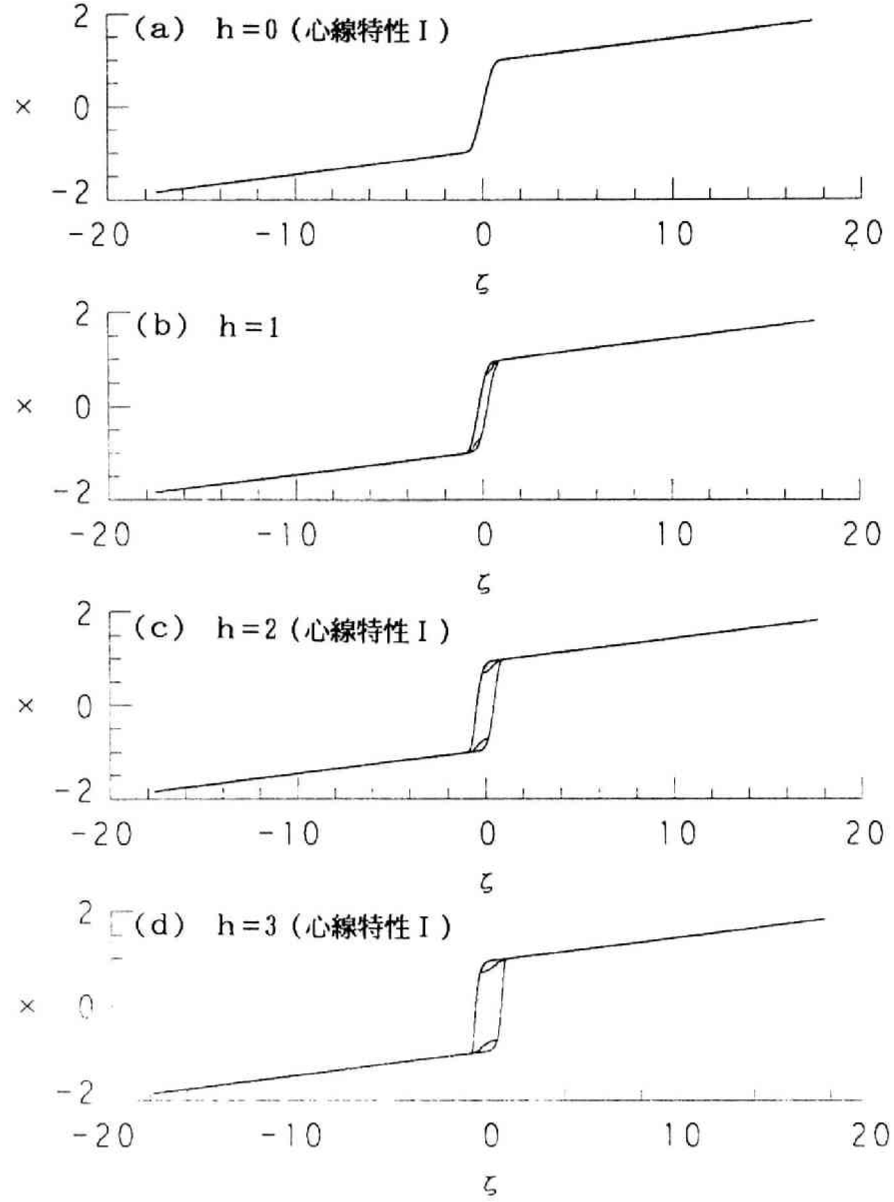


図6.20 x－ζループ (並列共振回路, B=7, k=0.1, $\nu=1$, $B_0=0$)

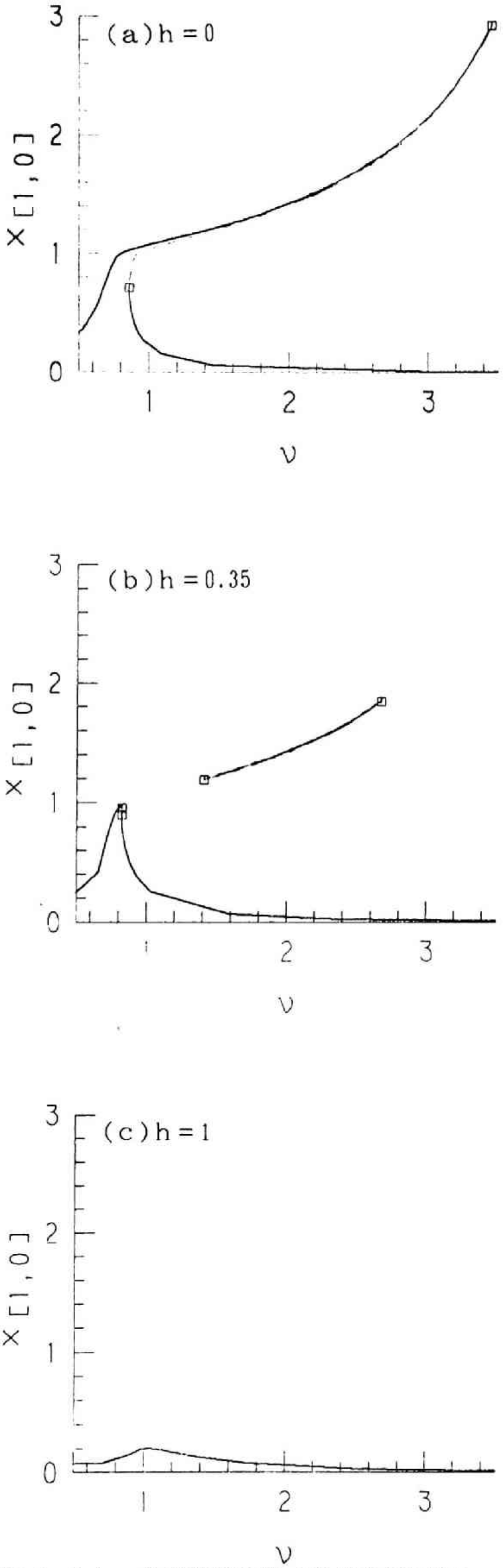


図６．２１　角周波数特性（並列共振回路）
（心線特性Ｉ，Ｂ＝0.1，ｋ＝0.01，B_0＝0）

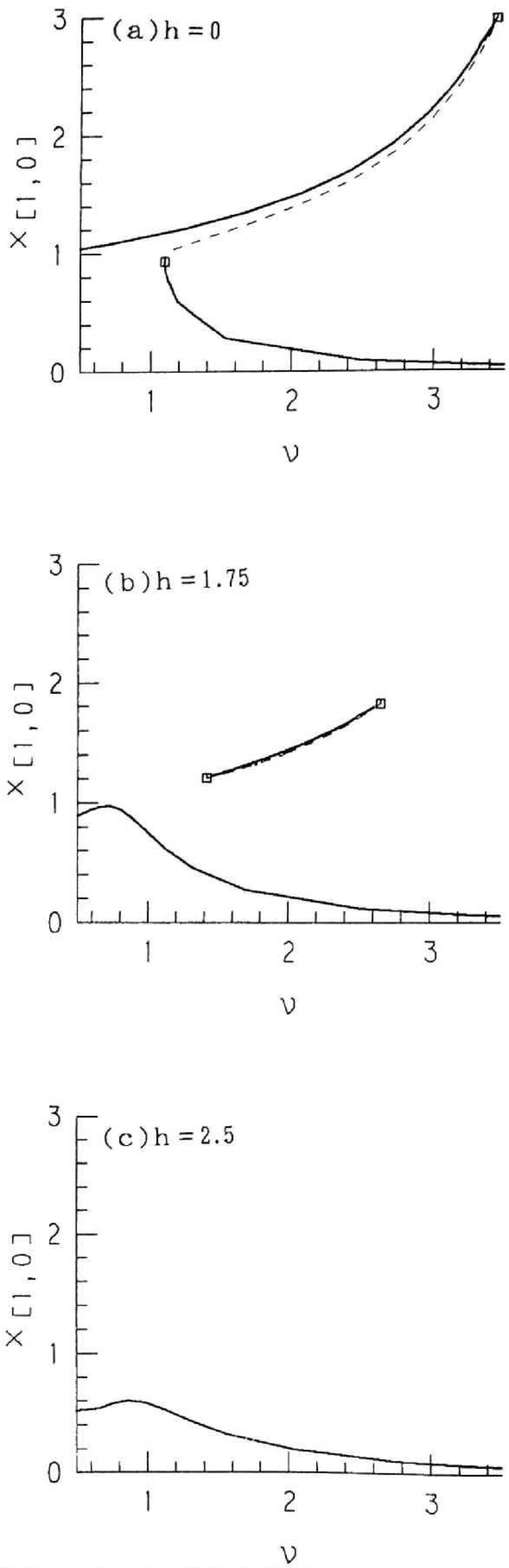
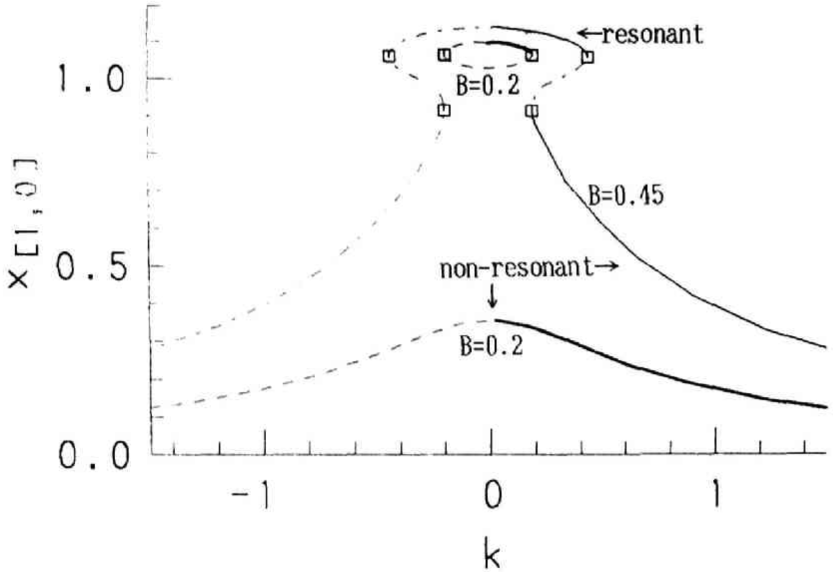


図６．２２　角周波数特性（並列共振回路）
（心線特性Ｉ，Ｂ＝0.5，ｋ＝0.05，B_0＝0）



（a） h＝0（心線特性II） ↑

（b） h＝1 ↓

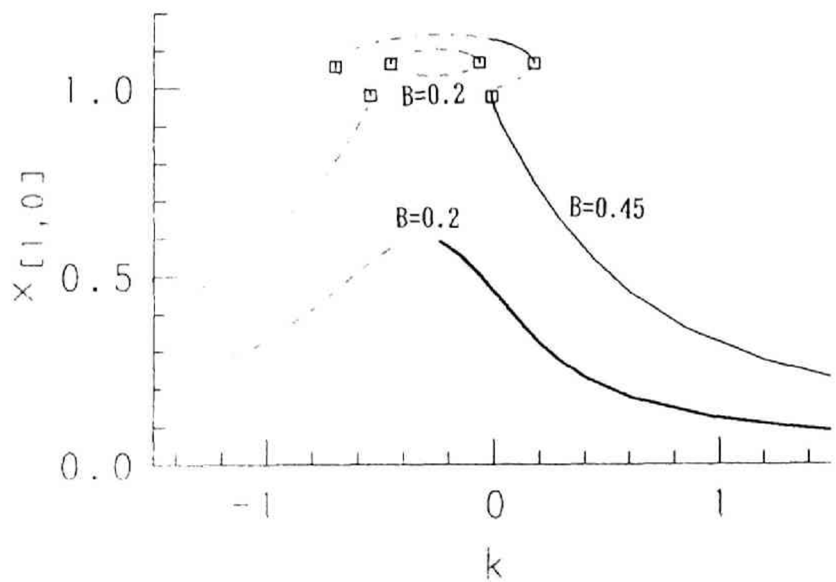
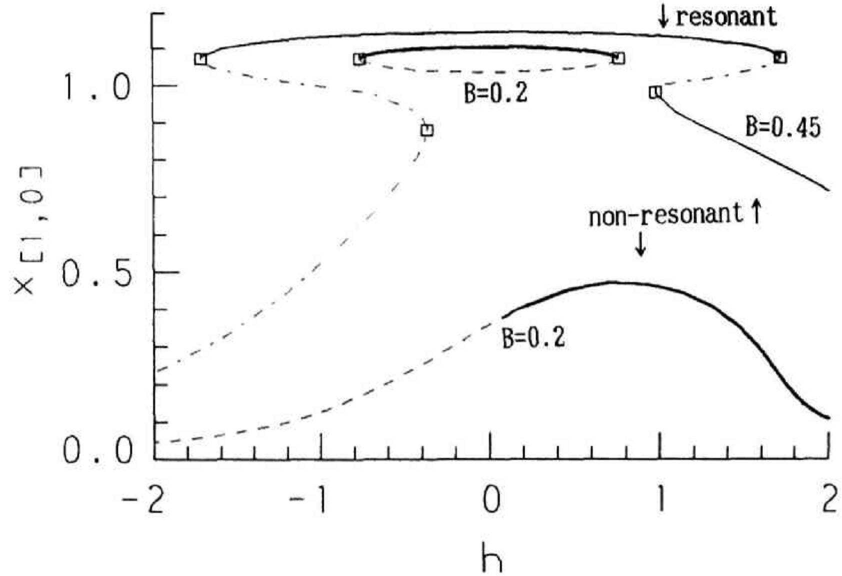


図6.23 kの変化に対する分岐（並列共振回路，$\nu=1$，$B_0=0$）



（a） k＝0.0001 ↑

（b） k＝0.2 ↓

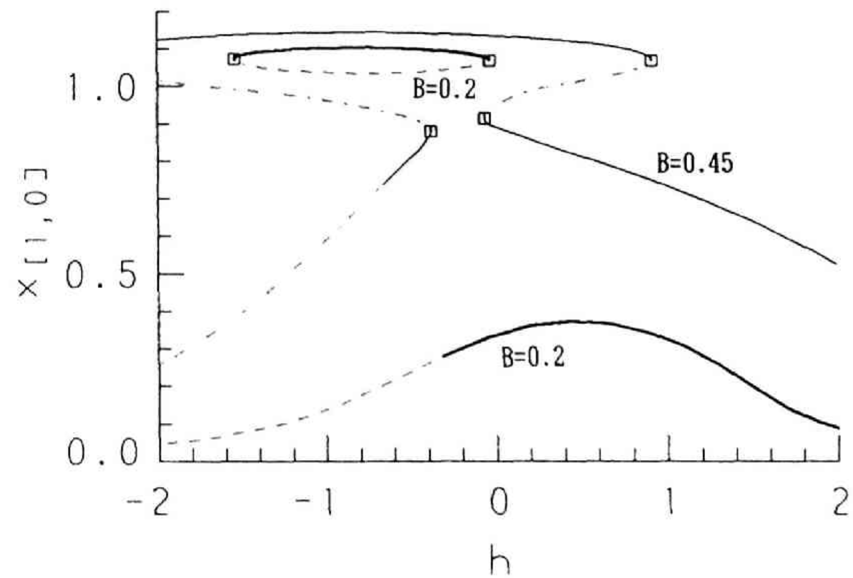


図6.24 hの変化に対する分岐（並列共振回路，心線II，$\nu=1$，$B_0=0$）

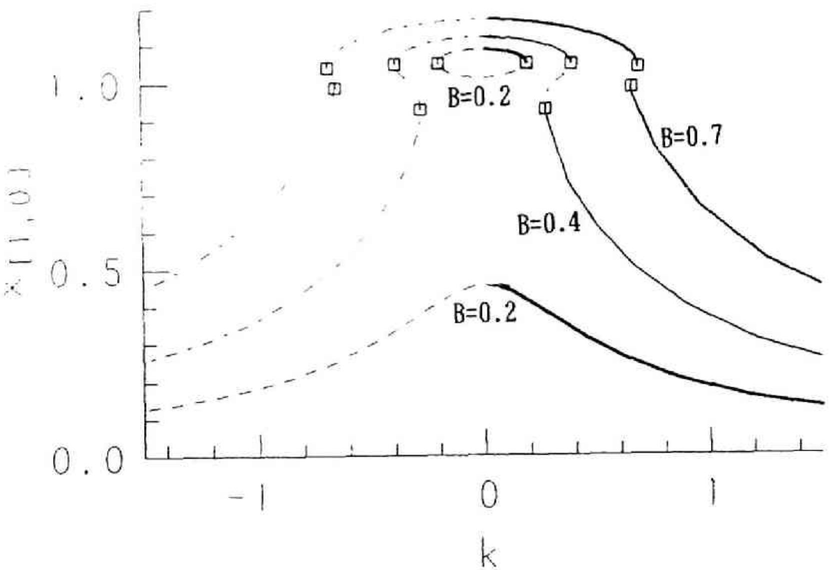
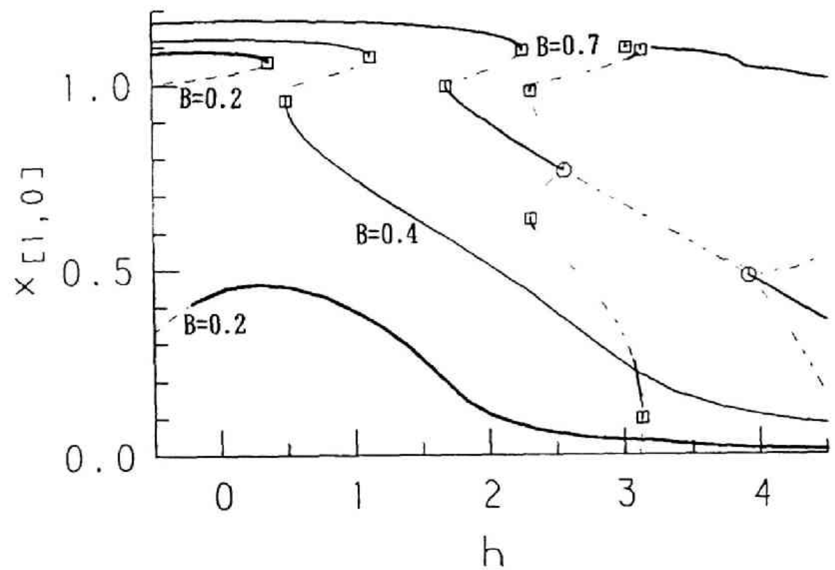


図6.25　kの変化に対する分岐

（並列共振回路，h＝0（心線Ⅰ），ν＝1，B_0＝0）



（a）　k＝0.1（安定判別法①）　↑

（b）　k＝0.1（安定判別法②）　↓

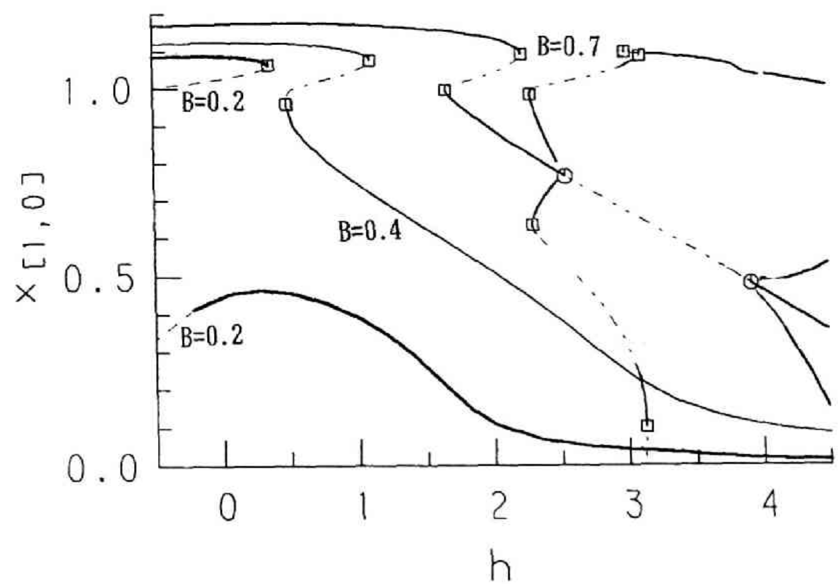
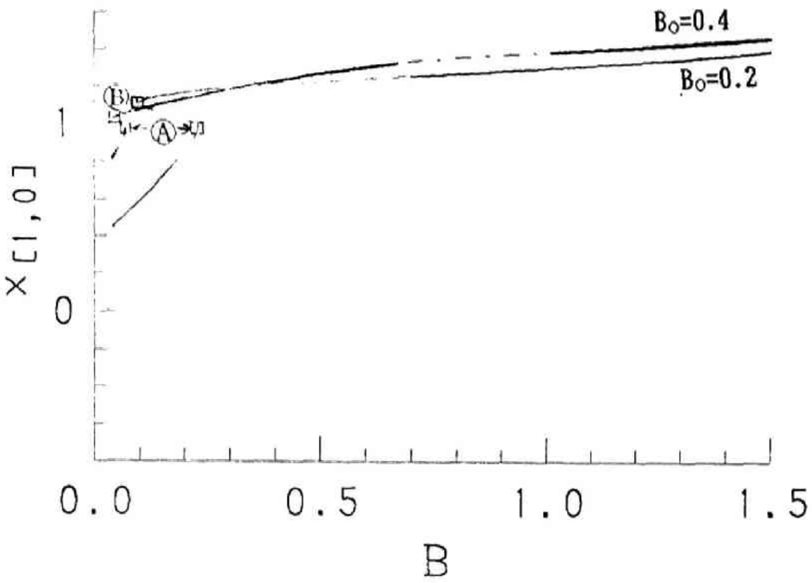


図6.26　hの変化に対する分岐（並列共振回路，心線Ⅰ，ν＝1，B_0＝0）



（a） $x_{[1,0]}$の変化（B_0=0.2, 0.4） ↑

（b） $x_{[2,0]}$の変化（B_0=0.2, 0.4） ↓

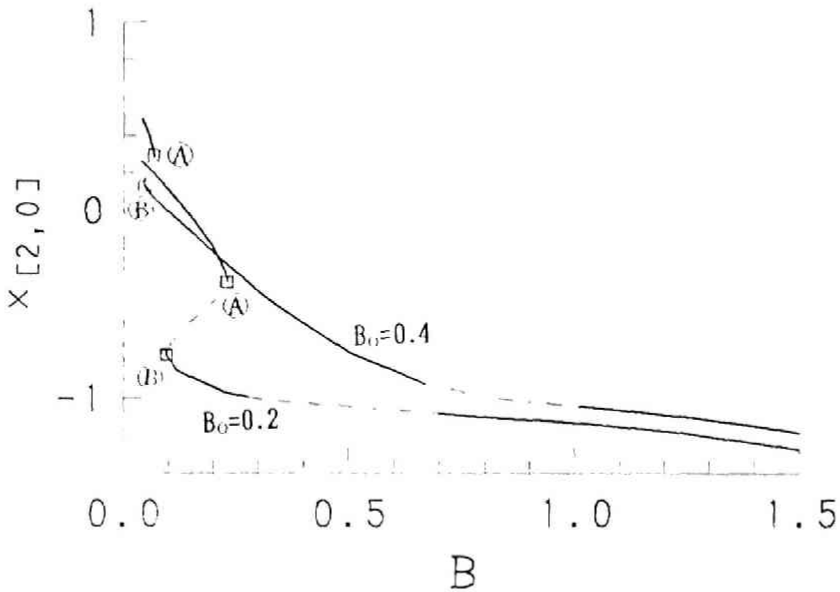
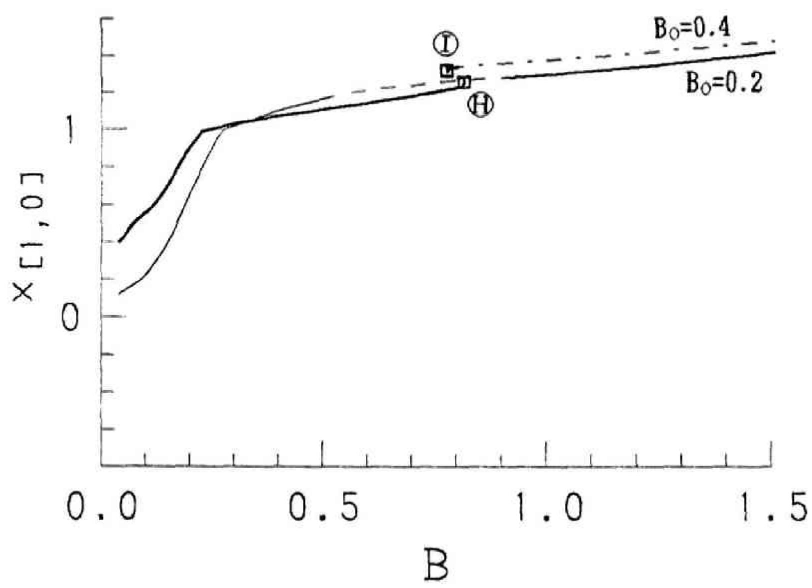


図6.27 振幅特性（並列共振回路，h＝0(心線1)，k＝0.1，ν＝1）



（a） $x_{[1,0]}$の変化（B_0=0.2, 0.4） ↑

（b） $x_{[2,0]}$の変化（B_0=0.2, 0.4） ↓

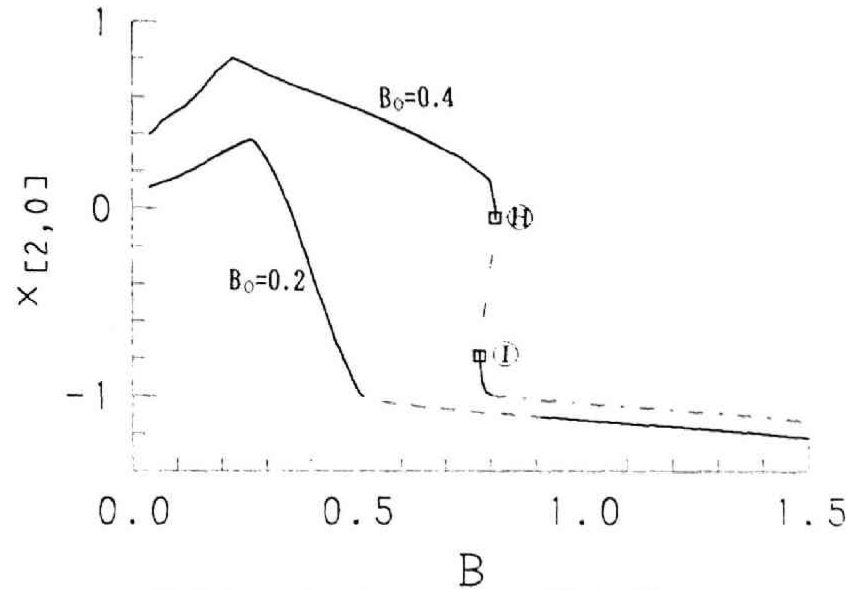
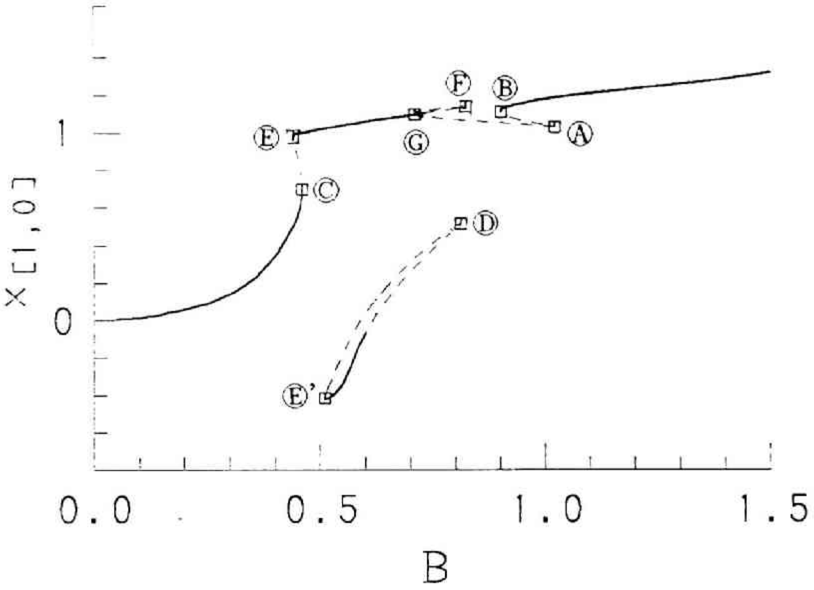
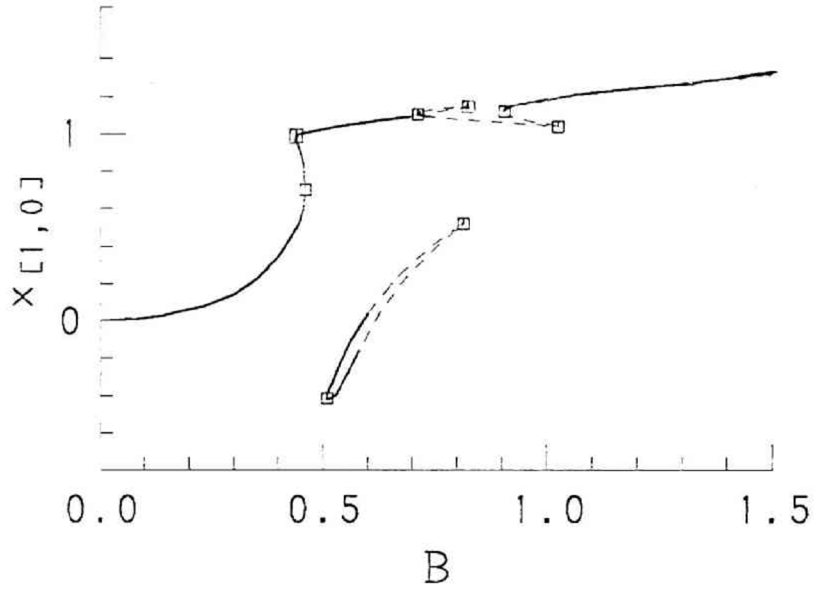


図6.28 振幅特性（並列共振回路，h＝1.5(心線1)，k＝0.1，ν＝1）



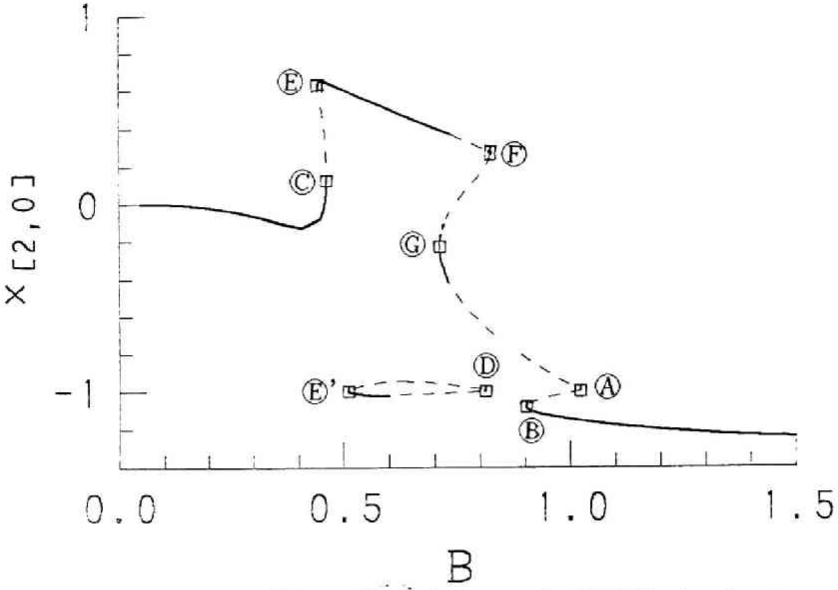


（a） $x_{[1,0]}$の変化（$B_0=0.05$，安定判別法①）　↑

（b） $x_{[2,0]}$の変化（$B_0=0.05$，安定判別法①）　↓

（c） $x_{[1,0]}$の変化（$B_0=0.05$，安定判別法②）　↑

（d） $x_{[2,0]}$の変化（$B_0=0.05$，安定判別法②）　↓



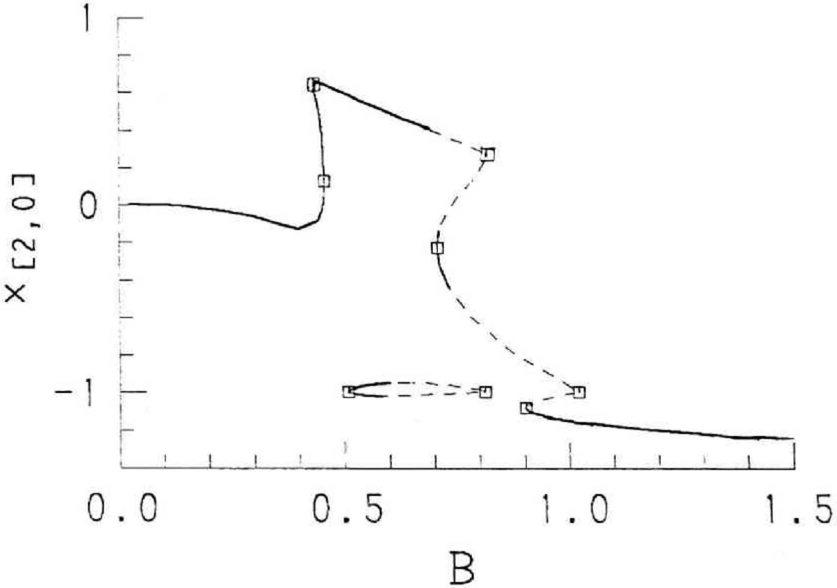
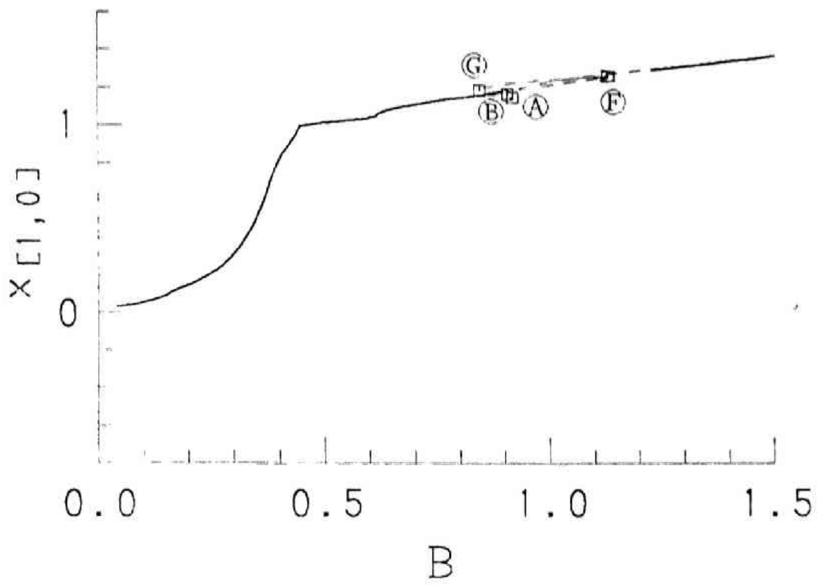
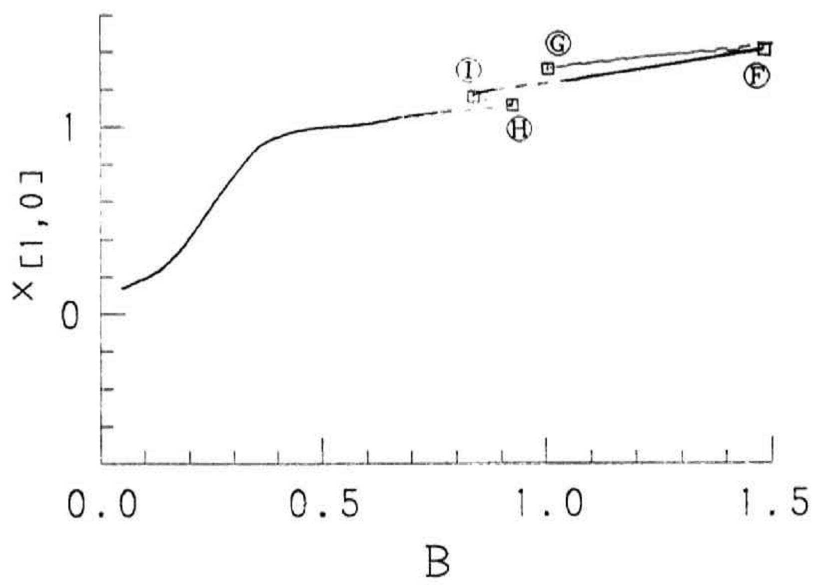


図6.29　振幅特性（並列共振回路，$h=3$(心線特性Ⅰ)，$k=0.1$，$\nu=1$）



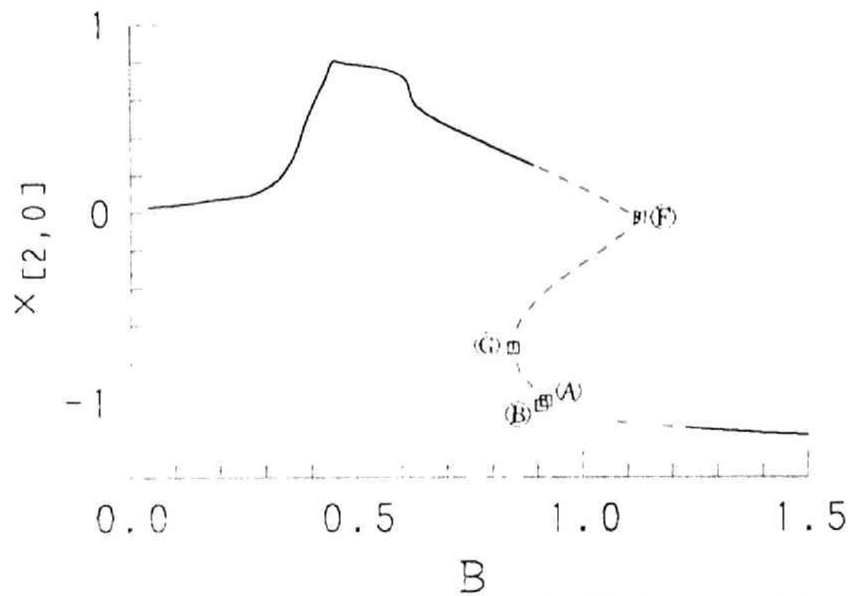


(e) $x_{[1,0]}$の変化 (B_0=0.2) ↑

(f) $x_{[2,0]}$の変化 (B_0=0.2) ↓

(g) $x_{[1,0]}$の変化 (B_0=0.4) ↑

(h) $x_{[2,0]}$の変化 (B_0=0.4) ↓



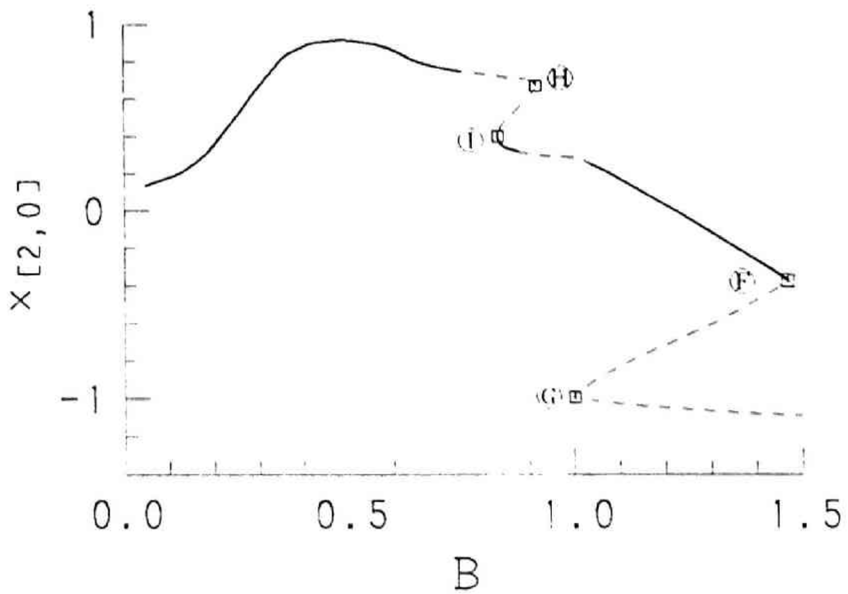


図6.20 振幅特性（並列共振回路 h=3(心線特性I), k=0.1, ν=1)

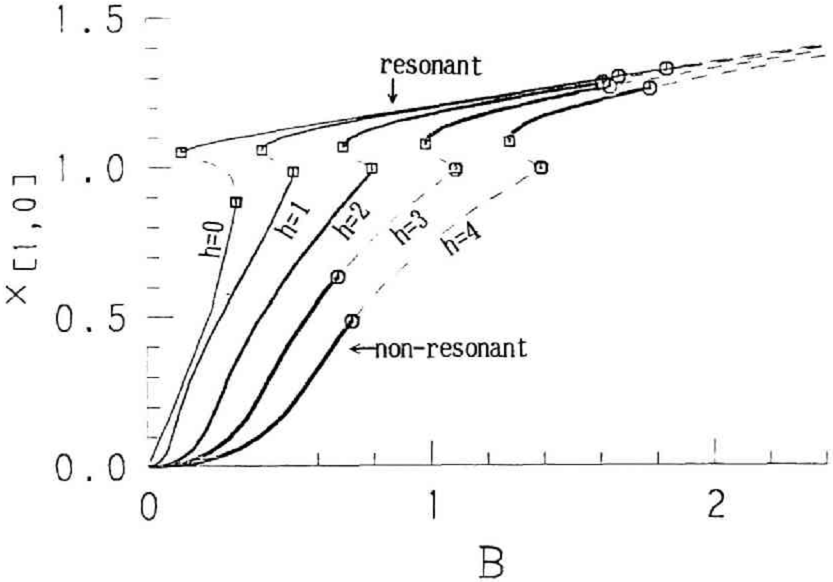


図6.30　振幅特性（直列共振回路，心線特性Ｉ，k＝0.1，ν＝1）

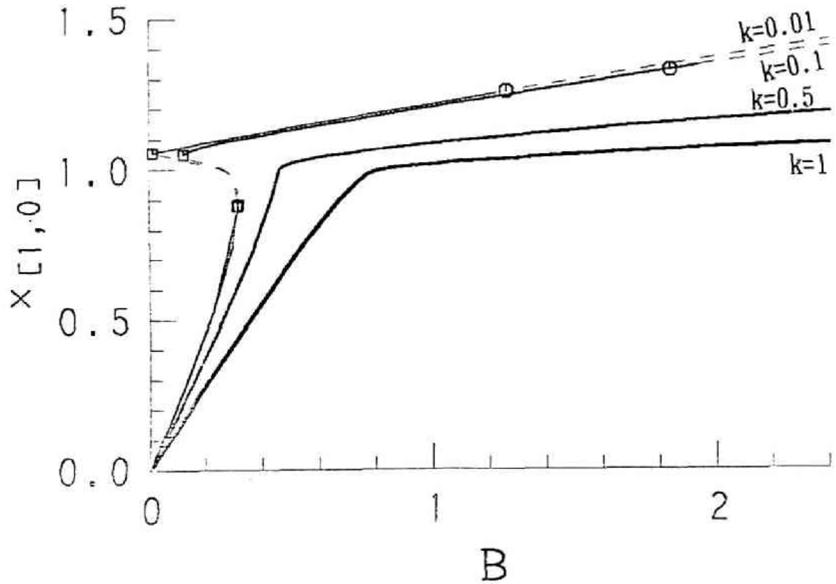


図6.31　振幅特性（直列共振回路，h＝0(心線特性Ｉ)，ν＝1）

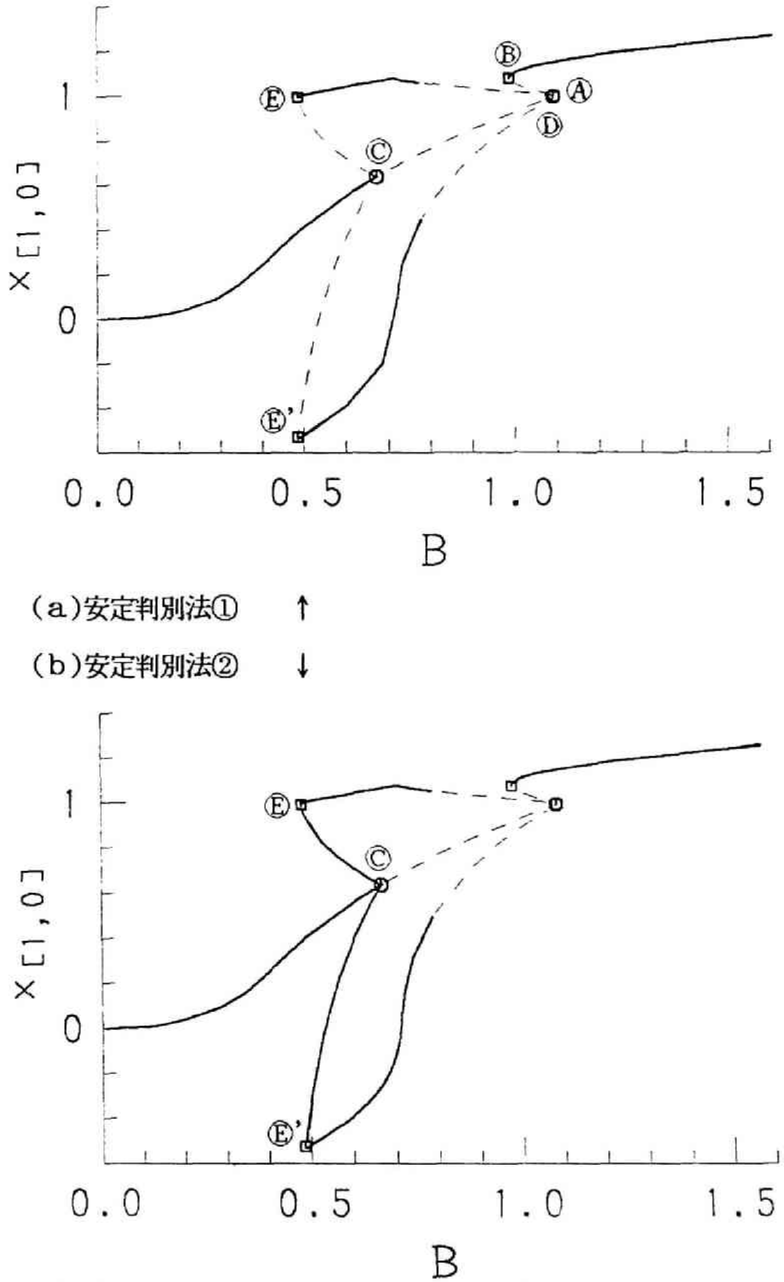
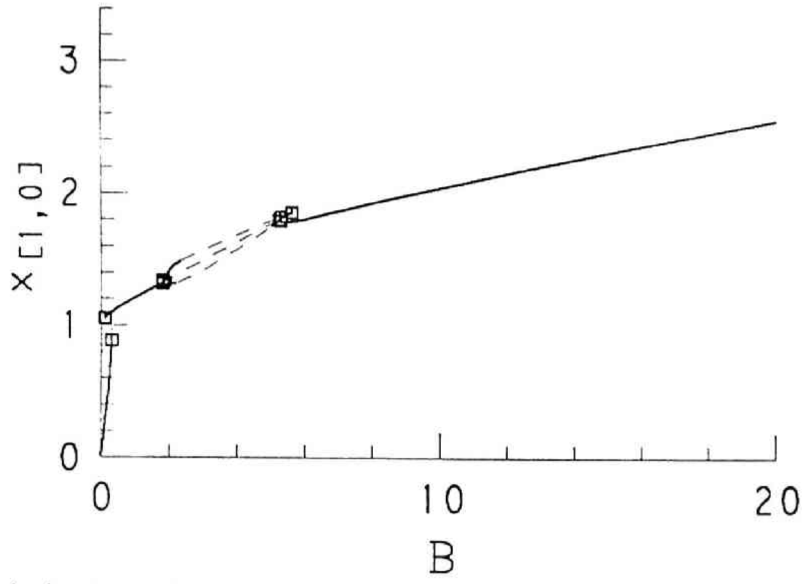
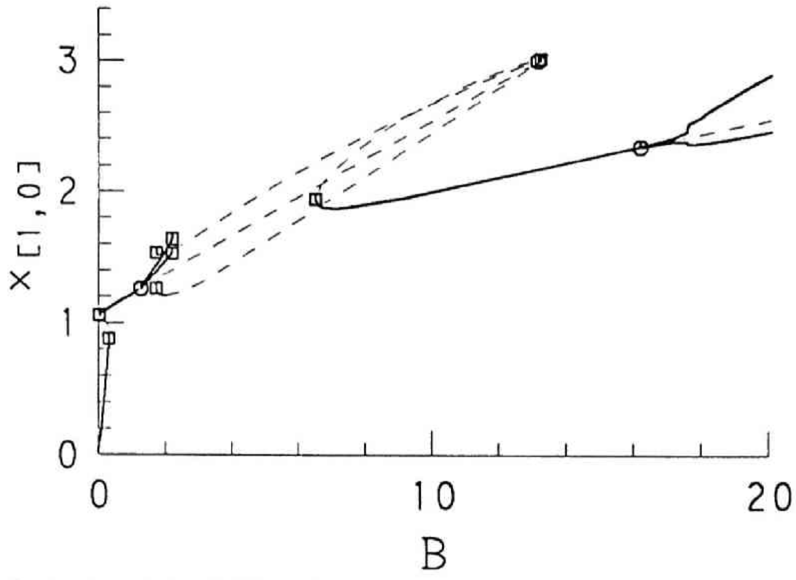


図6.32　振幅特性（直列共振回路，h＝3(心線特性Ｉ)，k＝0.1，ν＝1）



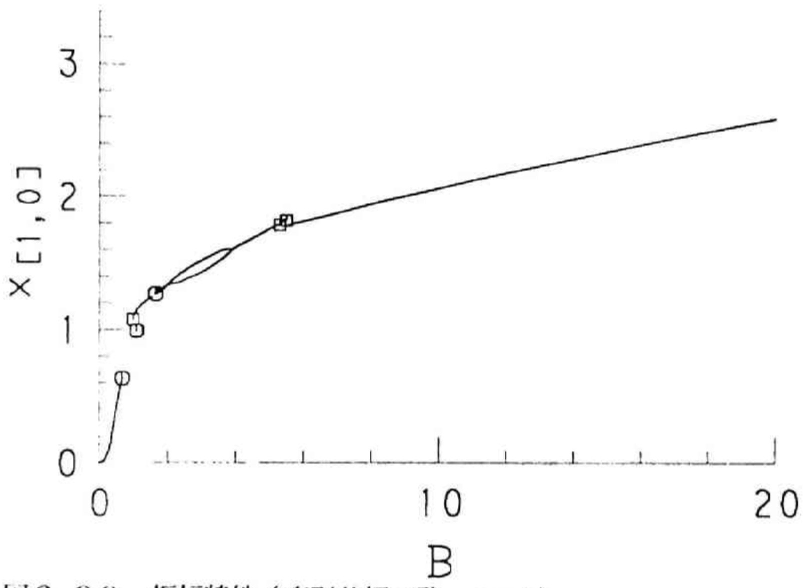


(a)　h＝0（心線特性Ｉ），k＝0.1　↑

(b)　h＝3（心線特性Ｉ），k＝0.1　↓

(c)　h＝0（心線特性Ｉ），k＝0.02　↑

(d)　h＝3（心線特性Ｉ），k＝0.02　↓



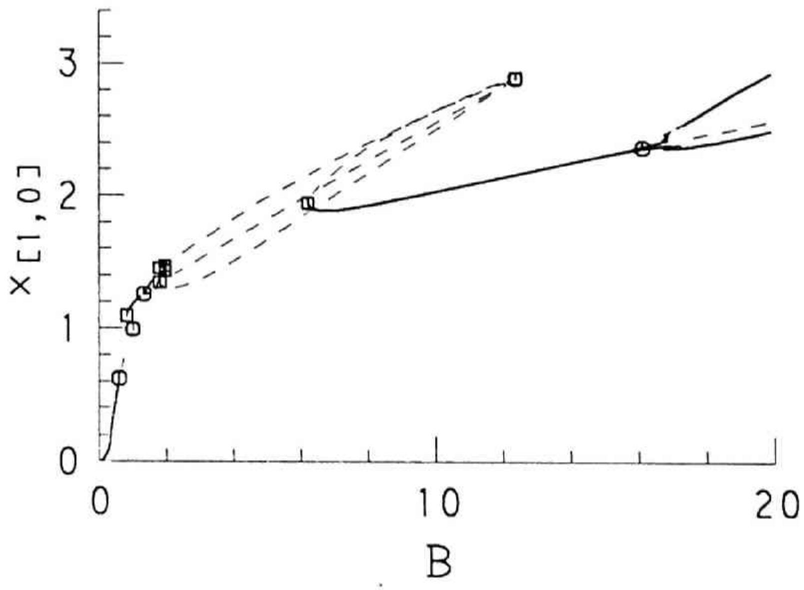


図6.33　振幅特性（直列共振回路，$\nu=1$）

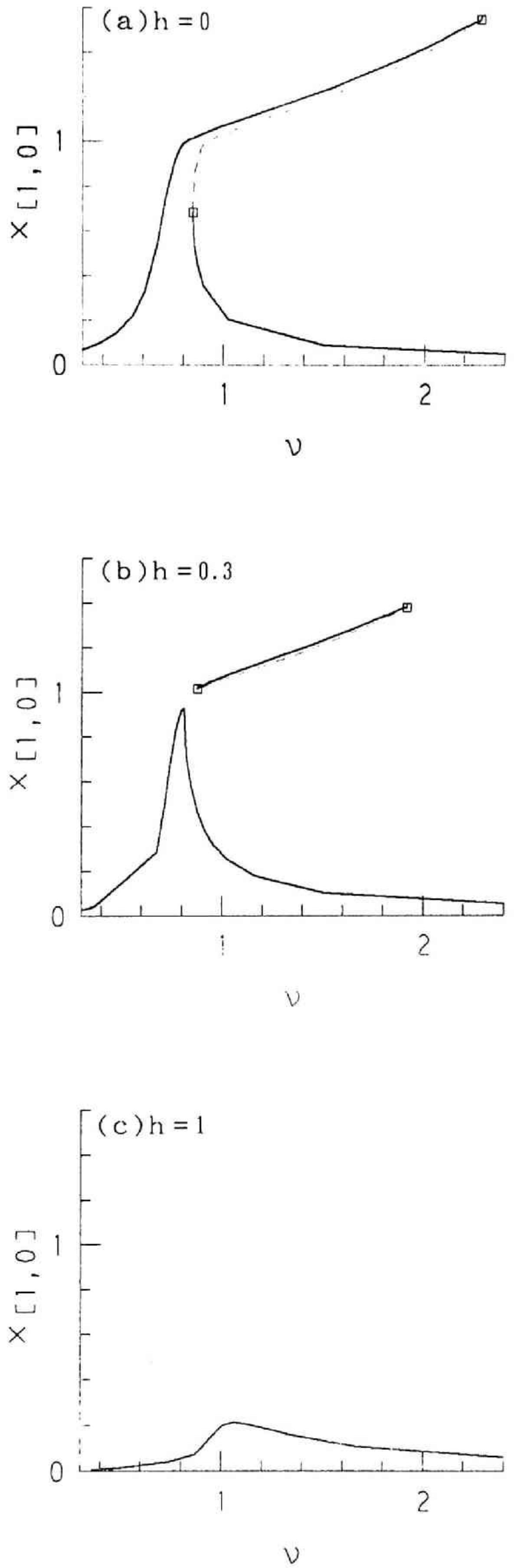


図6.3 4　角周波数特性（直列共振回路）
（心線特性Ⅰ, B = 0.1, k = 0.01）

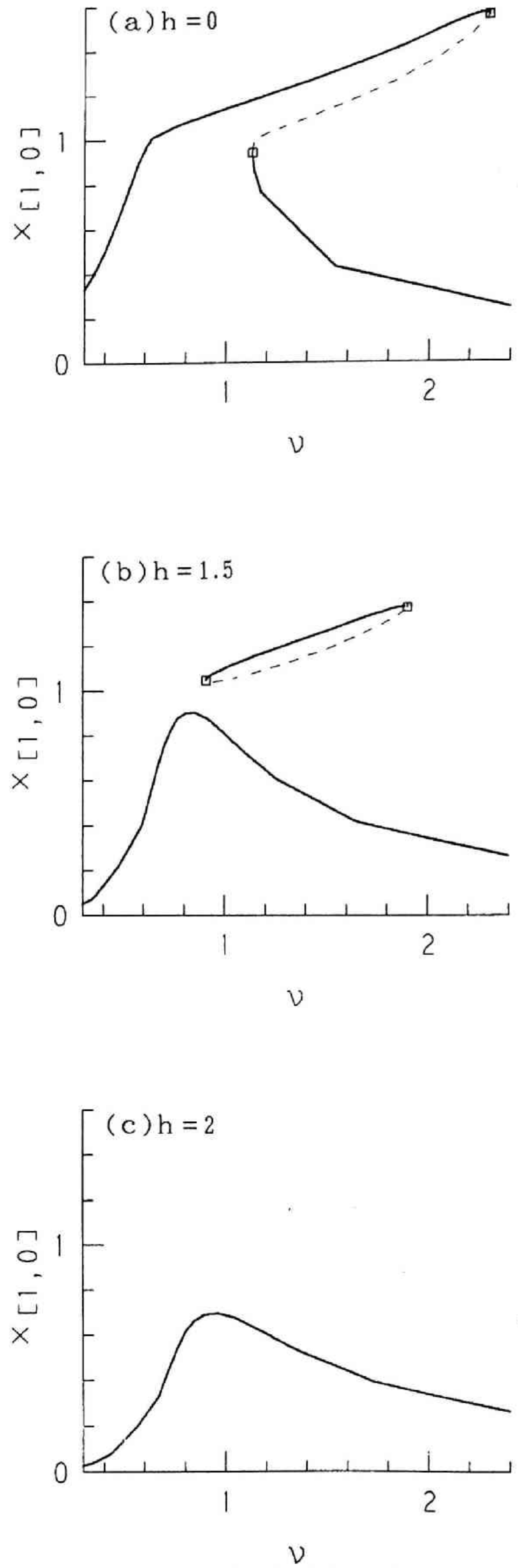
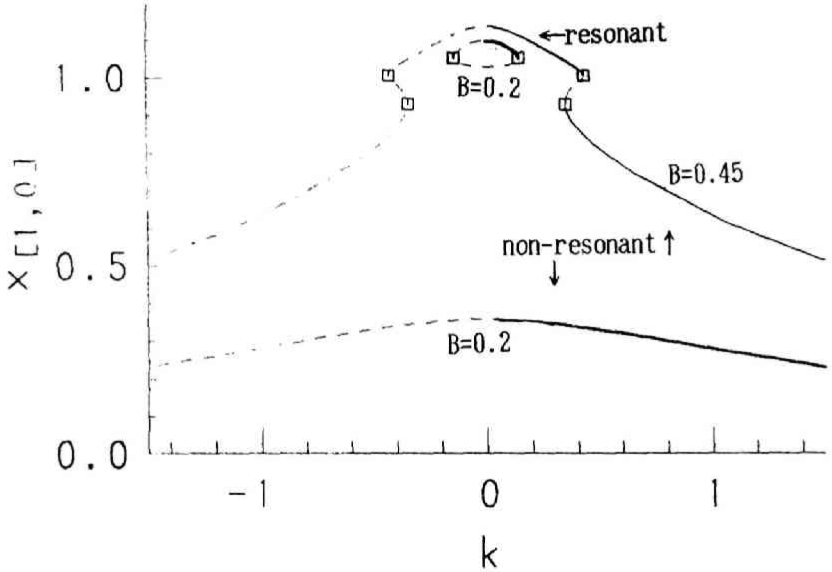


図6.3 5　角周波数特性（直列共振回路）
（心線特性Ⅰ, B = 0.5, k = 0.05）



(a) h = 0 (心線特性Ⅱ) ↑

(b) h = 1 ↓

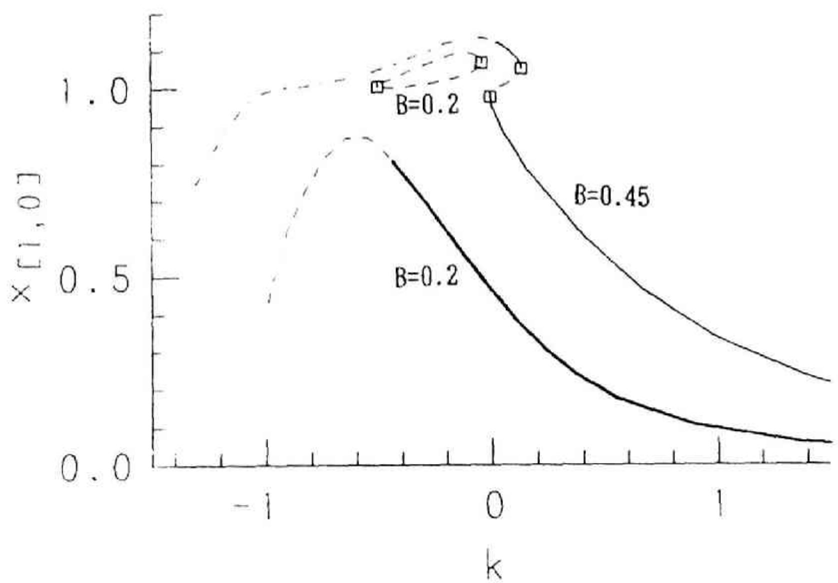
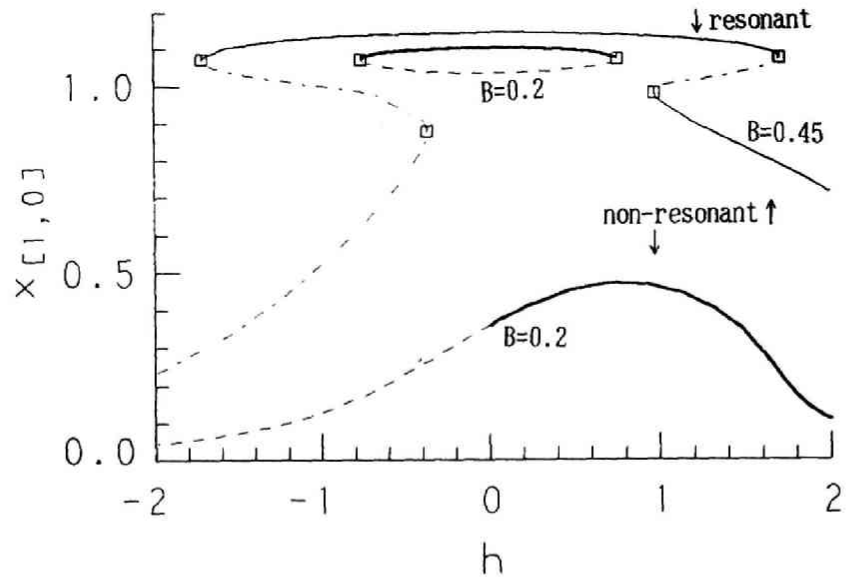


図6.36 kの変化に対する分岐 (直列共振回路, $\nu=1$)



(a) k = 0.0001 ↑

(b) k = 0.2 ↓

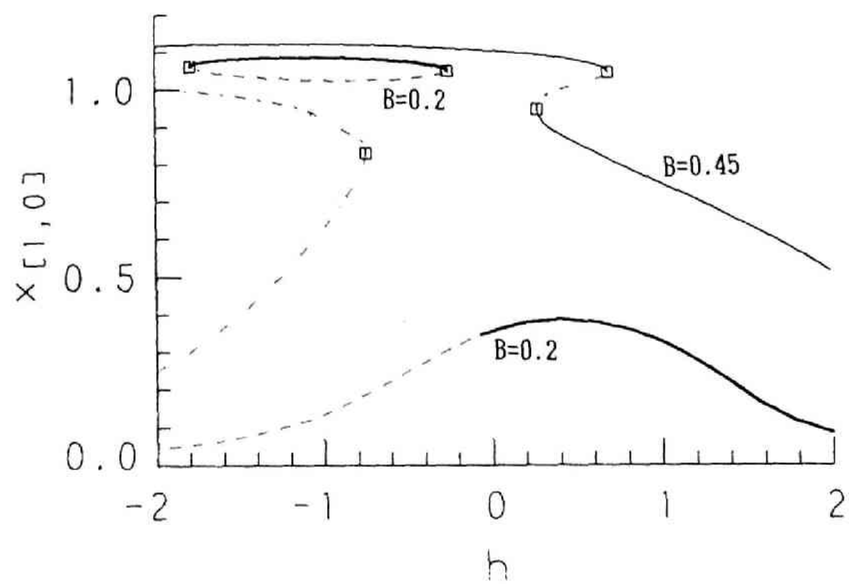


図6.37 hの変化に対する分岐 (直列共振回路, 心線Ⅱ, $\nu=1$)

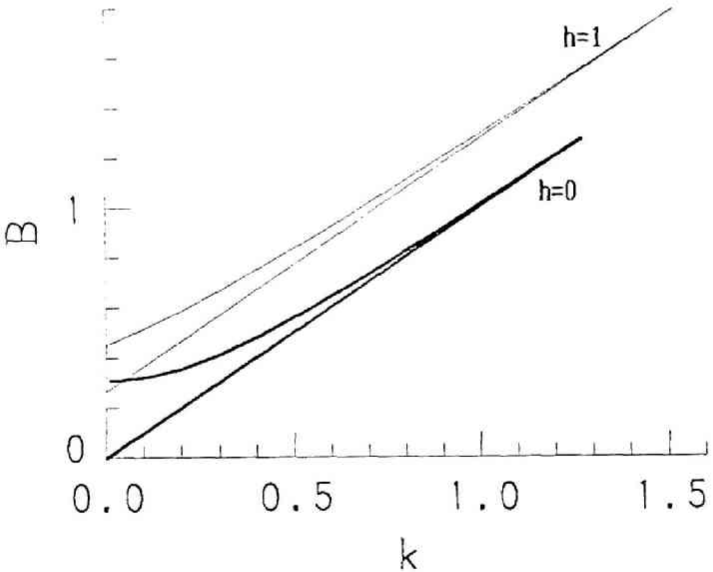


図６.３８　単純極限点の集合（並列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$，$B_0=0$）

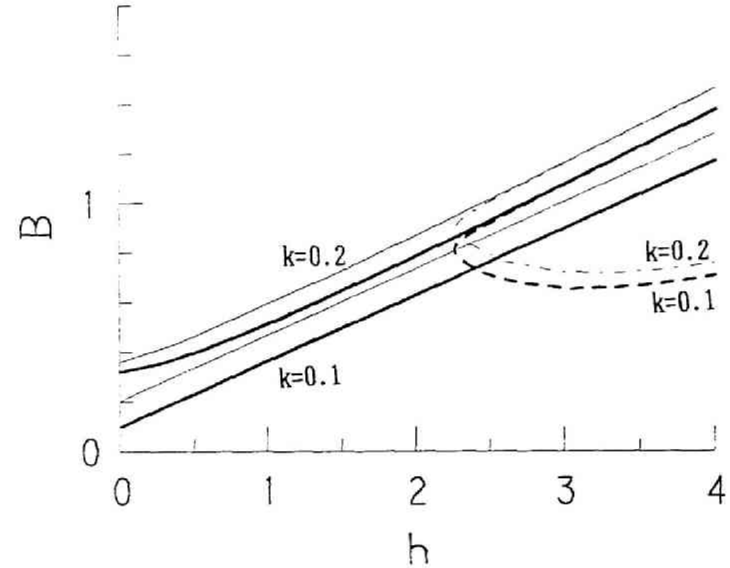


図６.４０　単純極限点の集合（実線），単純分岐点の集合（破線）
（並列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$，$B_0=0$）

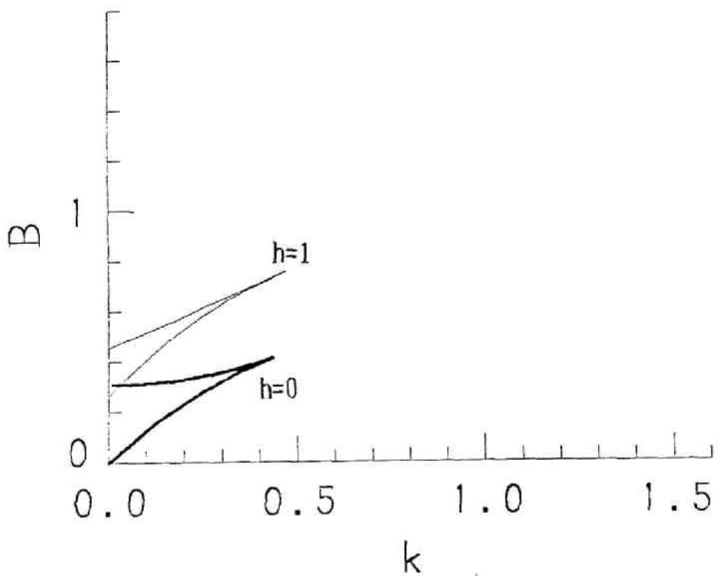


図６.３９　単純極限点の集合（直列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$）

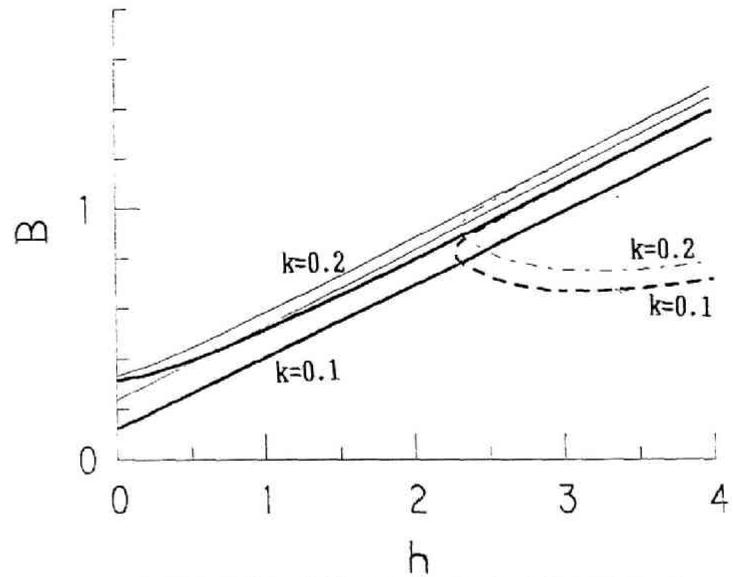


図６.４１　単純極限点，単純分岐点の集合（直列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$）

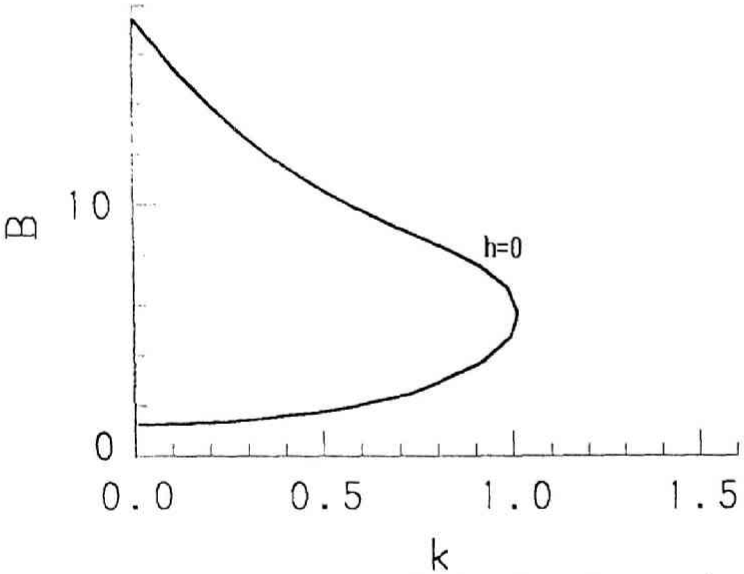


図6.42　単純分岐点の集合（並列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$，$B_0=0$）

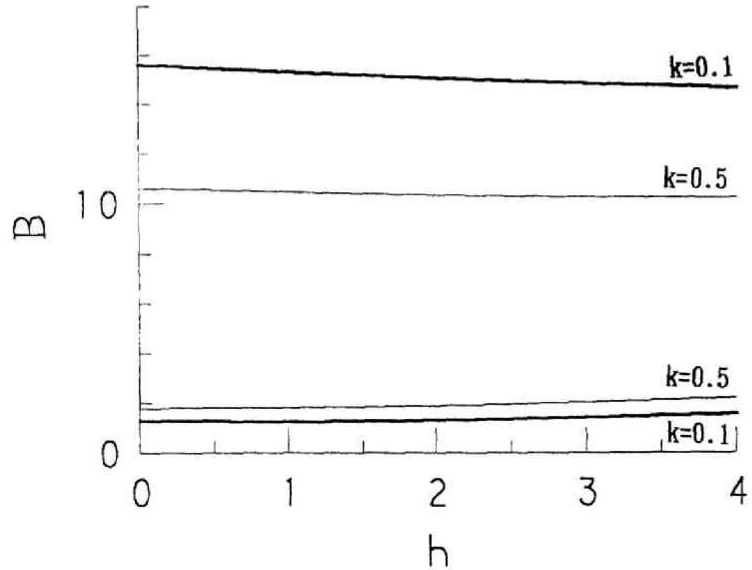


図6.44　単純分岐点の集合（並列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$，$B_0=0$）

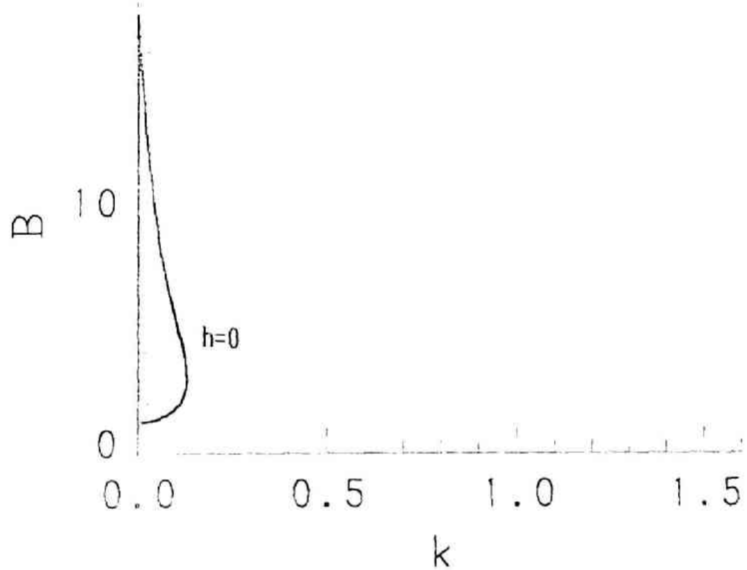


図6.43　単純分岐点の集合（直列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$）

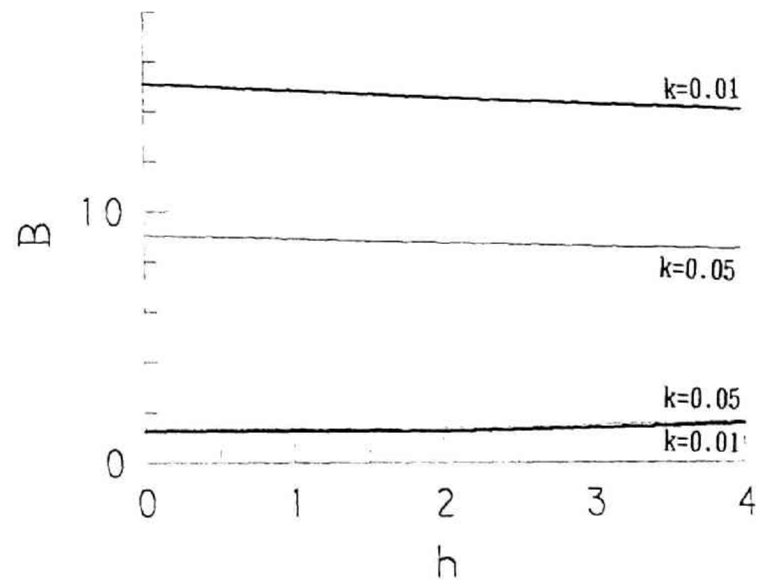
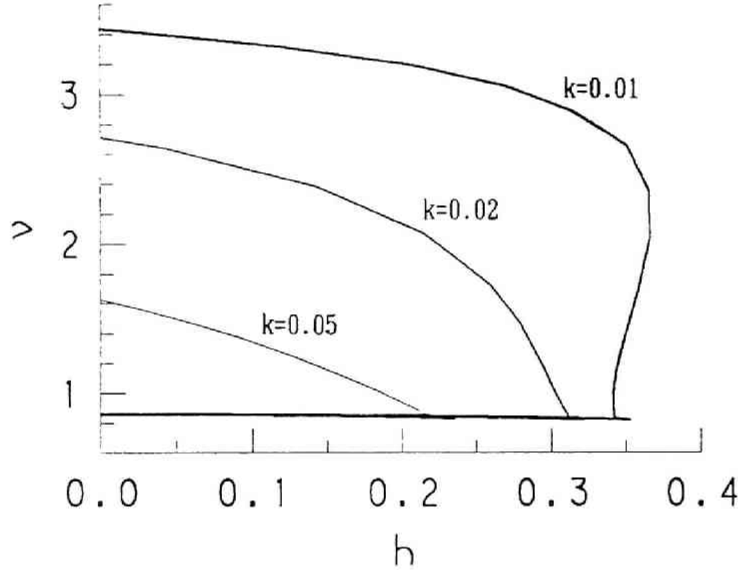


図6.45　単純分岐点の集合（直列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$）



（a） B＝0.1 ↑

（b） B＝0.5 ↓

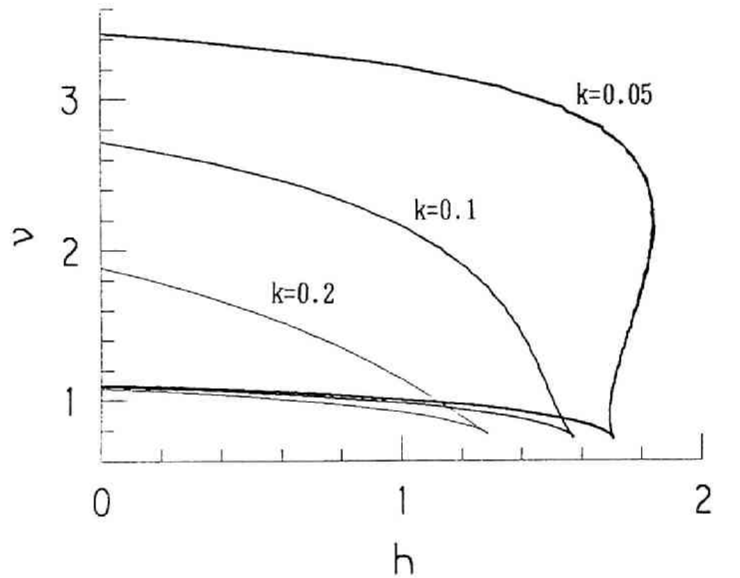
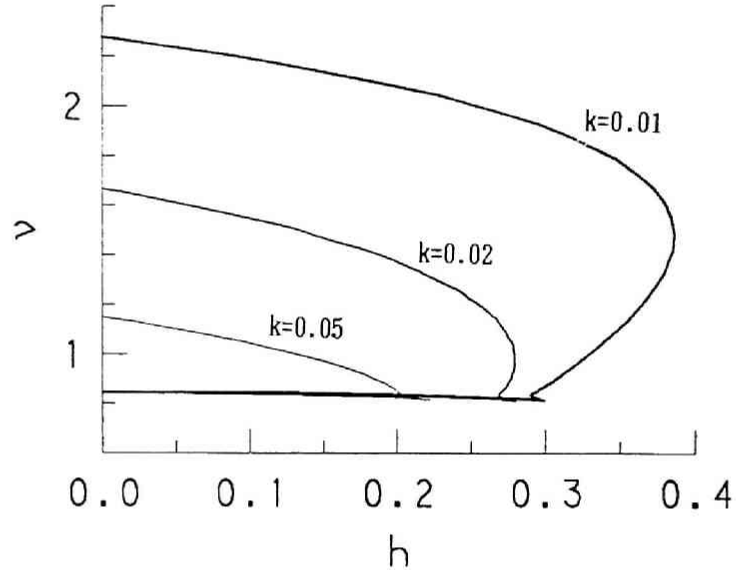


図6．46　単純極限点の集合（並列共振回路，心線Ｉ，$B_0=0$）



（a） B＝0.1 ↑

（b） B＝0.5 ↓

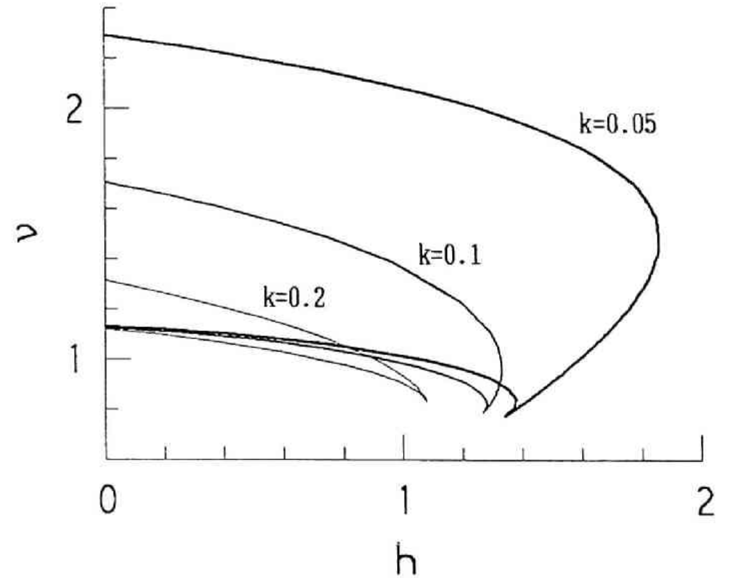


図6．47　単純極限点の集合（直列共振回路，心線Ｉ，$\nu=1$）

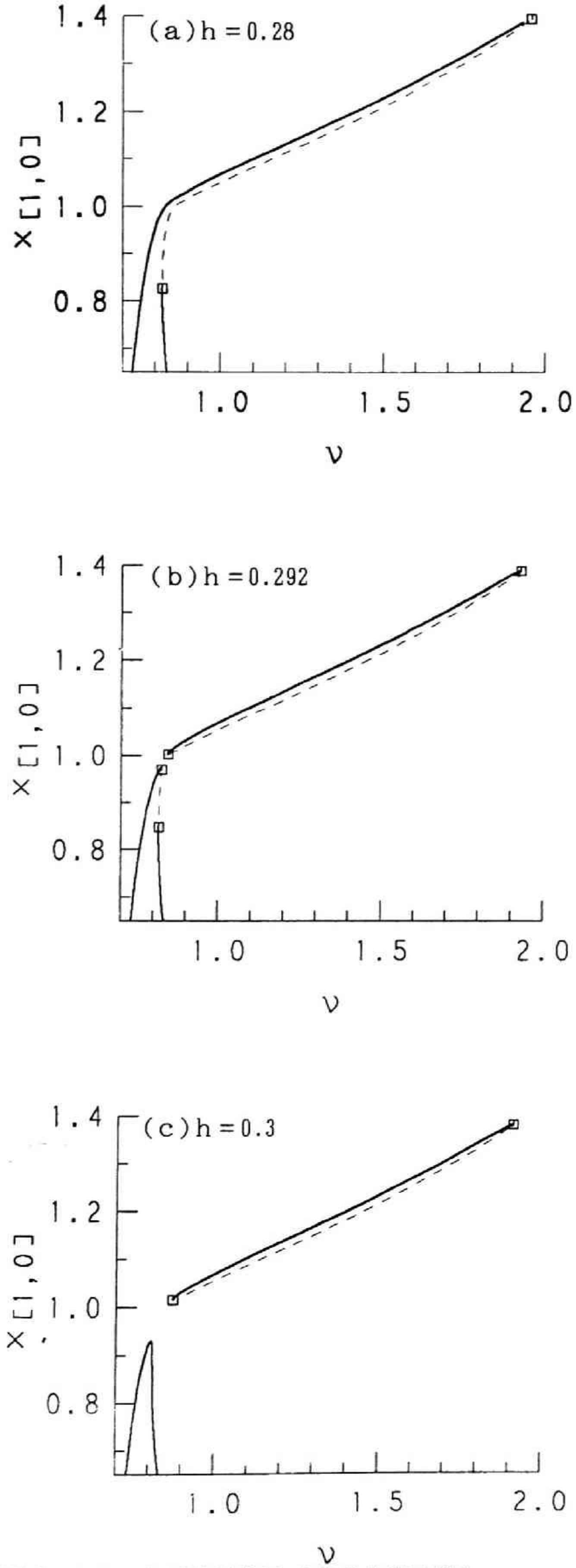


図6.48　角周波数特性（直列共振回路）
（心線特性Ⅰ，B = 0.1，k = 0.01）

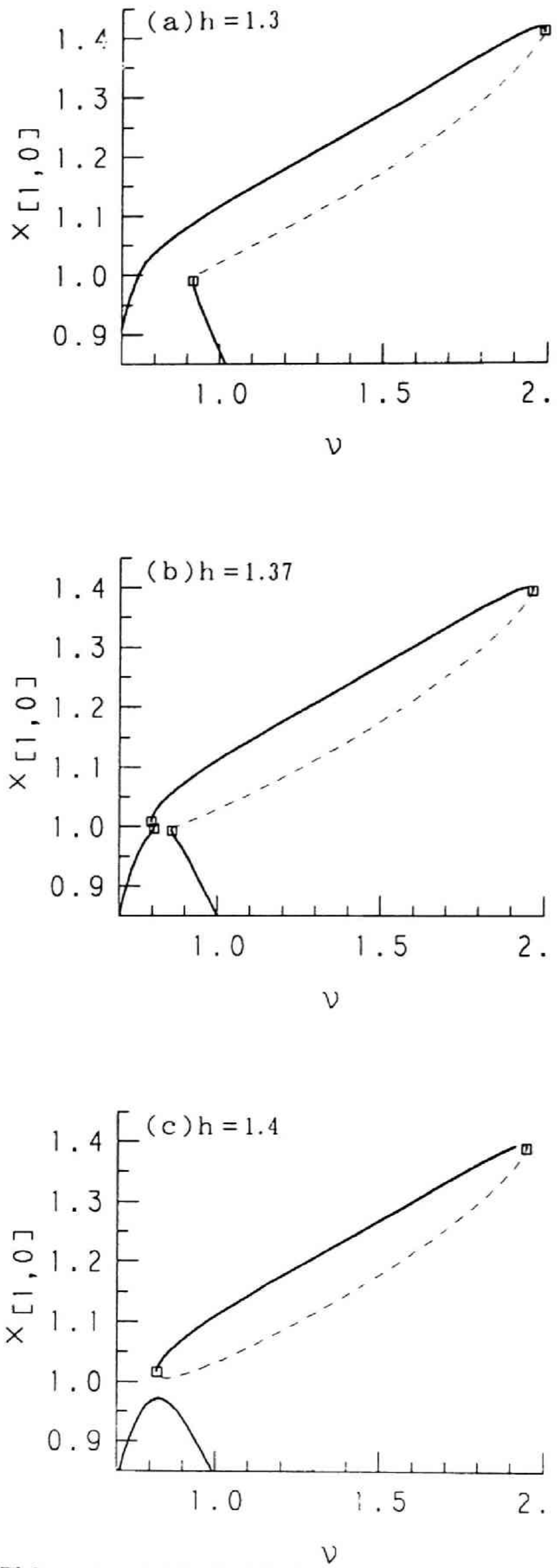
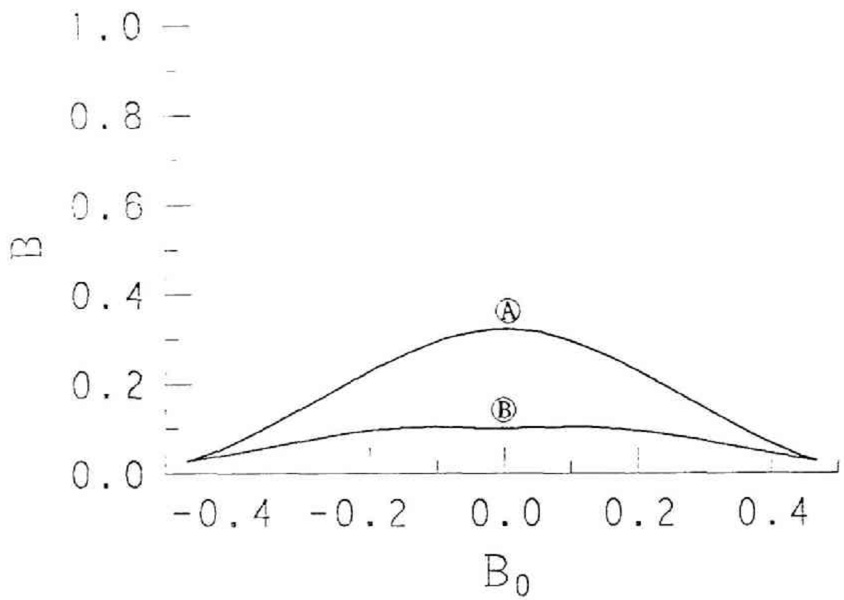


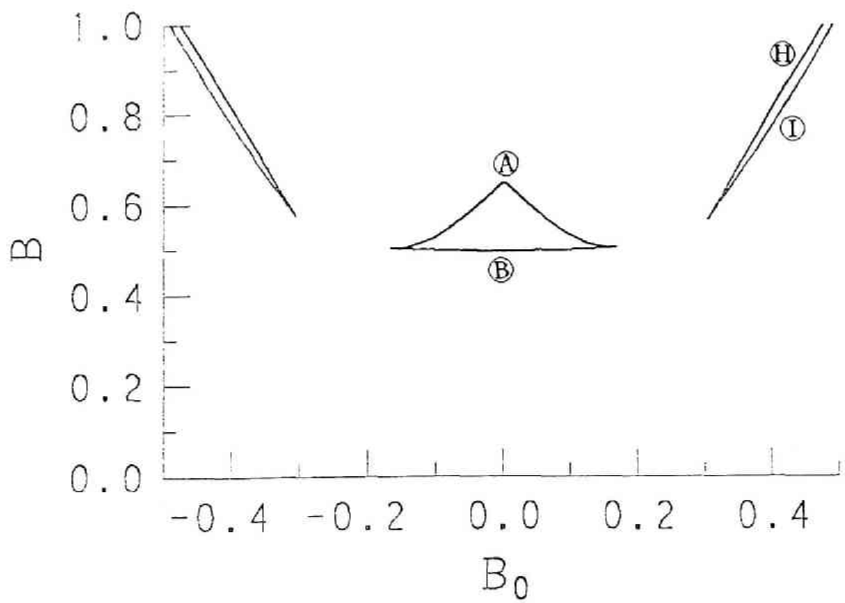
図6.49　角周波数特性（直列共振回路）
（心線特性Ⅰ，B = 0.5，k = 0.05）

図6.50　分岐集合（並列共振回路，k＝0.1，ν＝1）

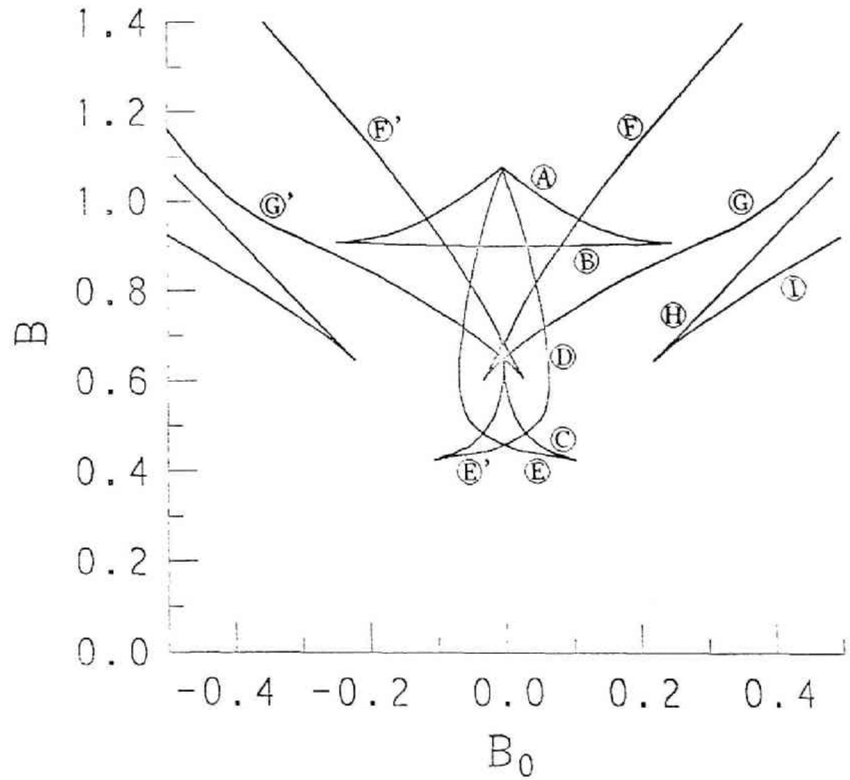


（a）　h＝0（心線特性Ｉ）　↑

（b）　h＝1.5（心線特性Ｉ）　↓



（c）　h＝3（心線特性Ｉ）　↓



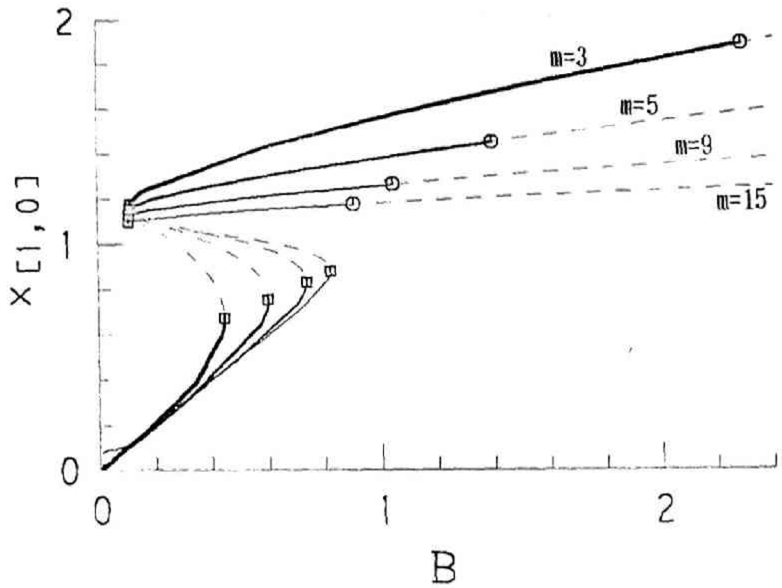


図6.51　振幅特性
（並列共振回路，ξ(x)＝x^m，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）

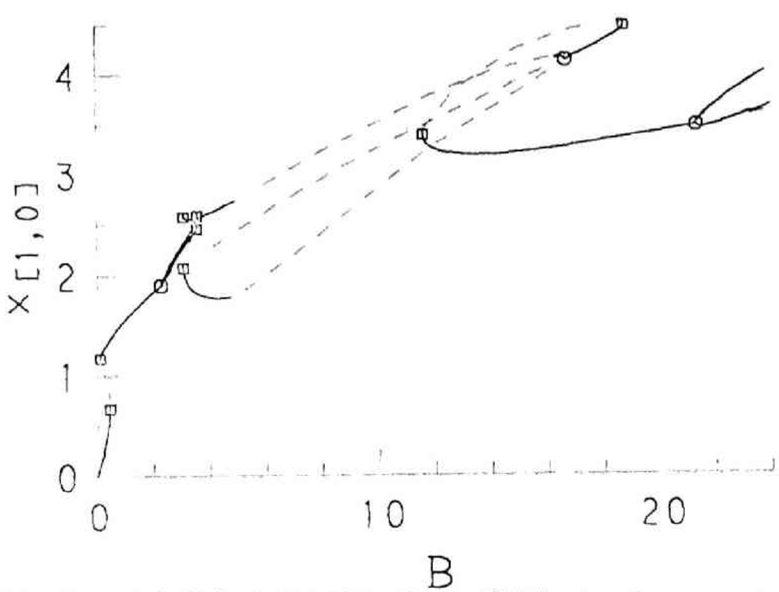


図6.52　振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）

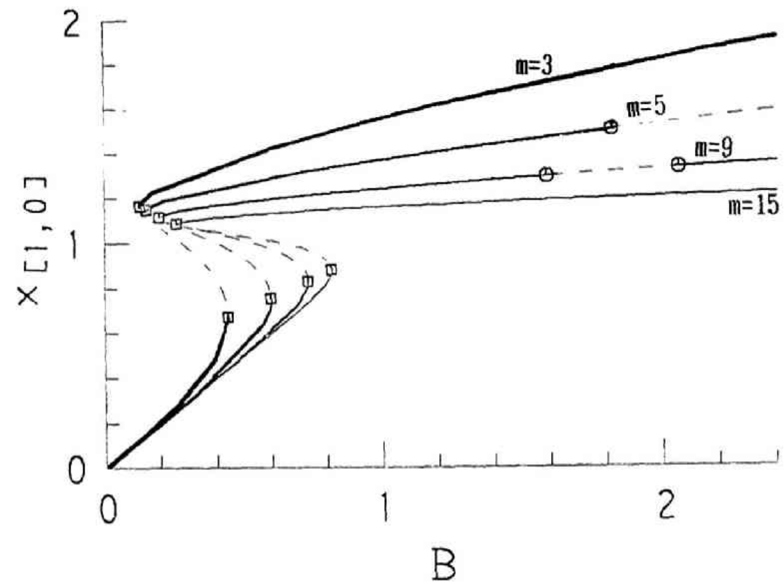


図6.53　振幅特性（直列共振回路，ξ(x)＝x^m，k＝0.1，ν＝1）

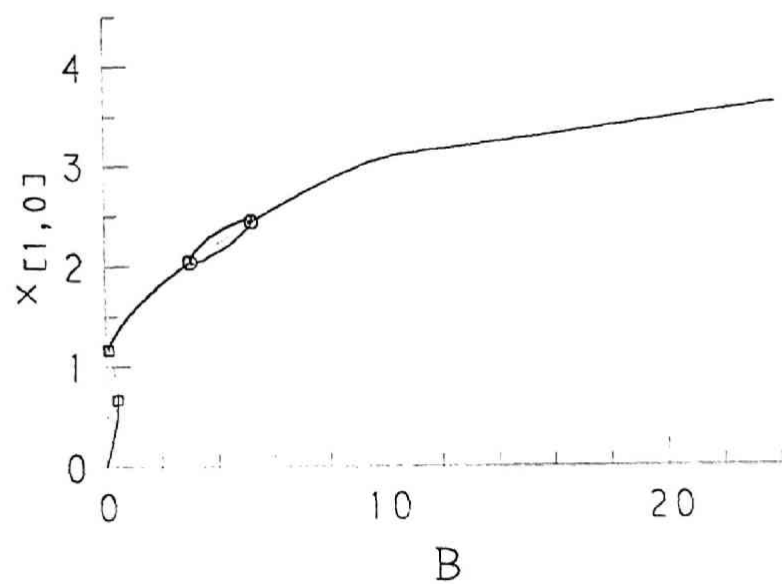


図6.54　振幅特性（直列共振回路，3乗特性，k＝0.1，ν＝1）

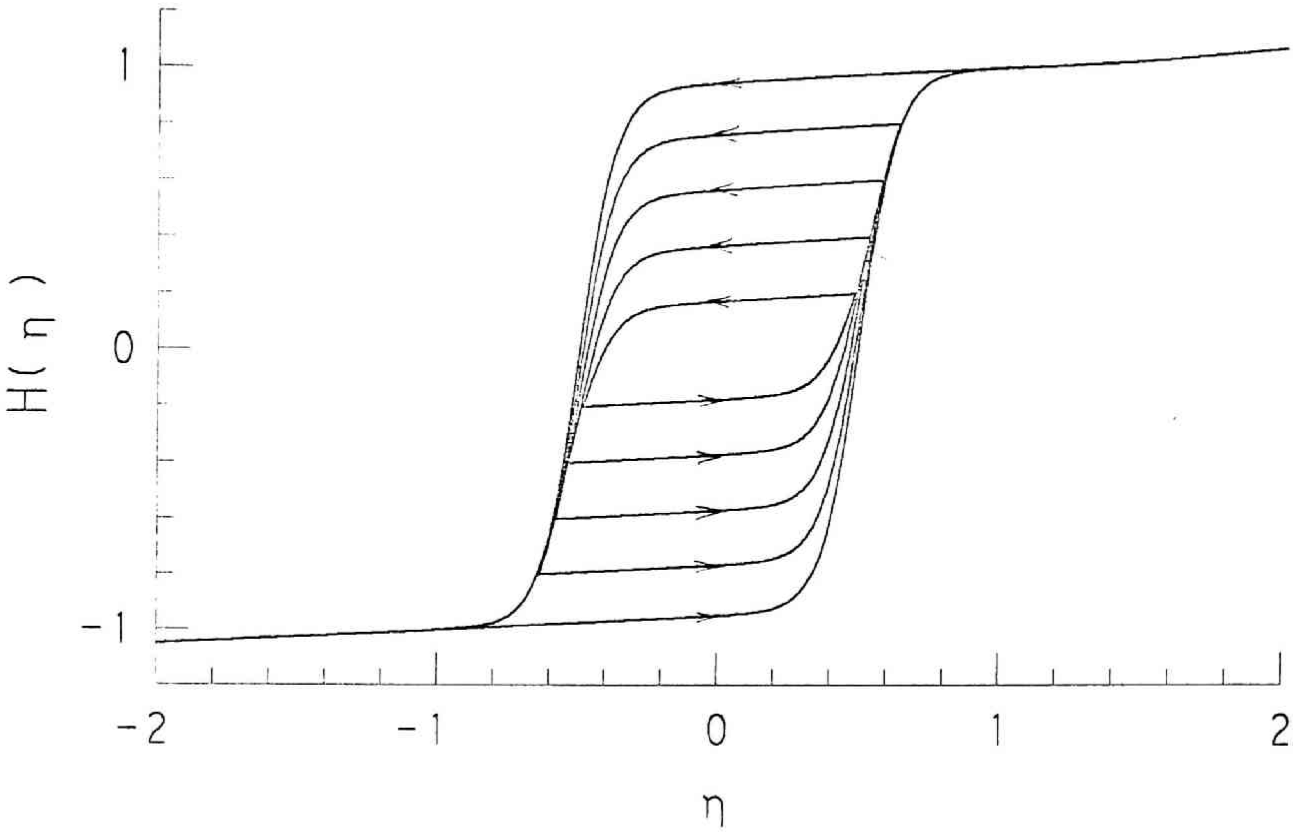


図６．５５　Ｈ（η）の特性（式(6.26),(6.29)の分布関数を用いる場合）

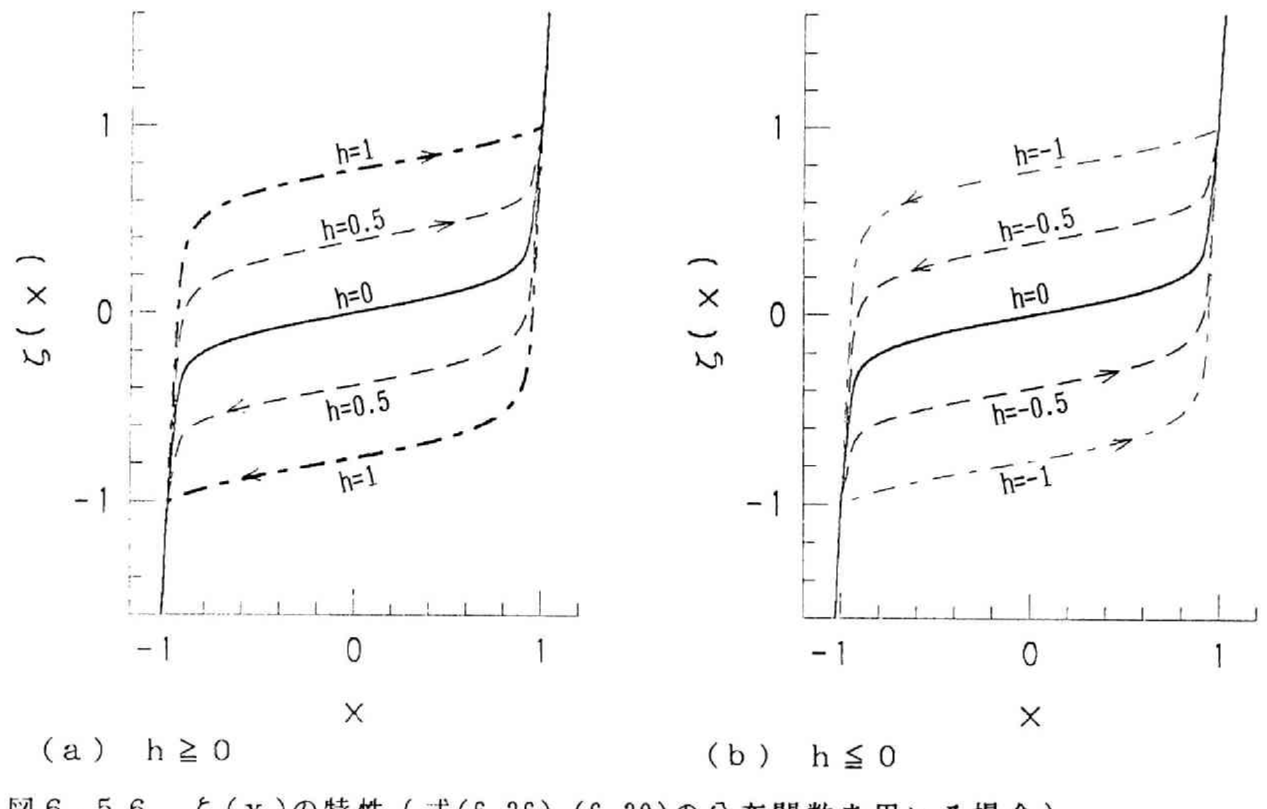


図６．５６　ζ（ｘ）の特性（式(6.26),(6.29)の分布関数を用いる場合）

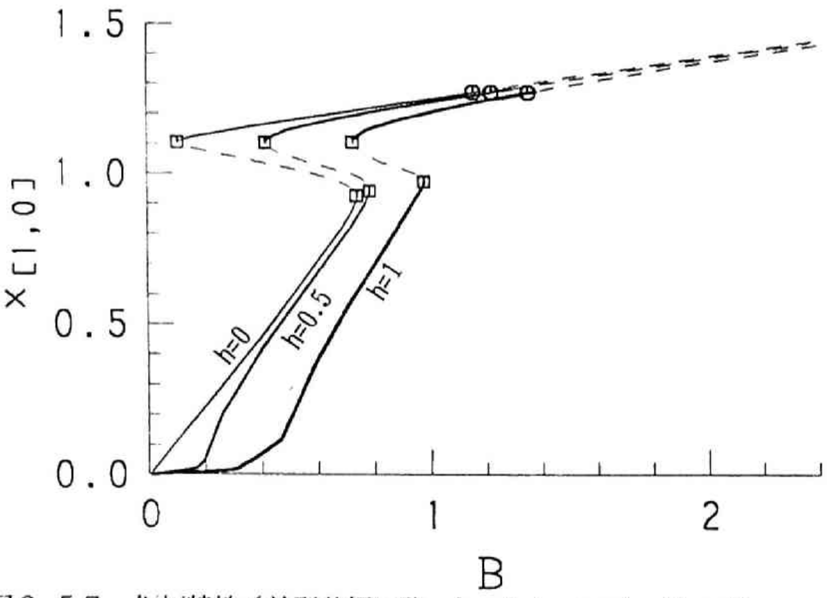


図6.５７　振幅特性（並列共振回路，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）

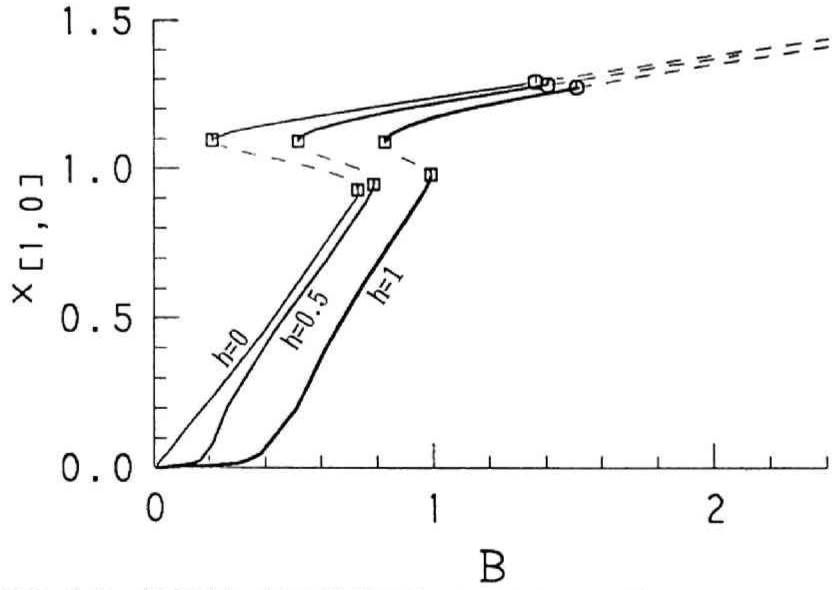


図6.５９　振幅特性（直列共振回路，k＝0.1，ν＝1）

↑↓　（ヒステリシス特性は図6.５６の特性（式(6.26),(6.29)の分布関数））　↑↓

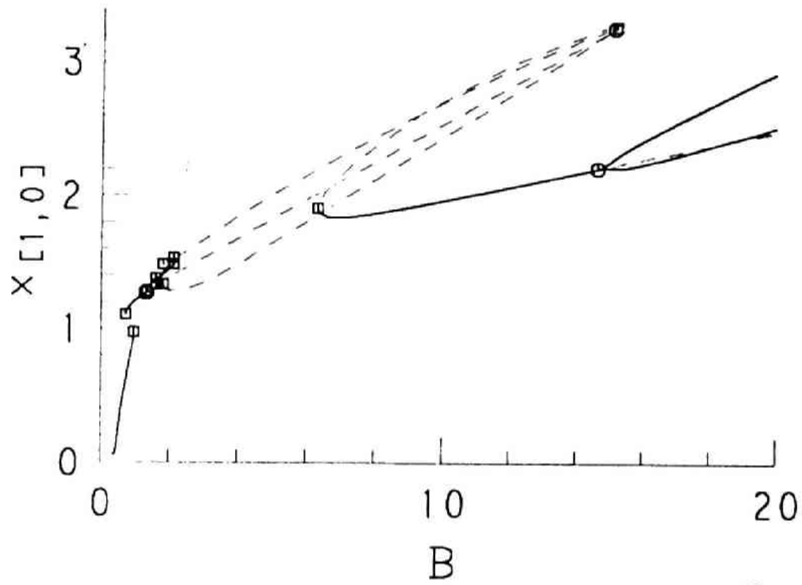


図6.５８　振幅特性（並列共振回路，h＝1，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）

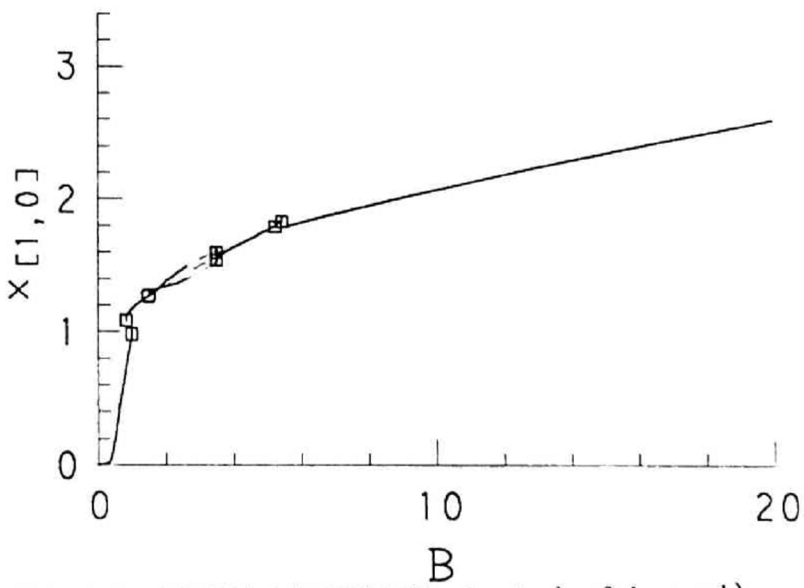
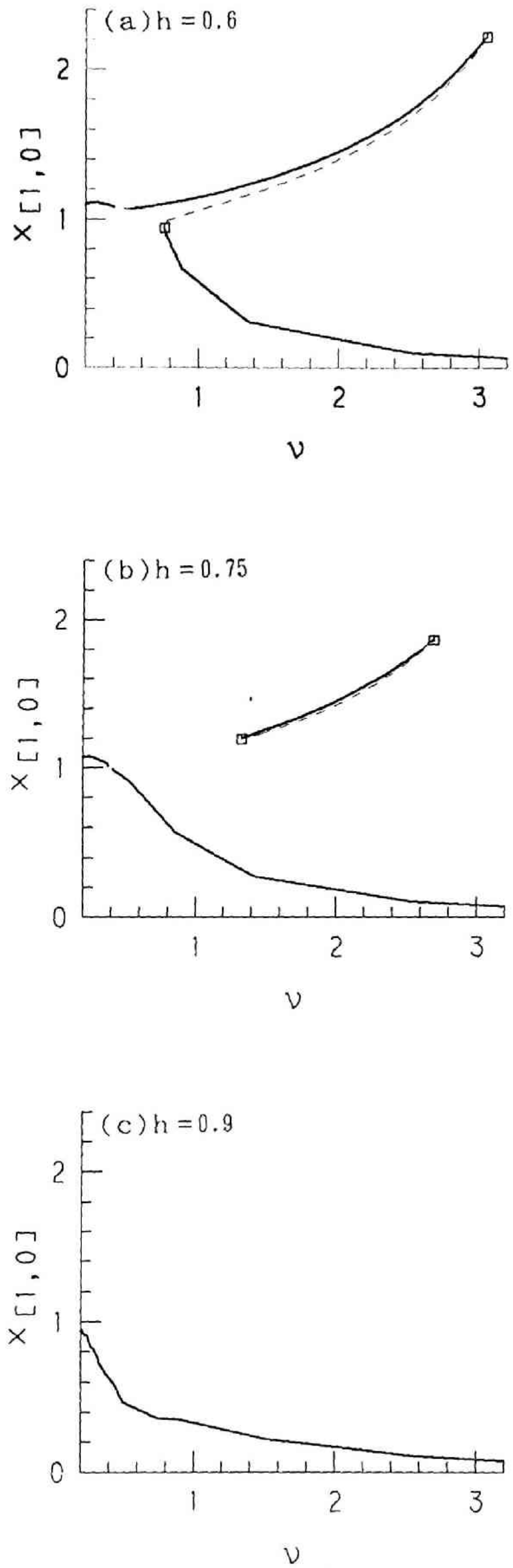


図6.６０　振幅特性（直列共振回路，h＝1，k＝0.1，ν＝1）



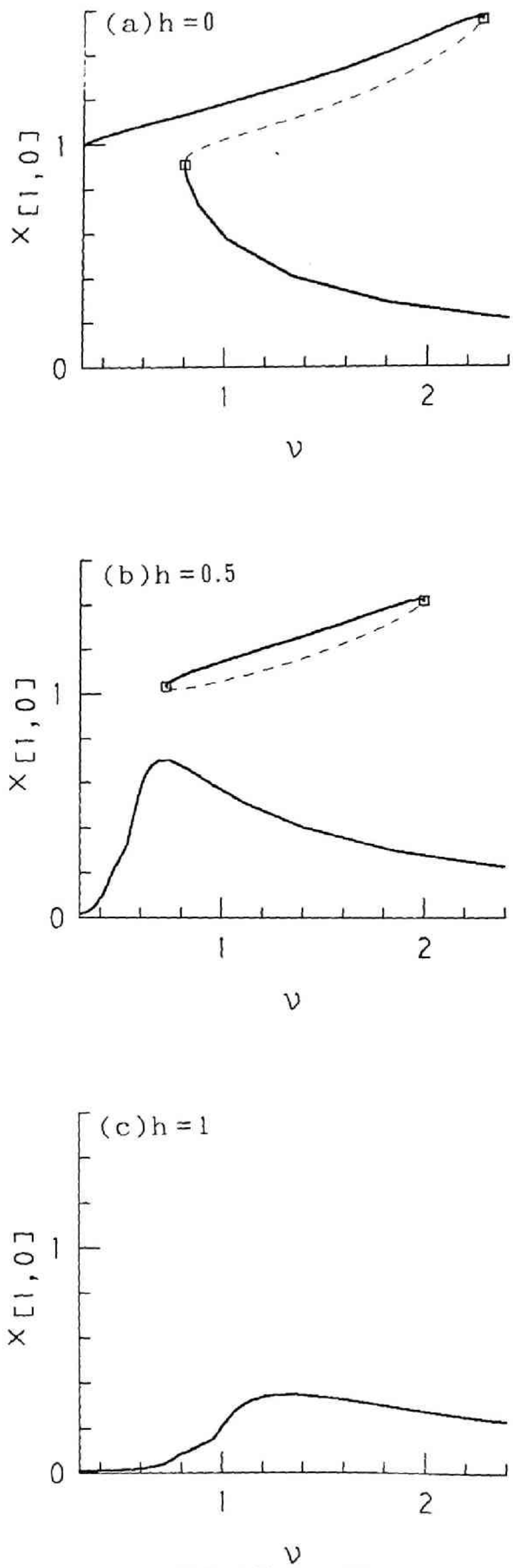
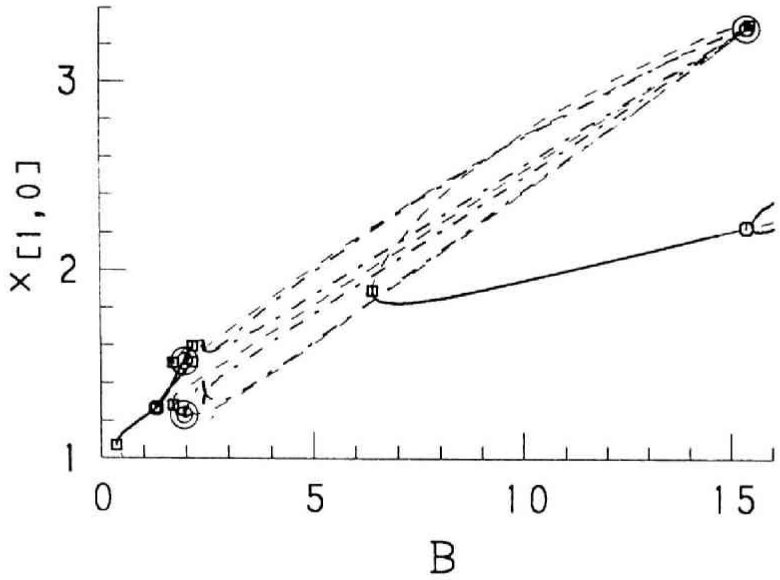
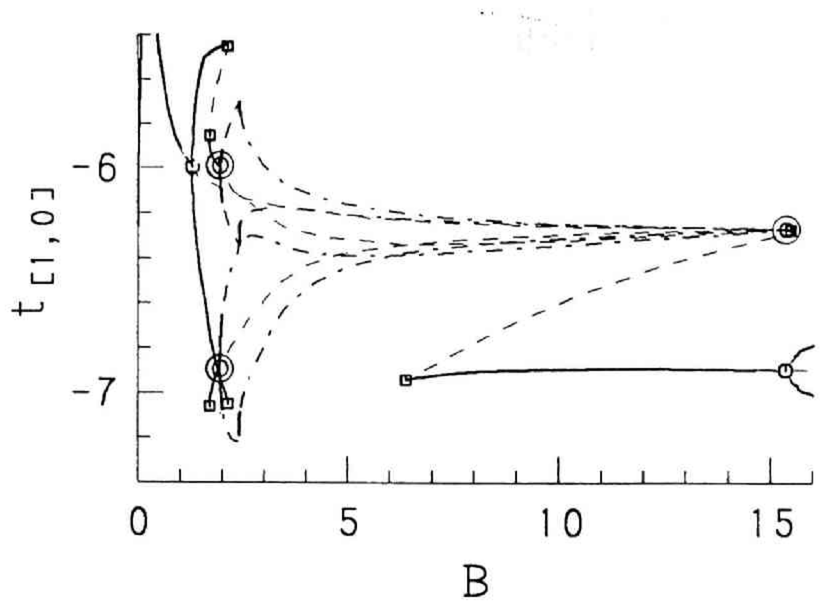


図６．６１　角周波数特性（並列共振回路）　　図６．６２　角周波数特性（直列共振回路）

特性は図６．５６の特性（式(6.26),(6.29)の分布関数），Ｂ＝0.5，ｋ＝0.05）↑



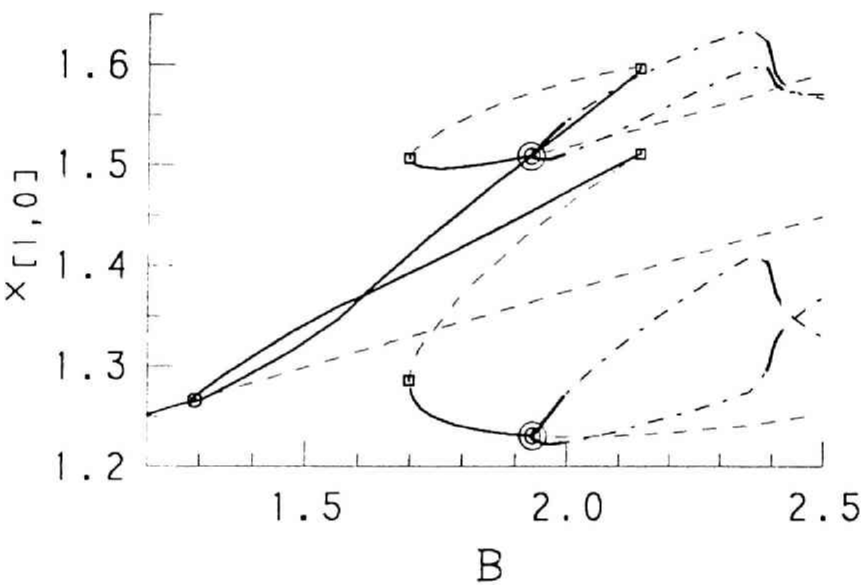


（a） $x_{[1,0]}$の変化 ↑

（b） （図(a)の一部分を拡大した図） ↓

（c） $t_{[1,0]}$の変化 ↑

（d） （図(c)の一部分を拡大した図） ↓



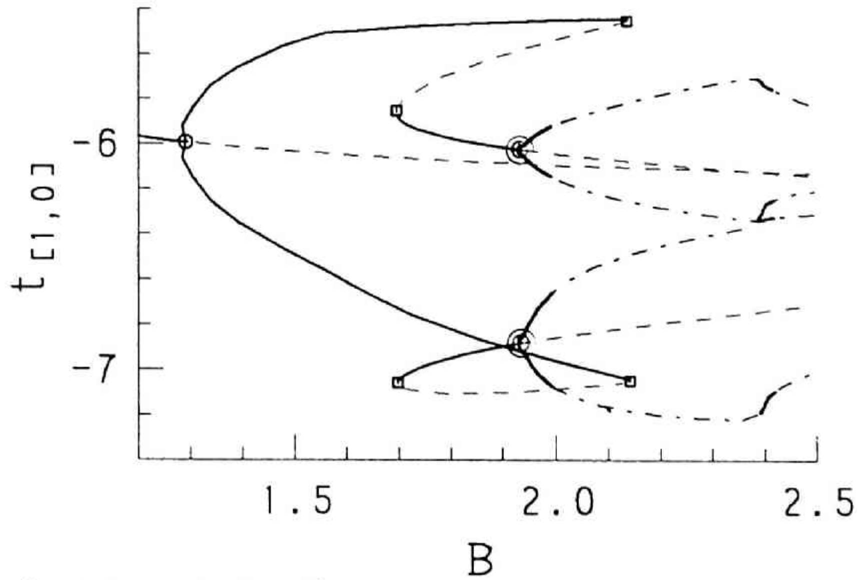
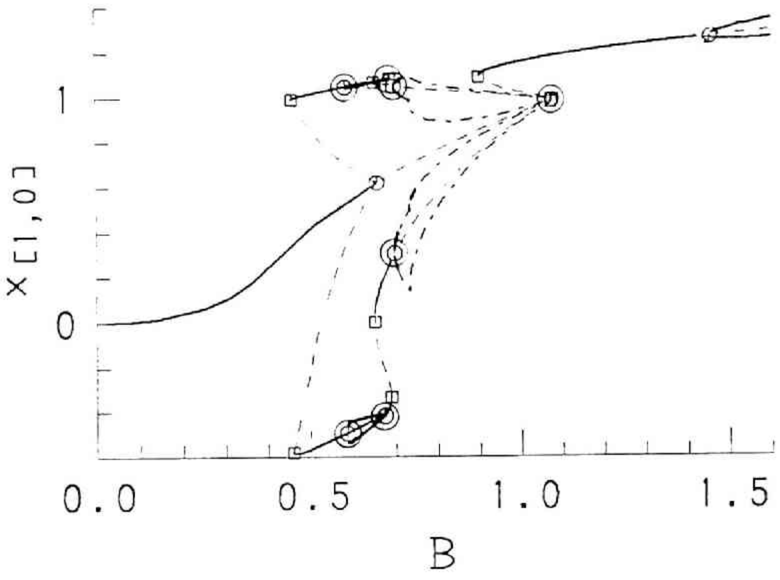


図6.63　倍周期解の分岐（図6.12の特性曲線からの分岐，並列共振回路，$h=1$，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$）



（a） 並列共振回路，h＝3(心線Ⅰ)，k＝0.1，ν＝1，B$_0$＝0 ↑

（b） （図(a)の一部分を拡大した図） ↓

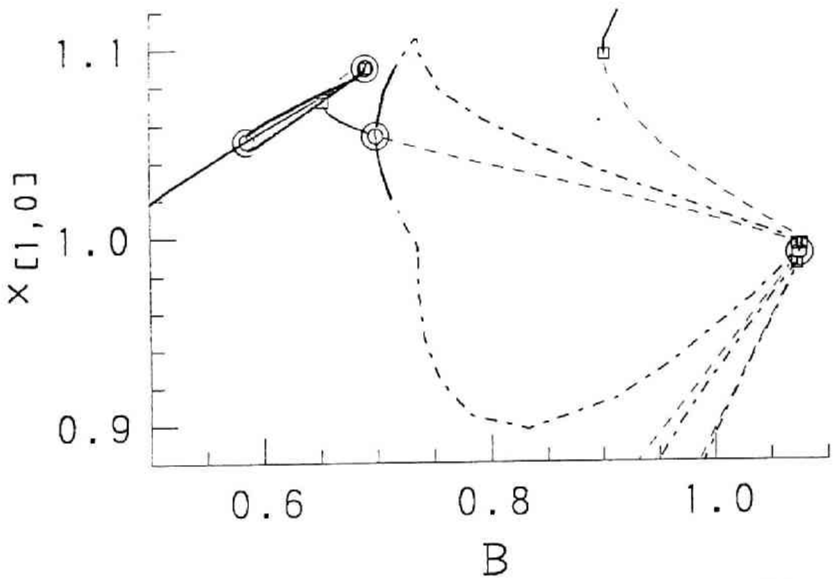
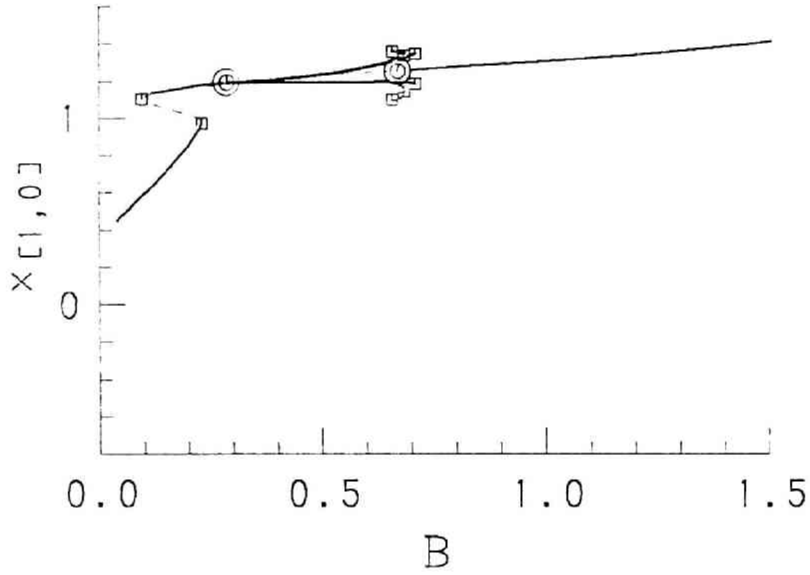


図6.64 倍周期解の分岐（図6.18(a)の特性曲線からの分岐）



（a） 並列共振回路，h＝0(心線Ⅰ)，k＝0.1，ν＝1，B$_0$＝0.2 ↑

（b） （図(a)の一部分を拡大した図） ↓

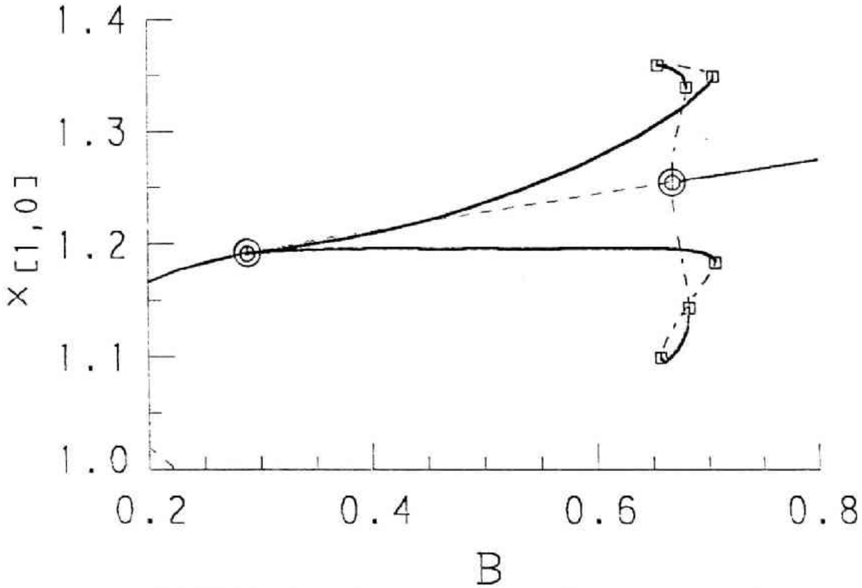
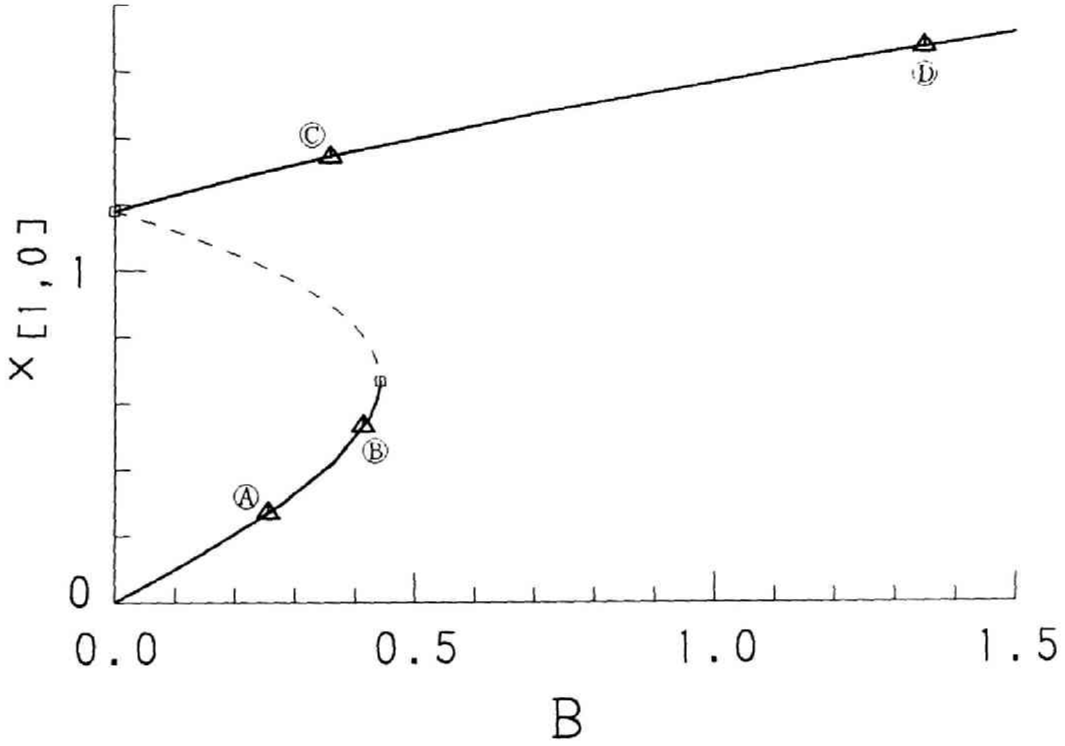


図6.65 倍周期解の分岐（図6.27(a)の特性曲線からの分岐）



（a） 3倍周期分岐点Ⓐ,Ⓑ,Ⓒ,Ⓓ　↑

（b） 3倍周期分岐点Ⓔ,Ⓕ,Ⓖ,Ⓗ　↓

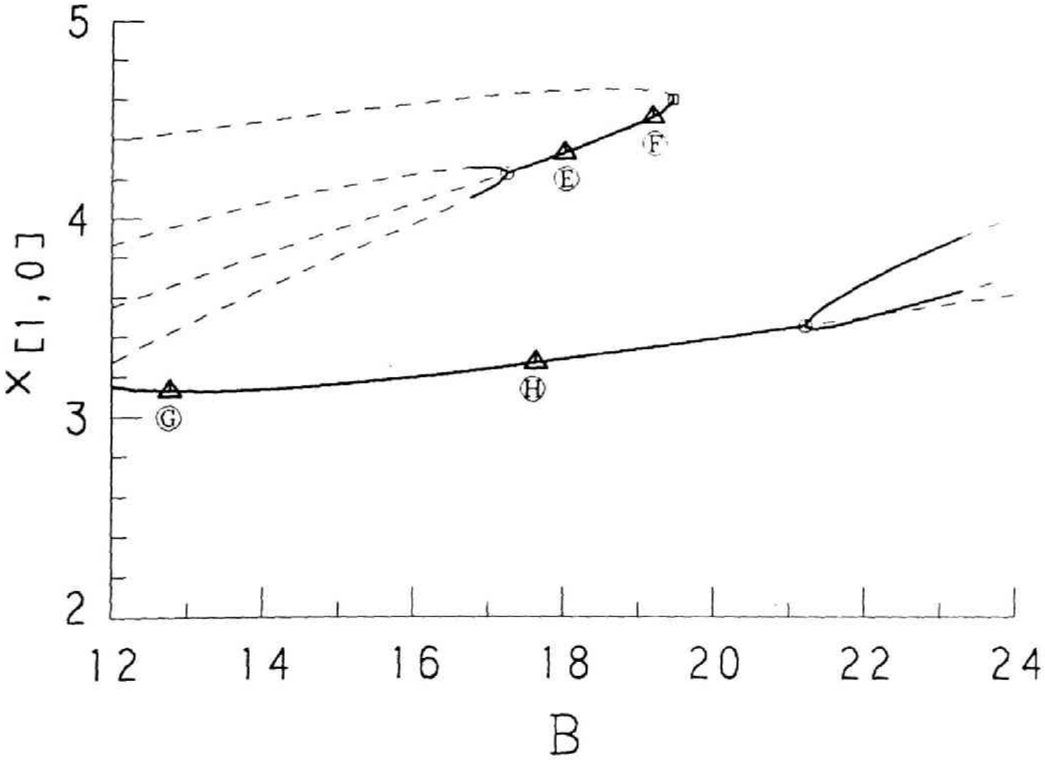
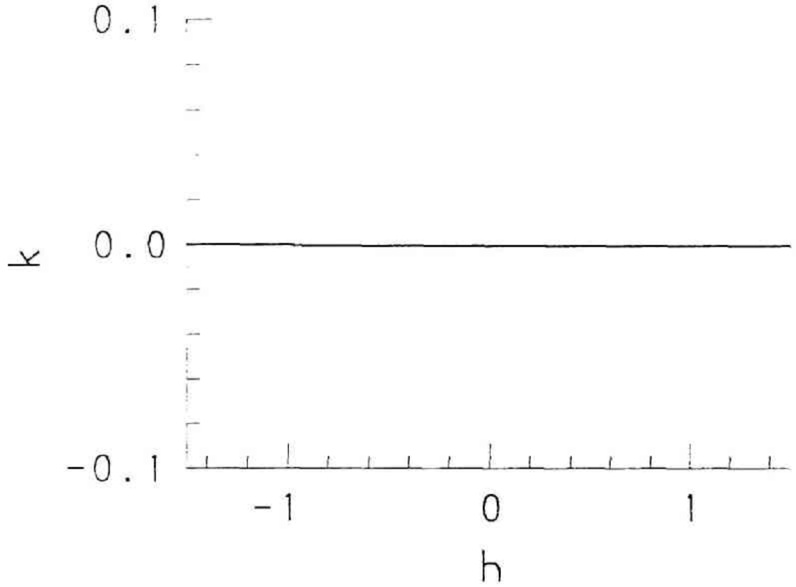


図6.66　3倍周期分岐点（並列共振回路，3乗特性，$k=0$，$\nu=1$，$B_0=0$）



（a） h－k平面への射影図 ↑

（b） h－B平面への射影図 ↓

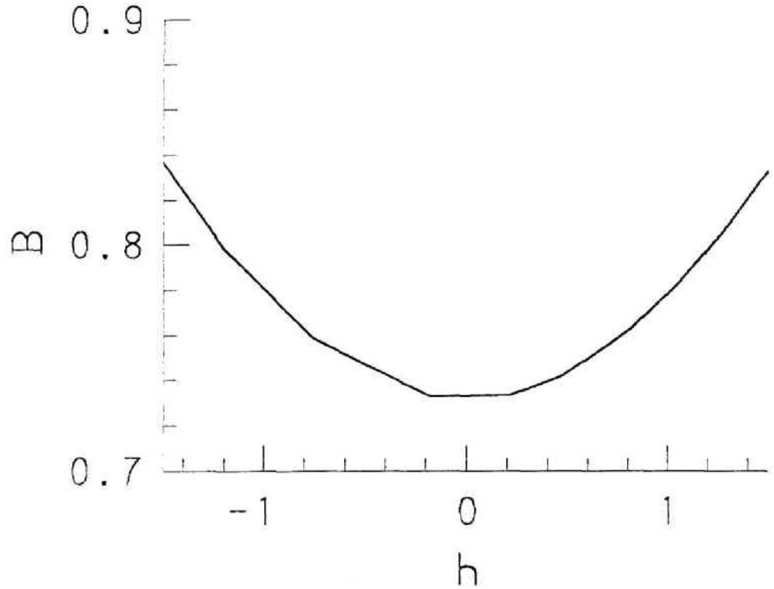
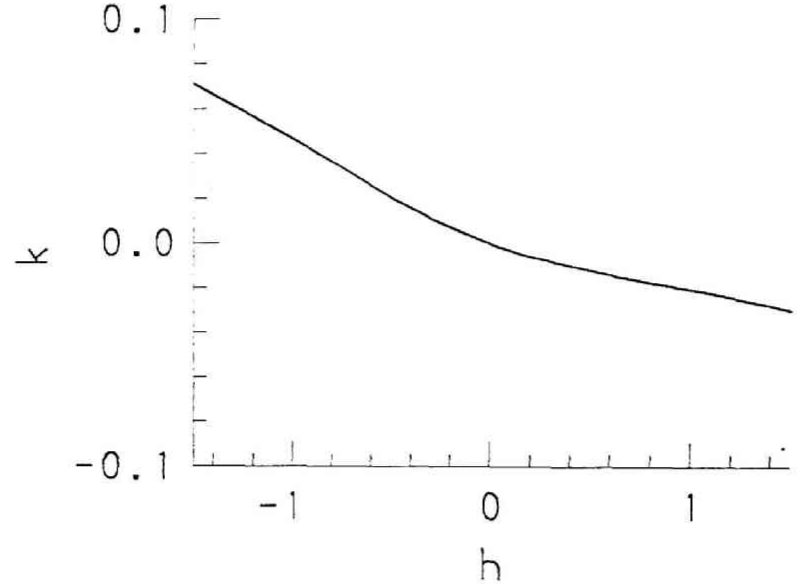


図６．６７ ３倍周期分岐点Ⓓの集合（心線Ｉ，ν＝1，B_0＝0）



（a） h－k平面への射影図 ↑

（b） h－B平面への射影図 ↓

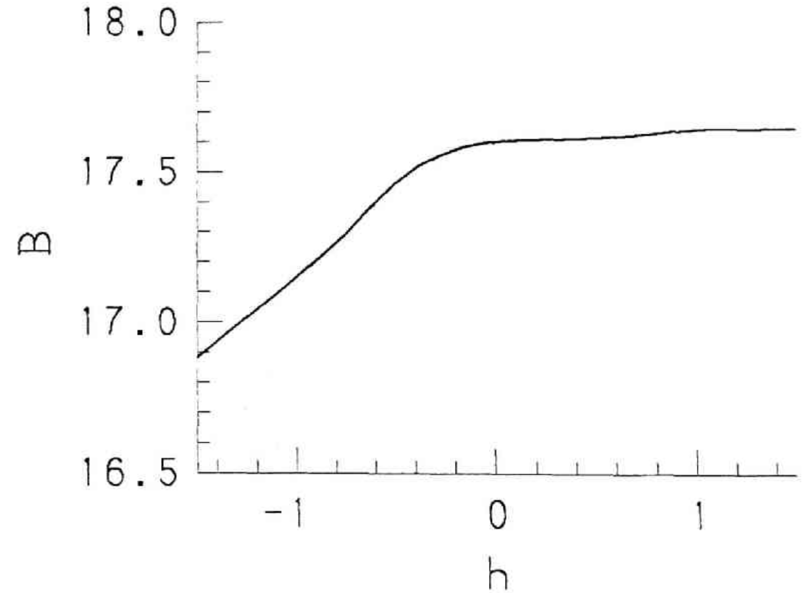
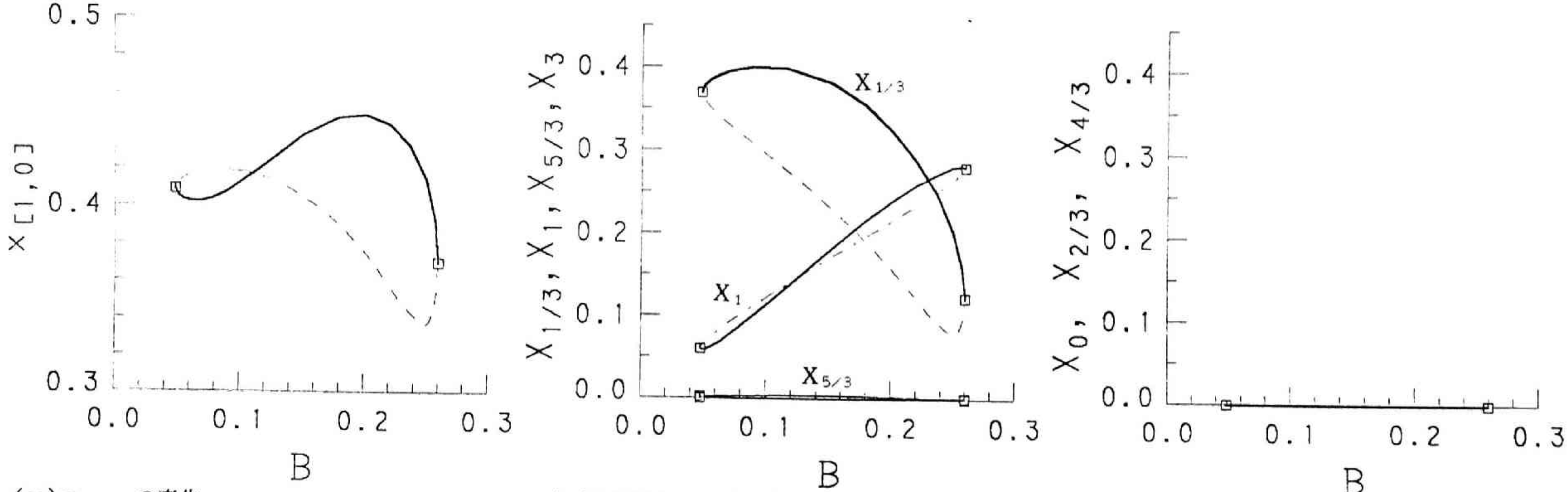


図６．６８ ３倍周期分岐点Ⓔの集合（心線Ｉ，ν＝1，B_0＝0）

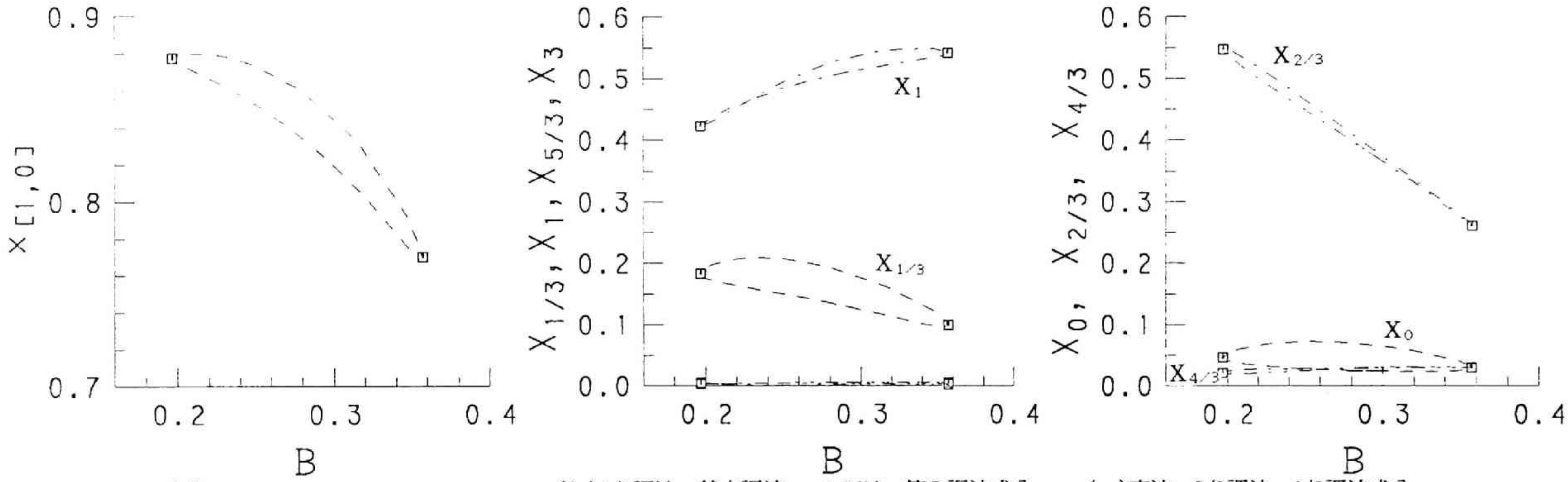


(a) $x_{[1,0]}$の変化

(b) 1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分

(c) 直流，2/3調波，4/3調波成分

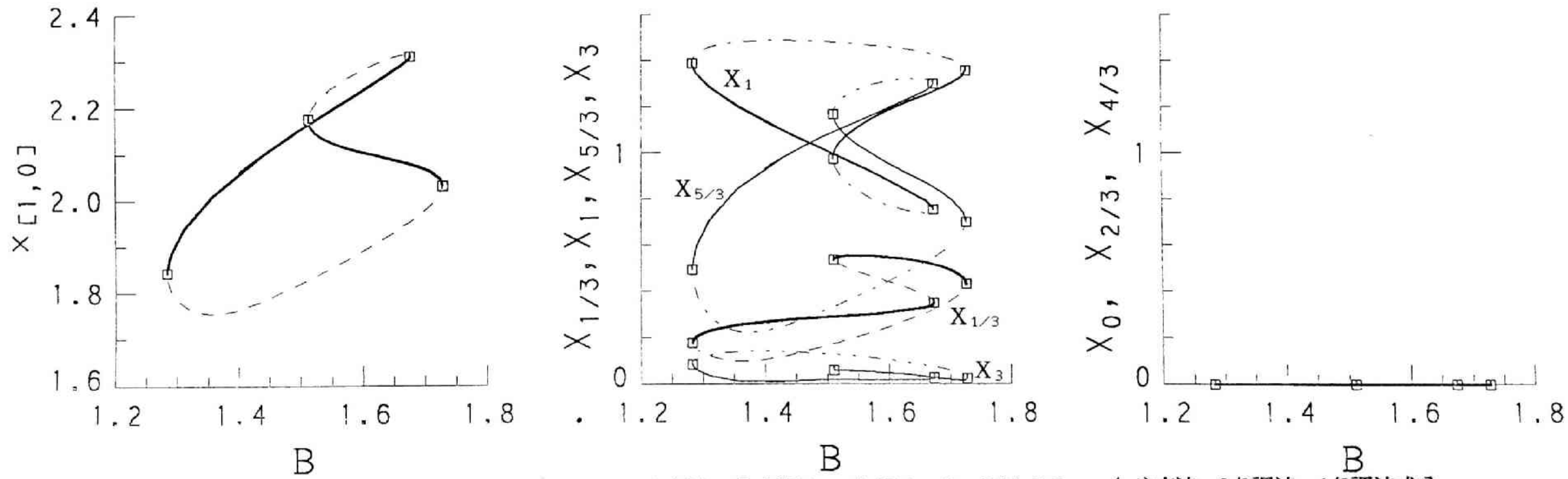
図6.69　3倍周期解の振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k＝0.05，ν＝1，B_0＝0）



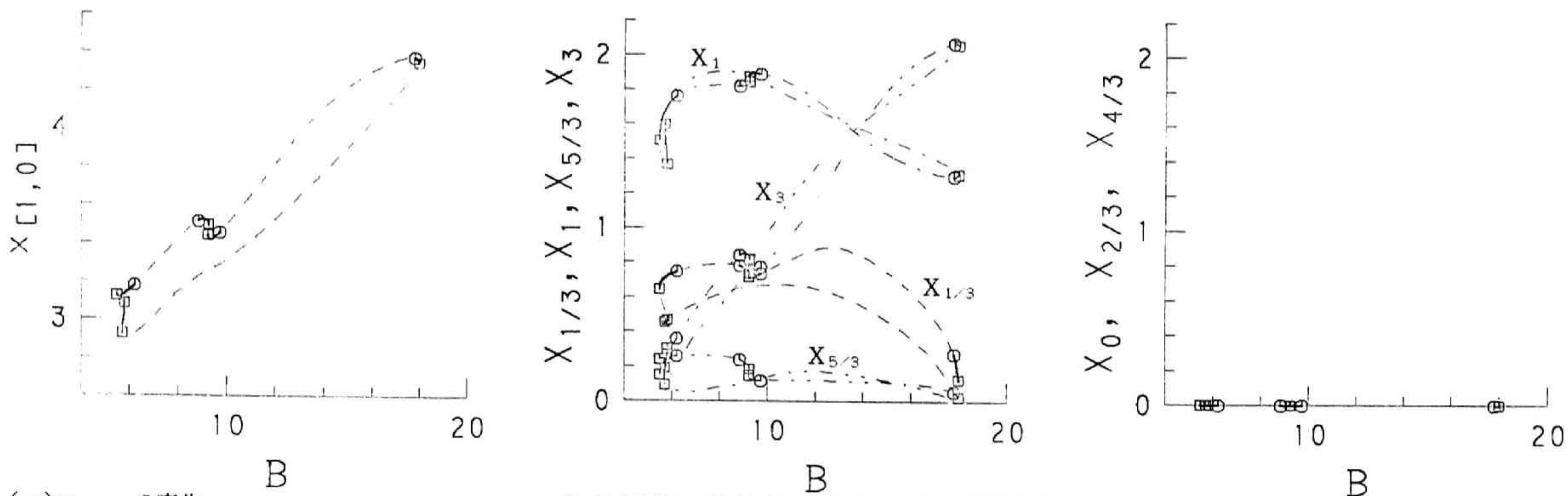
(a)$x_{[1,0]}$の変化　(b)1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分　(c)直流，2/3調波，4/3調波成分

↑　図6.70　3倍周期解Ⓒ振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k=0.05，ν=1，B_0=0)

↓　図6.71　3倍周期解Ⓓ振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k=0.05，ν=1，B_0=0)



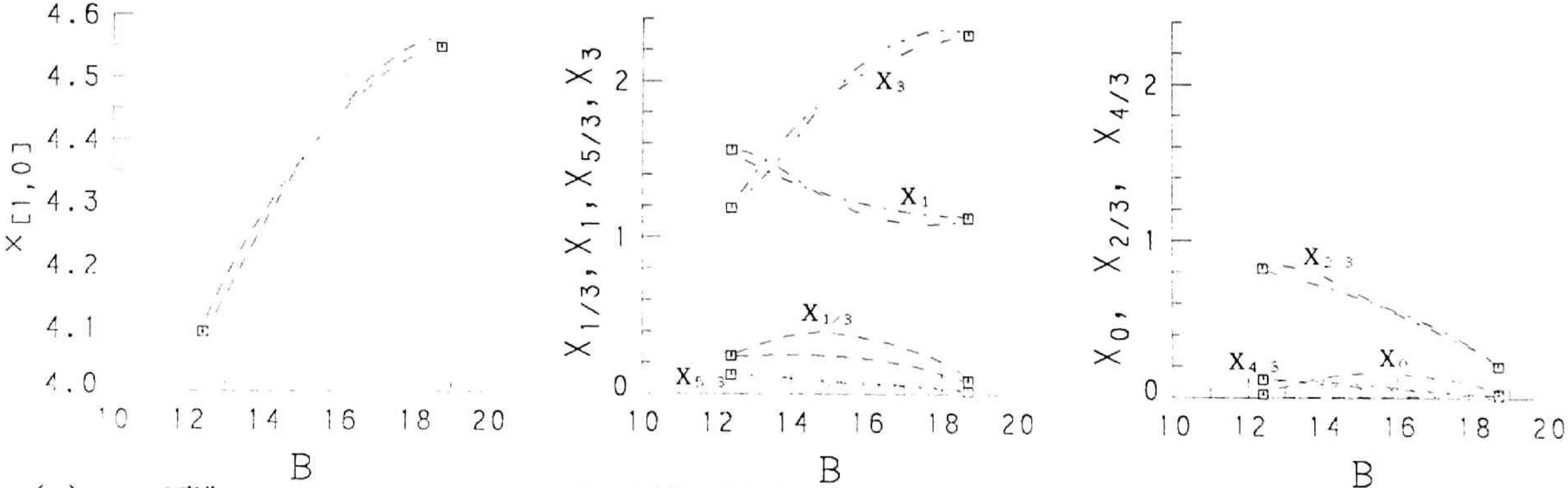
(a)$x_{[1,0]}$の変化　(b)1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分　(c)直流，2/3調波，4/3調波成分



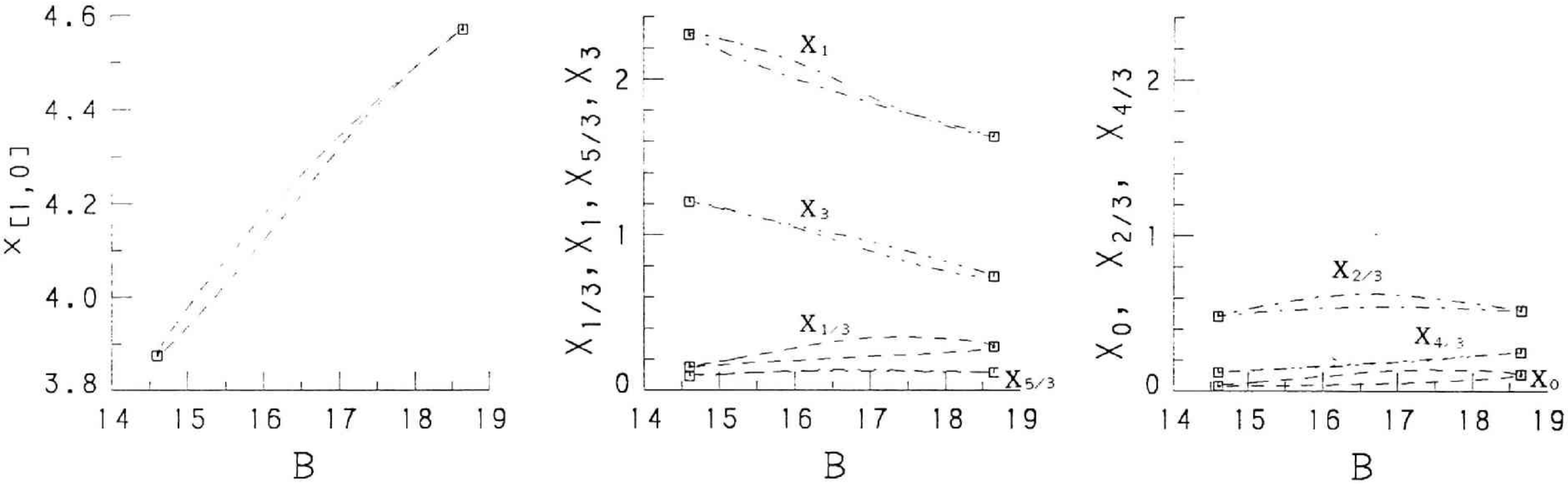
(a)x [1,0]の変化　(b)1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分　(c)直流，2/3調波，4/3調波成分

↑ 図6.72　3倍周期解Ⓔ振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k＝0.05，ν＝1，B_0＝0）

↓ 図6.73　3倍周期解Ⓕ振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k＝0.05，ν＝1，B_0＝0）



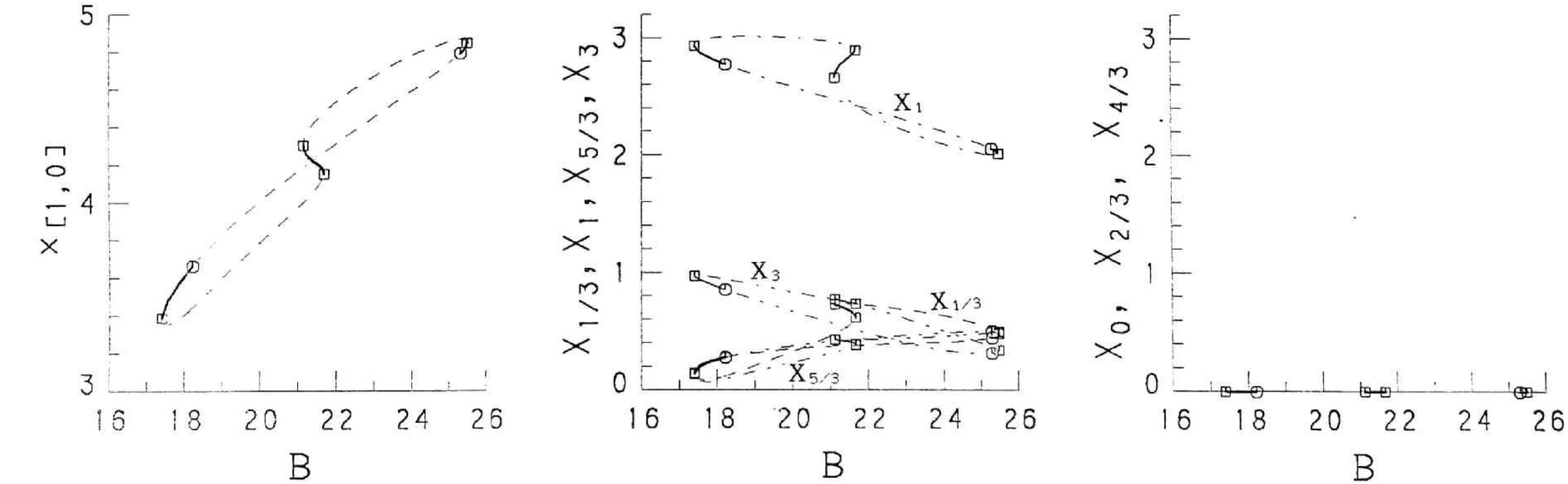
(a)x [1,0]の変化　(b)1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分　(c)直流，2/3調波，4/3調波成分



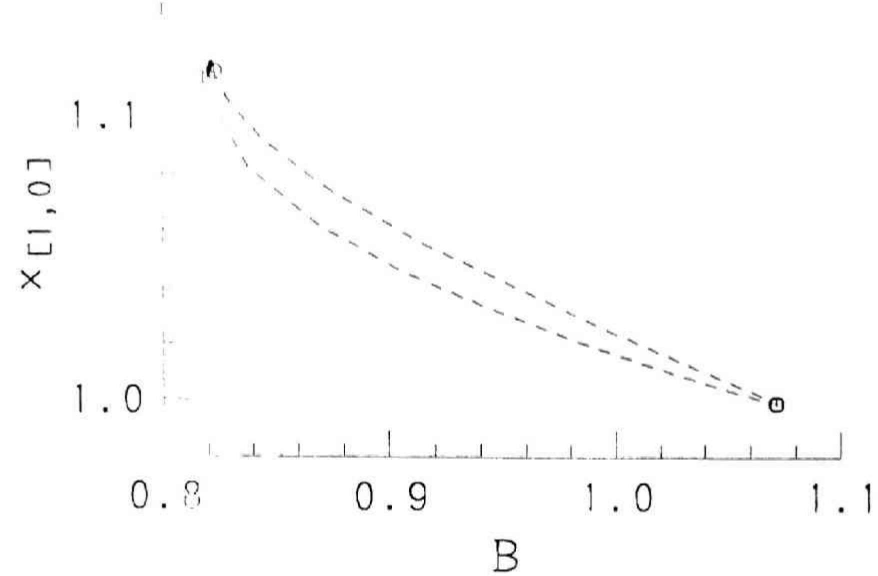
(a)$x_{[1,0]}$の変化　(b)1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分　(c)直流，2/3調波，4/3調波成分

↑　図6.74　3倍周期解Ⓖ振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k＝0.05，ν＝1，B_0＝0）

↓　図6.75　3倍周期解Ⓗ振幅特性（並列共振回路，3乗特性，k＝0.05，ν＝1，B_0＝0）



(a)$x_{[1,0]}$の変化　(b)1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分　(c)直流，2/3調波，4/3調波成分



（a） $x_{[1,0]}$の変化　↑

（b） 1/3調波，基本調波，5/3調波，第3調波成分の変化　↓

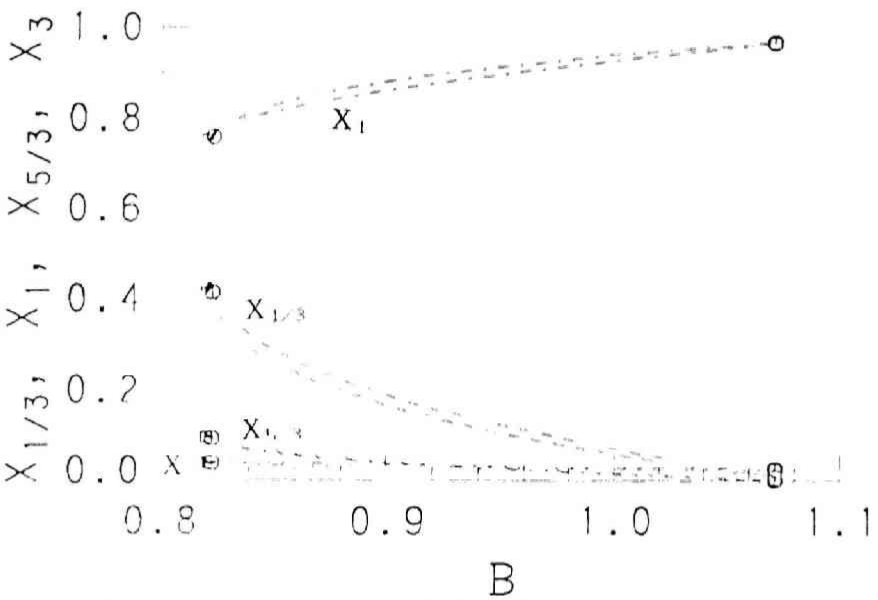
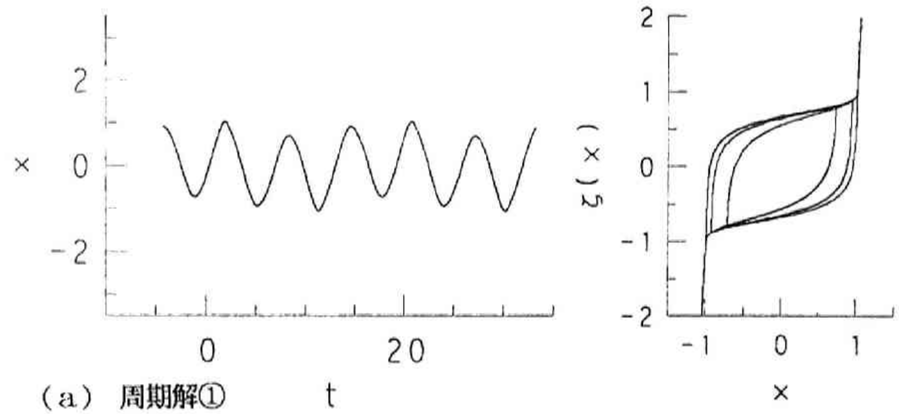
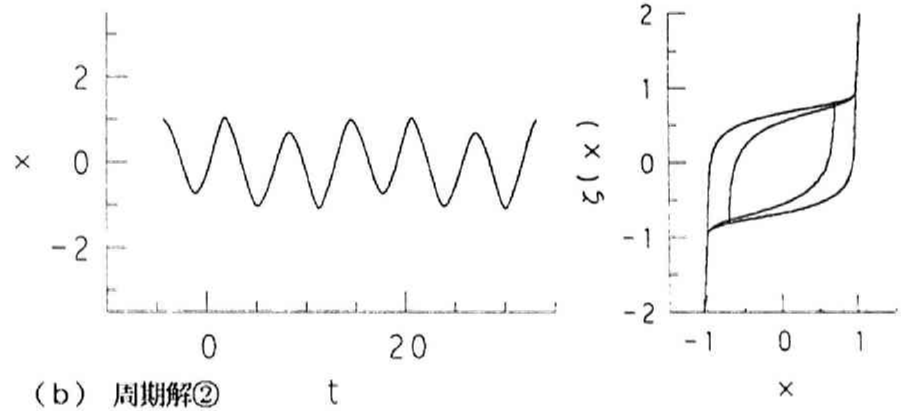


図6．76　3倍周期解Ⓐ振幅特性（並列共振回路，h＝3(心線Ⅰ)，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）



（a） 周期解①



（b） 周期解②

図6．77　x(t)の波形とx－ξループ（3倍周期解Ⓐ）
（並列共振回路，B＝0.9，h＝3(心線Ⅰ)，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）

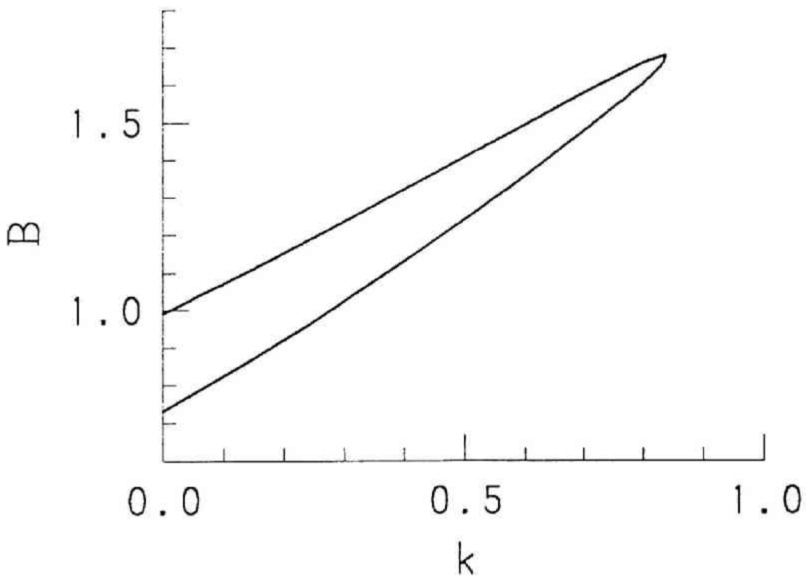


図６．７８　単純極限点の集合（３倍周期解Ⓐ）
（並列共振回路，h＝3(心線Ｉ)，ν＝1，B_0＝0)

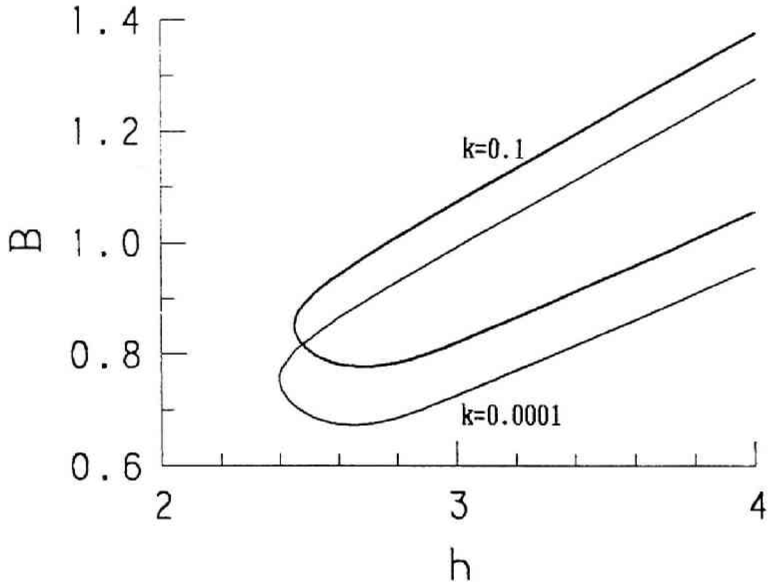
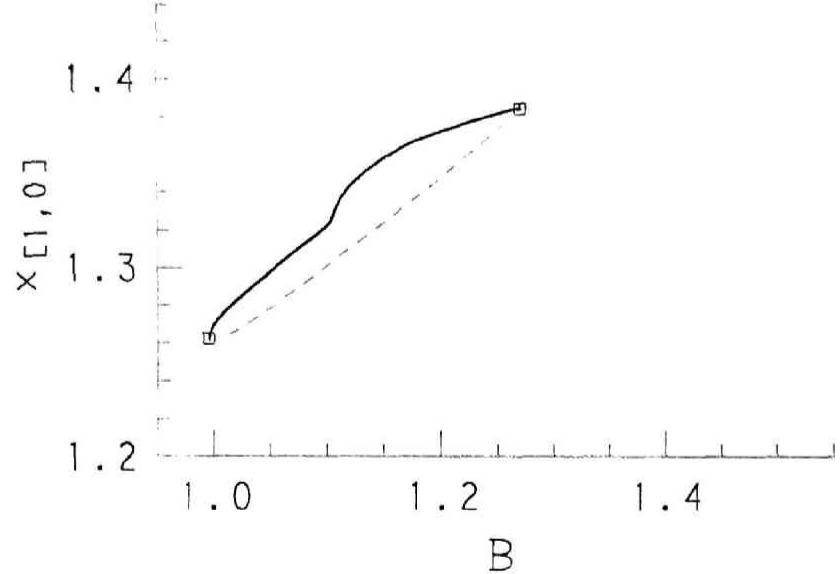
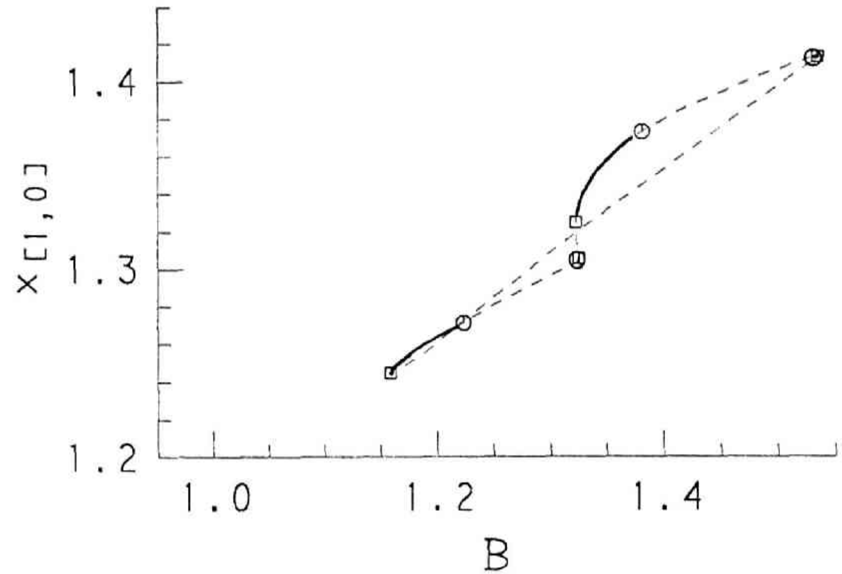


図６．７９　単純極限点の集合（３倍周期解Ⓐ）
（並列共振回路，ν＝1，B_0＝0)



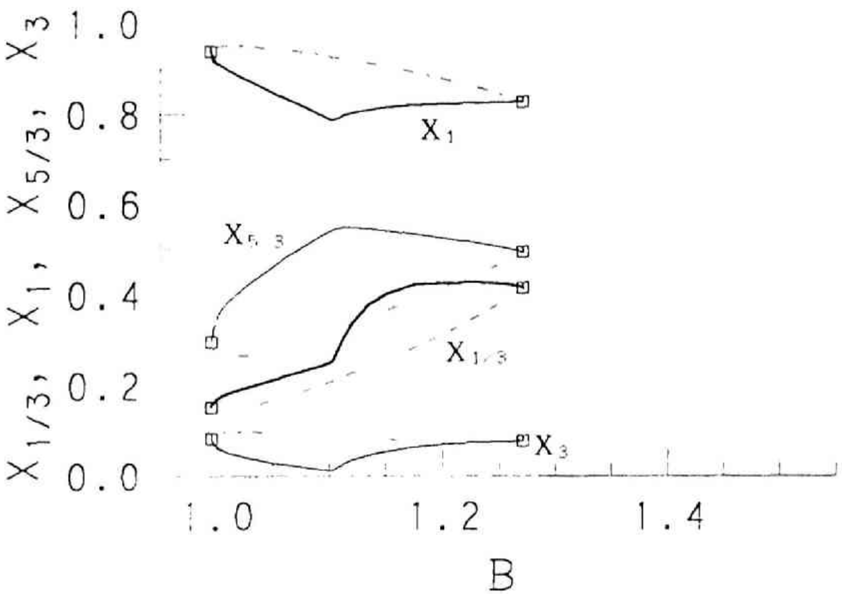


(a) h＝2(心線Ⅰ)（$x_{[1,0]}$の変化） ↑

(c) h＝3(心線Ⅰ)（$x_{[1,0]}$の変化） ↑

(b) h＝2(心線Ⅰ)（1/3調波，基本調波，5/3調波，第３調波成分の変化） ↓

(d) h＝3(心線Ⅰ)（1/3調波，基本調波，5/3調波，第３調波成分の変化） ↓



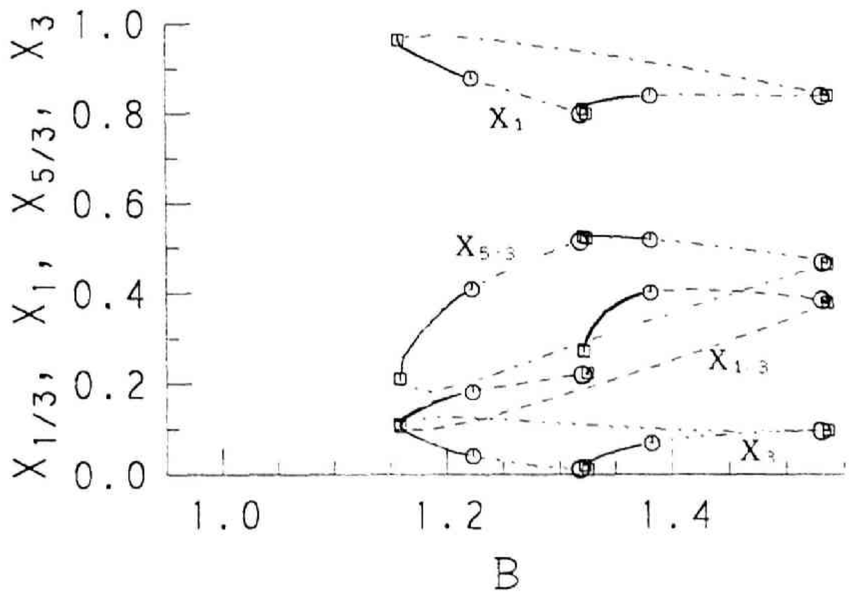
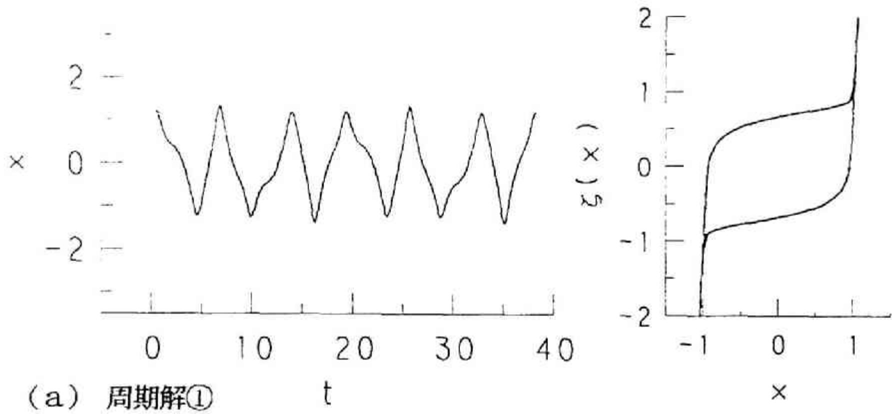
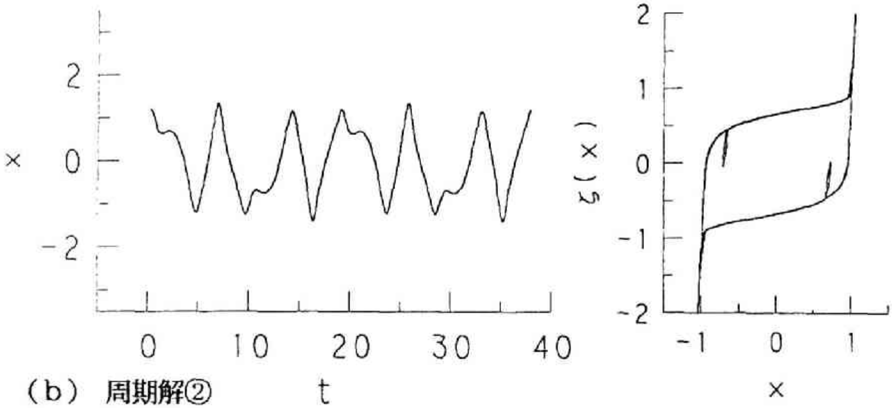


図６．８０　３倍周期解①振幅特性（並列共振回路，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$）

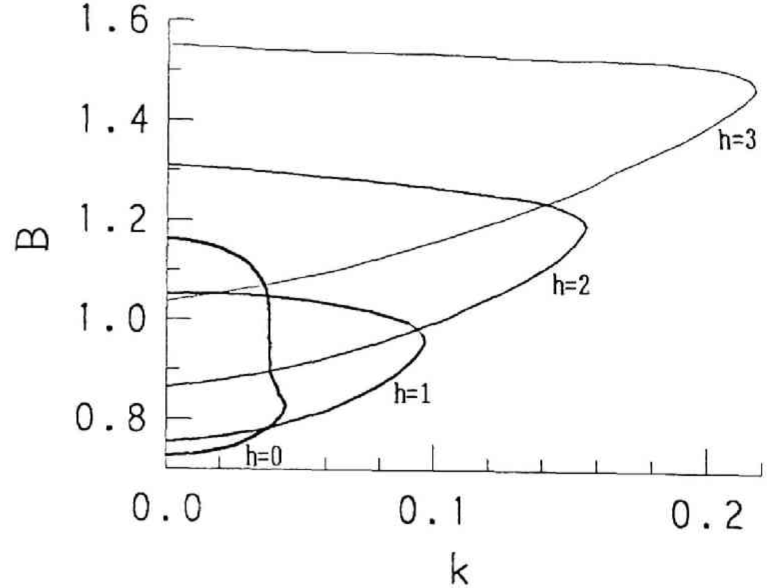


(a) 周期解①



(b) 周期解②

図6.81 x(t)の波形とx－ξループ（3倍周期解①）
（並列共振回路，B＝1.4，h＝3(心線Ⅰ)，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）



(a) 心線特性Ⅰ ↑

(b) 心線特性Ⅱ ↓

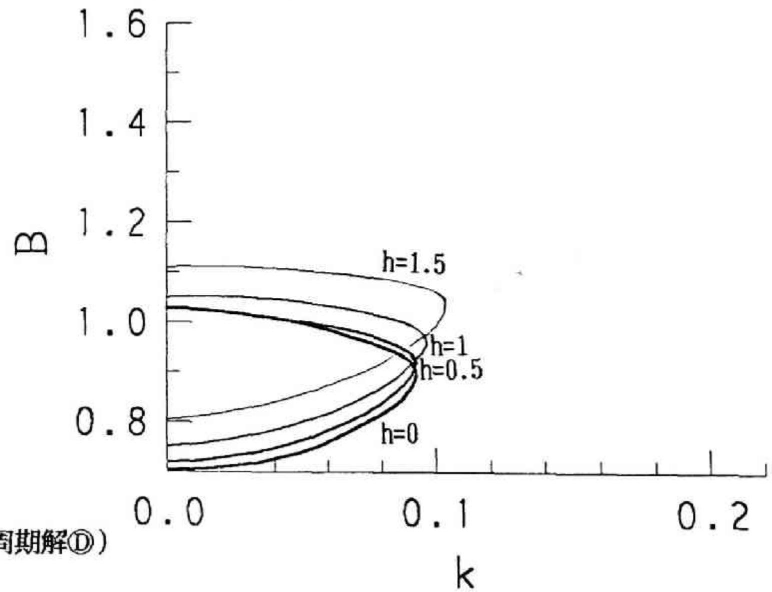


図6.82 単純極限点の集合（3倍周期解①）
（並列共振回路，ν＝1，B_0＝0）

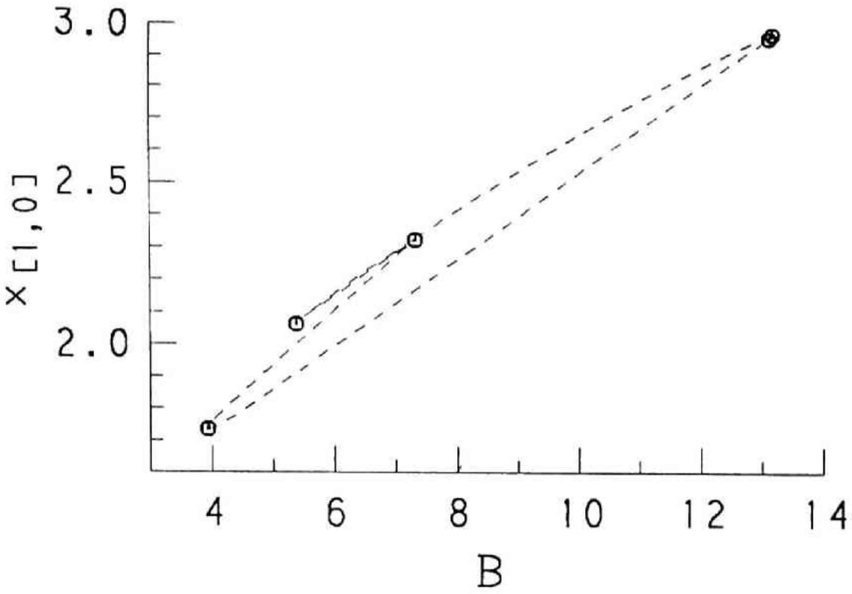
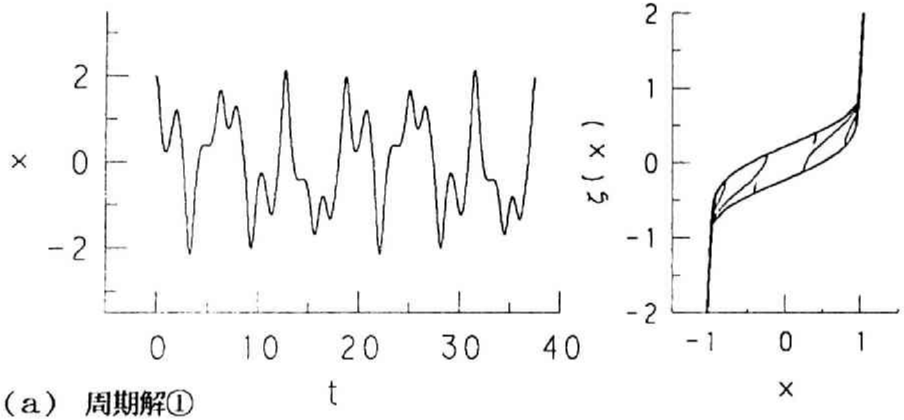
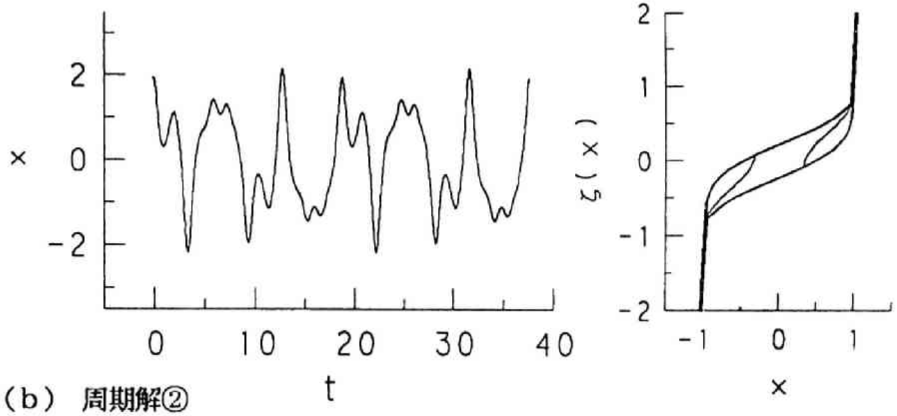


図６．８３　３倍周期解Ⓔ振幅特性
（並列共振回路，h＝1，k＝0.25，ν＝1，B_0＝0）

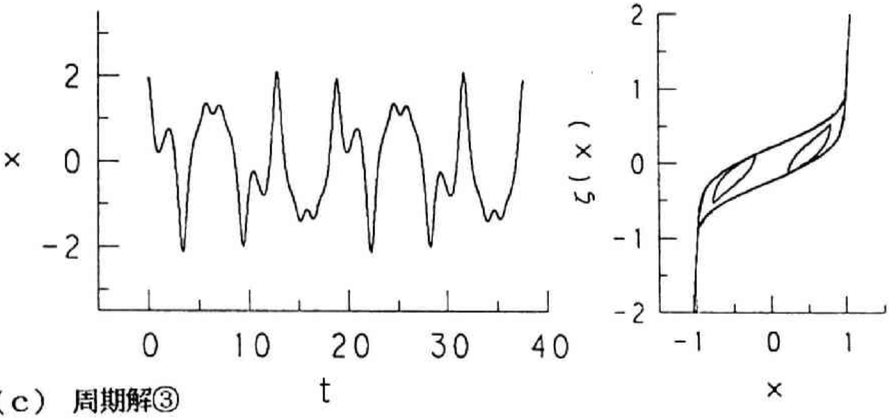
図６．８４　x（t）の波形とx－ξループ（３倍周期解Ⓔ）
（並列共振回路，B＝6，h＝1，k＝0.25，ν＝1，B_0＝0）



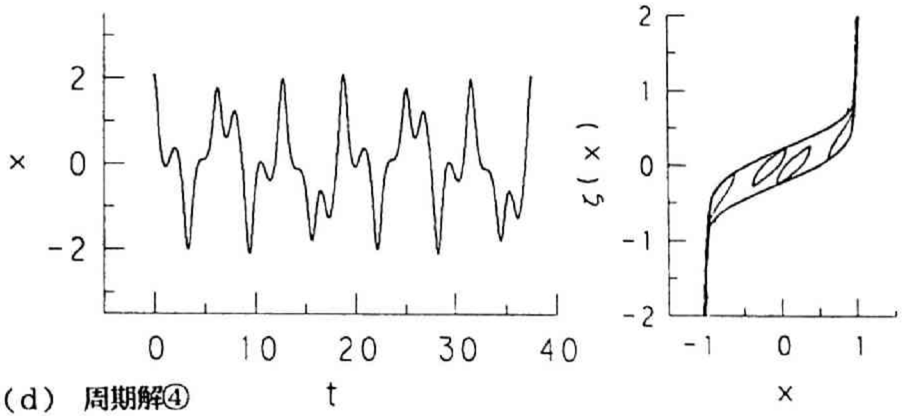
（a）　周期解①



（b）　周期解②



（c）　周期解③



（d）　周期解④

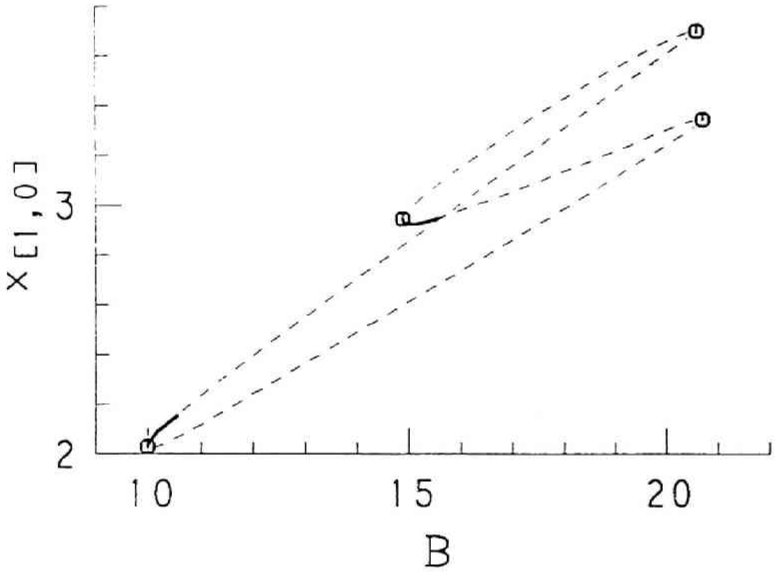
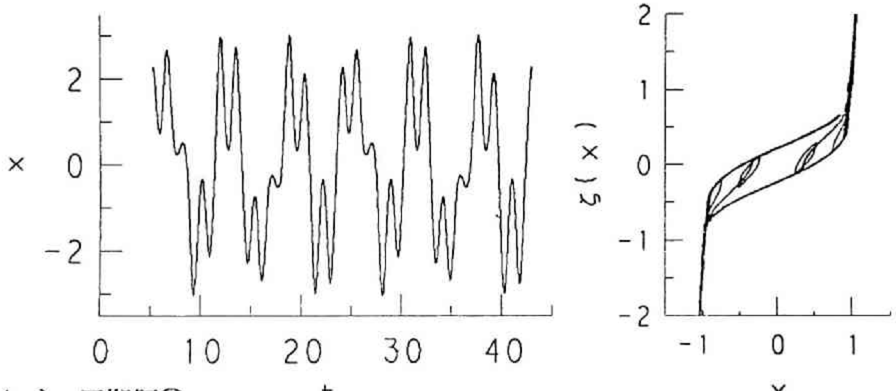
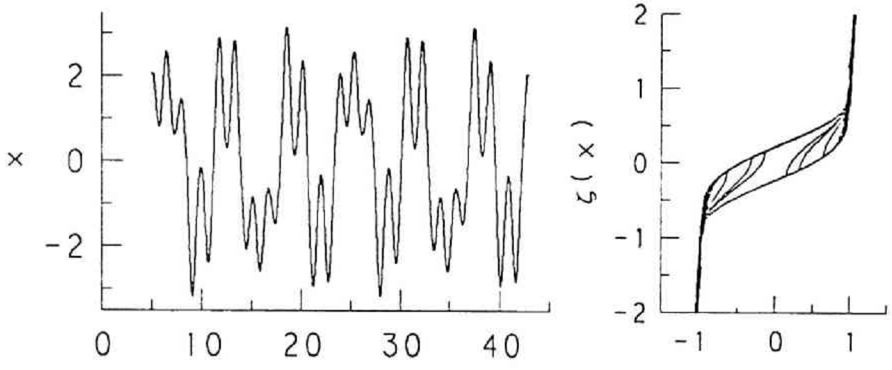


図6.85　3倍周期解Ⓗ振幅特性
（並列共振回路，h＝1，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）

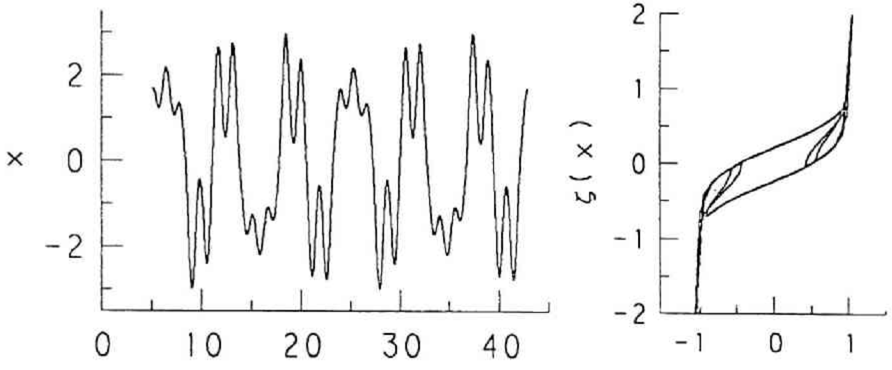
図6.86　x(t)の波形とx－ξループ（3倍周期解Ⓗ）
（並列共振回路，B＝16，h＝1，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）



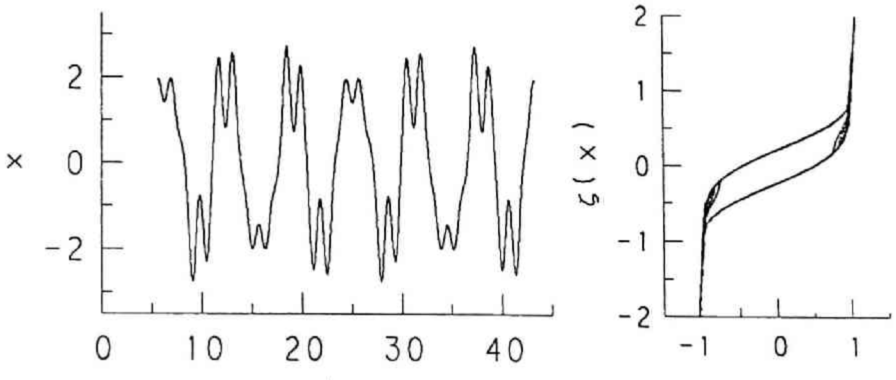
(a)　周期解①



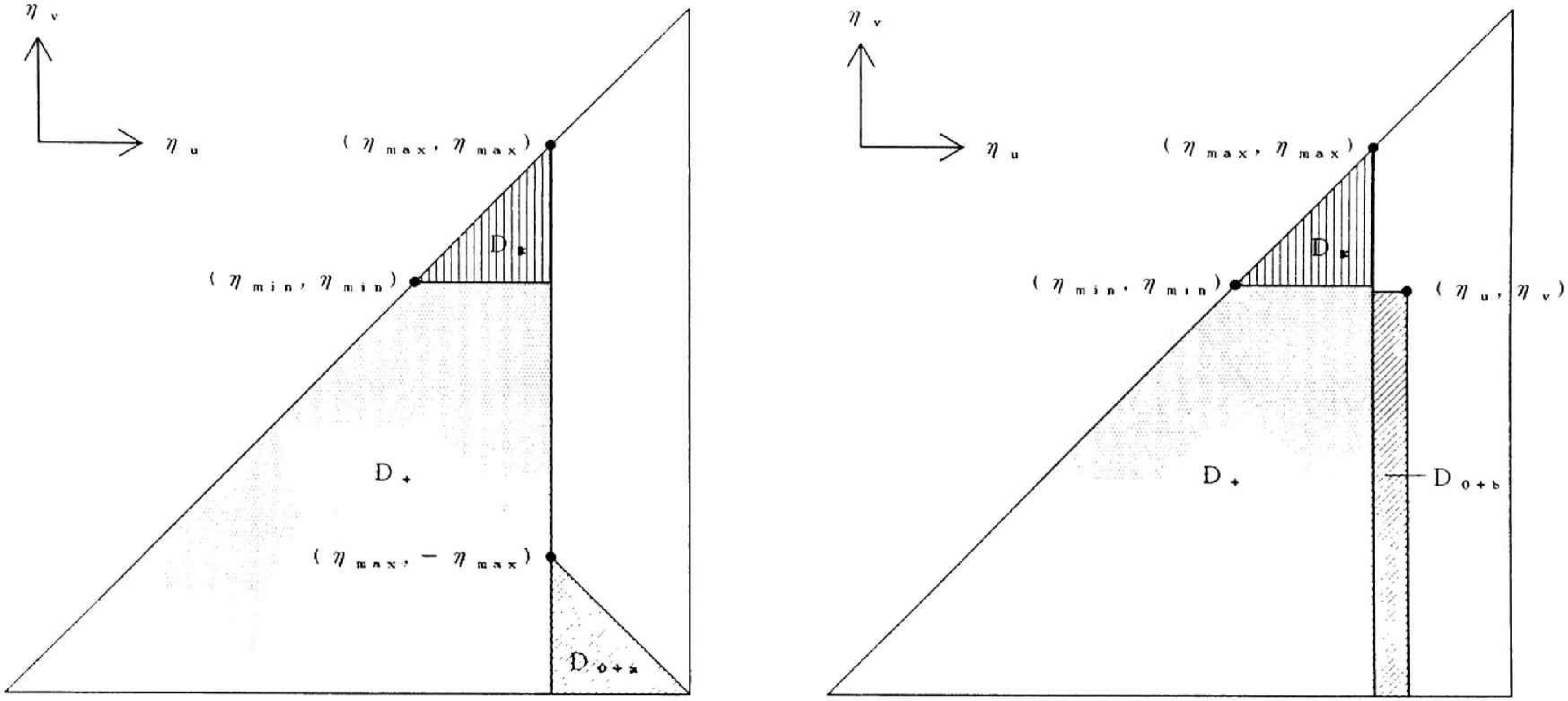
(b)　周期解②



(c)　周期解③



(d)　周期解④



$\eta_{max} = \eta_1(0.85948)$

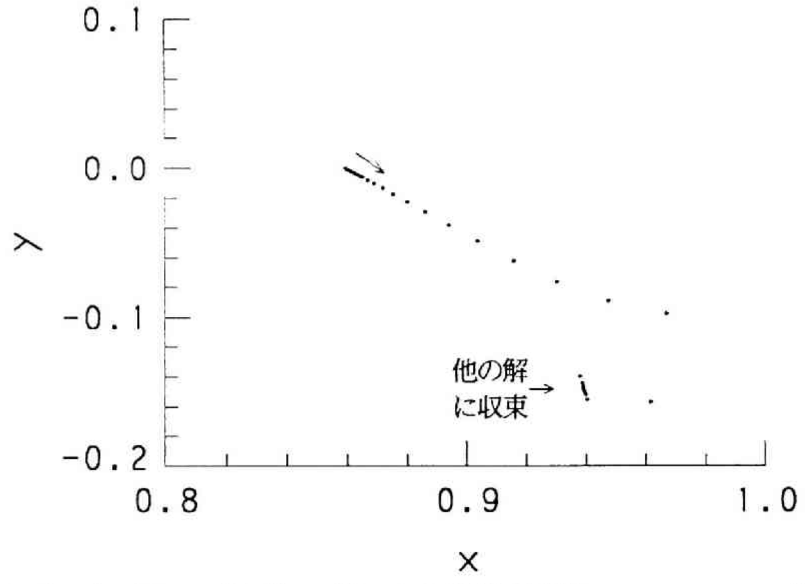
（a）　磁化状態 a

$\eta_u = \eta(0.862888\,\mathrm{I} - \eta_s)$

$\eta_v = \eta(0.2\,\mathrm{I} - \eta_s、\ \eta_a)$

（b）　磁化状態 b

図６．８７　D_0の磁化状態の違い



(a) $(x(t_0+iT), y(t_0+iT))$の変化 ↑

(b) $\log_{10}\|\mathbf{x}(t_0+iT)-\mathbf{x}(t_0+iT-T)\|$の変化 ↓

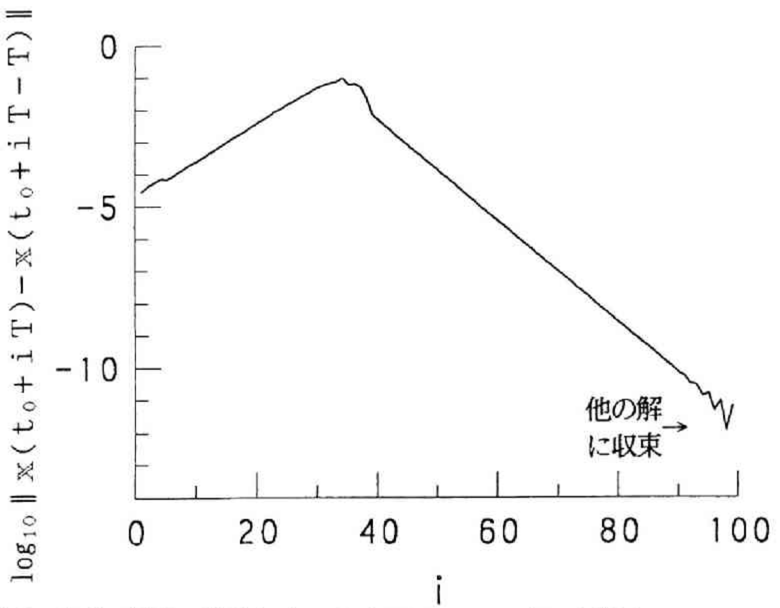
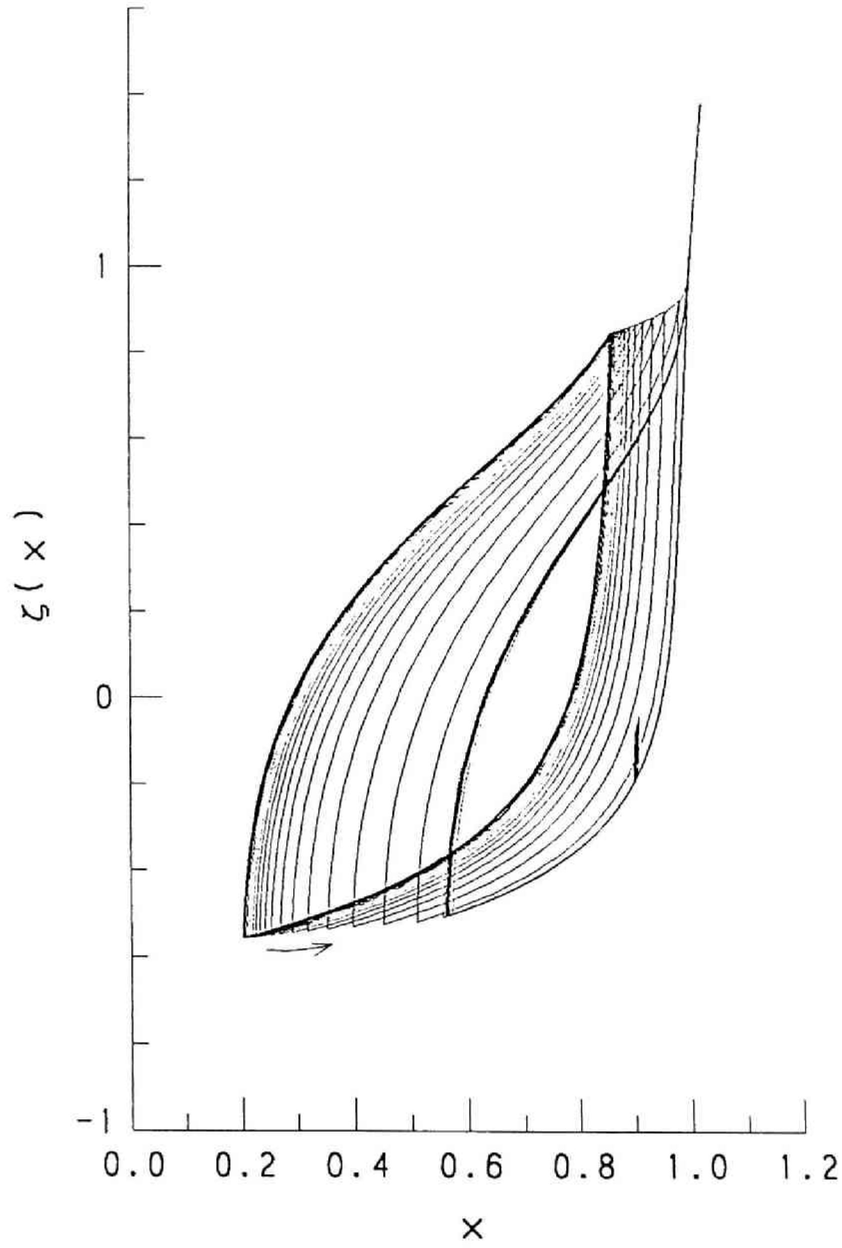
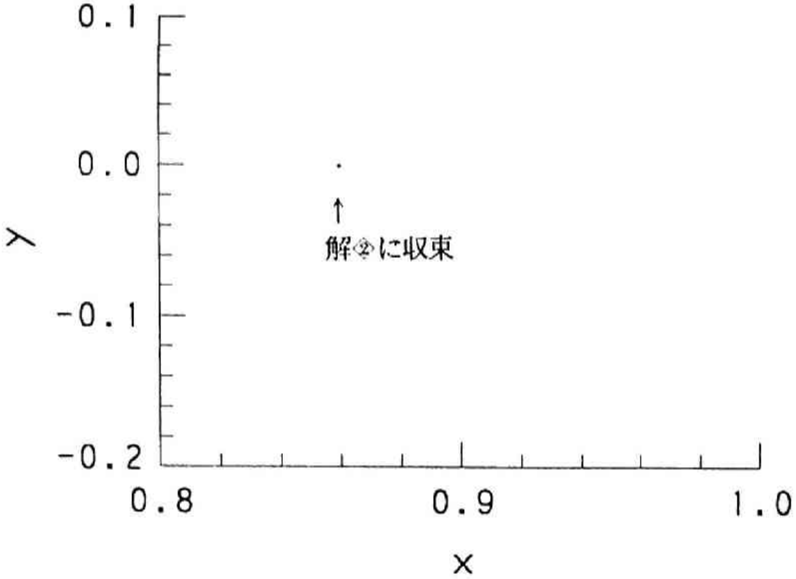


図6.88 図6.87(a)の磁化状態から出発した場合



(c) $x-\zeta(x)$の軌跡



(a) $(x(t_0+iT), y(t_0+iT))$の変化 ↑

(b) $\log_{10}\|\mathbb{x}(t_0+iT)-\mathbb{x}(t_0+iT-T)\|$の変化 ↓

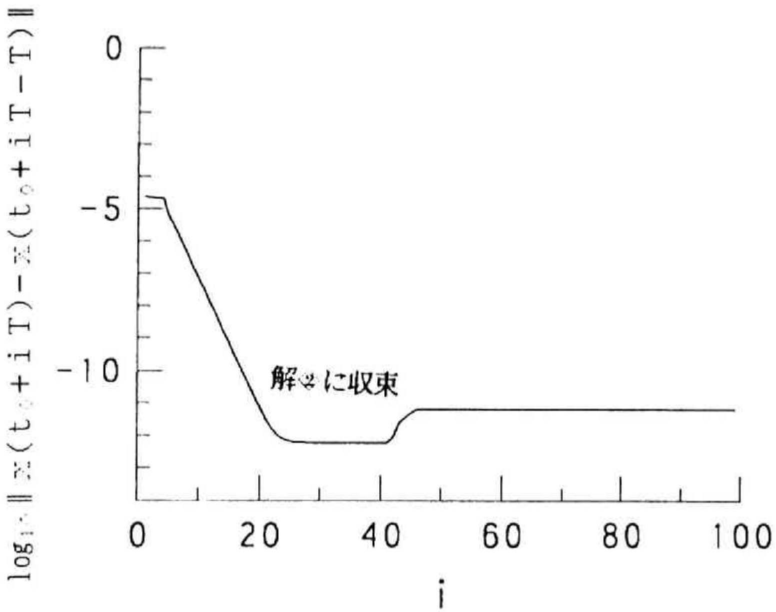
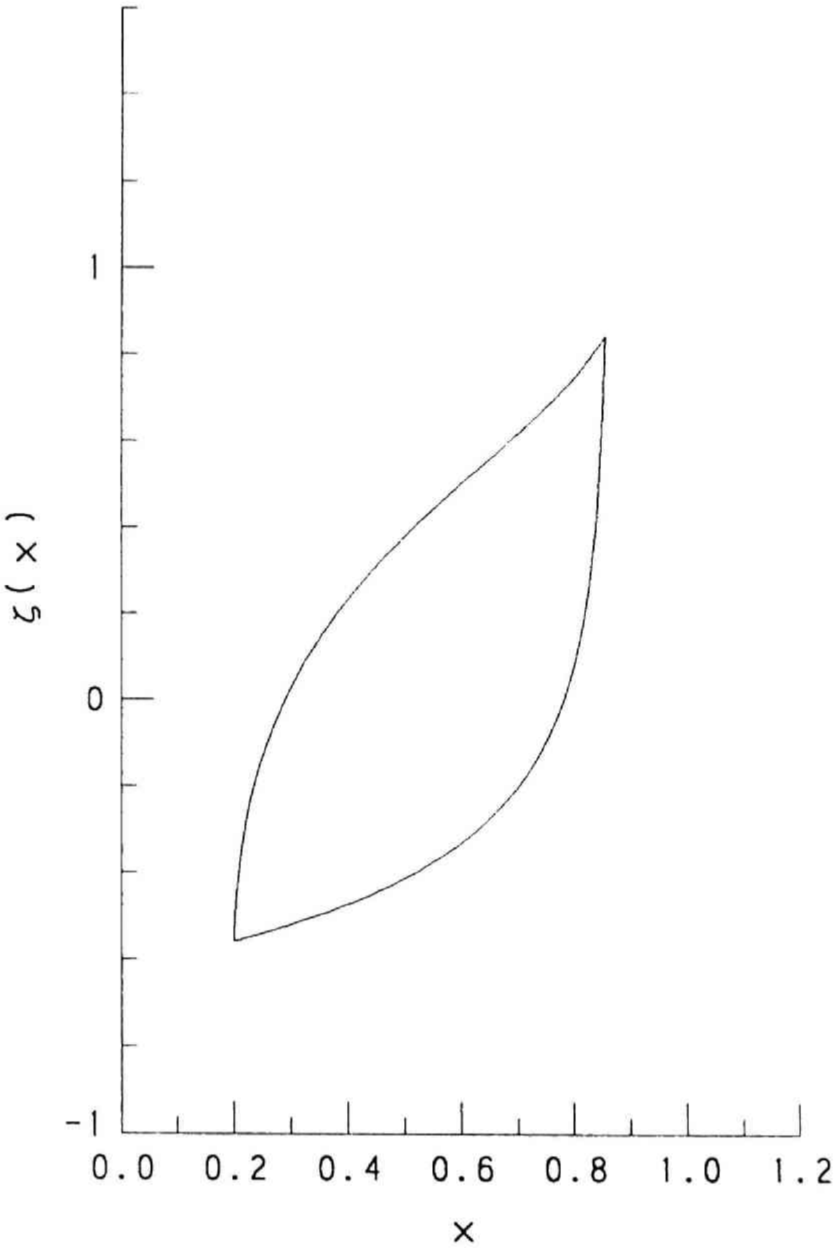


図6.89 図6.87(b)の磁化状態から出発した場合



(c) $x-\xi(x)$の軌跡

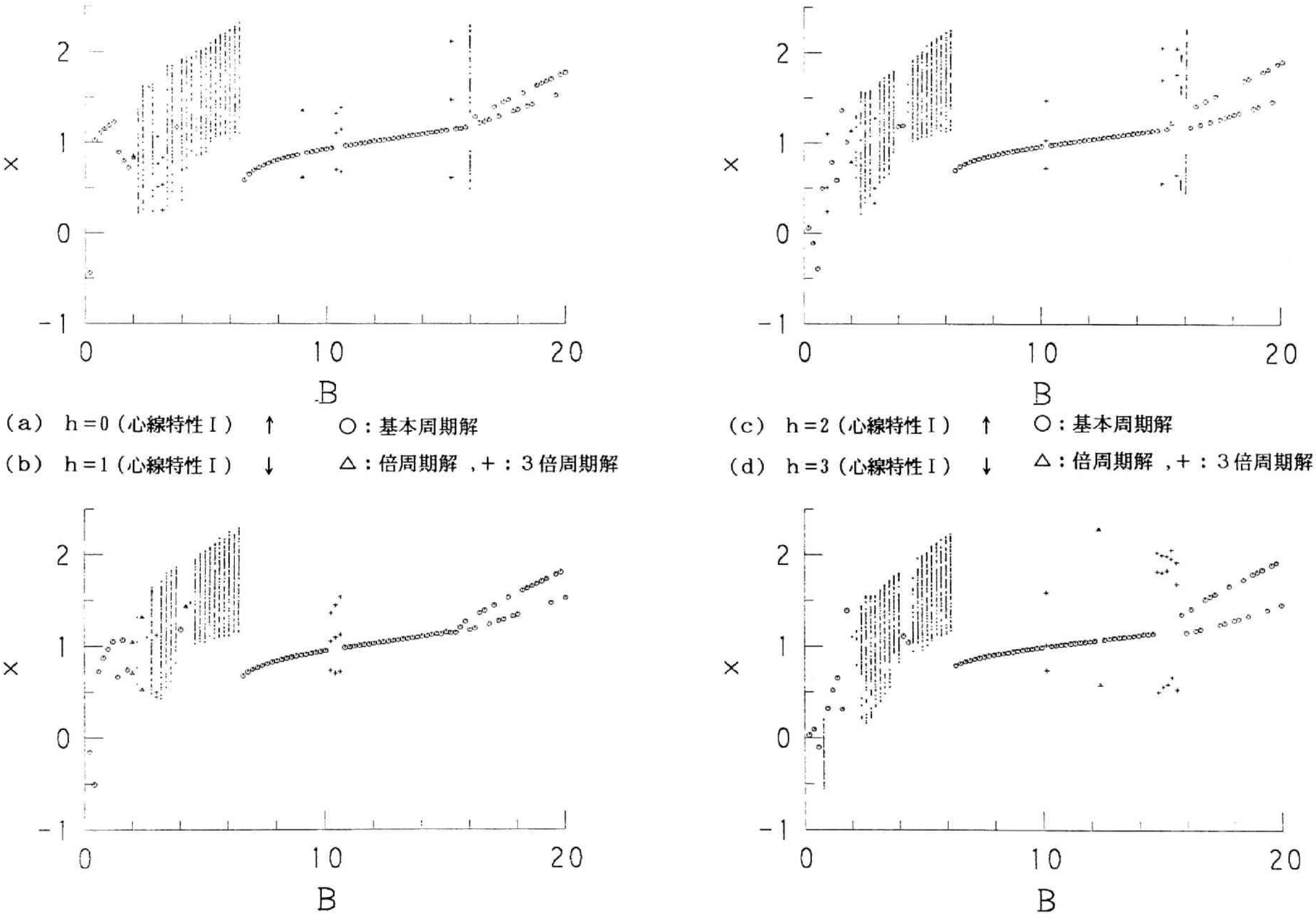
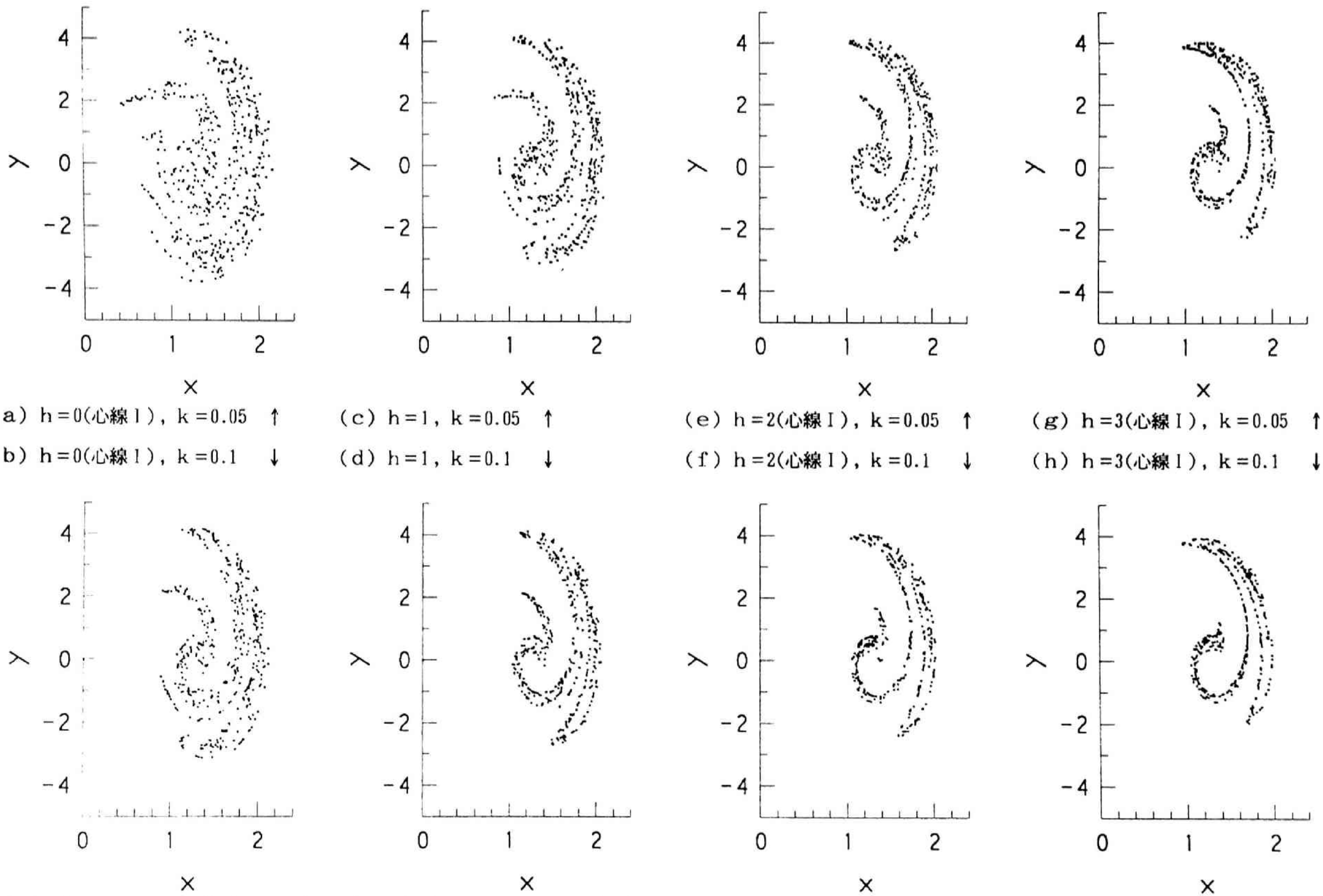
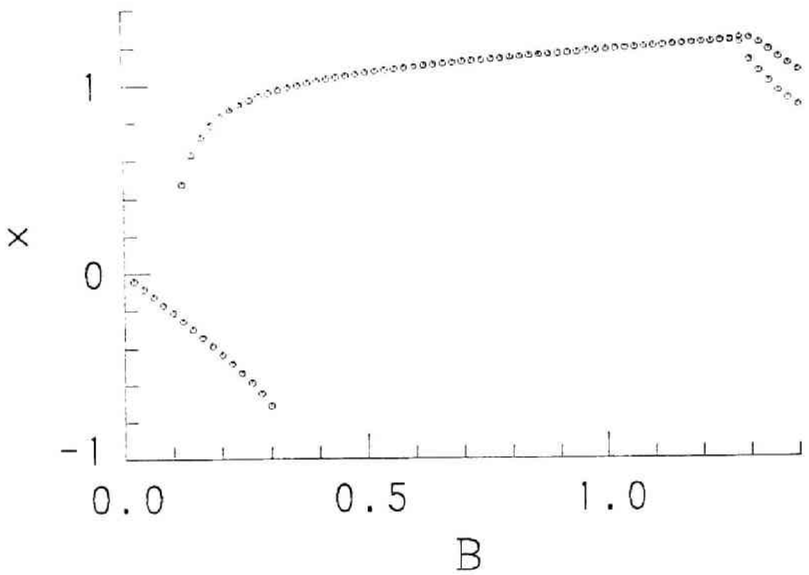


図６．９０ 分岐図（並列共振回路，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0）



(a) h = 0(心線 I), k = 0.05 ↑
(b) h = 0(心線 I), k = 0.1 ↓
(c) h = 1, k = 0.05 ↑
(d) h = 1, k = 0.1 ↓
(e) h = 2(心線 I), k = 0.05 ↑
(f) h = 2(心線 I), k = 0.1 ↓
(g) h = 3(心線 I), k = 0.05 ↑
(h) h = 3(心線 I), k = 0.1 ↓

図6.91 Poincaré写像 (x(iT), y(iT)) (i = 501, …, 1000) (並列共振回路, $\nu = 1$, $B_0 = 0$)



(a) x(i T) (i =101,…,200) ↑　　○：基本周期解

(b) y(i T) (i =101,…,200) ↓

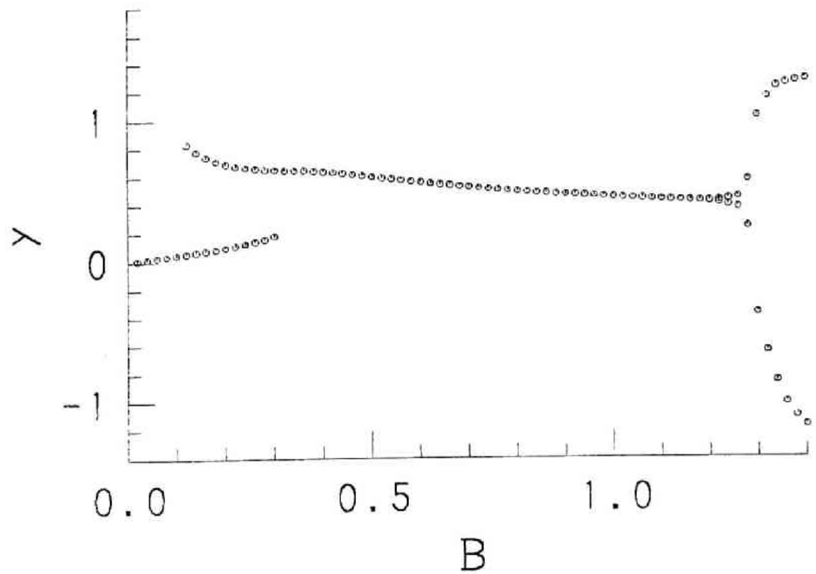
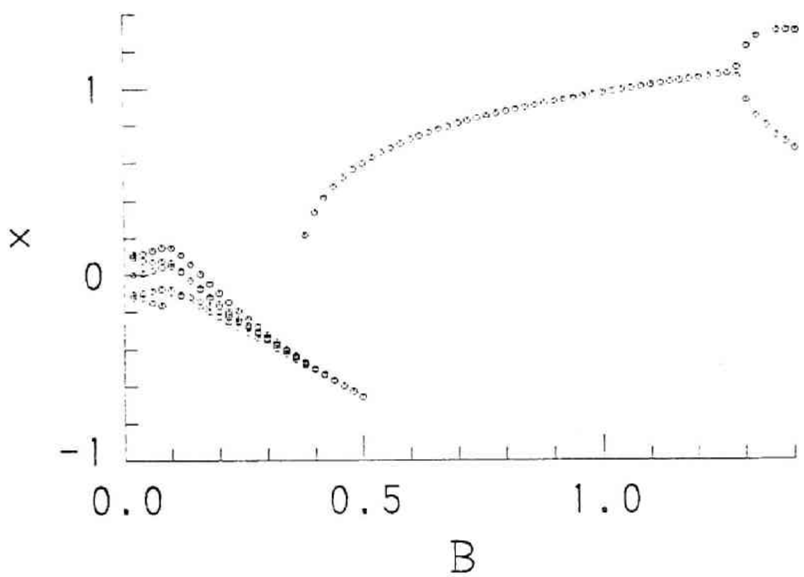


図6．9 2　分岐図（並列共振回路，h =0，k =0.1，ν=1，B_0=0)



(a) x(i T) (i =101,…,200) ↑　　○：基本周期解

(b) y(i T) (i =101,…,200) ↓

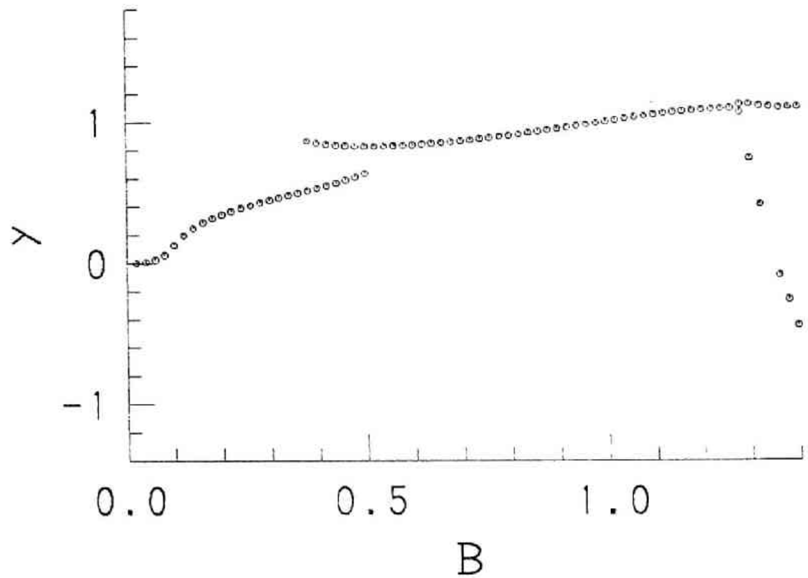
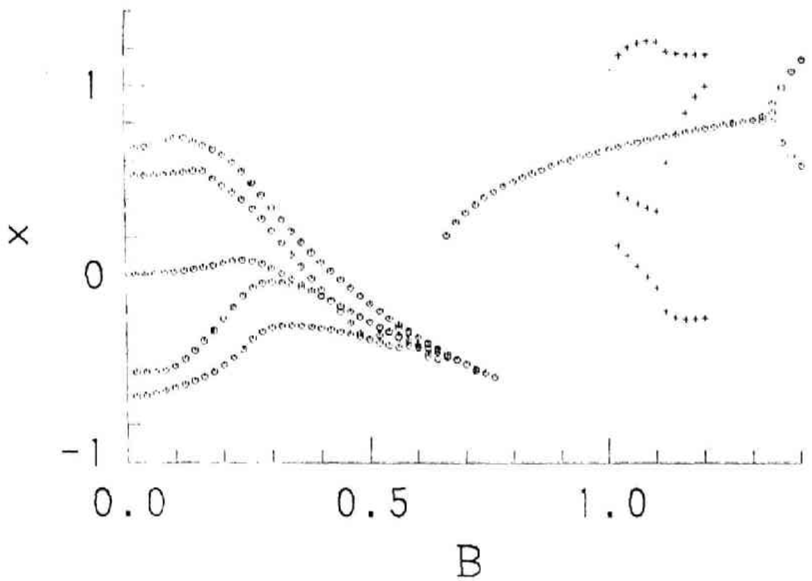


図6．9 3　分岐図（並列共振回路，h =1，k =0.1，ν=1，B_0=0)



(a) x(i T) (i=101,…,200) ↑　○：基本周期解
(b) y(i T) (i=101,…,200) ↓　△：倍周期解 ，+：3倍周期解

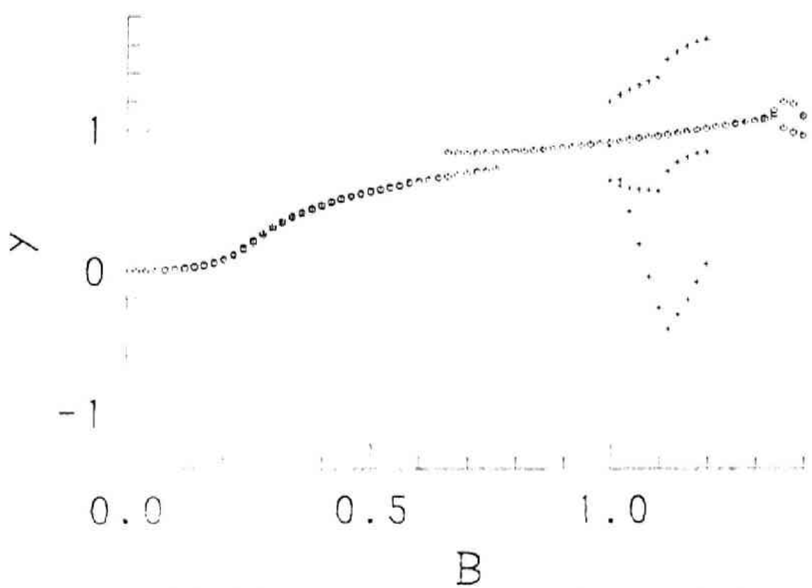
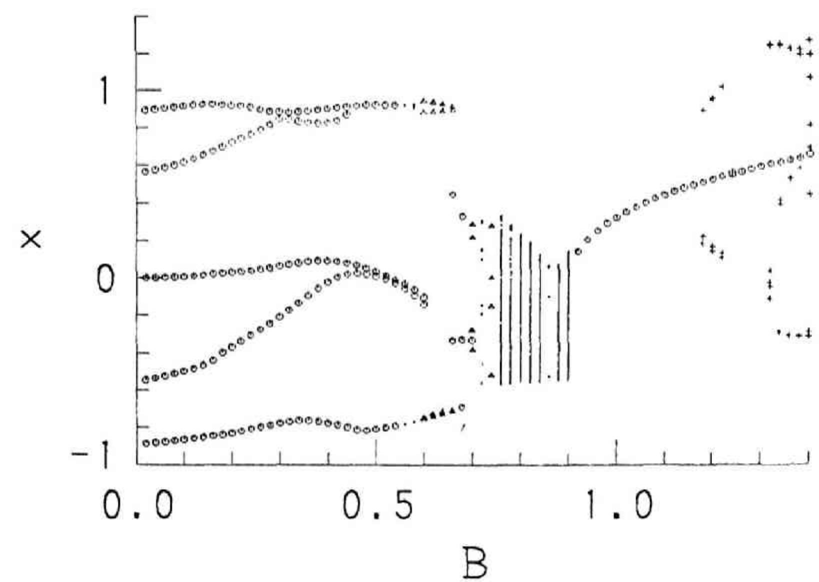


図6.94　分岐図（並列共振回路，h=2，k=0.1，ν=1，B_0=0)



(a) x(i T) (i=101,…,200) ↑　○：基本周期解
(b) y(i T) (i=101,…,200) ↓　△：倍周期解 ，+：3倍周期解

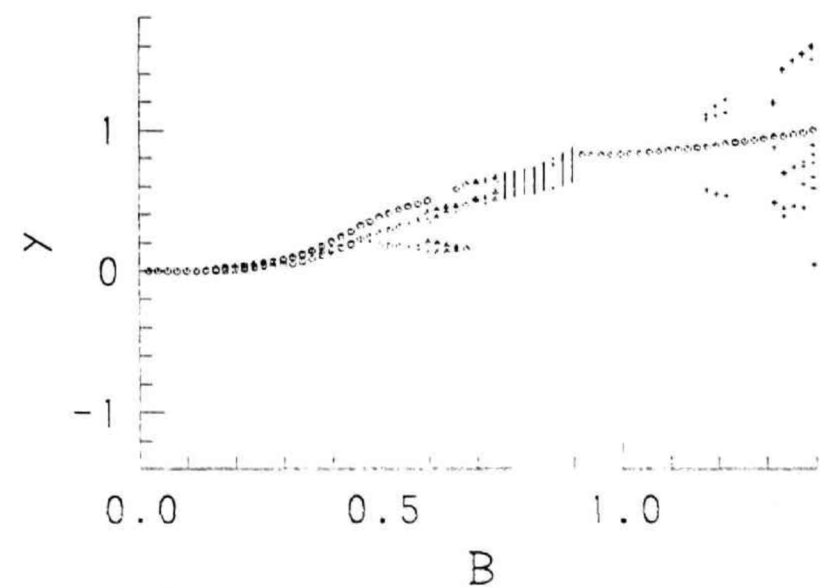
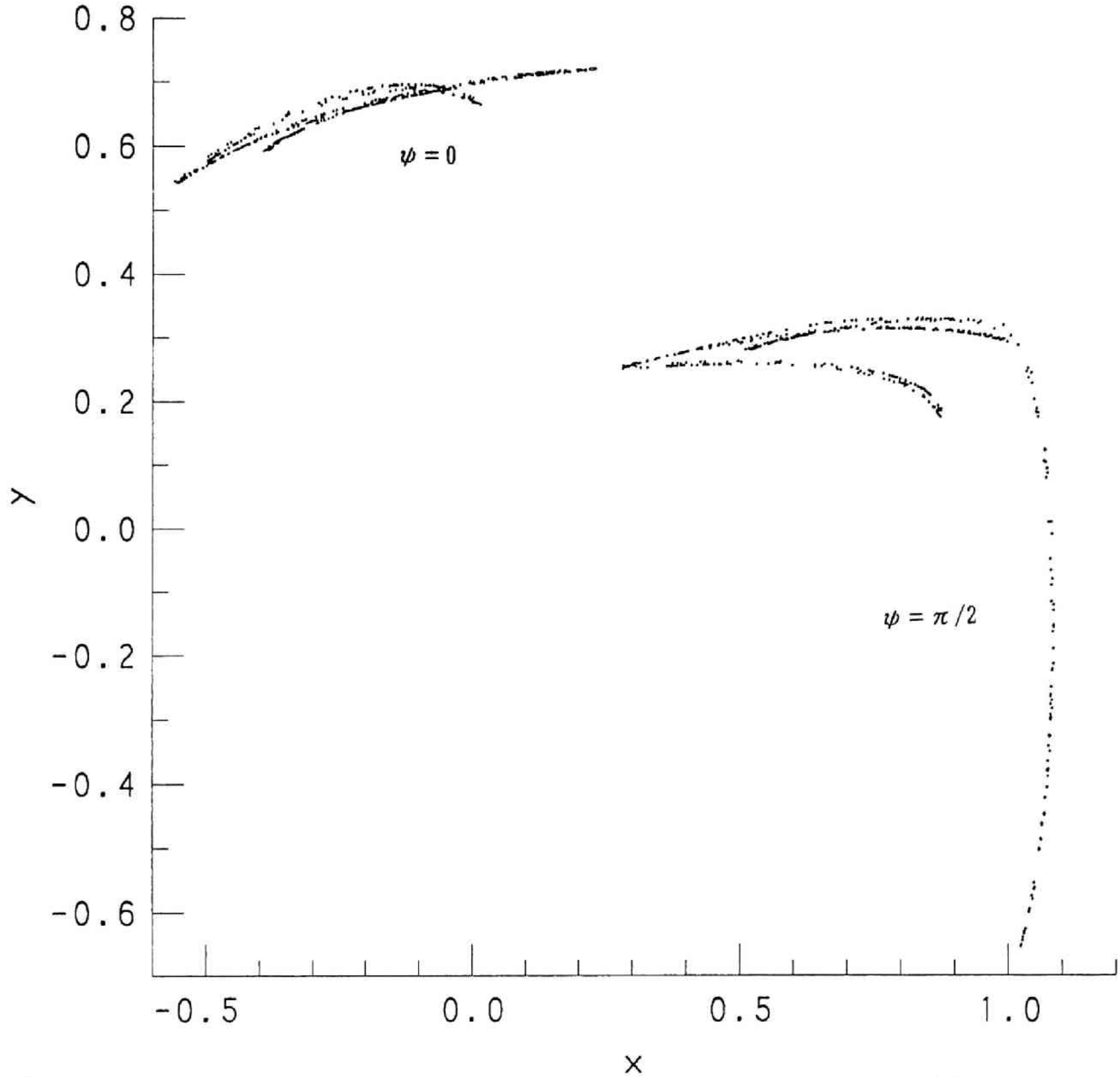


図6.95　分岐図（並列共振回路，h=3，k=0.1，ν=1，B_0=0)



(a) Poincaré写像 ($x(iT+\psi), y(iT+\psi)$) ($i=501,\cdots,1000$, $\psi=0, \pi/2$) ↑

(b) $x(t)$の定常波形 ↓

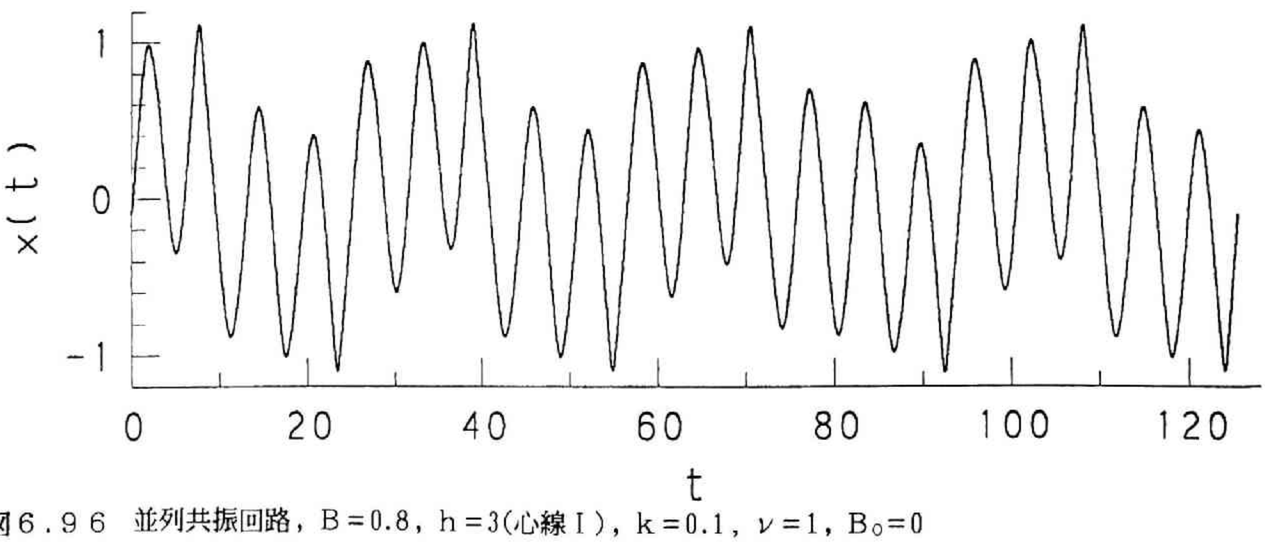


図6.96 並列共振回路，$B=0.8$，$h=3$(心線Ⅰ)，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$

第７章　周期振動の集合

７．１　定常周期振動の集合

３．２節で述べたように，周期解の作るヒステリシスループが不飽和ループとなる場合には，周期解が無限集合をなすことがある．このような場合には，６．６節で見たように，状態方程式の初期値の違いにより，得られる $x-\xi$ 定常ループが異なることになる．表７．１に示す５０通りの初期値から出発して，状態方程式(6.14)（並列共振回路）を数値積分した結果得られる $x-\xi$ 定常ループを，図７．１(a)～(d)，図７．２(a)～(d)，図７．３(a)～(f)，に示す．ただし，図７．１～図７．３は，それぞれ，

$k=0.1$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$

として，

図７．１：$h=1$，　　　　　　$k=0.1$ ，$B=0.1$，0.2，0.3，0.35

図７．２：$h=2$（心線特性Ｉ），$k=0.1$ ，$B=0.3$，0.4，0.5，0.6

図７．３：$h=3$（心線特性Ｉ），$k=0.1$ ，$B=0.3, 0.4, 0.45, 0.5, 0.57, 0.63$

とした場合を示しており，図の $x-\xi$ ループの各々が，それぞれ式(6.14)の１つの周期解を表している．$h=1$の場合は，$\xi(x)=\eta(x)$であるので，３．２節で述べた式(3.26)の系の例と同じであり，ループの相似性が見られる．この場合，全ての周期解は式(3.31),(3.32)の形で書かれ，図７．４(a)(b)に示すように，メジャーループの上昇曲線に接する位置から下降曲線に接する位置までの間にループが存在する．このため，Ｂの増加に伴いループが大きくなるに従って，図７．４(b)に示すようにループの存在できる範囲が狭くなり，ループはメジャーループ内の中央部付近に集中するようになる．$h=2$，3の場合は，$\xi(x)$はプライザッハモデル単独の特性（$\eta(x)$）ではないのでループの相似性が失われる（図７．５(a)）が，$h=2$の場合（図７．２）には，全体的に$h=1$の場合（図７．１）と類似した傾向が見られる．$h=3$の場合（図７．３）には，$B=0.5$，0.57，0.63では，飽和部に達するループが存在し，$B=0.57$，0.63では，飽和部に達するループと中央部付近のループとに分散して定常ループが分布するようになる．

３．３節および３．４節で述べた方法では，ループが中央に来る周期解以外に，ループが飽和部に達する周期解も求めることができる（飽和部に達すると領域D_0が存在しないため）．従って，図７．５(b)のように，ループが中央に来る周期解の他にループが飽和部に達する定常周期解が存在する場合には，図７．６の特

性曲線に示されるように，３つの安定な周期解が得られることになる．図７．４，図７．５から分かるように，周期解の集合の中にループが飽和部に達する周期解が存在するためには，ｈ≠１でループの相似性が失われることが大きく影響している．従って，このようなループの相似性の喪失が，図７．６のような分岐を生じるための１つの要因となっていると考えられる．図６．５６のξ（ｘ）特性（式(6.26)，(6.29)の分布関数）を用いてｈ＝1とした場合の振幅特性曲線（図６．５７）において，図７．６のような分岐が生じていないのは，ループの相似性が保たれているためであると考えられる．

７．２　周期解の集合

前章までは，図３．５（ａ）に示す磁化状態を仮定して解曲線を求めてきた．しかし，このような仮定の下では，前節で見たような周期解の集合の中の一部の周期解しか得られない．本節では，図３．５（ａ）の磁化状態以外にも，様々な磁化状態を仮定して周期解を求めることにより，周期解の集合の性質を調べることにする．

７．２．１　周期解の存在範囲

まず，図３．７（ａ），（ｂ）のように，領域D_0が全て負または正に磁化されている状態を仮定する．図３．７（ａ）および（ｂ）の磁化状態を仮定して周期解を求めると，図７．７のループ（−）およびループ（＋）のように，メジャーループの上昇曲線および下降曲線に接するｘ−ξループが得られる．ここでは，図３．７（ａ）および（ｂ）の磁化状態を仮定して周期解を求めることにより得られる特性曲線を，それぞれ，特性曲線（−）および特性曲線（＋）と呼ぶことにする．これに対して，これまでのように，図３．５（ａ）の磁化状態を仮定して得られる特性曲線を，特性曲線（０）と呼ぶことにする．ただし，ループが飽和部に達する場合，すなわち，

$$\eta_{max} \geqq \eta_s,\ \text{または},\ \eta_{min} \leqq -\eta_s \tag{7.1}$$

となる場合には，領域D_0は存在しないので特性曲線（＋），（０），（−）の区別はなくなる．周期解の安定性については，３．５節と同様に考えて，図３．７（ａ）の磁化状態を仮定するときには，

$$\text{①}\ \partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max},\ -\eta_s \leqq \eta_v \leqq \eta_{max})$$
$$\partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max},\ \eta_v = \eta_{min}) \tag{7.2}$$

② $\partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]}$: ($\eta_u = \eta_{max}$, $\eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}$)
$\partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]}$: ($\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max}$, $\eta_v = \eta_{min}$) (7.3)

の２種類の境界（図７．８(ａ)(ｂ)）を仮定した場合について，また，図３．７(ｂ)の磁化状態を仮定する場合には，

① $\partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]}$: ($\eta_u = \eta_{max}$, $\eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}$)
$\partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]}$: ($\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_S$, $\eta_v = \eta_{min}$) (7.4)

② $\partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]}$: ($\eta_u = \eta_{max}$, $\eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}$)
$\partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]}$: ($\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max}$, $\eta_v = \eta_{min}$) (7.5)

の２種類の境界（図７．８(ｃ)(ｄ)）を仮定した場合について，それぞれ判別を行うことにする（ここでも，①，②の境界線分を仮定する判別の方法を，それぞれ，判別法①，判別法②と呼ぶことにする）．

まず，式(6.14)の並列共振回路において，

$k = 0.1$, $\nu = 1$, $h = 1, 2$（心線特性Ｉ） $B_0 = 0$ (7.6)

とした場合の振幅特性曲線(＋),(０),(－)を，図７．９(ａ)(ｂ)（ｈ＝1），図７．１０(ａ)(ｂ)（ｈ＝2）に示す．ただし，それぞれ，Ｂの変化に対する，

（ａ）$x_{[1,0]}$（ｘの最大値）の変化

（ｂ）$x_{[2,0]}$（ｘの最小値）の変化

を示している．式(7.6)の条件下では，前節でも述べたように，周期解の作るｘ－ξループは上昇曲線に接する位置から下降曲線に接する位置までの範囲に存在する．従って，図７．７から分かるように，図７．９，図７．１０の特性曲線(＋)は，様々な周期解の作るｘ－ξループにおけるｘの最大値($x_{[1,0]}$)と最小値($x_{[2,0]}$)の上限を示し，特性曲線(－)は，ｘの最大値($x_{[1,0]}$)と最小値($x_{[2,0]}$)の下限を示している．

次に，図７．１１(ａ)～(ｈ)に，ｈ＝3（心線特性Ｉ）とした場合の振幅特性曲線(＋),(０),(－)を示す．ただし，

図７．１１(ａ)(ｂ)は，振幅特性(＋)，図７．１１(ｃ)(ｄ)は，振幅特性(－)

図７．１１(ｅ)～(ｈ)は，振幅特性(＋)(０)(－)

を示す．この場合，特性曲線(＋)と(－)を一見しただけでは，$x_{[1,0]}$（ｘの最大値）の存在範囲などが分かりにくい．そこで，次項では，図３．７(ａ)(ｂ)以外にも磁化状態を仮定して周期解を求め，ｘ－ξループの存在範囲を調べることにする．

7.2.2 周期解の分布

まず，図7.12(a)(b)，図7.13(a)(b)に示す2つの磁化状態を仮定する．ここでは，それぞれの磁化状態を，図に示したη_Bの値を用いて表すことにする．ただし，

$\eta_B \geqq 0$の場合は図7.12の磁化状態

$\eta_B \leqq 0$の場合は図7.13の磁化状態

を表すものとする．η_Bの値を変えることにより，領域D_{0+}における積分値d'（式(3.33)）を，式(3.32),(3.30)の範囲で任意の値に定めることができる．従って，η_Bを，$-\eta_S \leqq \eta_B \leqq \eta_S$の範囲で変化させることにより，（領域$D_0$の磁化状態の違いを除いて）周期解の集合を全て求めることができる．図7.12(b)，図7.13(b)から分かるように，

$$\eta_{[1,0]} \geqq \eta_B \geqq 0, \quad \text{または,} \quad \eta_{[2,0]} \leqq \eta_B \leqq 0 \tag{7.7}$$

の場合には，磁化状態が図3.5(a)の場合と等しくなり，従って，特性曲線は特性曲線(0)と等しくなる．式(7.7)が満たされる場合には図3.5(a)の磁化状態を仮定する場合と同様に安定性を判別し（3．5節参照），また，式(7.7)が満たされない場合については，$\eta_B \geqq 0$の場合は，

$$\left.\begin{aligned} &① \ \partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max}, \ \eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\quad \partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_B, \ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned}\right. \tag{7.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &② \ \partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max}, \ \eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\quad \partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max}, \ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned}\right. \tag{7.9}$$

の2種類の境界（図7.14(a)(b)）を仮定した場合について，また，$\eta_B \leqq 0$の場合は，

$$\left.\begin{aligned} &① \ \partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max}, \ \eta_B \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\quad \partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max}, \ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned}\right. \tag{7.10}$$

$$\left.\begin{aligned} &② \ \partial D_{[1,0]} / \partial \eta_{[1,0]} : (\eta_u = \eta_{max}, \ \eta_{min} \leqq \eta_v \leqq \eta_{max}) \\ &\quad \partial D_{[2,0]} / \partial \eta_{[2,0]} : (\eta_{min} \leqq \eta_u \leqq \eta_{max}, \ \eta_v = \eta_{min}) \end{aligned}\right. \tag{7.11}$$

の2種類の境界（図7.14(c)(d)）を仮定した場合について，それぞれ安定性を判別することにする（ここでも，①，②の境界線分を仮定する判別の方法を，それぞれ，判別法①，判別法②と呼ぶことにする）．図7.15に，

$h=1$ ，$k=0.1$ ，$\nu=1$ ，$B_0=0$ ，$\eta_B=0$，± 0.5，± 1

とした場合の振幅特性を示し，また，図7.16に，

$h=2$（心線特性Ⅰ）　，$k=0.1$　，$\nu=1$　，$B_0=0$　，

$\eta_B=0,\ \pm0.2,\ \pm0.4,\ \pm0.6,\ \pm0.8,\ \pm1$

とした場合の振幅特性を示し，さらに，図７．１７(ａ)(ｂ)に，

$h=3$（心線特性Ⅰ）　，$k=0.1$　，$\nu=1$　，$B_0=0$　，

$\eta_B=0,\ \pm0.2,\ \pm0.4,\ \pm0.6,\ \pm0.7,\ \pm0.8,\ \pm0.9,\ \pm1$

とした場合の振幅特性を示す．ただし，$\eta_B=1,\ 0,\ -1$とした場合の特性曲線は，特性曲線(＋),(０),(－)とそれぞれ等しい．図７．１７を見ると，$h=3$では，特性曲線(＋)と(－)に挟まれた領域の中に，特性曲線が存在しない部分領域があることが分かる．また，図７．１７(ａ)を見ると，判別法①を用いた場合には，特性曲線(０)の一部が，周期解が安定な領域と不安定な領域との境界線となっていることが分かる．

次に，図７．１８(ａ)(ｂ)，図７．１９(ａ)(ｂ)に示す２つの磁化状態を仮定した場合について，特性曲線を求める．ここでは，それぞれの磁化状態を，図に示した$\eta_B{}'$，$\eta_B{}''$の値を使って表すことにする．この場合も，$\eta_B{}'$あるいは$\eta_B{}''$の値を変化させることにより，領域D_{0+}における積分値d'（式(3.33)）を，式(3.32),(3.30)の範囲で任意の値に定めることができる．従って，$\eta_B{}'$あるいは$\eta_B{}''$を，$-\eta_s \sim \eta_s$の範囲で変化させることにより，（領域D_0の磁化状態の違いを除いて）周期解の集合を全て求めることができる．図７．１８(ｂ)から分かるように，

$$\eta_{[1,0]} > \eta_B{}' \tag{7.12}$$

の場合には，磁化状態が図３．７(ａ)の場合と等しくなり，従って，得られる特性曲線は特性曲線(－)と等しくなる．また，図７．１９(ｂ)から分かるように，

$$\eta_{[2,0]} < \eta_B{}'' \tag{7.13}$$

の場合には，磁化状態が図３．７(ｂ)の場合と等しくなり，従って，得られる特性曲線は特性曲線(＋)と等しくなる．式(7.12)あるいは式(7.13)が満たされる場合にはそれぞれ図３．７(ａ)，(ｂ)の磁化状態を仮定する場合と同様に安定性を判別し（７．２．１項参照），また，式(7.12),(7.13)が満たされない場合については，図７．１８(ａ)の磁化状態を仮定する場合については，

$$\text{①}\ \begin{aligned} &\partial D_{[1,0]}/\partial\eta_{[1,0]}:\ (\eta_u=\eta_{max},\ \eta_{min}\leqq\eta_v\leqq\eta_{max}) \\ &\partial D_{[2,0]}/\partial\eta_{[2,0]}:\ (\eta_{min}\leqq\eta_u\leqq\eta_B{}',\ \eta_v=\eta_{min}) \end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\text{②}\ \begin{aligned} &\partial D_{[1,0]}/\partial\eta_{[1,0]}:\ (\eta_u=\eta_{max},\ \eta_{min}\leqq\eta_v\leqq\eta_{max}) \\ &\partial D_{[2,0]}/\partial\eta_{[2,0]}:\ (\eta_{min}\leqq\eta_u\leqq\eta_{max},\ \eta_v=\eta_{min}) \end{aligned} \tag{7.15}$$

の２種類の境界（図７．２０(ａ)(ｂ)）を仮定した場合について，また，図７．

１９(ａ)の磁化状態を仮定する場合については，

$$① \ \partial D_{[1,0]}/\partial\eta_{[1,0]}：(\eta_u=\eta_{max},\ \eta_B{}''\leqq\eta_v\leqq\eta_{max}) \qquad (7.16)$$
$$\partial D_{[2,0]}/\partial\eta_{[2,0]}：(\eta_{min}\leqq\eta_u\leqq\eta_{max},\ \eta_v=\eta_{min})$$

$$② \ \partial D_{[1,0]}/\partial\eta_{[1,0]}：(\eta_u=\eta_{max},\ \eta_{min}\leqq\eta_v\leqq\eta_{max}) \qquad (7.17)$$
$$\partial D_{[2,0]}/\partial\eta_{[2,0]}：(\eta_{min}\leqq\eta_u\leqq\eta_{max},\ \eta_v=\eta_{min})$$

の２種類の境界（図７．２１(ａ)(ｂ)）を仮定した場合について，それぞれ安定性を判別することにする（ここでも，①，②の境界線分を仮定する判別の方法を，それぞれ，判別法①，判別法②と呼ぶことにする）．図７．２２(ａ)(ｂ)に，

$h=3$（心線特性Ｉ），$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$，

$\eta_B{}'=0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.7,\ 1$，$\eta_B{}''=0,\ -0.2,\ -0.4,\ -0.6,\ -0.7,\ -1$

とした場合の振幅特性を，それぞれ示す．ただし，$\eta_B{}'=1$，$\eta_B{}''=-1$とした場合の特性曲線は，特性曲線(＋),(－)とそれぞれ等しい．また，図７．２２の特性曲線と特性曲線(０)を重ねて描いた図を図７．２３(ａ)(ｂ)に示す．図７．２３(ａ)を見ると，図７．１８，図７．１９の磁化状態を仮定して，判別法①を用いて安定判別を行った場合には，他の場合（図７．１７，図７．２２(ｂ)）と比較して不安定解の存在範囲が大きいことが分かる．

先に述べたように，η_B，$\eta_B{}'$，$\eta_B{}''$を$-\eta_S\sim\eta_S$の範囲で変化させることにより，領域D_0の磁化状態の違いを除いて，周期解の集合を全てを求めることができる．しかし，領域D_0の磁化状態が違えば周期解の安定性が異なるため，全ての周期解の安定性については知ることができない．しかし，図７．１７，図７．２２にように，判別法によって判別結果が異なる場合においても，図からある程度，全ての周期解の安定性について見当をつけることができると考えられる．例えば，

$h=3$（心線特性Ｉ），$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$

の場合，図７．１７，図７．２２などから，特性曲線(＋)と(－)に挟まれた領域は，大体，図７．２４に示すように，

Ｓ：周期解が安定な領域

Ｕ：周期解が不安定な領域

ＳＵ：D_0の磁化状態によって，安定性が異なる領域

Ｎ：周期解が存在しない領域

の４種の部分領域に分割されるものと推測することができる．

	t_0	$x(t_0)$	$y(t_0)$		t_0	$x(t_0)$	$y(t_0)$
1	0.0	-1.0	-1.0	26	π	-1.0	-1.0
2	0.0	-1.0	-0.5	27	π	-1.0	-0.5
3	0.0	-1.0	0.0	28	π	-1.0	0.0
4	0.0	-1.0	0.5	29	π	-1.0	0.5
5	0.0	-1.0	1.0	30	π	-1.0	1.0
6	0.0	-0.5	-1.0	31	π	-0.5	-1.0
7	0.0	-0.5	-0.5	32	π	-0.5	-0.5
8	0.0	-0.5	0.0	33	π	-0.5	0.0
9	0.0	-0.5	0.5	34	π	-0.5	0.5
10	0.0	-0.5	1.0	35	π	-0.5	1.0
11	0.0	0.0	-1.0	36	π	0.0	-1.0
12	0.0	0.0	-0.5	37	π	0.0	-0.5
13	0.0	0.0	0.0	38	π	0.0	0.0
14	0.0	0.0	0.5	39	π	0.0	0.5
15	0.0	0.5	1.0	40	π	0.5	1.0
16	0.0	0.5	-1.0	41	π	0.5	-1.0
17	0.0	0.5	-0.5	42	π	0.5	-0.5
18	0.0	0.5	0.0	43	π	0.5	0.0
19	0.0	0.5	0.5	44	π	0.5	0.5
20	0.0	0.5	1.0	45	π	0.5	1.0
21	0.0	1.0	-1.0	46	π	1.0	-1.0
22	0.0	1.0	-0.5	47	π	1.0	-0.5
23	0.0	1.0	0.0	48	π	1.0	0.0
24	0.0	1.0	0.5	49	π	1.0	0.5
25	0.0	1.0	1.0	50	π	1.0	1.0

表7．1　５０種類の初期値

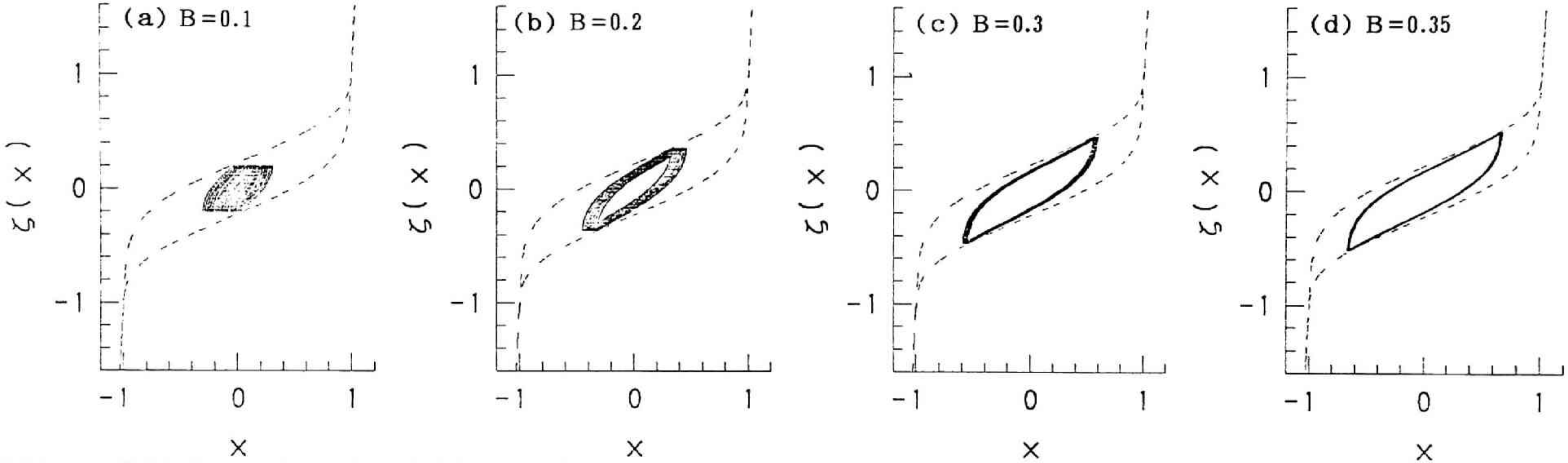


図7.1　周期解の作るx－ξループの集合（並列共振回路，h=1，k=0.1，ν=1，B_0=0）

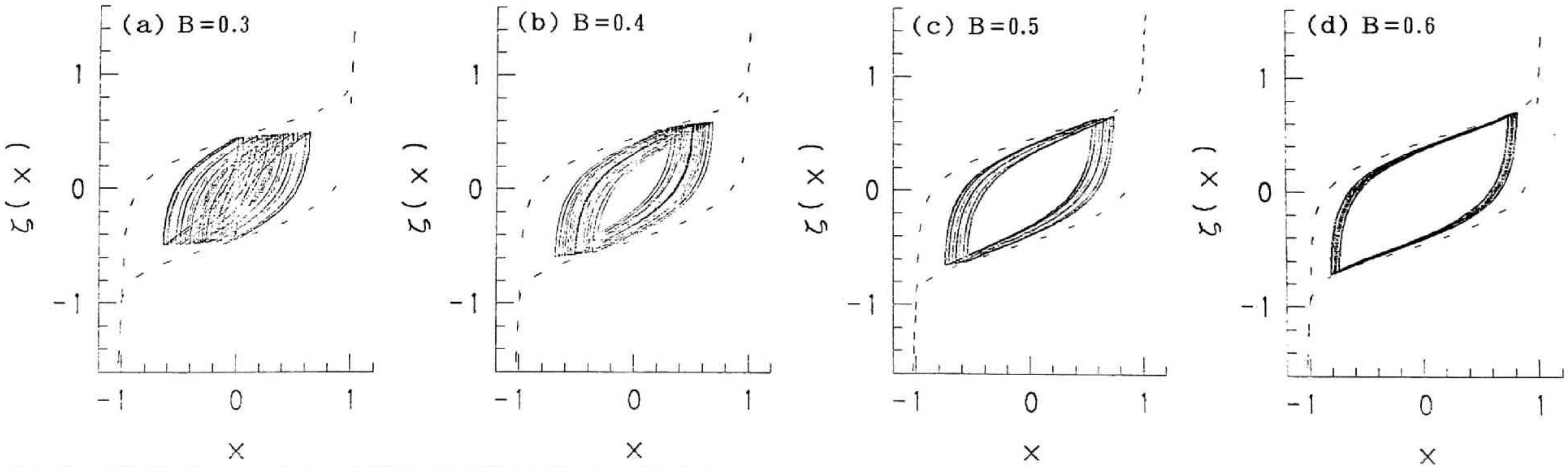


図7.2　周期解の作るx－ξループの集合（並列共振回路，h=2(心線Ⅰ)，k=0.1，ν=1，B_0=0）

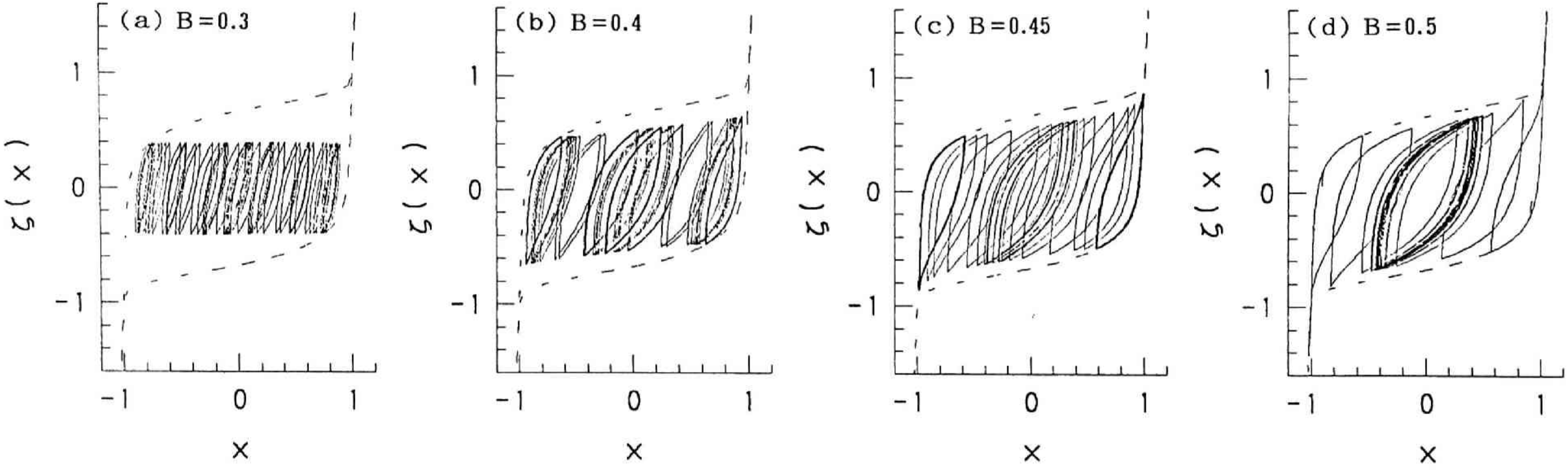
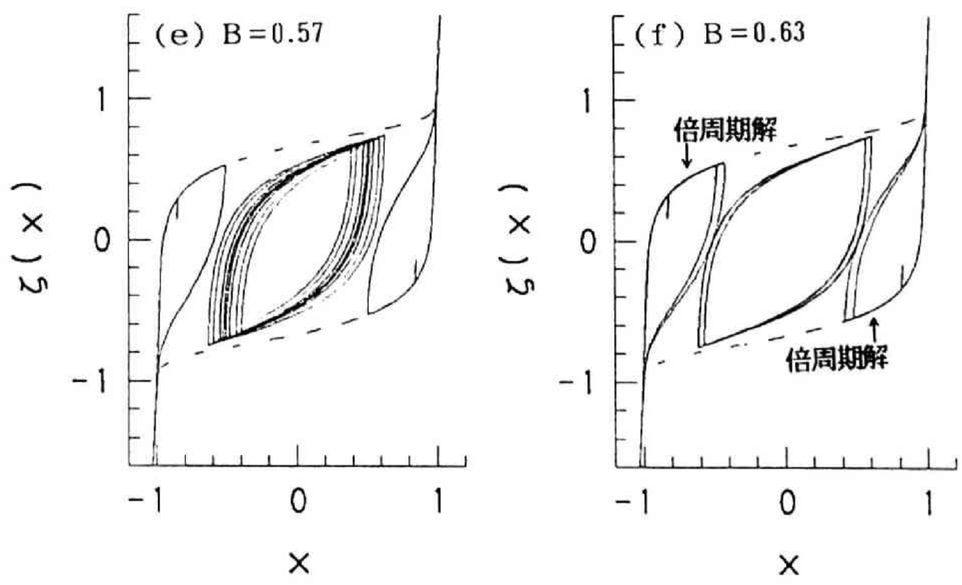


図7.3　周期解の作るx－ξループの集合
（並列共振回路，h＝3(心線Ｉ)，k＝0.1，ν＝1，B_0＝0)



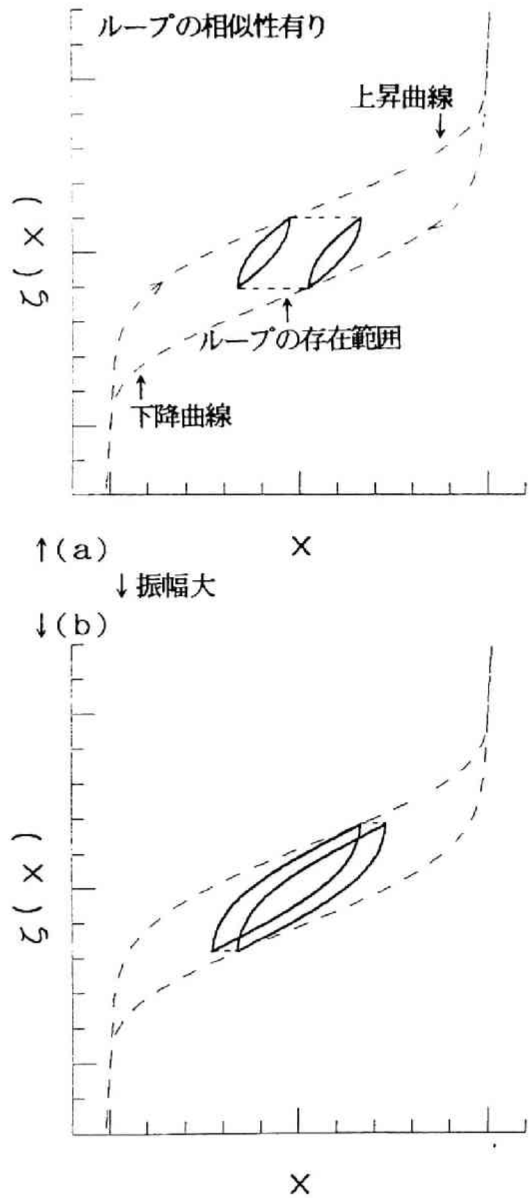


図7.4　h＝1の場合

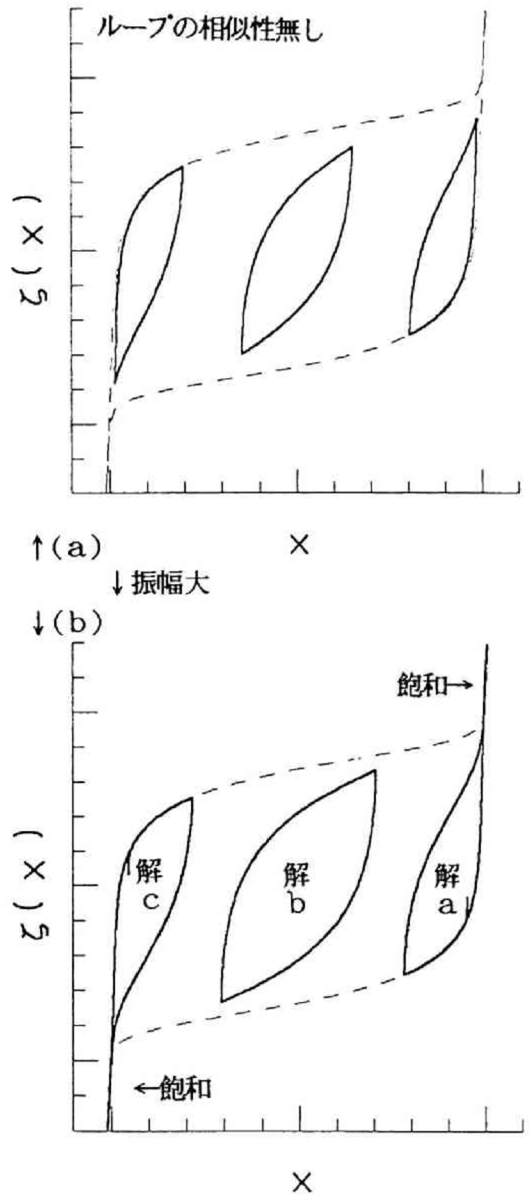


図7.5　h＝3の場合

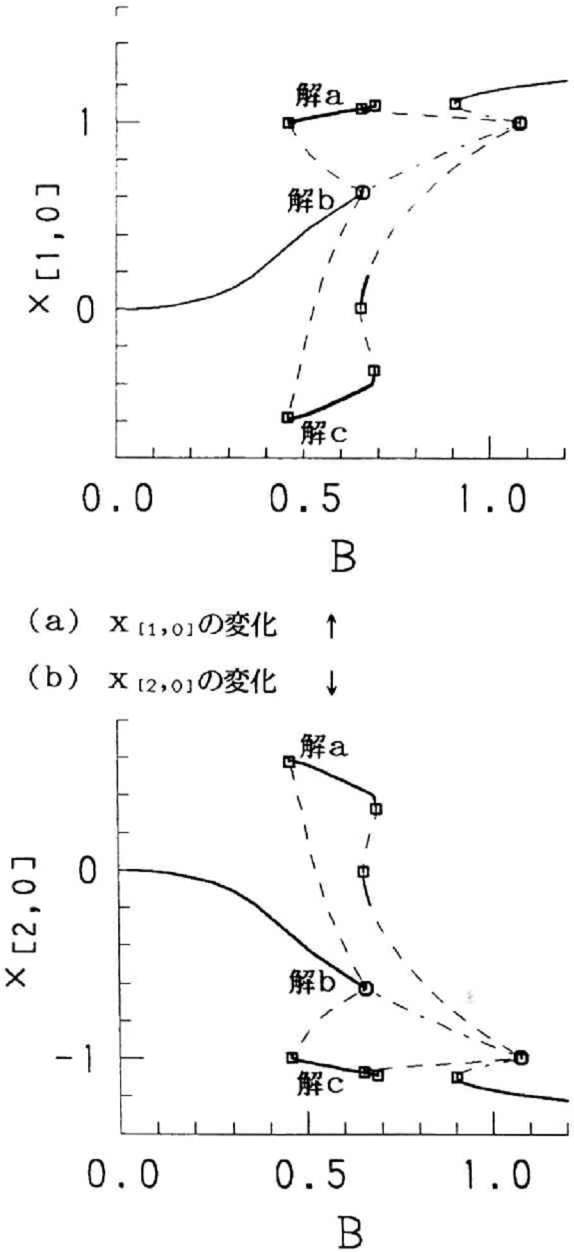


図7.6　特性曲線の分岐（h＝3）

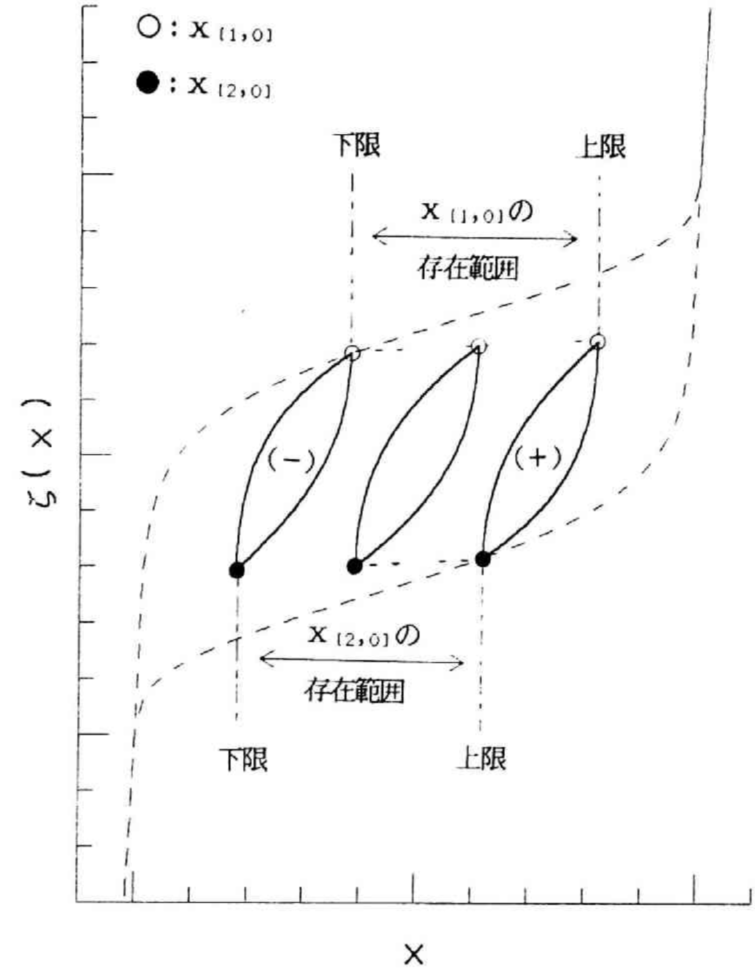


図7.7　周期解の作るx−ξループの存在範囲

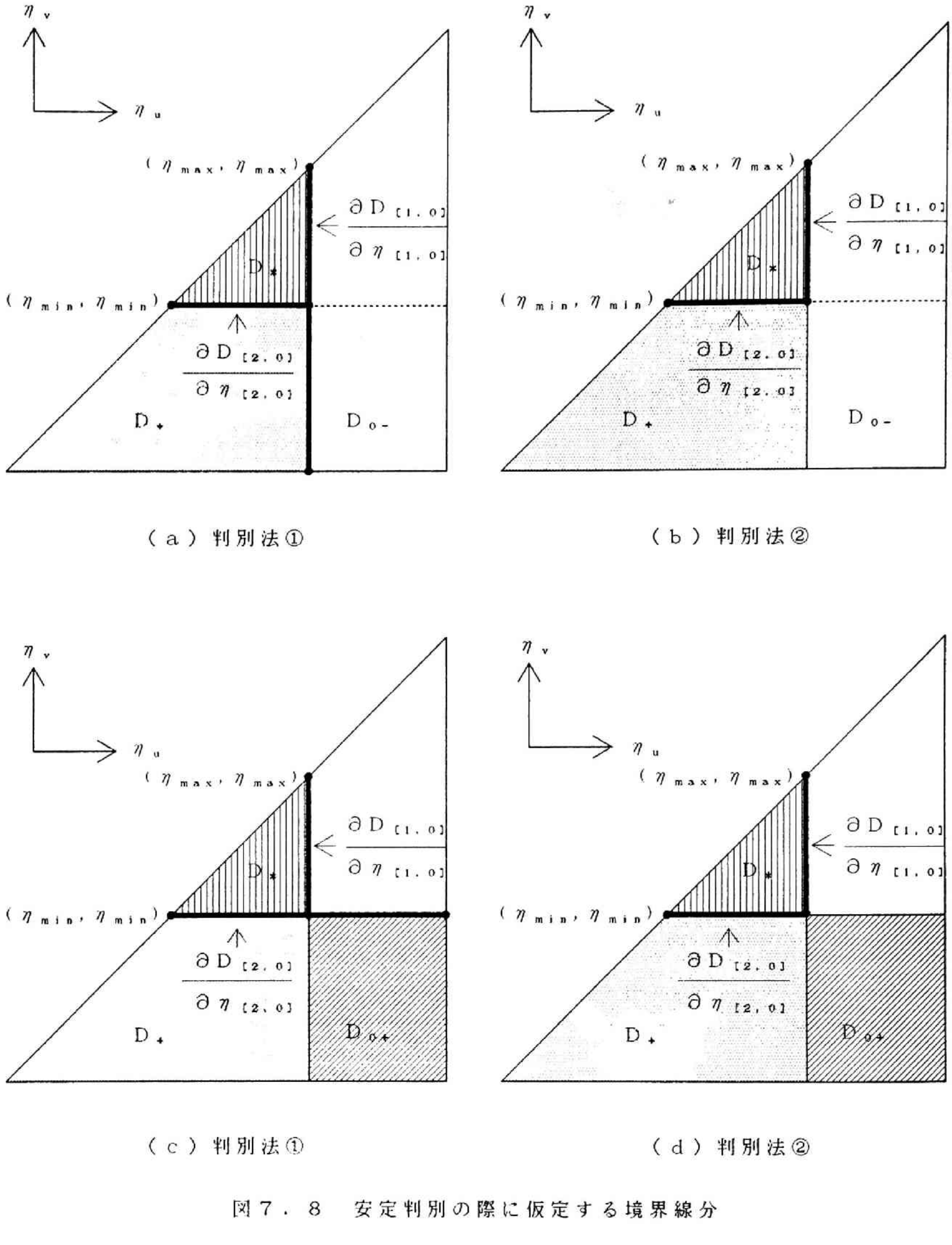
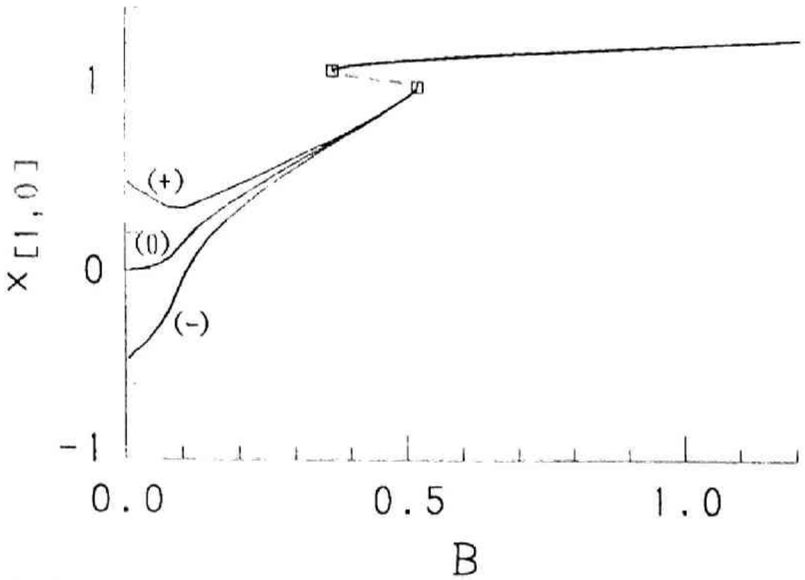


図７．８　安定判別の際に仮定する境界線分

ただし、（a），（b）は図３．７（a）の磁化状態を仮定する場合
（c），（d）は図３．７（b）の磁化状態を仮定する場合



（a） x [1,0]の変化 ↑

（b） x [2,0]の変化 ↓

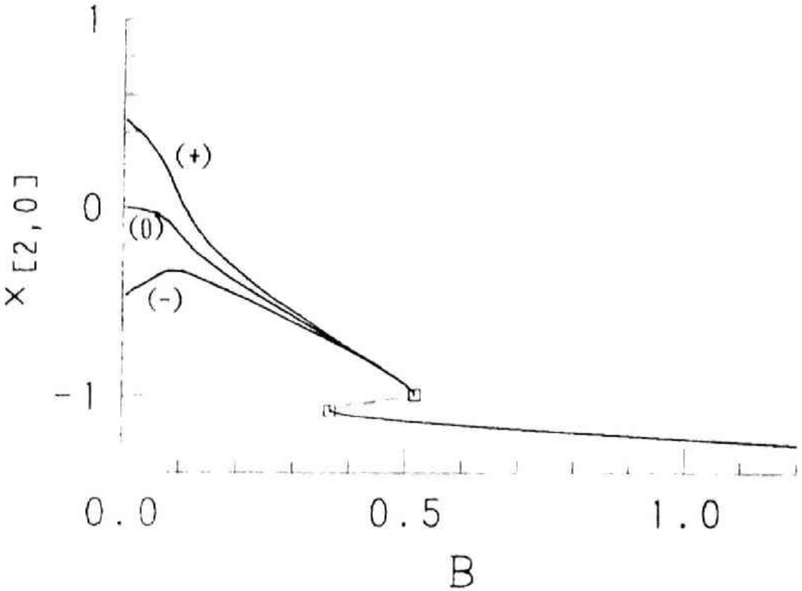
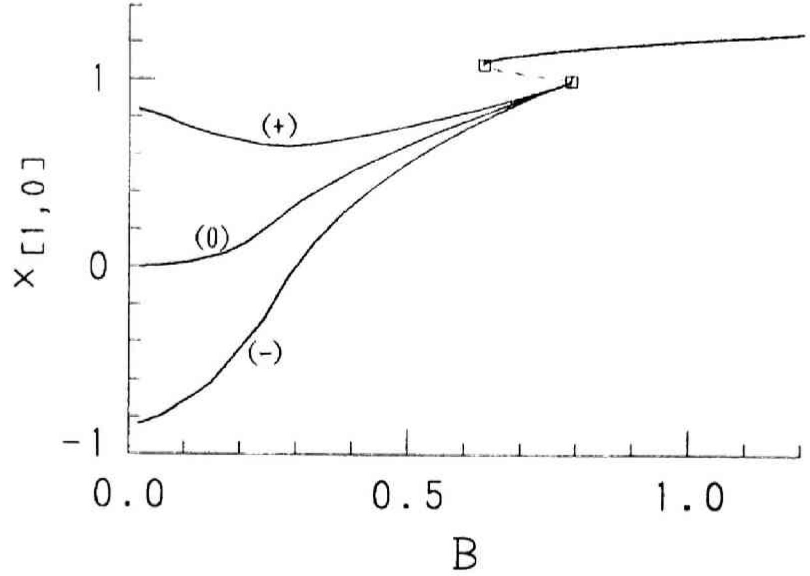


図７．９ 振幅特性曲線(＋),(０),(−)（並列共振回路，h＝1，k＝0.1）



（a） x [1,0]の変化 ↑

（b） x [2,0]の変化 ↓

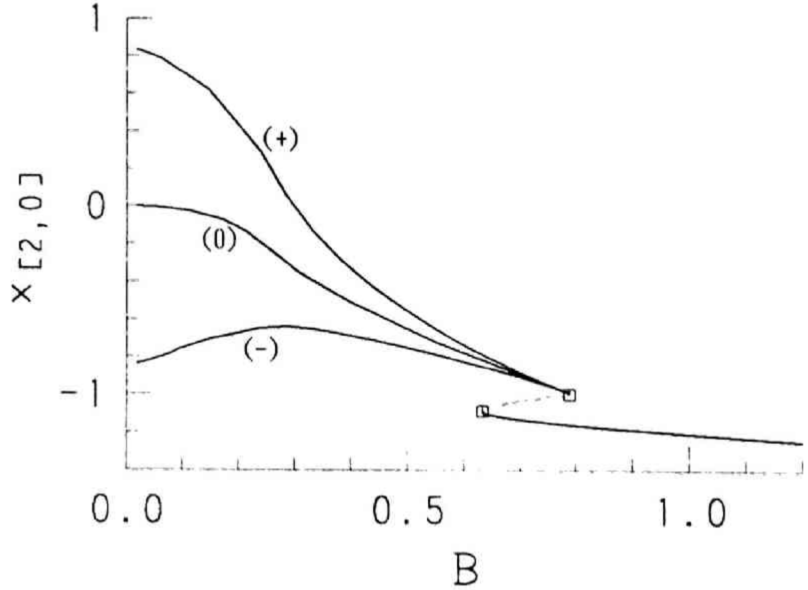
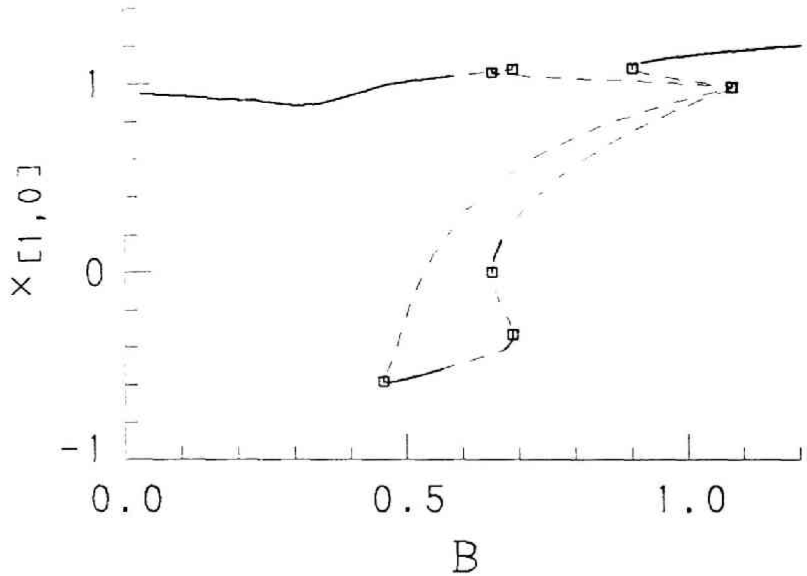
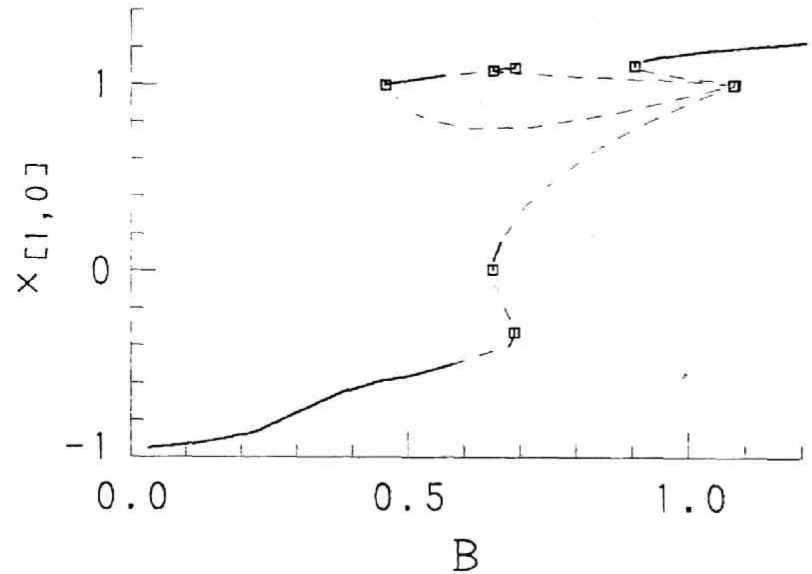


図７．１０ 振幅特性曲線(＋),(０),(−)（並列共振回路，h＝2，k＝0.1）



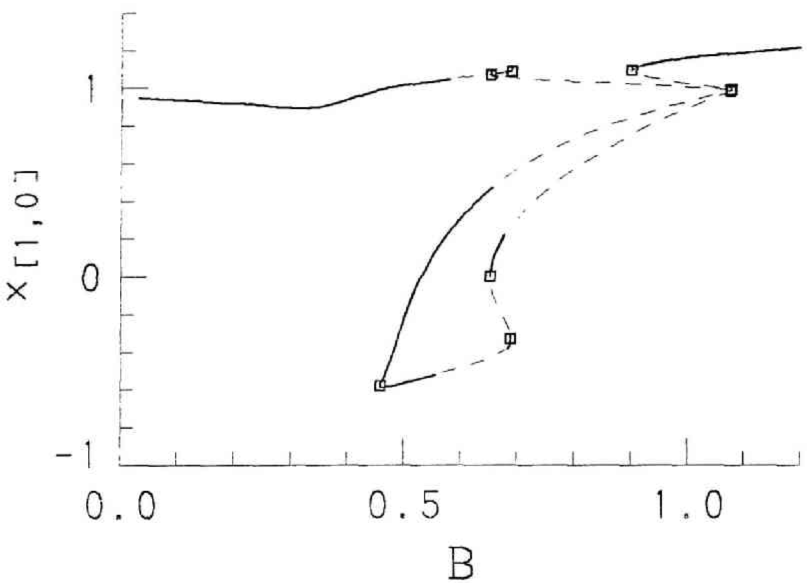


（a） 特性曲線(＋)（安定判別法①） ↑

（b） 特性曲線(＋)（安定判別法②） ↓

（c） 特性曲線(−)（安定判別法①） ↑

（d） 特性曲線(−)（安定判別法②） ↓



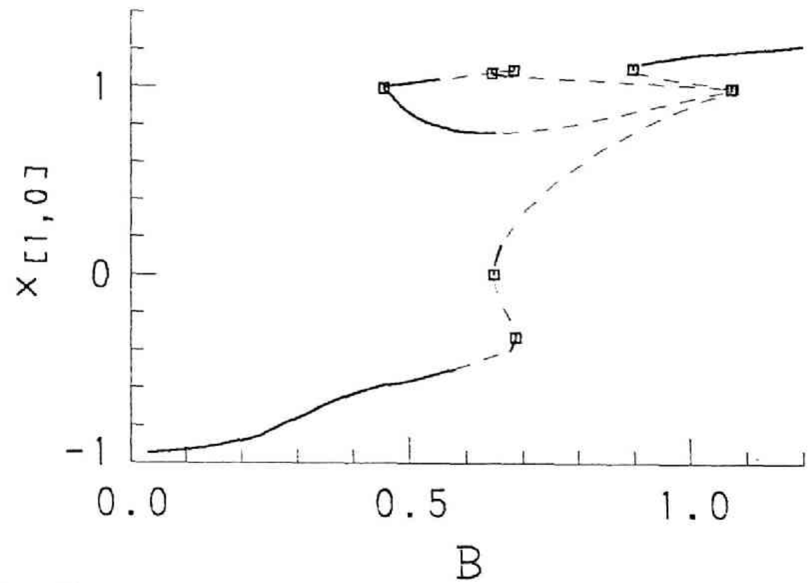
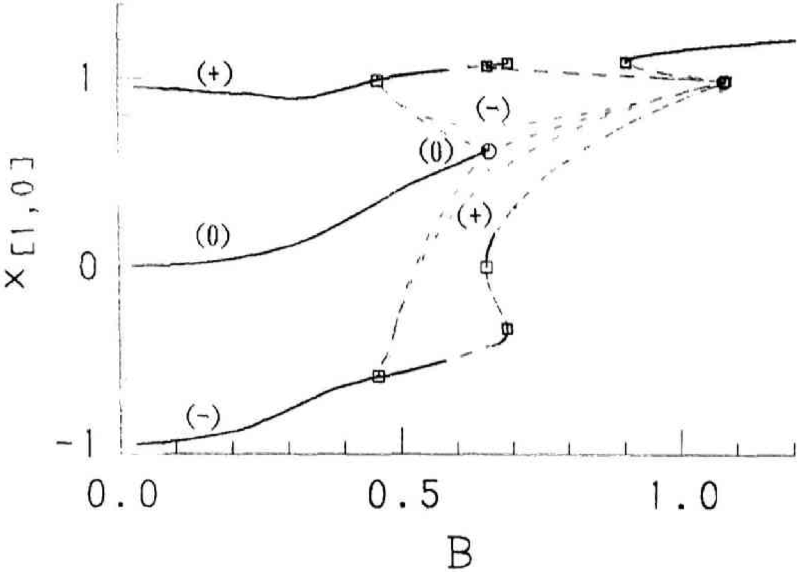
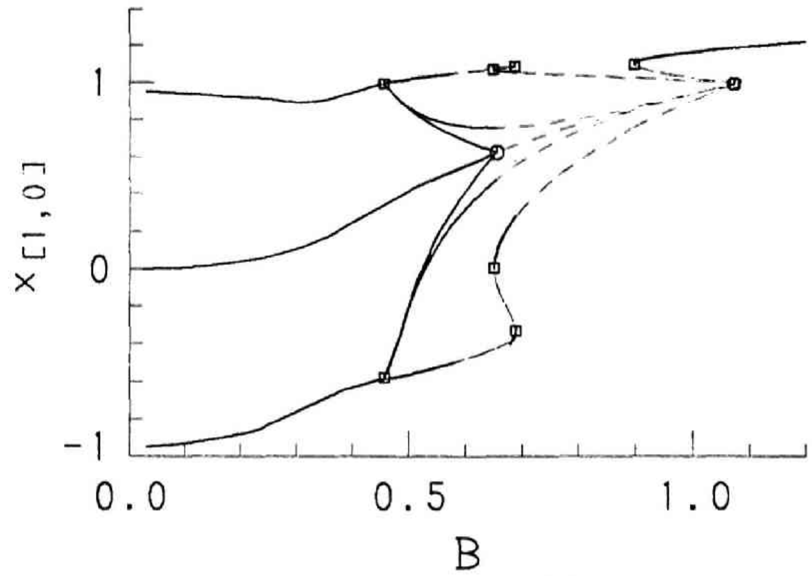


図7.11 振幅特性曲線(＋),(0),(−)（並列共振回路，$h=3$，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$）



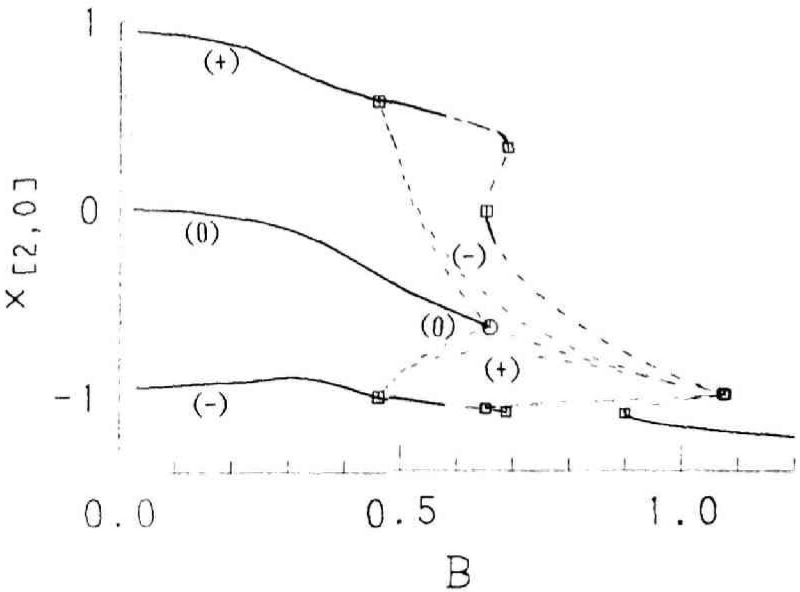


（e） 特性曲線(＋),(0),(－)（$x_{[1,0]}$の変化，安定判別法①）　↑

（f） 特性曲線(＋),(0),(－)（$x_{[2,0]}$の変化，安定判別法①）　↓

（g） 特性曲線(＋),(0),(－)（$x_{[1,0]}$の変化，安定判別法②）　↑

（h） 特性曲線(＋),(0),(－)（$x_{[2,0]}$の変化，安定判別法②）　↓



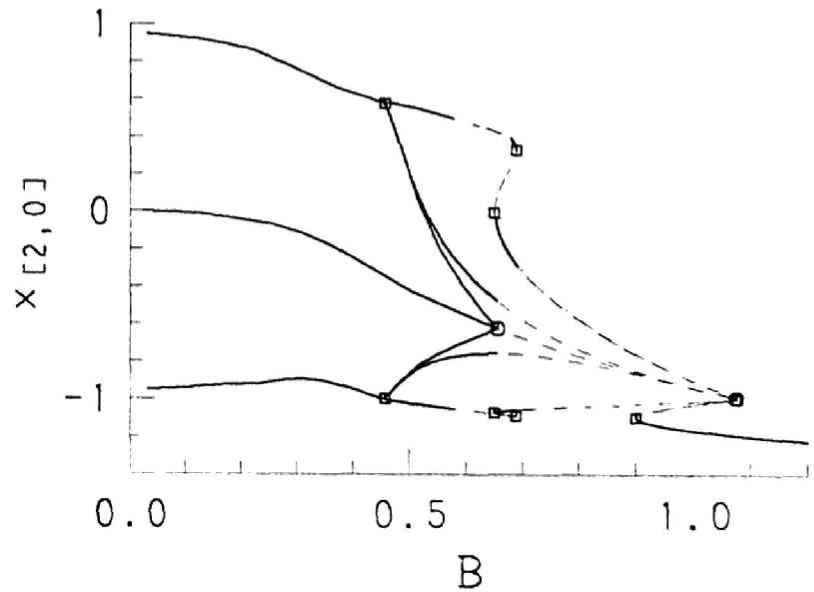
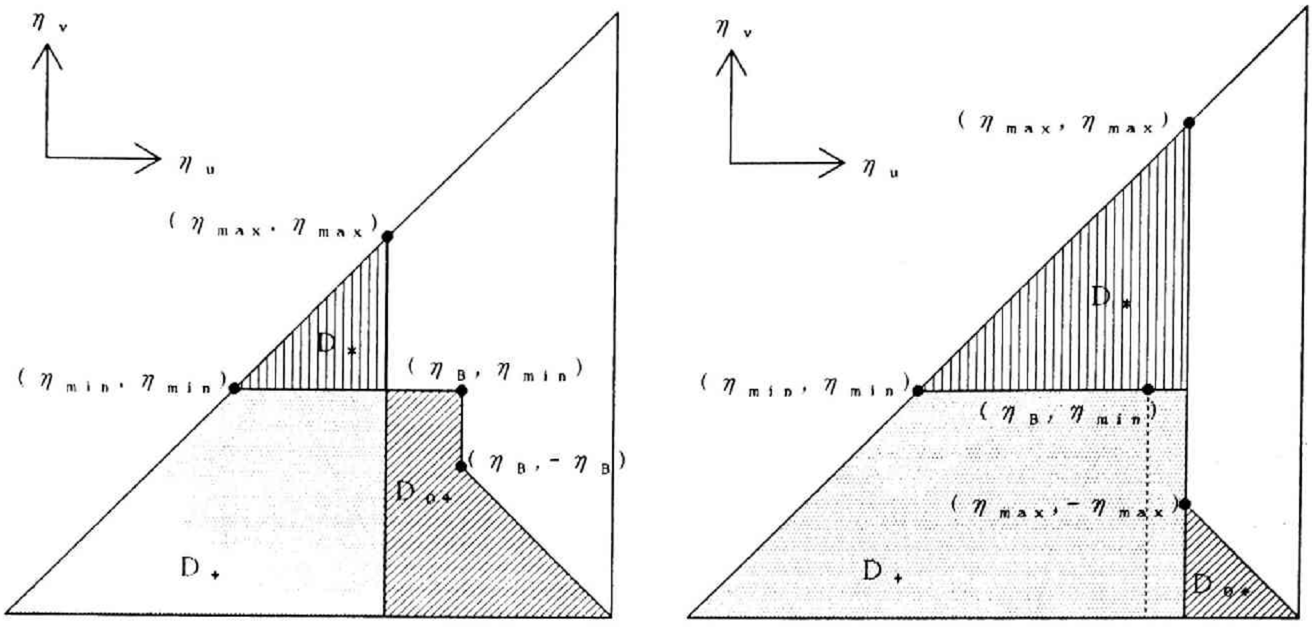
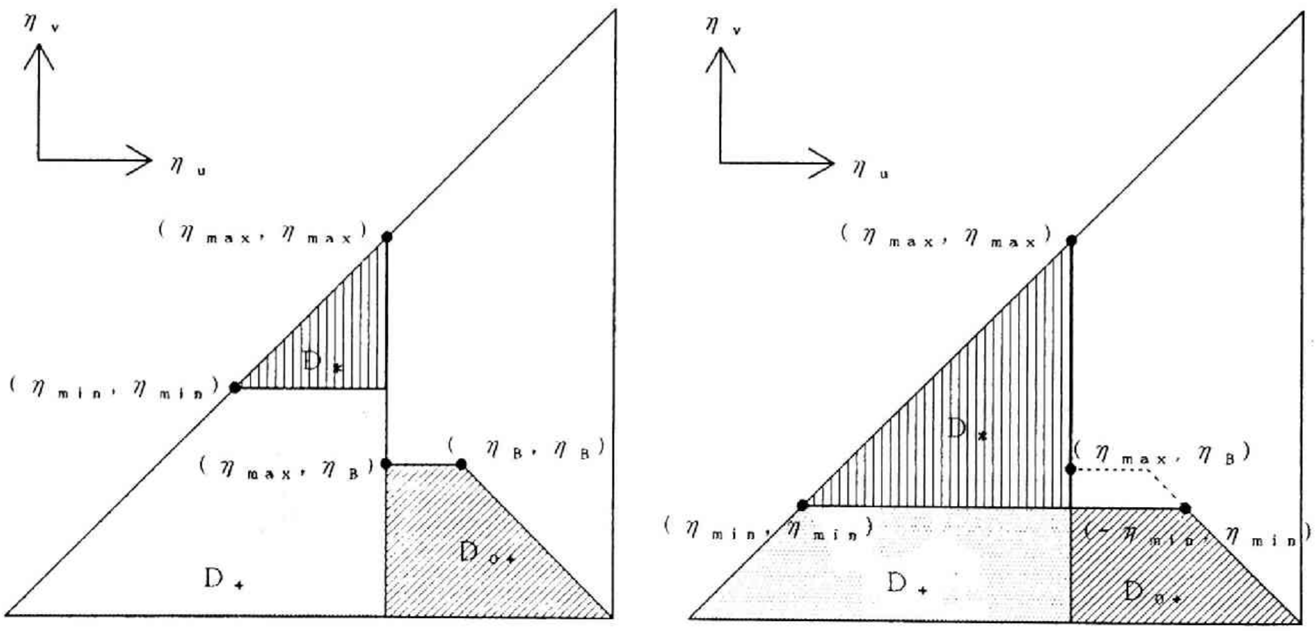


図7.11　振幅特性曲線(＋),(0),(－)（並列共振回路，$h=3$，$k=0.1$，$\nu=1$，$B_0=0$）



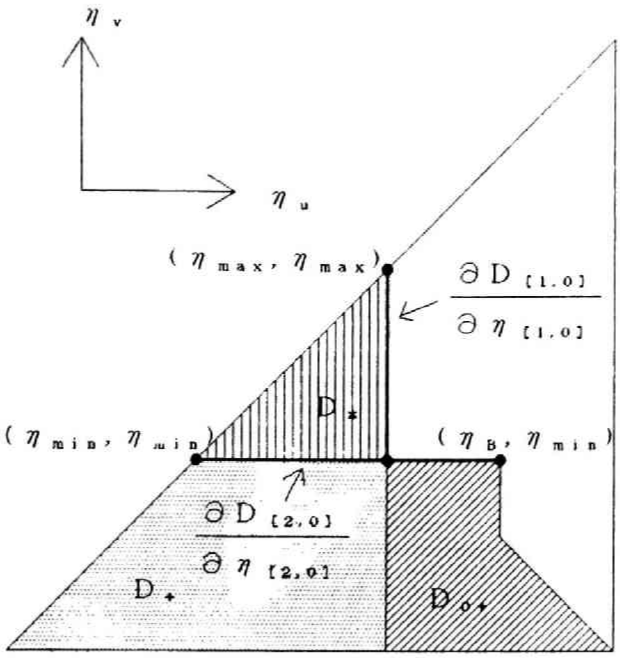
（a） $\eta_{max} < \eta_B$の場合　　（b） $\eta_{max} > \eta_B$の場合

図７．１２　領域D_0の磁化状態（$\eta_B > 0$の場合）



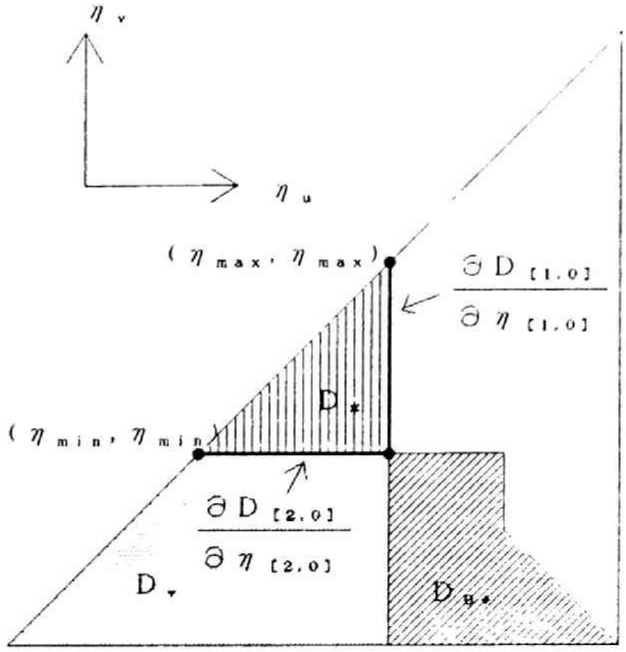
（a） $\eta_{min} > \eta_B$の場合　　（b） $\eta_{min} < \eta_B$の場合

図７．１３　領域D_0の磁化状態（$\eta_B < 0$の場合）



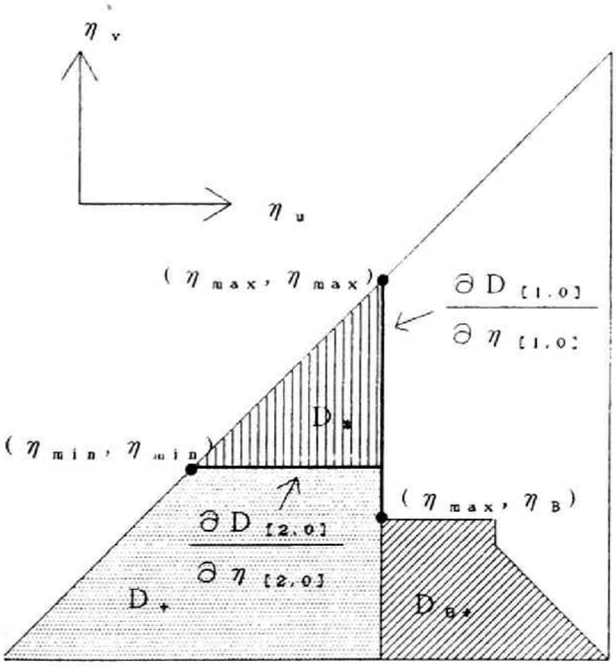
（a） 判別法①

（$\eta_B > 0$）



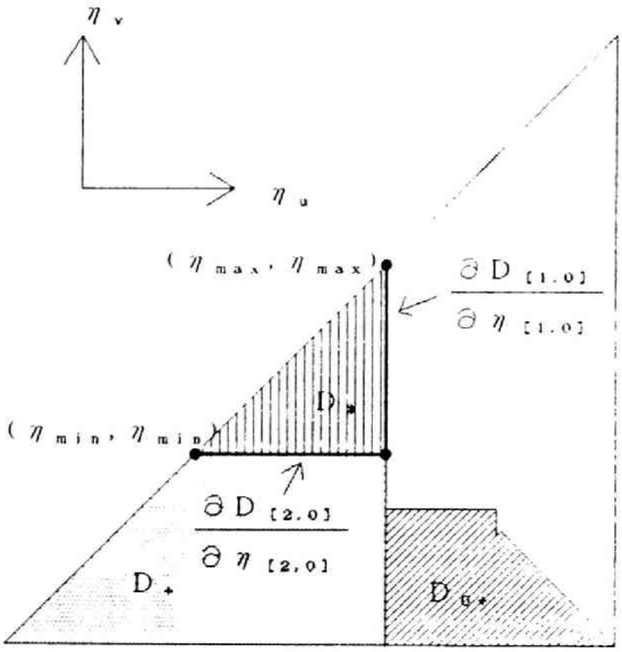
（b） 判別法②

（$\eta_B > 0$）



（c） 判別法①

（$\eta_B < 0$）



（d） 判別法②

（$\eta_B < 0$）

図７．１４　安定判別の際に仮定する境界線分

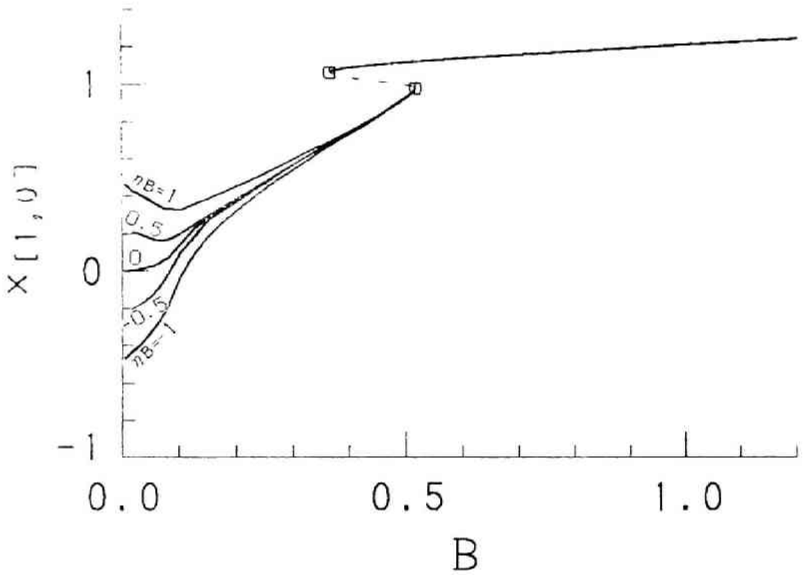


図7.15　図7.12,図7.13の磁化状態を仮定した場合（h=1）

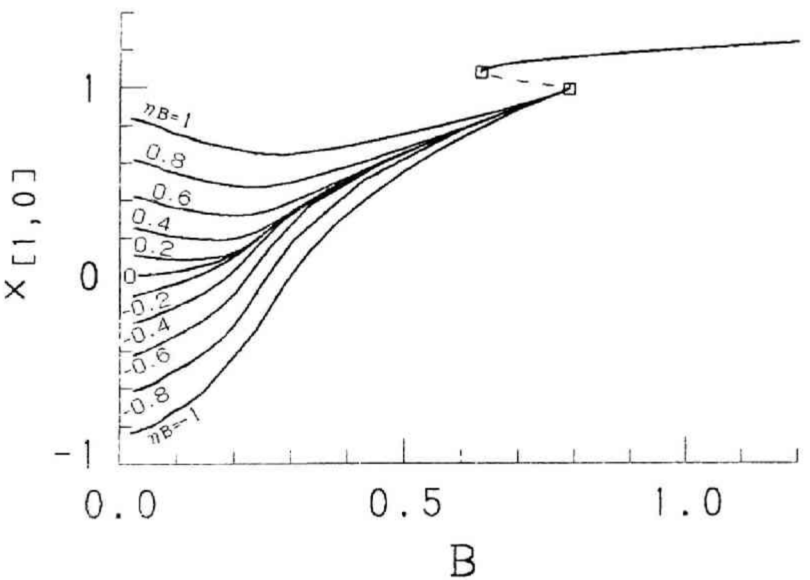
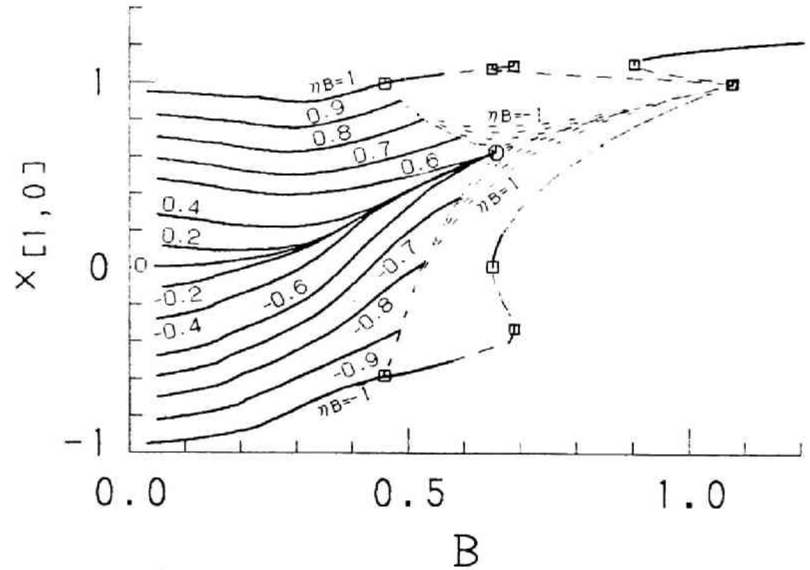


図7.16　図7.12,図7.13の磁化状態を仮定した場合（h=2）



（a）　安定判別法①　↑

（b）　安定判別法②　↓

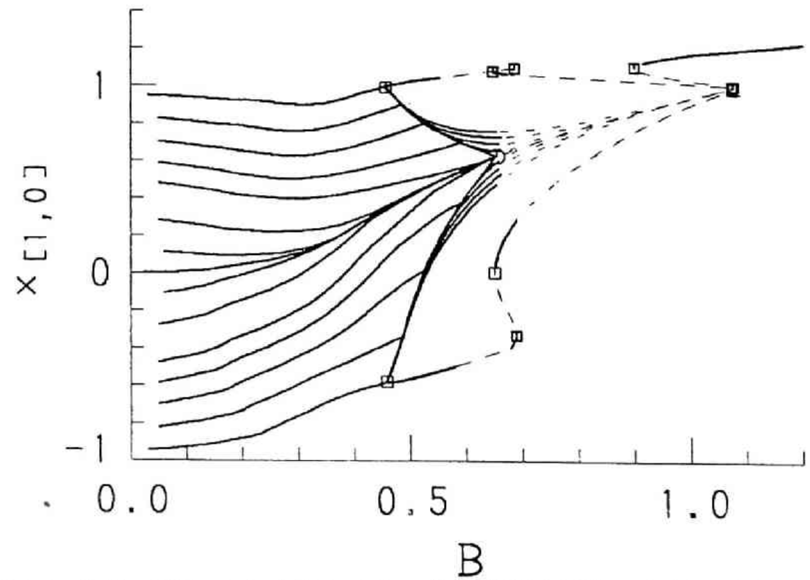
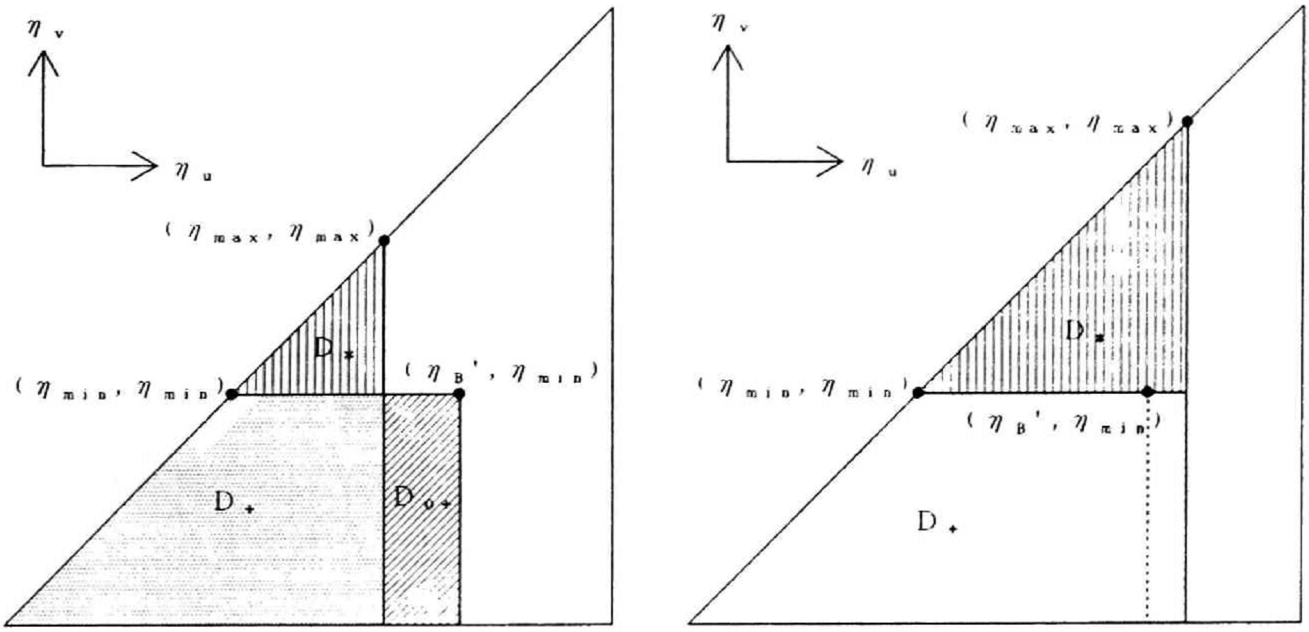
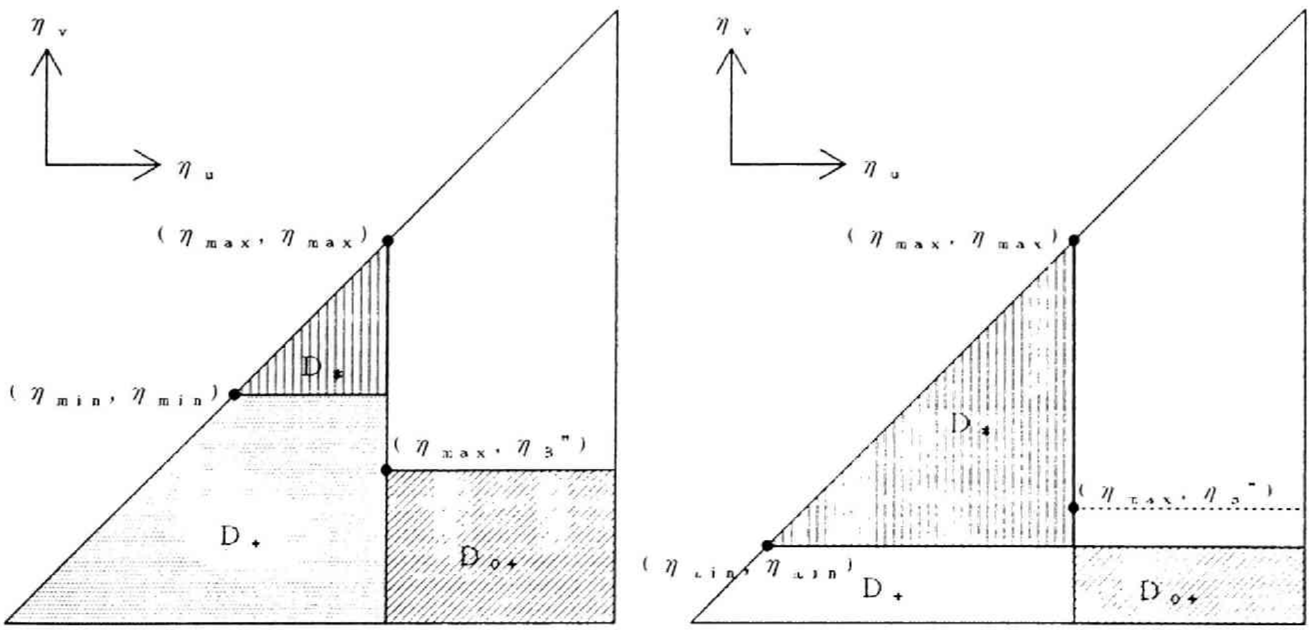


図7.17　図7.12,図7.13の磁化状態を仮定した場合（h=3）



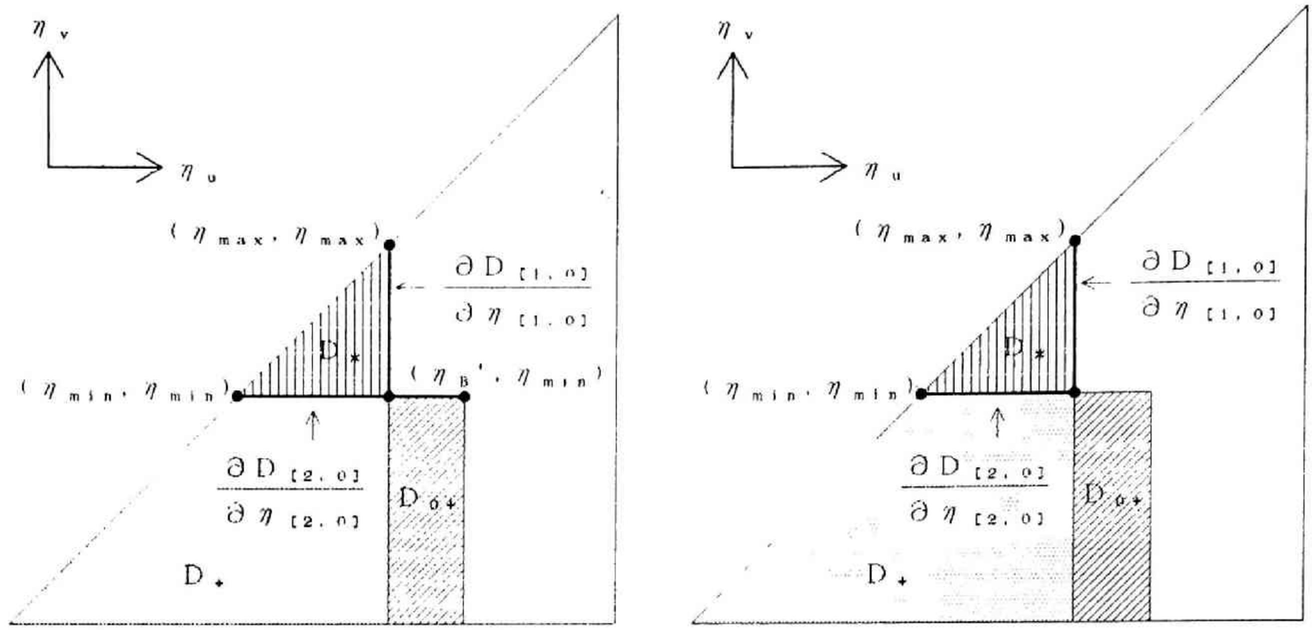
（ａ） $\eta_{max} < \eta_{B}'$ の場合　　　　（ｂ） $\eta_{max} > \eta_{B}'$ の場合

図７．１８　領域D_0の磁化状態



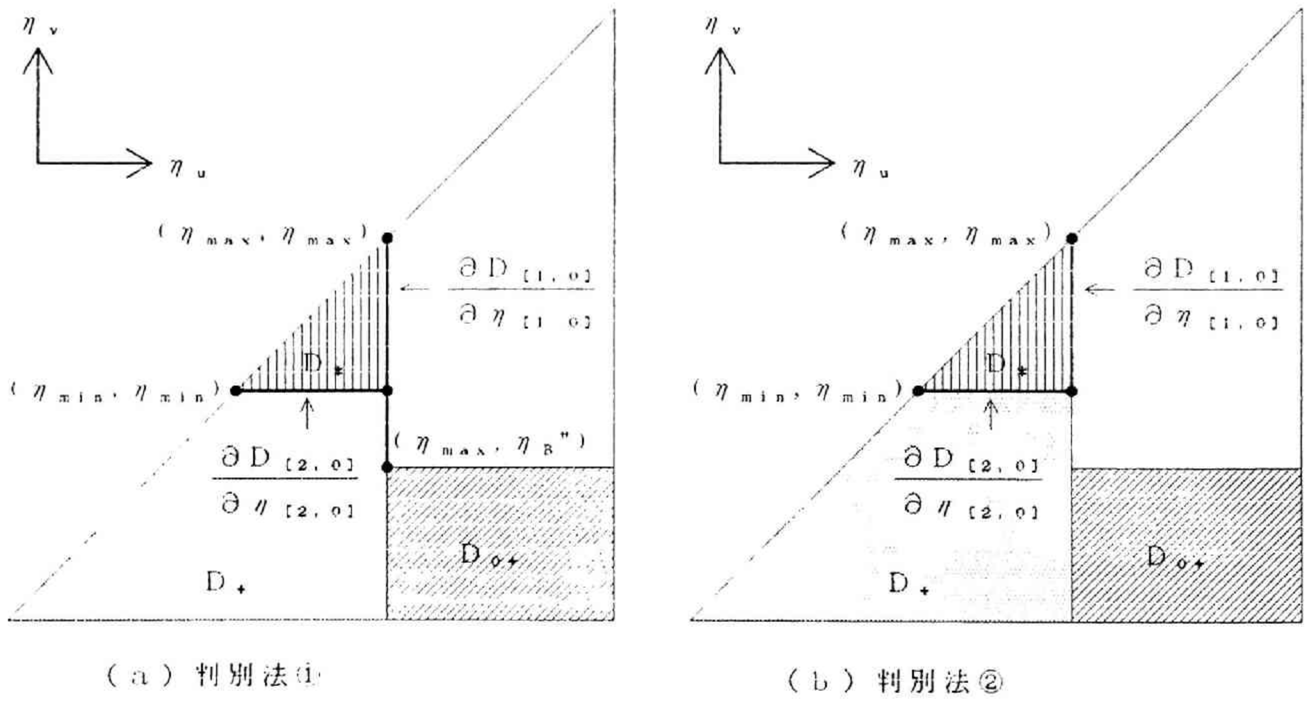
（ａ） $\eta_{min} > \eta_{B}''$ の場合　　　　（ｂ） $\eta_{min} < \eta_{B}''$ の場合

図７．１９　領域D_0の磁化状態



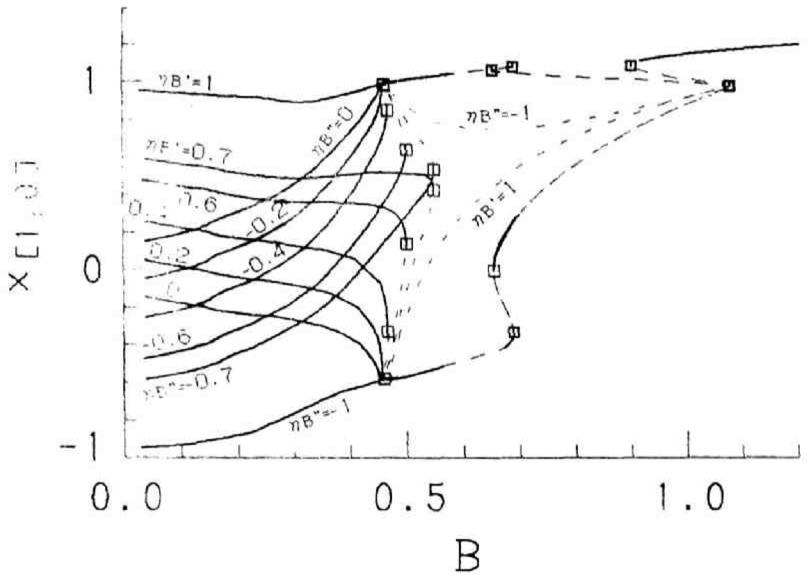
（ａ）判別法①　　　（ｂ）判別法②

図７．２０　安定判別の際に仮定する境界線分



（ａ）判別法①　　　（ｂ）判別法②

図７．２１　安定判別の際に仮定する境界線分



（a） 安定判別法① ↑

（b） 安定判別法② ↓

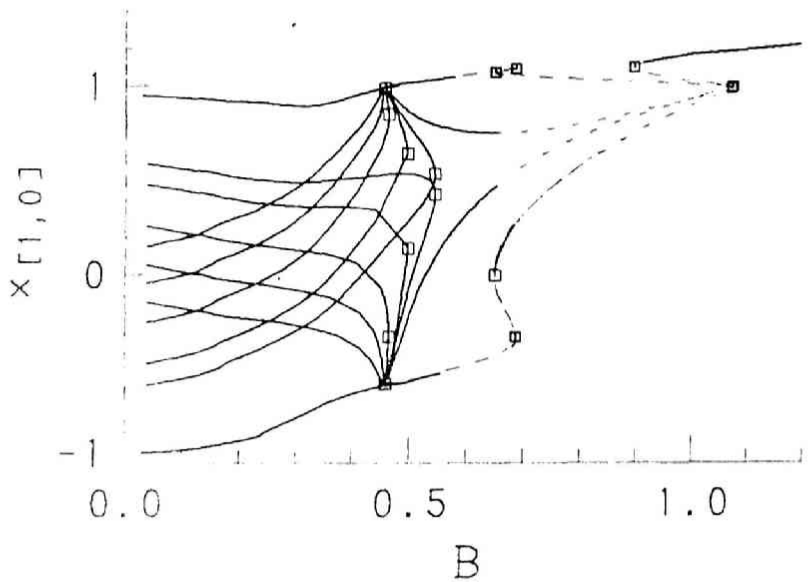
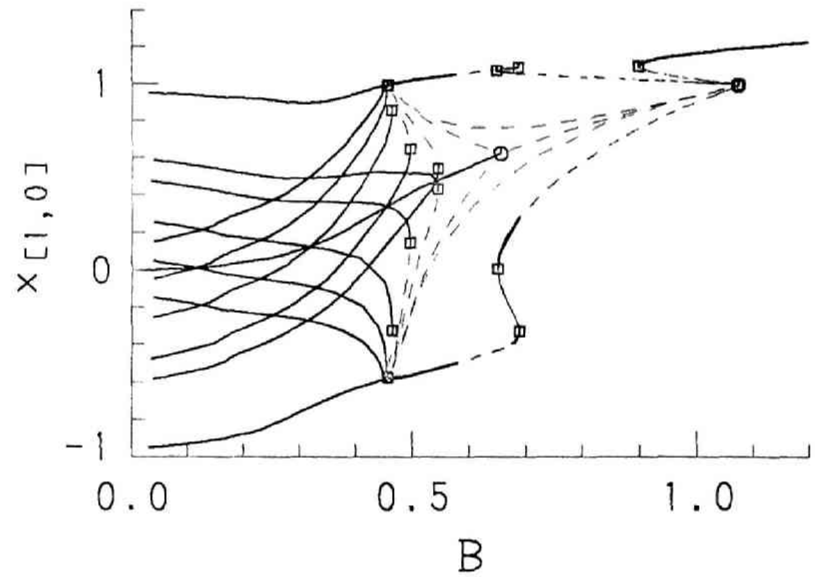


図7.22　図7.17,図7.18の磁化状態を仮定した場合（h=3）



（a） 安定判別法① ↑

（b） 安定判別法② ↓

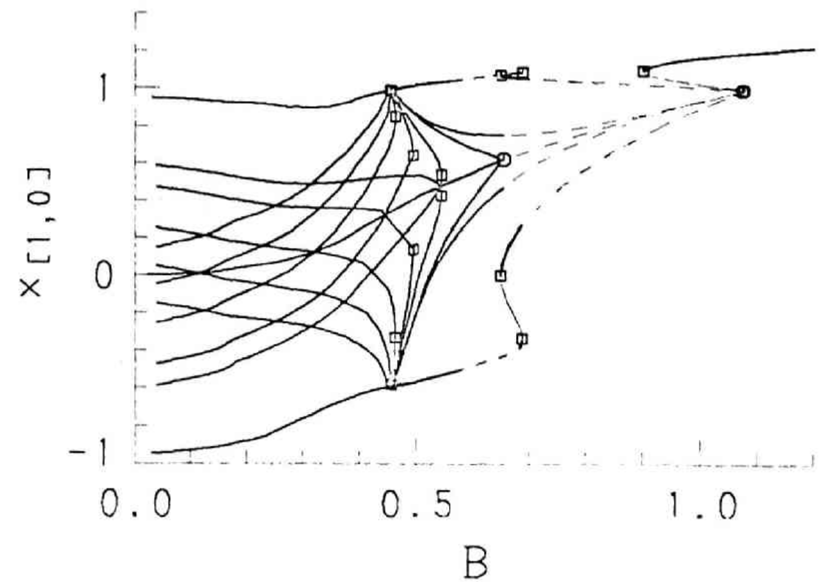


図7.23　図7.22の特性曲線と特性曲線(0)（h=3）

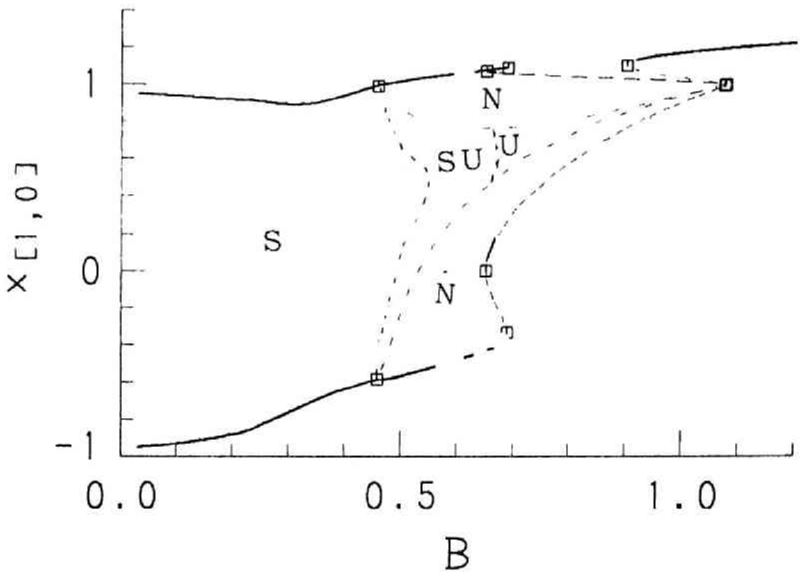


図7.24　周期解の分布

S　：周期解が安定な領域

U　：周期解が不安定な領域

SU：領域D_0の磁化状態によって，周期解の安定性が異なる領域

N　：周期解が存在しない領域

第８章　２個のヒステリシス素子を含む強制振動系における分岐

８．１　系の状態方程式と変分方程式

８．１．１　状態方程式

本章では，２個のヒステリシス素子を含む強制振動系を取り扱う．２個のヒステリシス素子の間に，相互誘導に類する相互作用は働かないものとして，系の状態方程式は，

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbb{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \mathbb{y}) \\ f_2(t, x_1, x_2, \mathbb{y}) \\ \mathbb{g}(t, x_1, x_2, \mathbb{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ \mathbb{b}_1 & \mathbb{b}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1(x_1) \\ \eta_2(x_2) \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

ただし，

t：時刻，$(x_1, x_2, \mathbb{y}) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-2})$：状態変数ベクトル

$f_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}$，$f_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-2}$

$(a_{11}, a_{12}, \mathbb{b}_1) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-2})$：定数ベクトル

$(a_{21}, a_{22}, \mathbb{b}_2) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-2})$：定数ベクトル

で与えられるとする．ここで，f_1，f_2，$\mathbb{g}$はtに関して周期Tの周期関数であるとし，また，$\eta_1(x_1)$，$\eta_2(x_2)$は，それぞれ，ヒステリシス関数

$$x_1 = H_1(\eta_1) \quad , \quad x_2 = H_2(\eta_2) \tag{8.2}$$

の逆関数で与えられるものとする．以後，表記の便宜のため，

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbb{y} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbb{f}(t, \mathbb{x}) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \mathbb{y}) \\ f_2(t, x_1, x_2, \mathbb{y}) \\ \mathbb{g}(t, x_1, x_2, \mathbb{y}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \mathbb{b}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \mathbb{b}_2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbb{x}, \mathbb{f}, \mathbb{a}_1, \mathbb{a}_2 \in \mathbb{R}^n) \tag{8.3}$$

として，式(8.1)を，

$$d\mathbb{x}/dt = \mathbb{f}(t, \mathbb{x}) + \mathbb{a}_1\eta_1(x_1) + \mathbb{a}_2\eta_2(x_2) \tag{8.4}$$

とも書くことにする．

解析を数値的に行うために，周期Tを分割し，状態方程式(8.4)を離散化する．周期解$(x_1(t), x_2(t), \mathbb{y}(t))$について，

$t_{[1,0]}$：$\eta_1(x_1)$が最大となる時刻
$t_{[2,0]}$：$\eta_2(x_2)$が最大となる時刻
$t_{[3,0]}$：$\eta_1(x_1)$が最小となる時刻
$t_{[4,0]}$：$\eta_2(x_2)$が最小となる時刻

とおく．ここでは，

$$t_{[1,0]} < t_{[2,0]} < t_{[3,0]} < t_{[4,0]} < t_{[1,0]} + T \tag{8.5}$$

を仮定し，１周期を図８．１のように４つの区間に分割する．説明を簡単にするために，この４区間をそれぞれＮ等分してEuler法を用いて積分を行うことにすると，式(8.4)から，

$$\mathbb{x}_{[q,p+1]} = \mathbb{x}_{[q,p]} + \Delta t_q \left(\mathbb{f}_{[q,p]} + \mathbb{a}_1 \eta_{1[q,p]} + \mathbb{a}_2 \eta_{2[q,p]} \right) \quad (p = 0,1,\cdots,N-1) \tag{8.6}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \Delta t_q &= (t_{[q+1,0]} - t_{[q,0]}) / N \quad (q = 1,2,3) \\ \Delta t_4 &= (t_{[1,0]} + T - t_{[4,0]}) / N \end{aligned} \tag{8.7}$$

また，

$$\begin{aligned} & t_{[q,p]} = t_{[q,0]} + p \Delta t_q, \quad \mathbb{f}_{[q,p]} = \mathbb{f}(t_{[q,p]}, \mathbb{x}_{[q,p]}) \\ & \eta_{1[q,p]} = \eta_1(x_{1[q,p]}), \quad \eta_{2[q,p]} = \eta_2(x_{2[q,p]}) \quad (q = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{8.8}$$

が得られる．

説明が煩雑となることを避けるため，ここでは，

$$\begin{aligned} & |\eta_{1I}(x_{1[1,0]})| \geq |\eta_{1I}(x_{1[3,0]})| \\ & |\eta_{2I}(x_{2[2,0]})| \geq |\eta_{2I}(x_{2[4,0]})| \end{aligned} \tag{8.9}$$

である場合についてのみ説明する．この場合も，第３章と同様に，

$$\begin{aligned} \eta_{1[1,0]} &= H_{1I}^{-1}(x_{1[1,0]}) \\ \eta_{2[2,0]} &= H_{2I}^{-1}(x_{2[2,0]}) \end{aligned} \tag{8.10}$$

($H_{1I}(x)$, $H_{2I}(x)$：$H_1(x)$, $H_2(x)$の初期磁化特性)

を仮定する．このとき，$\eta_{1[1,p]}$ ($p = 1,\cdots,N-1$) は，

$$\eta_{1[1,p]} = H_{1[1,p]}^{-1}(x_{1[1,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \cdots, \eta_{1[1,p-1]}) \tag{8.11}$$

と表される．また，$\eta_{1[2,p]}$は，区間１におけるη_1の履歴の影響を受け，

$$\eta_{1[2,p]} = H_{1[2,p]}^{-1}(x_{1[2,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \eta_{1[2,0]}, \cdots, \eta_{1[2,p-1]}) \tag{8.12}$$

と表される．同様に，$\eta_{1[3,p]}$は，区間１におけるη_1の履歴の影響を受けるが，仮定より，

$$\eta_{1[3,0]} < \eta_{1[2,p]} < \eta_{1[1,0]} \quad (p = 0,\cdots,N-1) \tag{8.13}$$

であるので，プライザッハモデルの原理により区間２におけるη_1の履歴を考慮する必要はないので，

$$\eta_{1[3,p]} = H_{1[3,p]}^{-1}(x_{1[3,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \eta_{1[3,0]}, \cdots, \eta_{1[3,p-1]}) \tag{8.14}$$

と表される．同様に，$\eta_{1[4,p]}$ は，$\eta_{1[1,0]}$および$\eta_{1[3,0]}$の履歴の影響を受け，

$$\eta_{1[4,p]} = H_{1[4,p]}^{-1}(x_{1[4,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \eta_{1[3,0]}, \eta_{1[4,0]}, \cdots, \eta_{1[4,p-1]}) \tag{8.15}$$

と表される．$\eta_{2[q,p]}$についても同様に，

$$\eta_{2[2,p]} = H_{2[2,p]}^{-1}(x_{2[2,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \cdots, \eta_{2[2,p-1]}) \tag{8.16}$$

$$\eta_{2[3,p]} = H_{2[3,p]}^{-1}(x_{2[3,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[3,0]}, \cdots, \eta_{2[3,p-1]}) \tag{8.17}$$

$$\eta_{2[4,p]} = H_{2[4,p]}^{-1}(x_{2[4,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[4,0]}, \cdots, \eta_{2[4,p-1]}) \tag{8.18}$$

$$\eta_{2[1,p]} = H_{2[1,p]}^{-1}(x_{2[1,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[4,0]}, \eta_{2[1,0]}, \cdots, \eta_{2[1,p-1]})$$
$$(p = 0,\cdots,N-1) \tag{8.19}$$

と表される．

8.1.2 変分方程式

状態方程式(8.6)を$\mathbb{x}_{[1,0]}$で微分すると，$\mathbb{x}_{[1,0]}$に関する第１変分方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p+1]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} &= \left(\mathbb{1} + \Delta t_q \frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}\right) \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} \\ &\quad + \mathbb{a}_1 \Delta t_q \frac{\partial \eta_{1[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} + \mathbb{a}_2 \Delta t_q \frac{\partial \eta_{2[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}\end{aligned} \tag{8.20}$$

$$(q = 1,2,3,4 \ , \ p = 1,\cdots,N-1)$$

が得られる．ただし，出発点は，

$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} = \mathbb{1} \quad , \quad \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} = \mathbb{O} \ (q = 2,3,4) \tag{8.21}$$

である．ここで，式(8.11),(8.12),(8.14)～(8.19)より，

$$\begin{aligned}
x_{1[1,p]} &= H_{1[1,p]}(\eta_{1[1,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \cdots, \eta_{1[1,p-1]}) \\
x_{1[2,p]} &= H_{1[2,p]}(\eta_{1[2,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \eta_{1[2,0]}, \cdots, \eta_{1[2,p-1]}) \\
x_{1[3,p]} &= H_{1[3,p]}(\eta_{1[3,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \eta_{1[3,0]}, \cdots, \eta_{1[3,p-1]}) \\
x_{1[4,p]} &= H_{1[4,p]}(\eta_{1[4,p]} \mid \eta_{1[1,0]}, \eta_{1[3,0]}, \eta_{1[4,0]}, \cdots, \eta_{1[4,p-1]})
\end{aligned} \tag{8.22}$$

$$
\begin{aligned}
x_{2[1,p]} &= H_{2[1,p]}(\eta_{2[1,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[4,0]}, \eta_{2[1,0]}, \cdots, \eta_{2[1,p-1]}) \\
x_{2[2,p]} &= H_{2[2,p]}(\eta_{2[2,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \cdots, \eta_{2[2,p-1]}) \\
x_{2[3,p]} &= H_{2[3,p]}(\eta_{2[3,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[3,0]}, \cdots, \eta_{2[3,p-1]}) \\
x_{2[4,p]} &= H_{2[4,p]}(\eta_{2[4,p]} \mid \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[4,0]}, \cdots, \eta_{2[4,p-1]})
\end{aligned}
\qquad (8.23)
$$

であるから，これらを $x_{[1,0]}$ で微分して，

$$
\frac{\partial x_{1[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{1[1,p]}}{\partial \eta_{1[1,l]}} \frac{\partial \eta_{1[1,l]}}{\partial x_{[1,0]}}
$$

$$
\frac{\partial x_{1[q,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = \frac{\partial H_{1[q,p]}}{\partial \eta_{1[1,0]}} \frac{\partial \eta_{1[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} + \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{1[q,p]}}{\partial \eta_{1[q,l]}} \frac{\partial \eta_{1[q,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \quad (q = 2,3,4)
$$

$$
\frac{\partial x_{2[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{2[q,p]}}{\partial \eta_{2[q,l]}} \frac{\partial \eta_{2[q,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \quad (q = 1,2,3,4) \qquad (8.24)
$$

よって，

$$
\frac{\partial \eta_{1[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{1[1,p]}}{\partial \eta_{1[1,p]}}} \left(\frac{\partial x_{1[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{1[1,p]}}{\partial \eta_{1[1,l]}} \frac{\partial \eta_{1[1,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right)
$$

$$
\frac{\partial \eta_{1[q,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{1[q,p]}}{\partial \eta_{1[q,p]}}} \left(\frac{\partial x_{1[q,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \frac{\partial H_{1[q,p]}}{\partial \eta_{1[1,0]}} \frac{\partial \eta_{1[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{1[q,p]}}{\partial \eta_{1[q,l]}} \frac{\partial \eta_{1[q,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right) \quad (q = 2,3,4)
$$

$$
\frac{\partial \eta_{2[q,p]}}{\partial x_{[1,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{2[q,p]}}{\partial \eta_{2[q,p]}}} \left(\frac{\partial x_{2[q,p]}}{\partial x_{[1,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{2[q,p]}}{\partial \eta_{2[q,l]}} \frac{\partial \eta_{2[q,l]}}{\partial x_{[1,0]}} \right) \quad (q = 1,2,3,4)
$$

$$(8.25)$$

が得られる．

他の $x_{[q,0]}$ ($q = 2,3,4$) などについての第1変分方程式も同様にして得られる．また，状態方程式(8.6)の第2変分方程式も，第1変分方程式から同様にして得ることができる．

8．2　定常解析の方法

8.2.1　周期解の求解

周期解は，未知数，

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{[1,0]} \\ \mathbf{x}_{[2,0]} \\ \mathbf{x}_{[3,0]} \\ \mathbf{x}_{[4,0]} \\ t_{[1,0]} \\ t_{[2,0]} \\ t_{[3,0]} \\ t_{[4,0]} \end{bmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^m,\ m = 4(n+1)) \tag{8.26}$$

に対する方程式，

$$\mathbb{F}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{[1,0]} - \mathbf{x}_{[4,N]} \\ \mathbf{x}_{[2,0]} - \mathbf{x}_{[1,N]} \\ \mathbf{x}_{[3,0]} - \mathbf{x}_{[2,N]} \\ \mathbf{x}_{[4,0]} - \mathbf{x}_{[3,N]} \\ f_{1[1,0]} + a_{11}\eta_{1[1,0]} + a_{21}\eta_{2[1,0]} \\ f_{2[2,0]} + a_{12}\eta_{1[2,0]} + a_{22}\eta_{2[2,0]} \\ f_{1[3,0]} + a_{11}\eta_{1[3,0]} + a_{21}\eta_{2[3,0]} \\ f_{2[4,0]} + a_{12}\eta_{1[4,0]} + a_{22}\eta_{2[4,0]} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{8.27}$$

を解くことにより求められる．ただし，方程式(8.27)の第１，２，３，４式は，$\mathbf{x}_{[1,0]}$がPoincaré写像の不動点となるための条件式であり，また，第５，７式は，時点$t_{[1,0]}$, $t_{[3,0]}$においてx_1が極値をとるための条件式であり，第６，８式は，時点$t_{[2,0]}$, $t_{[4,0]}$においてx_2が極値をとるための条件式である．

方程式(8.27)の，$\mathbf{x}_{[q,N]}$ $(q = 1,2,3,4)$ は，状態方程式(8.6)の計算を，初期値 $(\mathbf{x}_{[q,0]}, t_{[q,0]})$ から出発して，それぞれ$p = 0,\cdots,N-1$について順に行うことにより得られる．ただし，式(8.6),(8.7),(8.11),(8.19)より，$\mathbf{x}_{[1,N]}$は，$\mathbf{x}_{[1,0]}$, $t_{[1,0]}$, $t_{[2,0]}$のみならず，$\eta_{2[2,0]}$, $\eta_{2[4,0]}$の関数でもあるので，

$$\mathbf{x}_{[1,N]} = \mathbf{x}_{[1,N]}(\mathbf{x}_{[1,0]}, t_{[1,0]}, t_{[2,0]}, \eta_{2[2,0]}, \eta_{2[4,0]}) \tag{8.28}$$

と表される．同様に，式(8.6),(8.7),(8.12),(8.14)～(8.18)より，

$$\mathbf{x}_{[2,N]} = \mathbf{x}_{[2,N]}(\mathbf{x}_{[2,0]}, t_{[2,0]}, t_{[3,0]}, \eta_{1[1,0]}) \tag{8.29}$$

$$\mathbf{x}_{[3,N]} = \mathbf{x}_{[3,N]}(\mathbf{x}_{[3,0]}, t_{[3,0]}, t_{[4,0]}, \eta_{1[1,0]}, \eta_{2[2,0]}) \tag{8.30}$$

$$\mathbf{x}_{[4,N]} = \mathbf{x}_{[4,N]}(\mathbf{x}_{[4,0]}, t_{[4,0]}, t_{[1,0]}, \eta_{1[1,0]}, \eta_{2[2,0]}, \eta_{1[3,0]}) \tag{8.31}$$

と表される．

$\mathbb{F}$のJacobian行列の計算は，変分方程式(8.20)などを利用して得ることができる．

8.2.2 周期解の安定判別

式(8.19)や式(8.28)は，$\eta_{2[1,p]}$や$\mathbb{x}_{[1,p]}$が，区間1よりも'前の区間'である，区間2の$\eta_{2[2,0]}$および区間4の$\eta_{2[4,0]}$の影響を受けることを表している．このような区間の前後関係を，式(8.28)～(8.31)について明確に書くと，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{X}_{[4r+1,N]} &= \mathbb{X}_{[4r+1,N]}(\mathbb{X}_{[4r+1,0]}, t_{[4r+1,0]}, t_{[4r+2,0]} \\
&\qquad , \eta_{2[4r-2,0]}, \eta_{2[4r,0]}) \\
\mathbb{X}_{[4r+2,N]} &= \mathbb{X}_{[4r+2,N]}(\mathbb{X}_{[4r+2,0]}, t_{[4r+2,0]}, t_{[4r+3,0]}, \eta_{1[4r+1,0]}) \\
\mathbb{X}_{[4r+3,N]} &= \mathbb{X}_{[4r+3,N]}(\mathbb{X}_{[4r+3,0]}, t_{[4r+3,0]}, t_{[4r+4,0]} \\
&\qquad , \eta_{1[4r+1,0]}, \eta_{2[4r+2,0]}) \\
\mathbb{X}_{[4r+4,N]} &= \mathbb{X}_{[4r+4,N]}(\mathbb{X}_{[4r+4,0]}, t_{[4r+4,0]}, t_{[4r+5,0]} \\
&\qquad , \eta_{1[4r+1,0]}, \eta_{2[4r+2,0]}, \eta_{1[4r+3,0]})
\end{aligned}
\tag{8.32}
$$

のように表される．ただし，系列$\mathbb{x}_{[q,p]}$は周期解であるので，

$$
\begin{gathered}
t_{[4r+j,p]} = t_{[j,p]} + rT, \quad \mathbb{x}_{[4r+j,p]} = \mathbb{x}(t_{[4r+j,p]}) = \mathbb{x}_{[j,p]} \\
(j = 1,2,3,4 \ , \ p = 0,\cdots,N-1 \ , \ r = 0,1,\cdots)
\end{gathered}
\tag{8.33}
$$

である．ここで，$\mathbb{x}$が周期解の系列$\mathbb{x}_{[q,p]}$から，

$$\mathbb{X}_{[q,p]} \rightarrow \mathbb{X}_{[q,p]} + \delta\mathbb{X}_{[q,p]}$$

のように微小変化したとすると，この微小変化の系列$\delta\mathbb{x}_{[q,p]}$ ($p = 1,\cdots,N-1$, $q = 1,2,\cdots$)について，式(8.32),(8.33)より，

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbb{X}_{[4r+1,N]} &= \mathbb{A}_1\delta\mathbb{X}_{[4r+1,0]} + \mathbb{C}_{14}\delta\mathbb{X}_{[4r,0]} + \mathbb{C}_{12}\delta\mathbb{X}_{[4r-2,0]} \\
\delta\mathbb{X}_{[4r+2,N]} &= \mathbb{A}_2\delta\mathbb{X}_{[4r+2,0]} + \mathbb{B}_{21}\delta\mathbb{X}_{[4r+1,0]} \\
\delta\mathbb{X}_{[4r+3,N]} &= \mathbb{A}_3\delta\mathbb{X}_{[4r+3,0]} + \mathbb{C}_{32}\delta\mathbb{X}_{[4r+2,0]} + \mathbb{B}_{31}\delta\mathbb{X}_{[4r+1,0]} \\
\delta\mathbb{X}_{[4r+4,N]} &= \mathbb{A}_4\delta\mathbb{X}_{[4r+4,0]} + \mathbb{B}_{43}\delta\mathbb{X}_{[4r+3,0]} + \mathbb{C}_{42}\delta\mathbb{X}_{[4r+2,0]} \\
&\qquad + \mathbb{B}_{41}\delta\mathbb{X}_{[4r+1,0]}
\end{aligned}
\tag{8.34}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_q = \frac{\partial\mathbb{X}_{[q,N]}}{\partial\mathbb{X}_{[q,0]}} \quad &, \ \mathbb{B}_{qs} = \frac{\partial\mathbb{X}_{[q,N]}}{\partial\eta_{1[s,0]}}\frac{\partial\eta_{1[s,0]}}{\partial\mathbb{X}_{[s,0]}} \\
&, \ \mathbb{C}_{qs} = \frac{\partial\mathbb{X}_{[q,N]}}{\partial\eta_{2[s,0]}}\frac{\partial\eta_{2[s,0]}}{\partial\mathbb{X}_{[s,0]}} \qquad (q, s = 1,2,3,4)
\end{aligned}
\tag{8.35}
$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathbf{d}_q \equiv \delta\mathbf{x}_{[q,0]} = \delta\mathbf{x}_{[q-1,N]} \tag{8.36}$$

とおくと，式(8.34),(8.36)より，qに関する漸化式，

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{4r+2} &= \mathbb{A}_1\mathbf{d}_{4r+1} + \mathbb{C}_{14}\mathbf{d}_{4r} + \mathbb{C}_{12}\mathbf{d}_{4r-2} \\
\mathbf{d}_{4r+3} &= \mathbb{A}_2\mathbf{d}_{4r+2} + \mathbb{B}_{21}\mathbf{d}_{4r+1} \\
\mathbf{d}_{4r+4} &= \mathbb{A}_3\mathbf{d}_{4r+3} + \mathbb{C}_{32}\mathbf{d}_{4r+2} + \mathbb{B}_{31}\mathbf{d}_{4r+1} \\
\mathbf{d}_{4r+5} &= \mathbb{A}_4\mathbf{d}_{4r+4} + \mathbb{B}_{43}\mathbf{d}_{4r+3} + \mathbb{C}_{42}\mathbf{d}_{4r+2} + \mathbb{B}_{41}\mathbf{d}_{4r+1}
\end{aligned} \tag{8.37}$$

が得られる．式(8.37)より，

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{4r+2} &= \mathbb{A}_1\mathbf{d}_{4r+1} + \mathbb{C}_*\mathbf{d}_{4r-2} + \mathbb{E}_*\mathbf{d}_{4r-3} \\
\mathbf{d}_{4r+5} &= \mathbb{A}_*\mathbf{d}_{4r+2} + \mathbb{B}_*\mathbf{d}_{4r+1}
\end{aligned} \tag{8.38}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_* &= \mathbb{A}_4(\mathbb{A}_3\mathbb{A}_2 + \mathbb{C}_{32}) + \mathbb{B}_{43}\mathbb{A}_2 + \mathbb{C}_{42} \\
\mathbb{B}_* &= \mathbb{A}_4(\mathbb{A}_3\mathbb{B}_{21} + \mathbb{B}_{31}) + \mathbb{B}_{43}\mathbb{B}_{21} + \mathbb{B}_{41} \\
\mathbb{C}_* &= \mathbb{C}_{14}(\mathbb{A}_3\mathbb{A}_2 + \mathbb{C}_{32}) + \mathbb{C}_{12} \quad , \quad \mathbb{E}_* = \mathbb{C}_{14}(\mathbb{A}_3\mathbb{B}_{21} + \mathbb{B}_{31})
\end{aligned} \tag{8.39}$$

が得られ，式(8.38)より，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{4r+5} \\ \mathbf{d}_{4r+6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_* & \mathbb{A}_* \\ \mathbb{A}_1\mathbb{B}_* + \mathbb{E}_* & \mathbb{A}_1\mathbb{A}_* + \mathbb{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{4r+1} \\ \mathbf{d}_{4r+2} \end{pmatrix} \tag{8.40}$$

が得られる．式(8.40)より，行列，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{B}_* & \mathbb{A}_* \\ \mathbb{A}_1\mathbb{B}_* + \mathbb{E}_* & \mathbb{A}_1\mathbb{A}_* + \mathbb{C} \end{pmatrix} \tag{8.41}$$

固有値から周期解の安定性を判別する．すなわち，この固有値の絶対値が全て1未満であれば周期解は安定，絶対値が1を越える固有値が存在すれば周期解は不安定と判別する．

ただし，この場合も，ヒステリシス素子が1個の場合（３．５節）と同様に，

$$\begin{aligned}
&① \ \partial D_{1[1,0]}/\partial\eta_{1[1,0]} : (\eta_{1u} = \eta_{1max} \ , \ -\eta_{1max} \leqq \eta_{1v} \leqq \eta_{1max}) \\
&\quad \partial D_{1[3,0]}/\partial\eta_{1[3,0]} : (\eta_{1min} \leqq \eta_{1u} \leqq \eta_{1max} \ , \ \eta_{1v} = \eta_{1min}) \\
&\quad \partial D_{2[2,0]}/\partial\eta_{2[2,0]} : (\eta_{2u} = \eta_{2max} \ , \ -\eta_{2max} \leqq \eta_{2v} \leqq \eta_{2max}) \\
&\quad \partial D_{2[4,0]}/\partial\eta_{2[4,0]} : (\eta_{2min} \leqq \eta_{2u} \leqq \eta_{2max} \ , \ \eta_{2v} = \eta_{2min})
\end{aligned} \tag{8.42}$$

$$\begin{aligned}
&② \ \partial D_{1[1,0]}/\partial\eta_{1[1,0]} : (\eta_{1u} = \eta_{1max} \ , \ \eta_{1min} \leqq \eta_{1v} \leqq \eta_{1max}) \\
&\quad \partial D_{1[3,0]}/\partial\eta_{1[3,0]} : (\eta_{1min} \leqq \eta_{1u} \leqq \eta_{1max} \ , \ \eta_{1v} = \eta_{1min}) \\
&\quad \partial D_{2[2,0]}/\partial\eta_{2[2,0]} : (\eta_{2u} = \eta_{2max} \ , \ \eta_{2min} \leqq \eta_{2v} \leqq \eta_{2max}) \\
&\quad \partial D_{2[4,0]}/\partial\eta_{2[4,0]} : (\eta_{2min} \leqq \eta_{2u} \leqq \eta_{2max} \ , \ \eta_{2v} = \eta_{2min})
\end{aligned} \tag{8.43}$$

ただし，

η_{1max}, η_{1min}：$\eta_1(x_1)$の最大値，最小値

η_{2max}, η_{2min}：$\eta_2(x_2)$の最大値，最小値

の２種類の境界線分（図８．２(ａ)(ｂ)）を仮定した場合について，あるいは，これに加えて，

$$
\begin{aligned}
&③\ \partial D_{1[1,0]}/\partial\eta_{1[1,0]} : (\eta_{1u}=\eta_{1max}\ ,\ -\eta_{1max}\leqq\eta_{1v}\leqq\eta_{1max})\\
&\quad\partial D_{1[3,0]}/\partial\eta_{1[3,0]} : (\eta_{1min}\leqq\eta_{1u}\leqq\eta_{1max}\ ,\ \eta_{1v}=\eta_{1min})\\
&\quad\partial D_{2[2,0]}/\partial\eta_{2[2,0]} : (\eta_{2u}=\eta_{2max}\ ,\ \eta_{2min}\leqq\eta_{2v}\leqq\eta_{2max})\\
&\quad\partial D_{2[4,0]}/\partial\eta_{2[4,0]} : (\eta_{2min}\leqq\eta_{2u}\leqq\eta_{2max}\ ,\ \eta_{2v}=\eta_{2min})
\end{aligned}
\tag{8.44}
$$

$$
\begin{aligned}
&④\ \partial D_{1[1,0]}/\partial\eta_{1[1,0]} : (\eta_{1u}=\eta_{1max}\ ,\ \eta_{1min}\leqq\eta_{1v}\leqq\eta_{1max})\\
&\quad\partial D_{1[3,0]}/\partial\eta_{1[3,0]} : (\eta_{1min}\leqq\eta_{1u}\leqq\eta_{1max}\ ,\ \eta_{1v}=\eta_{1min})\\
&\quad\partial D_{2[2,0]}/\partial\eta_{2[2,0]} : (\eta_{2u}=\eta_{2max}\ ,\ -\eta_{2max}\leqq\eta_{2v}\leqq\eta_{2max})\\
&\quad\partial D_{2[4,0]}/\partial\eta_{2[4,0]} : (\eta_{2min}\leqq\eta_{2u}\leqq\eta_{2max}\ ,\ \eta_{2v}=\eta_{2min})
\end{aligned}
\tag{8.45}
$$

を仮定した，それぞれの場合について上記の安定判別を行うものとする（ここでも，①～④の境界線分を仮定する判別の方法を，それぞれ，判別法①，…，判別法④と呼ぶことにする）．

８．２．３　周期解の分岐と安定性の変化

第４章と同様に，式(8.27)の$\mathbb{F}(\mathbb{z})$に対して，解曲線，

$$\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}})=\mathbb{F}(\mathbb{z}\,;\alpha)=\mathbb{0}\qquad(\alpha\in\mathbb{R}：系のパラメータ) \tag{8.46}$$

ただし，

$$\tilde{\mathbb{z}}=\begin{bmatrix}\mathbb{z}\\ \alpha\end{bmatrix}\ (\in\mathbb{R}^{m+1},\ m=4n+4) \tag{8.47}$$

を定義する．本節では，解曲線(8.46)に現れる単純特異点の前後における，周期解の安定性の変化について述べる．

第４章と同様に，

$$\Delta_z\equiv\det\left(\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{z}}\right) \tag{8.48}$$

$$\frac{\partial\mathbb{F}}{\partial\mathbb{z}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbb{F}_1}{\partial\mathbb{z}}\\[2ex] \dfrac{\partial\mathbb{F}_2}{\partial\mathbb{z}}\end{bmatrix} \tag{8.49}$$

ただし，

$$\mathbb{F}_1(\mathbb{z})=\begin{pmatrix} \mathbb{X}_{[1,0]}-\mathbb{X}_{[4,N]} \\ \mathbb{X}_{[2,0]}-\mathbb{X}_{[1,N]} \\ \mathbb{X}_{[3,0]}-\mathbb{X}_{[2,N]} \\ \mathbb{X}_{[4,0]}-\mathbb{X}_{[3,N]} \end{pmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{4n})$$

$$\mathbb{F}_2(\mathbb{z})=\begin{pmatrix} f_{1[1,0]}+a_{11}\eta_{1[1,0]}+a_{21}\eta_{2[1,0]} \\ f_{2[2,0]}+a_{12}\eta_{1[2,0]}+a_{22}\eta_{2[2,0]} \\ f_{1[3,0]}+a_{11}\eta_{1[3,0]}+a_{21}\eta_{2[3,0]} \\ f_{2[4,0]}+a_{12}\eta_{1[4,0]}+a_{22}\eta_{2[4,0]} \end{pmatrix} \quad (\in \mathbb{R}^{4}) \tag{8.50}$$

とおく．４．２節と同様に，式(8.4)を時間に関して離散化する際に生じる誤差が十分に小さいとして，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \mathbb{z}}\right)=\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{1}-\mathbb{B}_{41} & -\mathbb{C}_{42} & -\mathbb{B}_{43} & -\mathbb{A}_4 \\ -\mathbb{A}_1 & \mathbb{1}-\mathbb{C}_{12} & \mathbb{O} & -\mathbb{C}_{14} \\ -\mathbb{B}_{21} & -\mathbb{A}_2 & \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ -\mathbb{B}_{31} & -\mathbb{C}_{32} & -\mathbb{A}_3 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\right) \tag{8.51}$$

が成り立つとする（付録Ｅ．２参照）．また，

$$\Delta_x=\det\left(\begin{pmatrix} \mathbb{1}-\mathbb{B}_{41} & -\mathbb{C}_{42} & -\mathbb{B}_{43} & -\mathbb{A}_4 \\ -\mathbb{A}_1 & \mathbb{1}-\mathbb{C}_{12} & \mathbb{O} & -\mathbb{C}_{14} \\ -\mathbb{B}_{21} & -\mathbb{A}_2 & \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ -\mathbb{B}_{31} & -\mathbb{C}_{32} & -\mathbb{A}_3 & \mathbb{1} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \mathbb{B}_* & \mathbb{A}_* \\ \mathbb{A}_1\mathbb{B}_*+\mathbb{E}_* & \mathbb{A}_1\mathbb{A}_*+\mathbb{C} \end{pmatrix}\right) \tag{8.52}$$

とおく．式(8.41)の行列の固有値を μ_i $(i=1,\cdots,2n)$ とおくと，

$$\Delta_x=\prod_{i=1}^{2n}(1-\mu_i) \tag{8.53}$$

が成り立つ．ただし，周期解を求める際には式(8.42)の境界線分を仮定するので，ここでは，安定判別の際にも式(8.42)の境界線分を仮定して式(8.41)の行列を求める（判別法①を用いる）ものとする．単純特異点においては，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}}{\partial \mathbb{z}}\right)=m-1 \tag{8.54}$$

が成り立つ．このとき，$\mathrm{rank}(\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z})$は，

(i) $\mathrm{rank}(\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z})=4n-1 \quad (=m-5)$ (8.55)

(ii) $\mathrm{rank}(\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z})=4n \quad (=m-4)$ (8.56)

の２通りの値をとり得る．

(i) rank（$\partial\mathbb{F}_1/\partial\mathbb{z}$）＝４n－１の場合

この場合，４．２．２のrank（$\partial\mathbb{F}_1/\partial\mathbb{z}$）＝n－１の場合と同様に，式(8.51)，(8.52)，(8.55)より特異点において$\Delta_x=0$となり，また，特異点の前後でΔ_zの符号が変化するときは，Δ_xの符号も同時に変化する．従って，式(8.53)より，$\Delta_z=0$のとき，固有値μ_i（$i=1,\cdots,2n$）の中に，

$$\mu_i=1$$

となるμ_iが存在し，また，特異点の前後でΔ_zの符号が変化するとき，このμ_iは，１を実軸上で横切る．従って，周期解の安定性の変化の仕方は，ヒステリシス素子のない強制振動系の場合と同様である．

(ii)rank（$\partial\mathbb{F}_1/\partial\mathbb{z}$）＝４nの場合

この場合，４．２．２のrank（$\partial\mathbb{F}_1/\partial\mathbb{z}$）＝nの場合と同様に，特異点において$\Delta_v\neq0$であり，特異点の前後で周期解の安定性は変化しない．この単純特異点も，極値が消滅する点であり，やはり，多くの場合，単純極限点となる．

安定判別の際に式(8.43)，(8.44)，(8.45)の境界線分を仮定して式(8.41)の行列を求める（判別法②，③，④を用いる）場合には，やはり，上の議論は成立せず，特異点の前後における周期解の安定性の変化の仕方が，ヒステリシス素子のない強制振動系の場合と異なる場合がある．

８．３　２個のヒステリシス素子を含む強制振動系における分岐現象

８．３．１　２個のヒステリシス素子を含む強制振動系

本節では，図８．３に示す２相共振回路における周期振動の分岐現象を解析する．図８．３の回路において，変圧器の結合は密結合であるとし，従って，図８．４の等価回路を得る．ここで，図８．４の２個の可飽和インダクタは，同一のヒステリシス特性，

$$\phi_a=H(i_a)\quad,\ \phi_b=H(i_b) \tag{8.57}$$

（ϕ_a, i_a，ϕ_b, i_b：各インダクタにおける鎖交磁束と電流）

を持つものとする．ϕ_a,ϕ_bおよび，キャパシタ電荷q_a, q_bを状態変数にとり，状態方程式，

$$
\begin{aligned}
&d\phi_a/d\tau = q_a/C \\
&d\phi_b/d\tau = q_b/C \\
&dq_a/d\tau = J\cos(\omega\tau + \frac{\pi}{4}) - \frac{q_a}{RC} - \frac{1}{r}(\frac{q_a}{C} + \frac{q_b}{C}) - i_a(\phi_a) \\
&dq_b/d\tau = J\cos(\omega\tau - \frac{\pi}{4}) - \frac{q_b}{RC} - \frac{1}{r}(\frac{q_a}{C} + \frac{q_b}{C}) - i_b(\phi_b) \\
&i_a = H^{-1}(\phi_a) \quad , \quad i_b = H^{-1}(\phi_b)
\end{aligned}
\tag{8.58}
$$

を得る．可飽和インダクタの飽和磁束Φ_Sおよび飽和電流I_S ($= i(\Phi_S)$) を用いて，ϕおよびiを規格化して，

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \phi_a/\Phi_S \quad , \quad \xi_1 = i_a/I_S \\
&x_2 = \phi_b/\Phi_S \quad , \quad \xi_2 = i_b/I_S
\end{aligned}
\tag{8.59}
$$

とし，さらに，

$$
t = \frac{\tau}{(\frac{\Phi_S}{I_S}C)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad y_1 = \frac{q_a}{(\Phi_S I_S C)^{1/2}} \quad , \quad y_2 = \frac{q_b}{(\Phi_S I_S C)^{1/2}}
\tag{8.60}
$$

と変数変換すると，

$$
\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ B\cos(\nu t + \frac{\pi}{4}) - k \cdot y_1 - \gamma \frac{y_1 + y_2}{2} - \xi_1(x_1) \\ B\cos(\nu t - \frac{\pi}{4}) - k \cdot y_2 - \gamma \frac{y_1 + y_2}{2} - \xi_2(x_2) \end{bmatrix}
\tag{8.61}
$$

が得られる．ただし，

$$
B = \frac{J}{I_S} \quad , \quad \nu = (\frac{\Phi_S}{I_S}C)^{\frac{1}{2}}\omega \quad , \quad k = \frac{1}{R}(\frac{\Phi_S}{I_S C})^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \gamma = \frac{2}{r}(\frac{\Phi_S}{I_S C})^{\frac{1}{2}}
\tag{8.62}
$$

であり，また，$\xi_1(x_1)$, $\xi_2(x_2)$の特性は，それぞれ，式(6.1)の$\xi(x)$と同様に，

$$
\begin{aligned}
&\xi_1(x_1) = h \cdot \eta(x_1) + (1 - h) \cdot c(x_1) \\
&\xi_2(x_1) = h \cdot \eta(x_2) + (1 - h) \cdot c(x_2)
\end{aligned}
\tag{8.63}
$$

で与えられるものとする．

8.3.2　解析結果

8．2節で述べた方法を用いて，前項の2相共振回路における基本調波周期振

動の分岐現象について解析を行う（ただし，ここでは，８．２節で述べたEuler法の代わりにRunge-Kutta法を用いて離散化を行う）．

まず，図８．５（ａ）～（ｄ）に，

$h=1$，$k=0.1$，$\gamma=0.2$，$\nu=1$

とした場合について，$0 \leqq B \leqq 1.8$の範囲における振幅特性などを示す．図８．５を見ると，式(5.61)の２相共振回路では，式(6.14)の単相共振回路の場合と比較して複雑な特性曲線が得られることが分かる．図８．５における，$0.4 \leqq B \leqq 0.7$，および，$1.2 \leqq B \leqq 1.7$の範囲の特性曲線を拡大して図８．６（ａ）～（ｄ）に示す．

図８．６（ａ）（ｂ）における特性曲線（$0.4 \leqq B \leqq 0.7$）は以下のようにして得られたものと考えられる．式(6.14)の単相共振回路では，小振幅時には図８．７に示すような３種の周期解が存在する．式(8.61)の２相共振回路において$\gamma=0$とすると，各相がそれぞれ独立した単相共振回路となるので，ａ相に３種，ｂ相に３種の周期解が独立に存在し，全体では３×３＝９種の周期解が存在することになる．この様子を図８．８（ａ）（ｂ）に示す．ただし，図８．８において，例えば，解（ⓝ，ⓤ）と付した曲線は，ａ相ではnon-resonant solution，ｂ相では1st unstable solution[19]となっている解曲線である（他の記号を付した曲線も同様である）．また，図８．８（ａ）（ｂ）では，曲線が３本存在することを示すために曲線を３重に描いてあるが，図８．９（ａ）（ｂ）に示すように，実際の特性曲線ではこれら３本の曲線は重なって１本の曲線に見える（図８．９（ｃ）から分かるように，実際にはこれらの解曲線は重なってはいない）．$\gamma=0$の時は，これらの曲線はつながっているが，$\gamma=\varepsilon\ (\neq 0)$とすると曲線は図８．１０（ａ）～（ｃ）のように２つの部分に分離する．このとき，$\gamma=0$における分岐点Ⓐおよびⓓは，$\gamma>0$においてそれぞれ２つの単純極限点Ⓐ$_1$，Ⓐ$_2$およびⓓ$_1$，ⓓ$_2$に分離する．図８．６（ｃ）（ｄ）における特性曲線（$1.2 \leqq B \leqq 1.7$）についても，上と同様に考えることができる．

このように，式(6.14)の単相共振回路において周期解がｍ個存在する場合には，式(8.61)の２相共振回路において$\gamma \fallingdotseq 0$とすると，（少なくとも）m^2個の周期解が存在することになる．このために，式(8.61)の２相共振回路では，式(6.14)の単相共振回路と比較して，特性曲線が複雑になる傾向がある．

次に，

$h=1$，$k=0.1$，$\gamma=0.5,\ 2$，$\nu=1$

とした場合について，$0 \leqq B \leqq 1.2$の範囲における振幅特性を，図８．１１（$\gamma=0.5$），図８．１２（ａ）（ｂ）（$\gamma=2$）に示す．また，

$h=0,2,3$（心線特性Ｉ），$k=0.1$，$\gamma=0.5$，$\nu=1$

とした場合について，$0\leqq B\leqq1.2$の範囲における振幅特性を，図８．１３（ａ）（ｂ）（$h=0$），図８．１４（ａ）（ｂ）（$h=2$），図８．１５（ａ）～（ｈ）（$h=3$）に示す．図８．１５では，やはり，単相共振回路の場合（図６．１８）と比較して，かなり複雑な特性曲線が得られている．

なお，図８．１２では，Ｂが0.7～1の付近において安定解が得られていない．安定性の交代が起こる$B=1$の付近において，行列(8.41)の固有値を調べてみると，２つの固有値が同時に単位円の実軸上以外の点を横切る（図８．１６）ことが分かり，従って，Neimark分岐[3]によって安定性が交代していることが分かる．参考のため，

$B=0.7$，$h=1$，$k=0.1$，$\gamma=2$，$\nu=1$

とし，初期値，

$$t_0=0\ ,\ \mathbb{x}(t_0)=\mathbb{0} \qquad (8.64)$$

から出発して，状態方程式(8.4)を，Runge-Kutta法を用いて数値積分した結果を図８．１７（ａ）（ｂ）に示す．ただし，

図（ａ）は，Poincaré写像（$x_1(t_0+iT)$，$y_1(t_0+iT)$）

（$i=501,\cdots,1000$）

図（ｂ）は，$x_1(t)$の定常波形

を示している．図８．１７では，概周期振動が得られている．

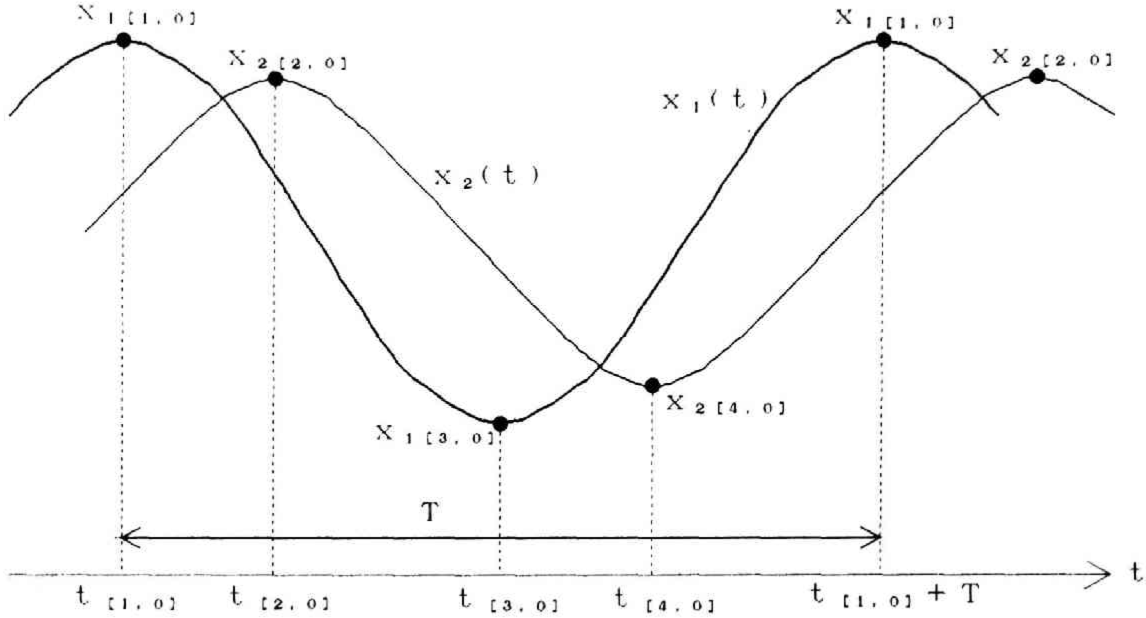
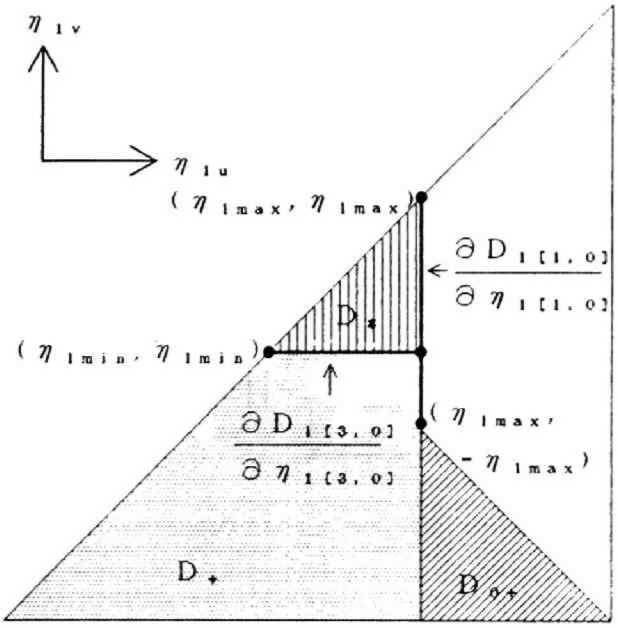
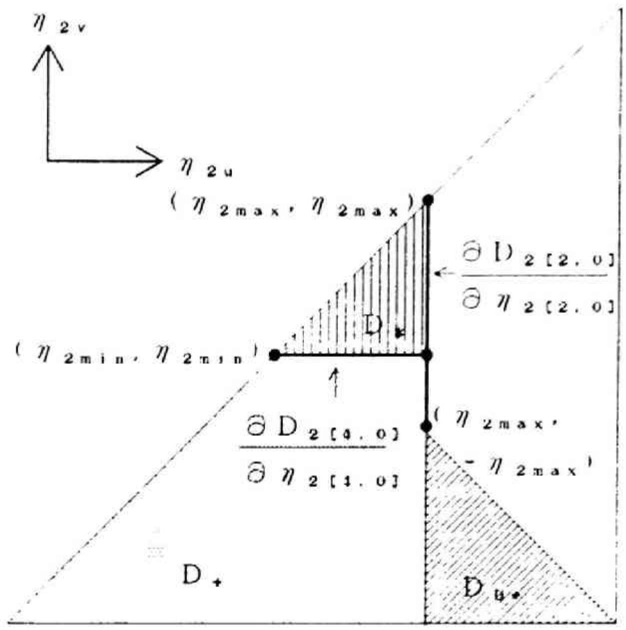


図８．１　周期Ｔの分割

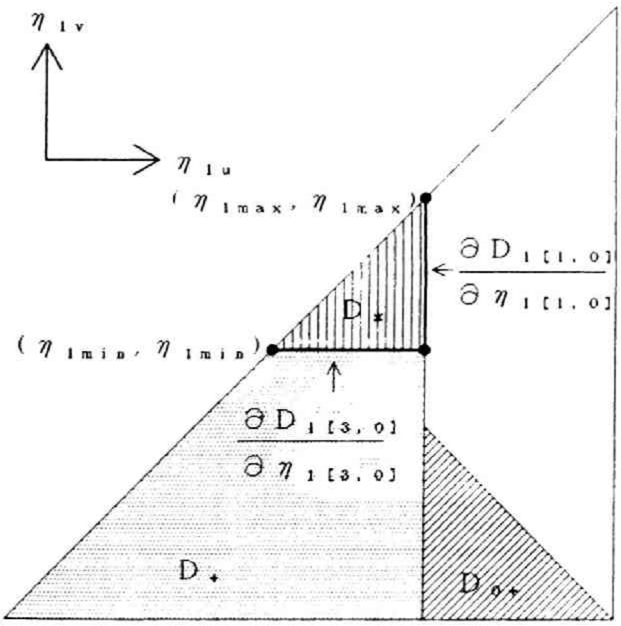


a 相

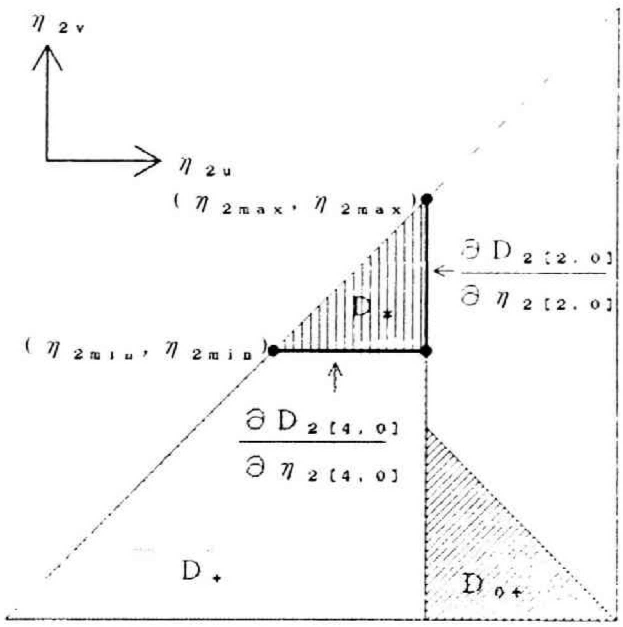


b 相

（ａ）判別法①



a 相



b 相

（ｂ）判別法②

図８．２　安定判別の際に仮定する境界線分

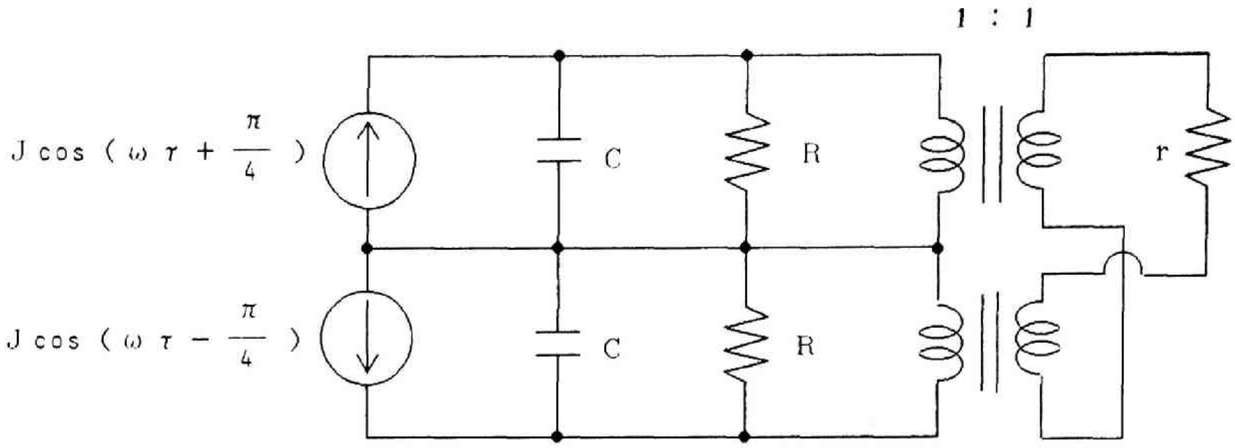


図８．３　２相共振回路

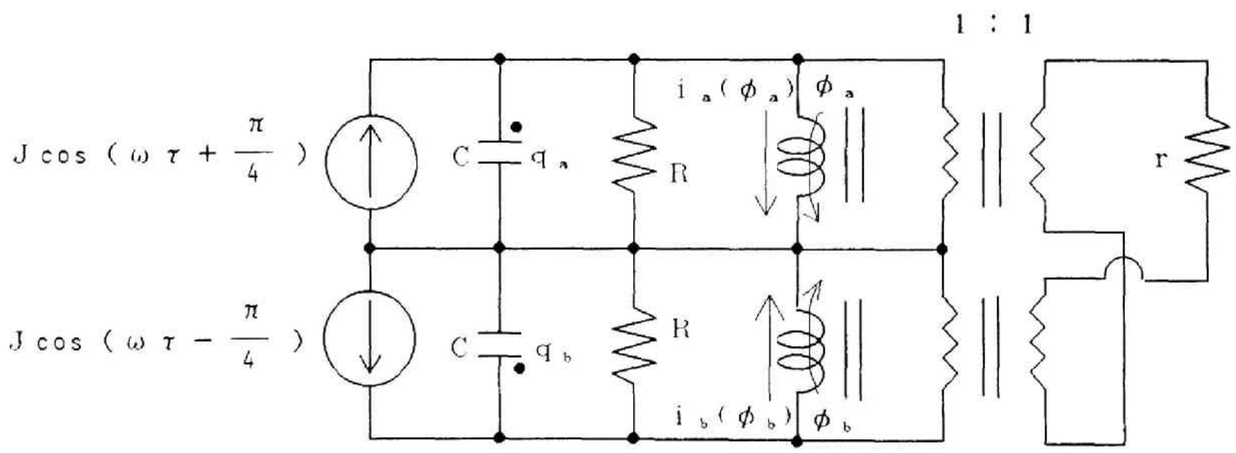
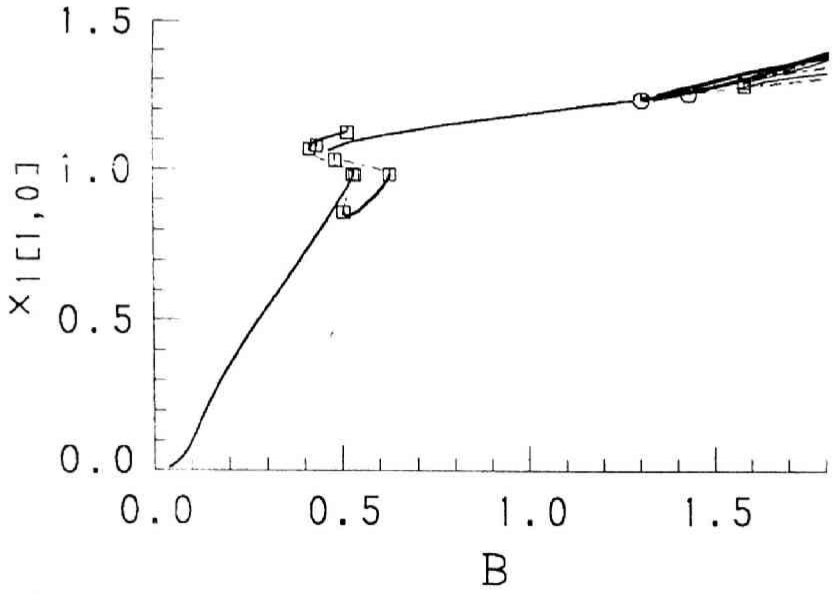
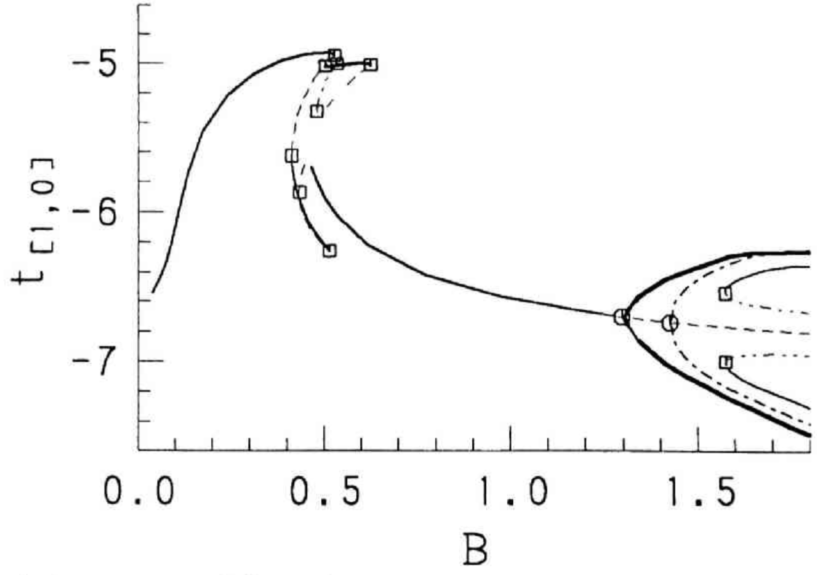


図８．４　等価回路



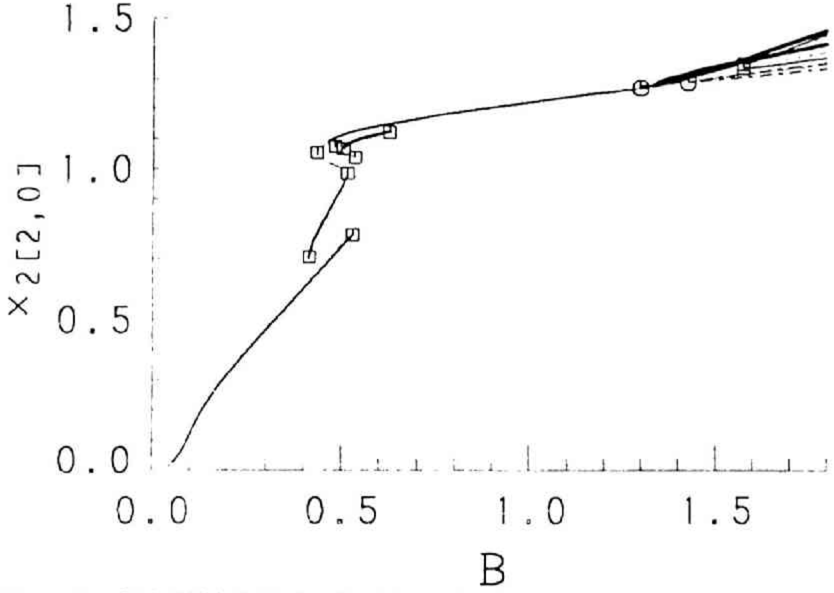


(a) $x_{1[1,0]}$の変化 ↑

(b) $x_{2[2,0]}$の変化 ↓

(c) $t_{[1,0]}$の変化 ↑

(d) $t_{[2,0]}$の変化 ↓



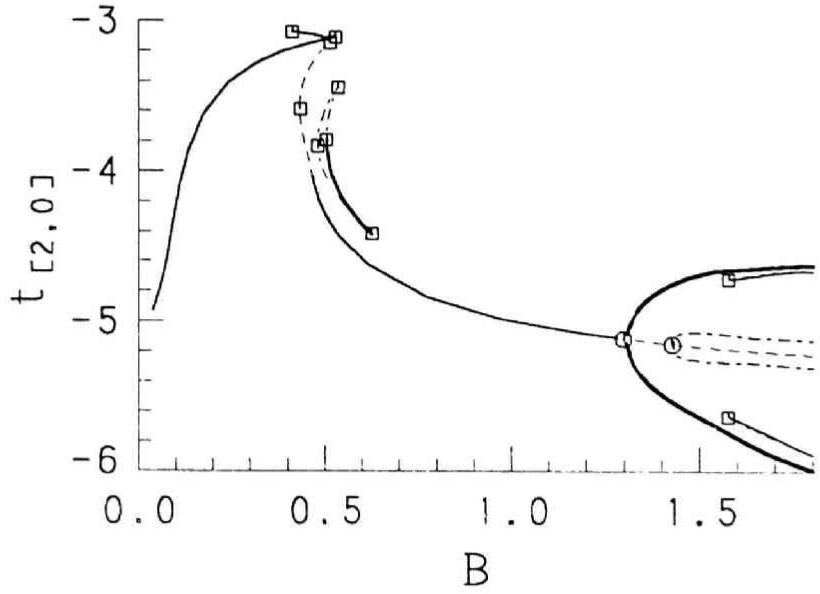
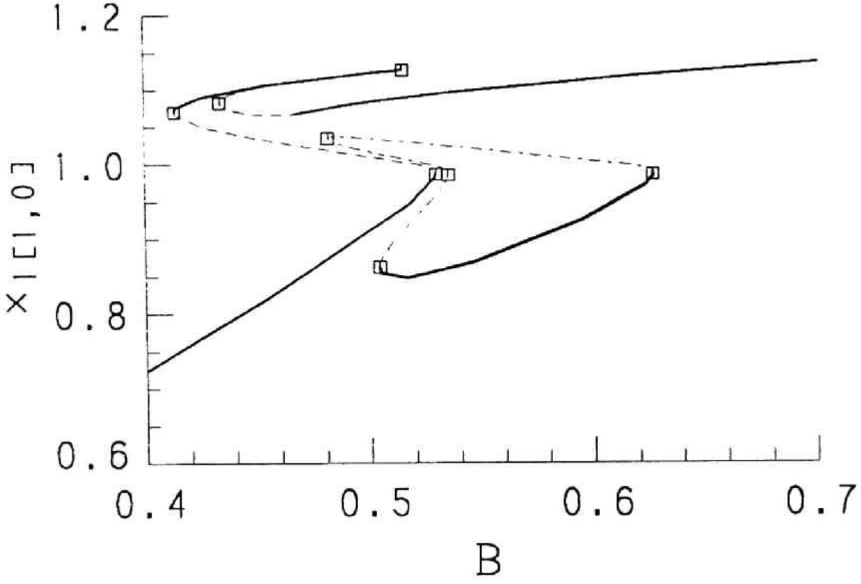
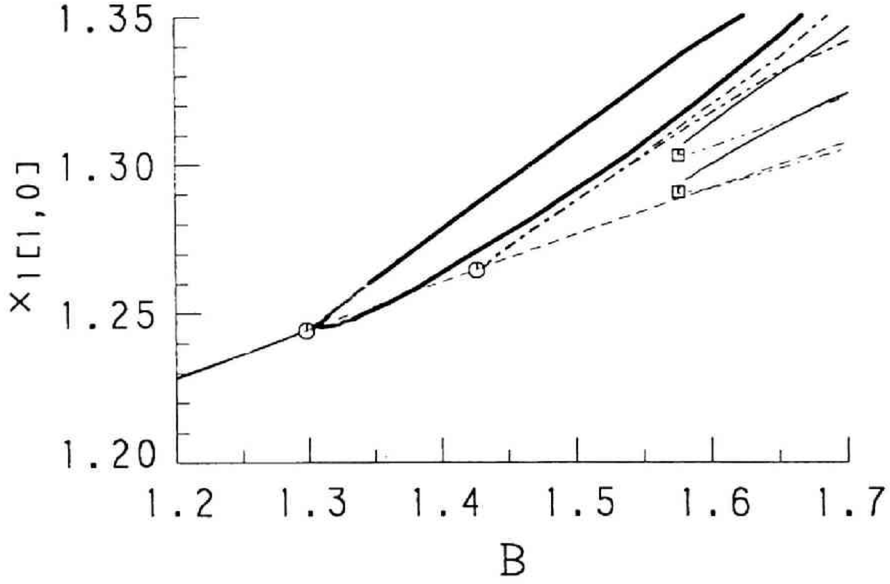


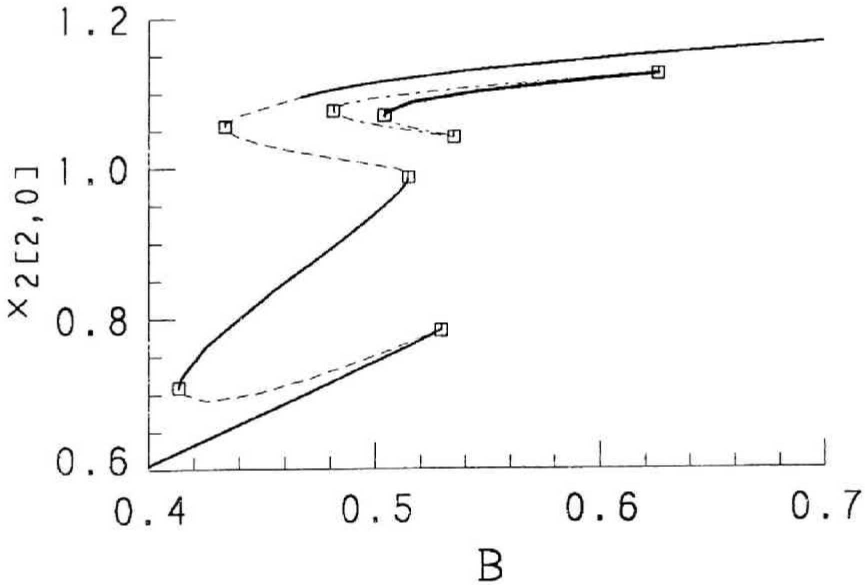
図8.5 振幅特性曲線（2相共振回路，$h=1$，$k=0.1$，$\nu=1$，$\gamma=0.2$）





(a)　$x_{1[1,0]}$の変化　↑　　　　(c)　$x_{1[1,0]}$の変化　↑

(b)　$x_{2[2,0]}$の変化　↓　　　　(d)　$x_{2[2,0]}$の変化　↓



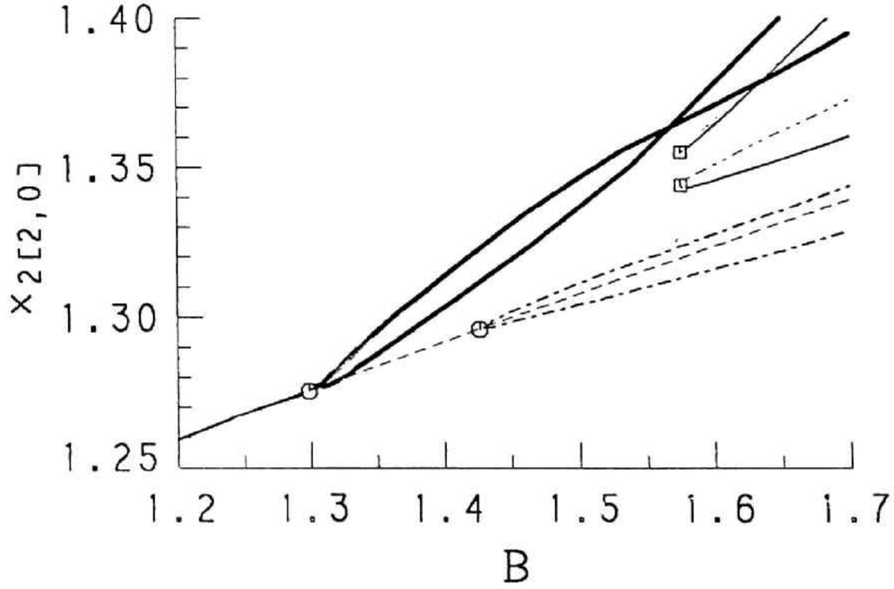


図8.6　図8.5の特性曲線の一部の拡大（2相共振回路，$h=1$，$k=0.1$，$\nu=1$，$\gamma=0.2$）

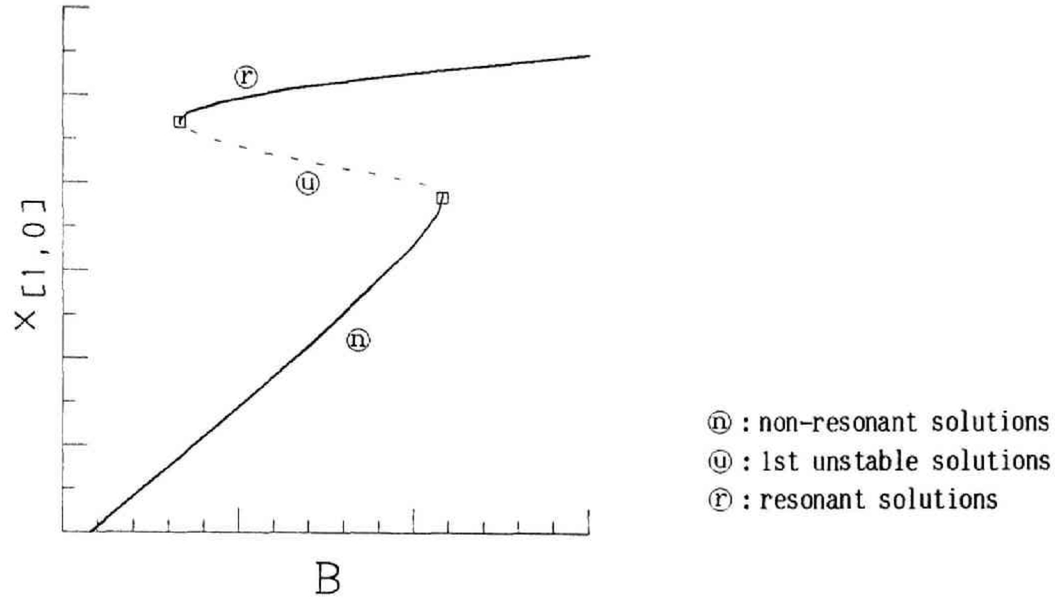


図8.7　単相共振回路の場合

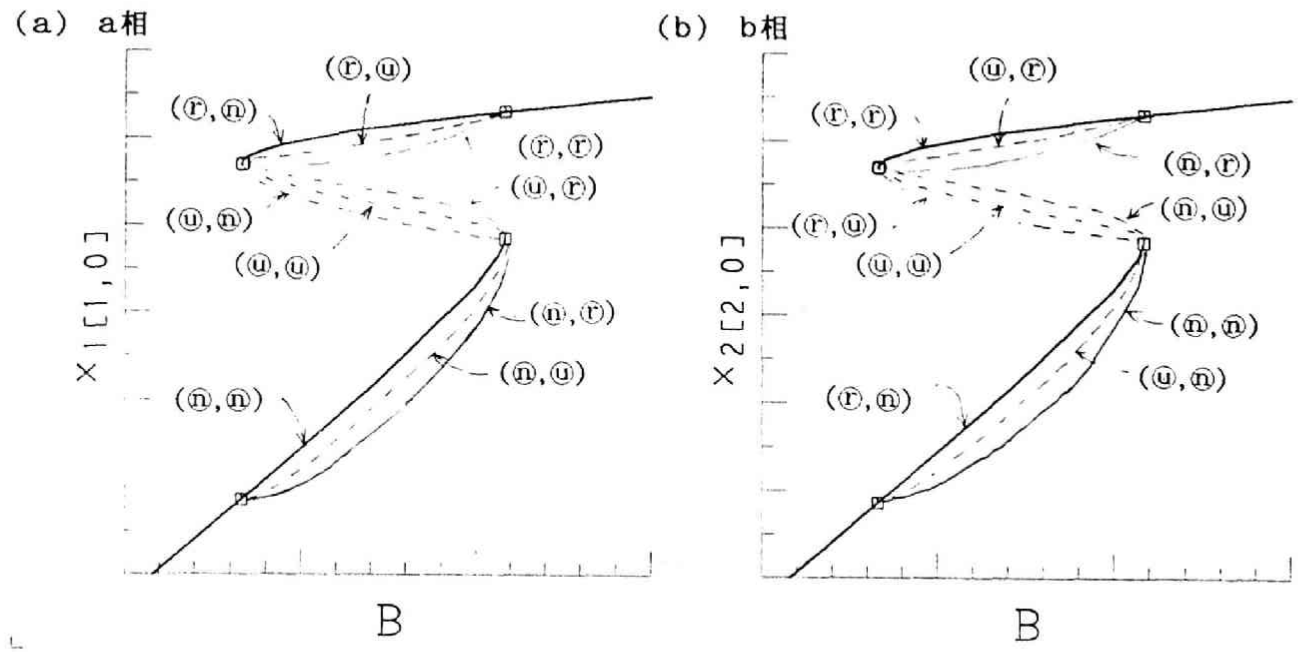


図8.8　2相共振回路の場合
($\gamma=0$)

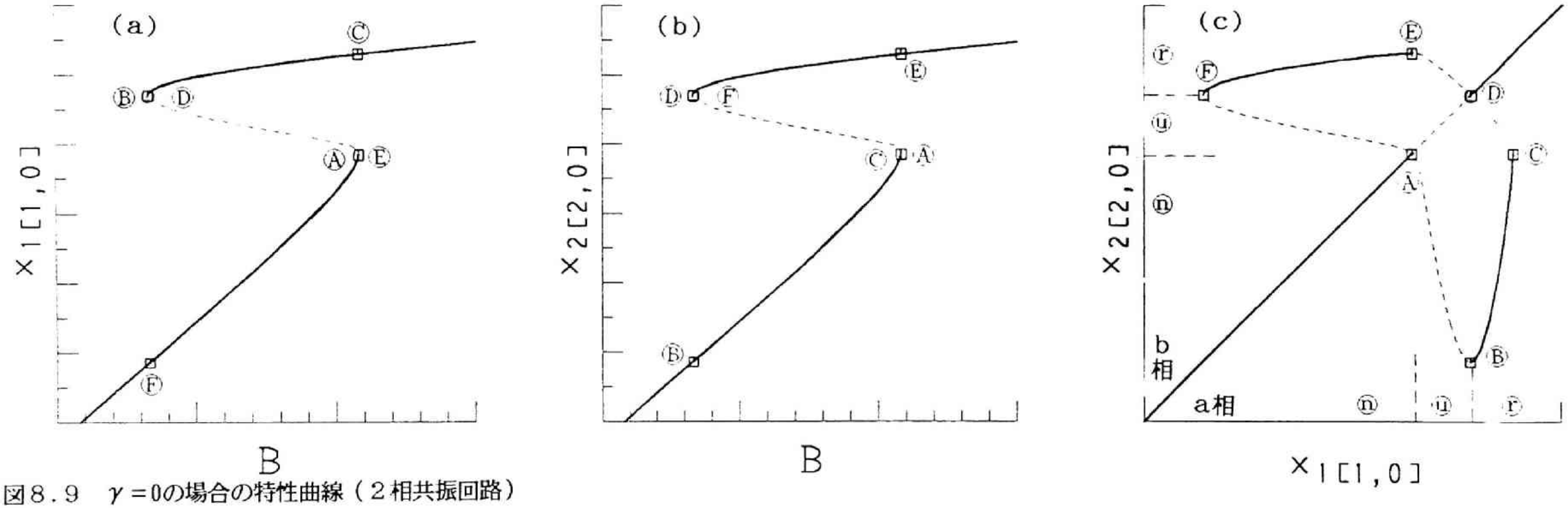
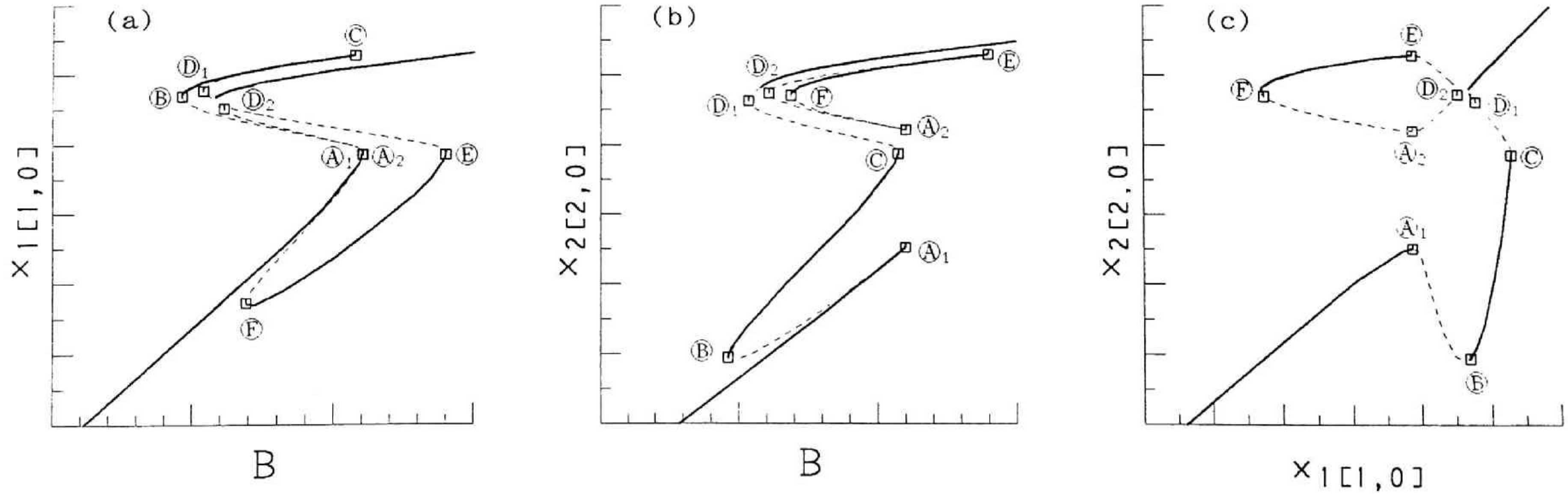
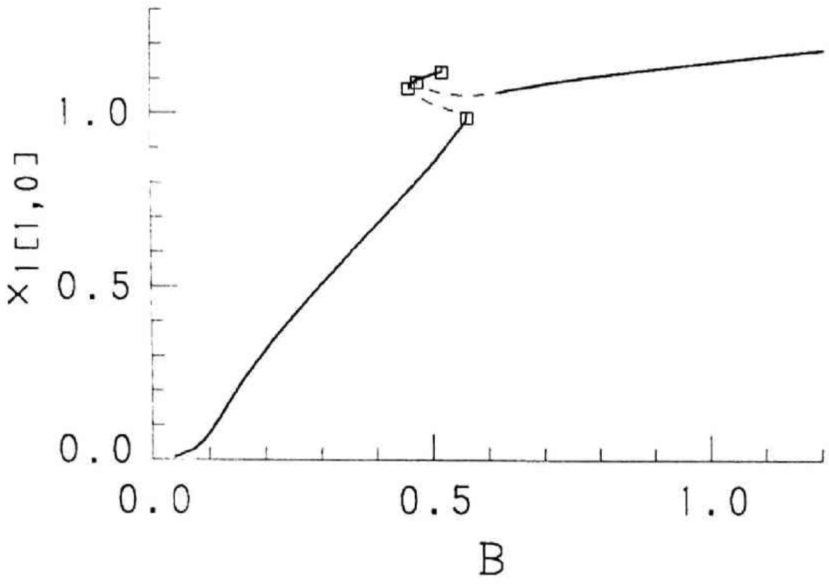


図8.9　$\gamma=0$の場合の特性曲線（２相共振回路）

図8.10　$\gamma=\varepsilon$の場合の特性曲線（２相共振回路）





(a) $x_{1[1,0]}$の変化　↑

(b) $x_{2[2,0]}$の変化　↓

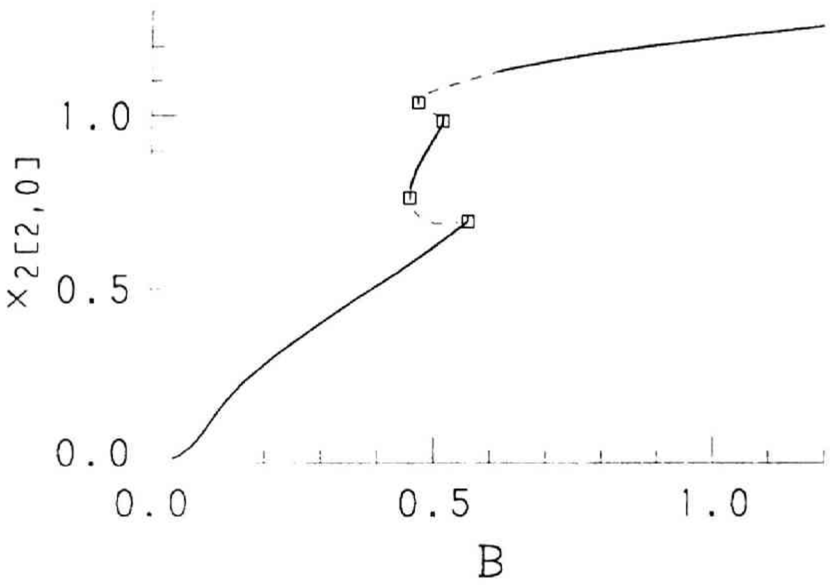
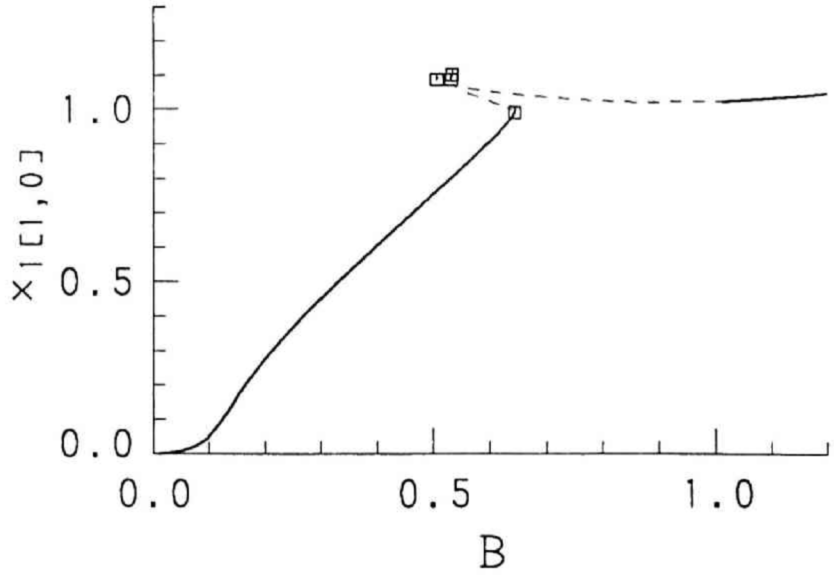


図8.11　振幅特性曲線（2相共振回路，h＝1，k＝0.1，γ＝0.5）



(a) $x_{1[1,0]}$の変化　↑

(b) $x_{2[2,0]}$の変化　↓

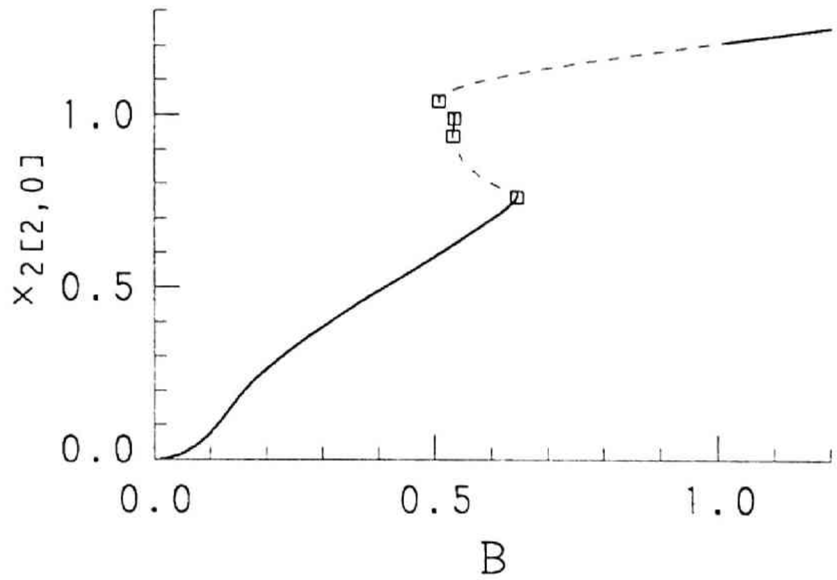
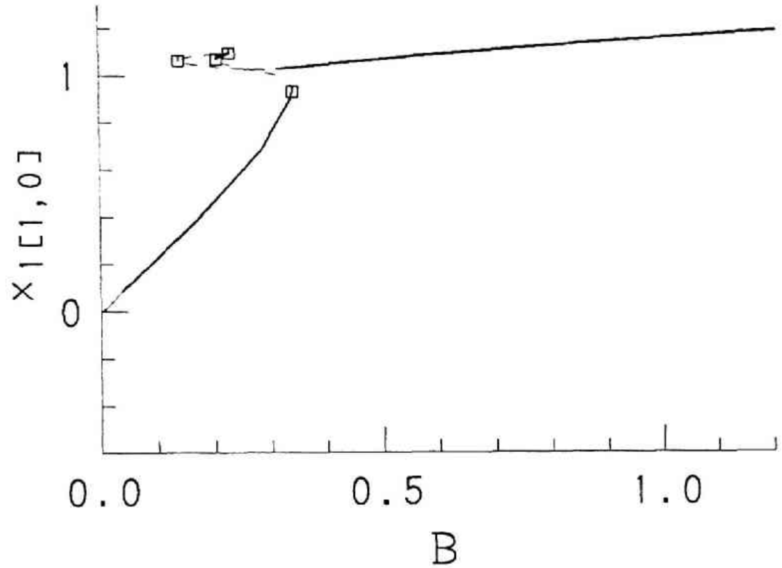


図8.12　振幅特性曲線（2相共振回路，h＝1，k＝0.1，γ＝2）



(a)　$x_{1[1,0]}$の変化　↑

(b)　$x_{2[2,0]}$の変化　↓

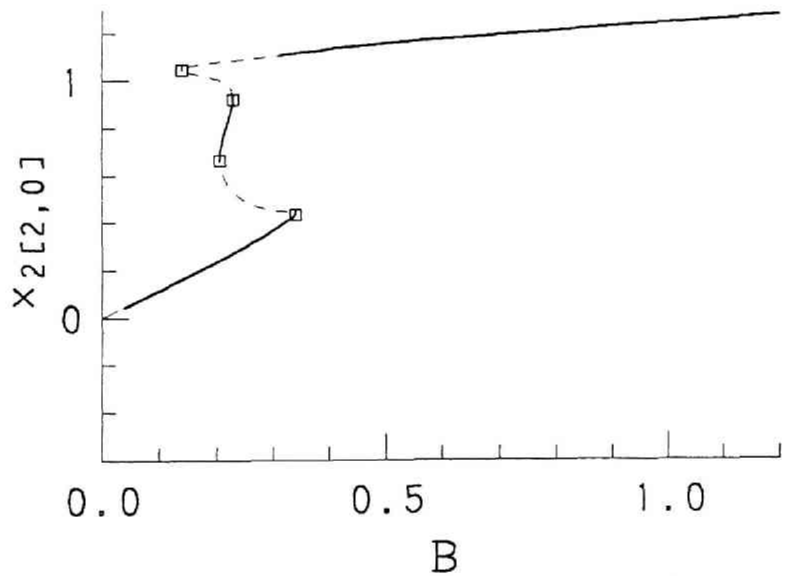
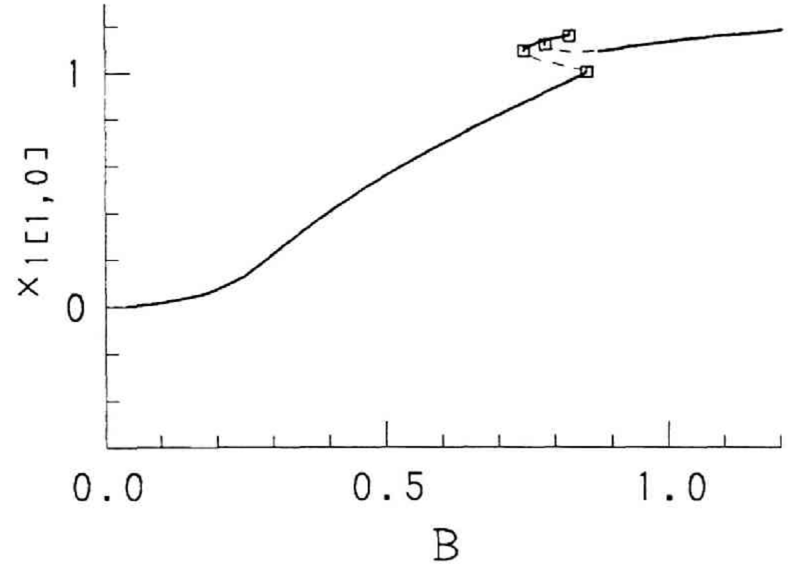


図8.13　振幅特性曲線（2相共振回路，h=0，k=0.1，γ=0.5）



(a)　$x_{1[1,0]}$の変化　↑

(b)　$x_{2[2,0]}$の変化　↓

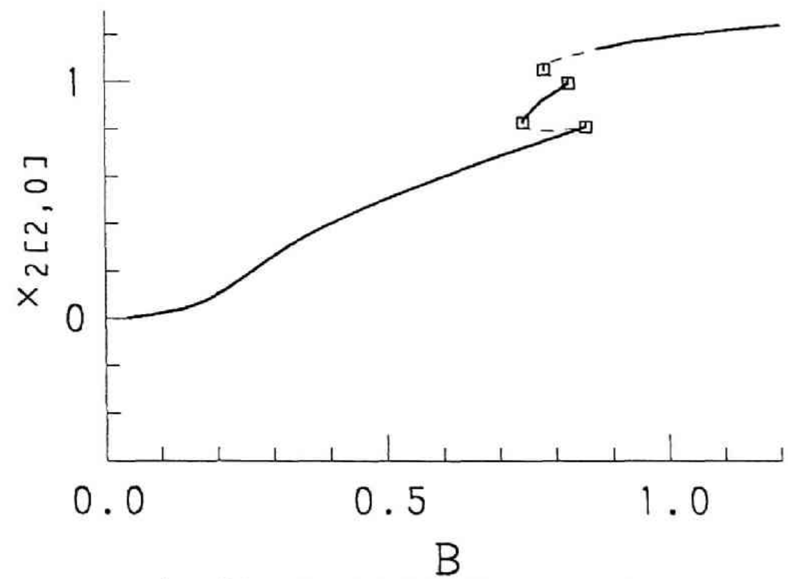
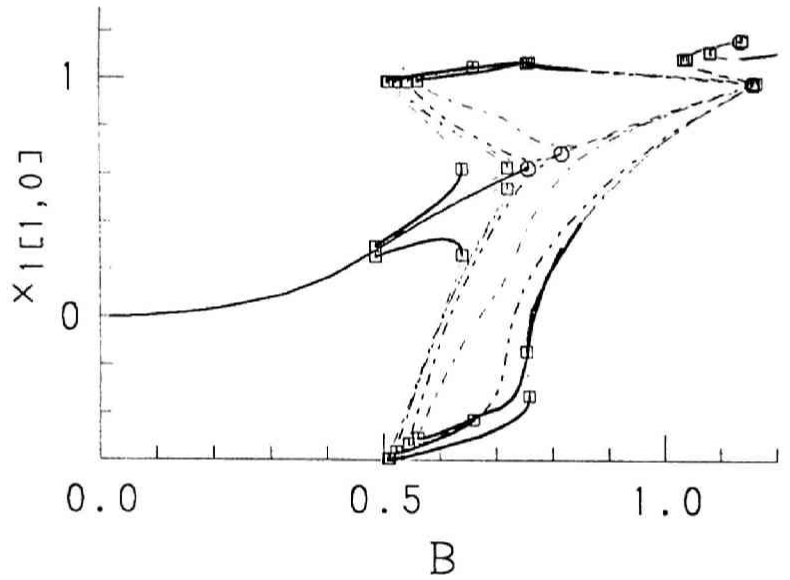
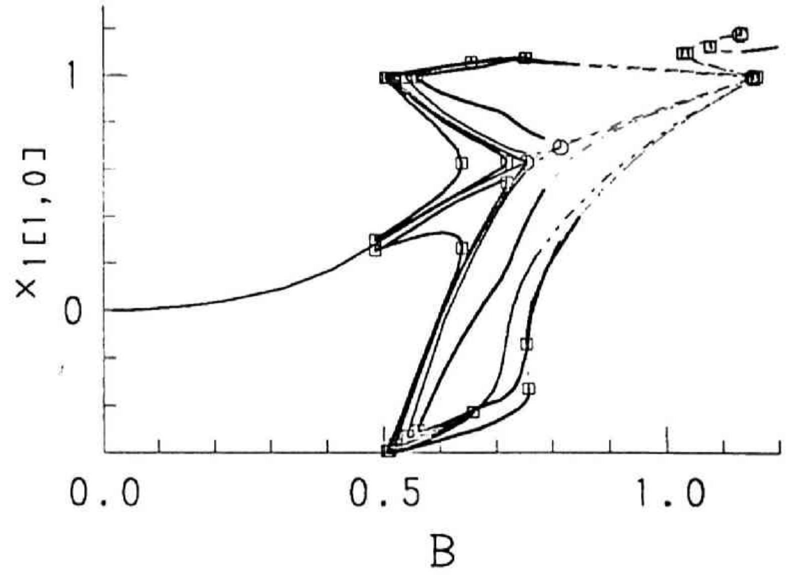


図8.14　振幅特性曲線（2相共振回路，h=2，k=0.1，γ=0.5）



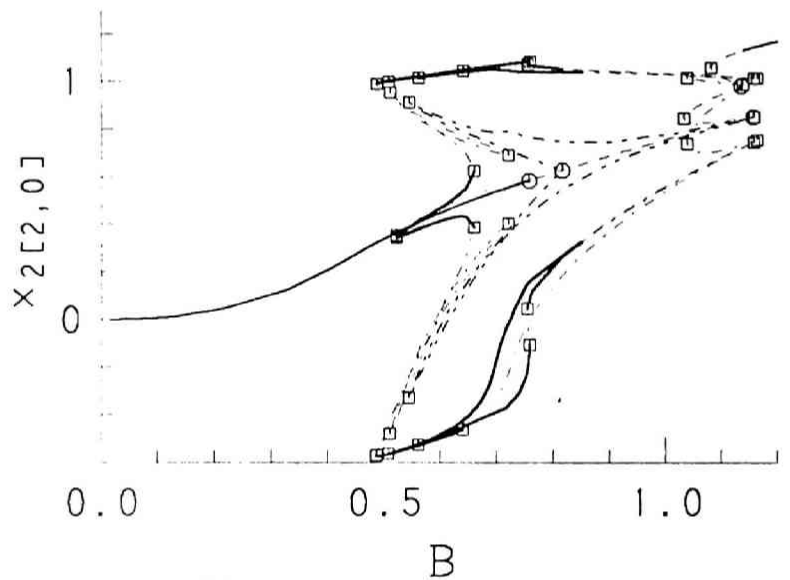


(a)　$x_{1[1,0]}$の変化（安定判別法①）　↑

(b)　$x_{2[2,0]}$の変化（安定判別法①）　↓

(c)　$x_{1[1,0]}$の変化（安定判別法②）　↑

(d)　$x_{2[2,0]}$の変化（安定判別法②）　↓



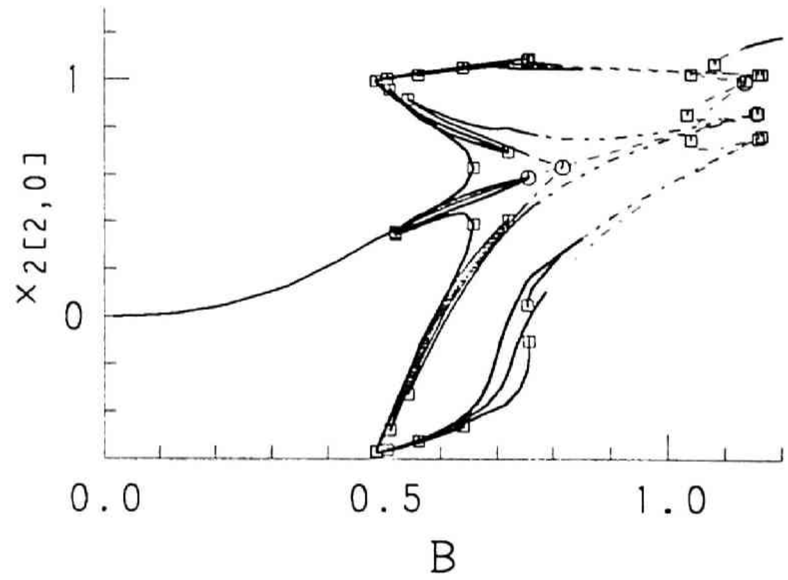
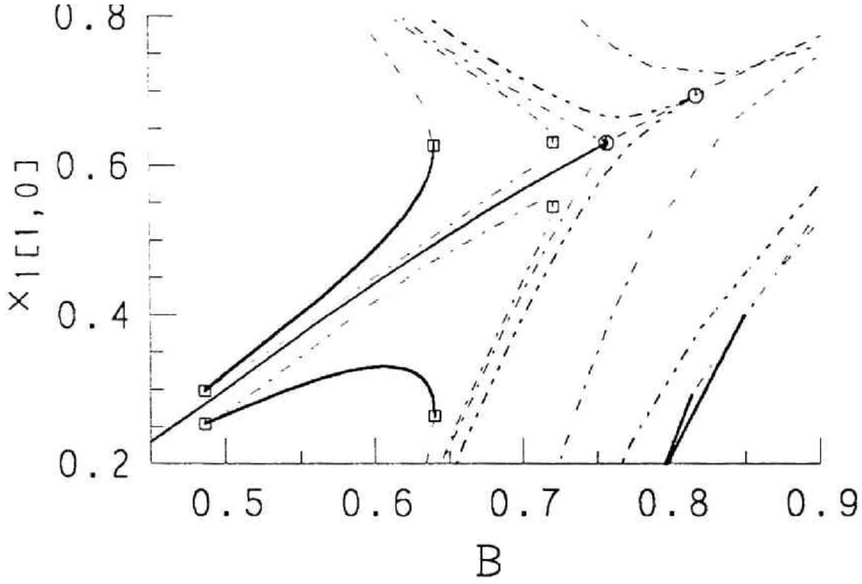
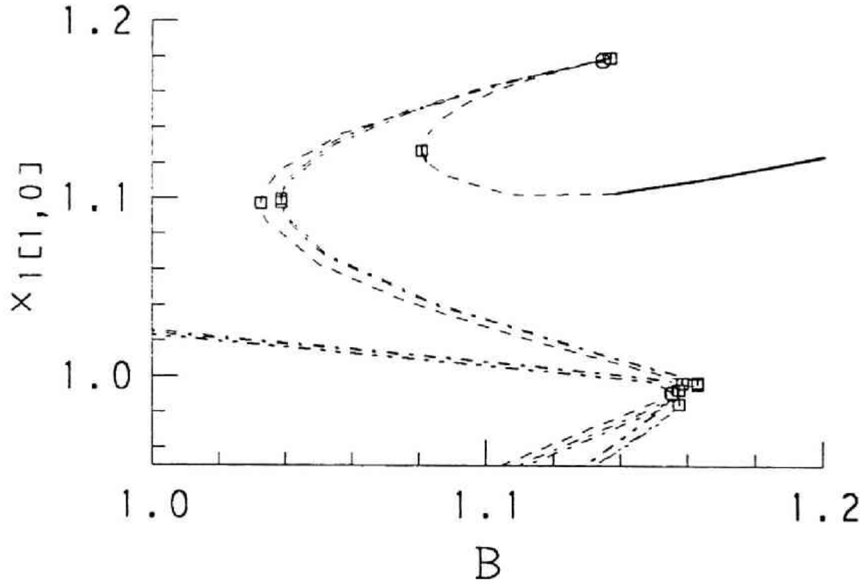


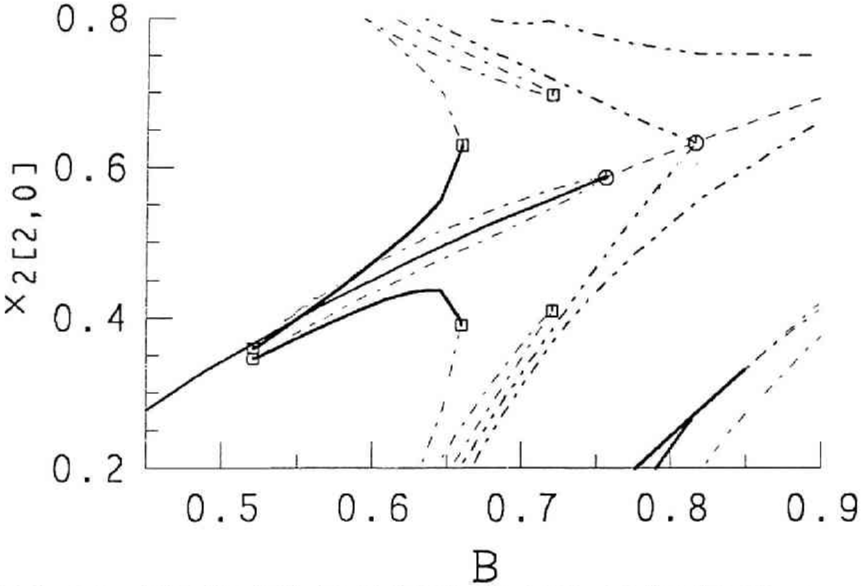
図8.15　振幅特性曲線（2相共振回路，h＝3，k＝0.1，γ＝0.5）





(e) $x_{1[1,0]}$の変化（安定判別法①） ↑　　(g) $x_{1[1,0]}$の変化（安定判別法①） ↑

(f) $x_{2[2,0]}$の変化（安定判別法①） ↓　　(h) $x_{2[2,0]}$の変化（安定判別法①） ↓



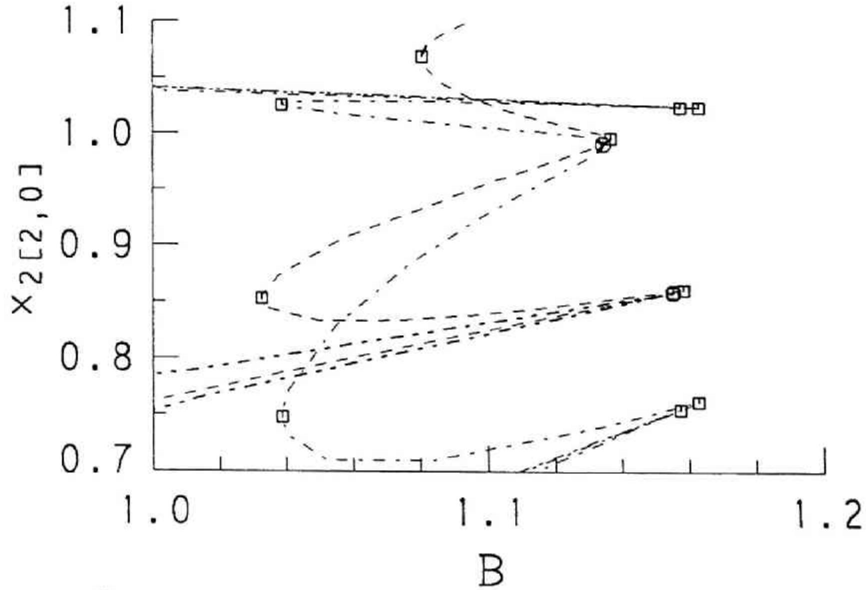


図8.15　振幅特性曲線（分岐点付近の拡大図）（２相共振回路，h＝3，k＝0.1，γ＝0.5）

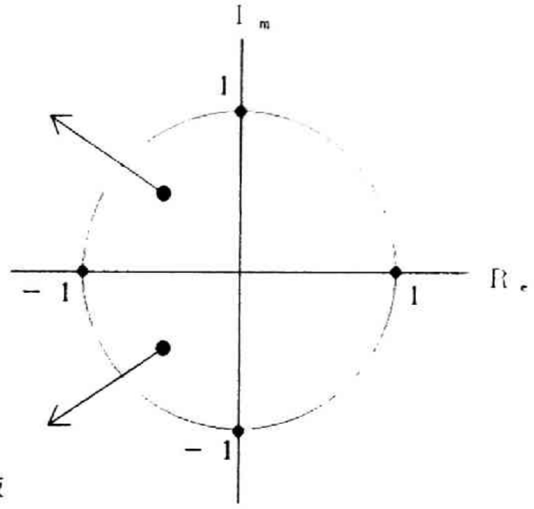


図８．１６　Ｎｅｉｍａｒｋ分岐

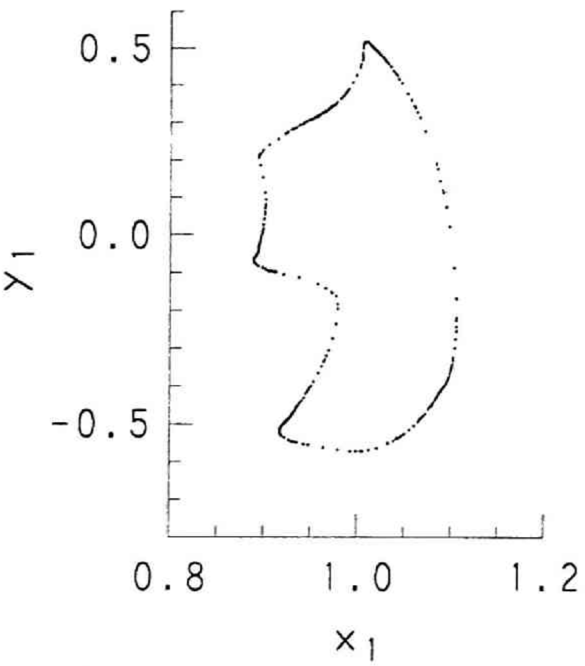
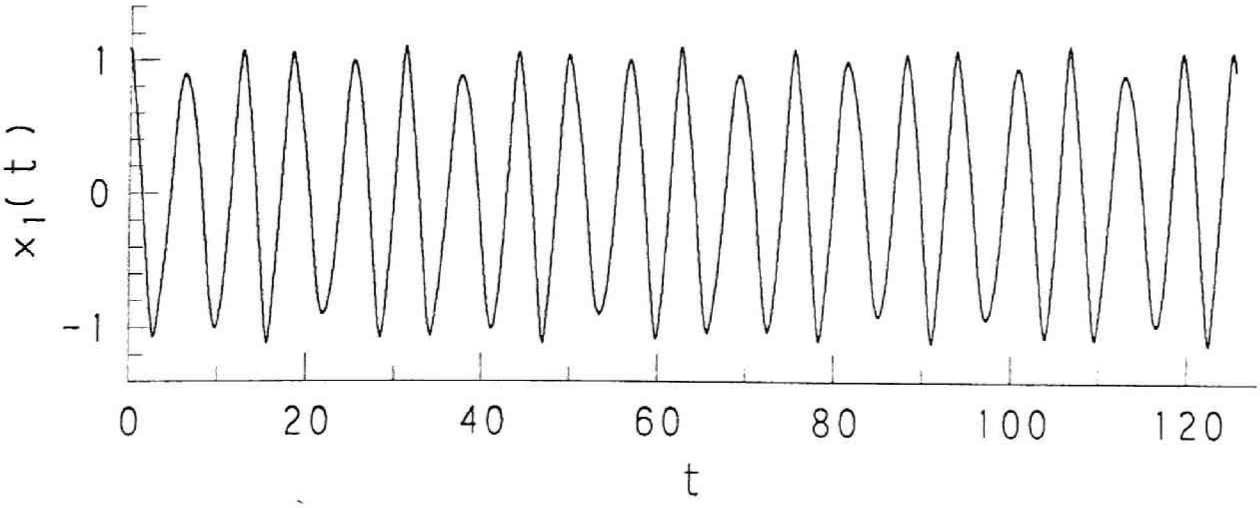


図８．１７　２相共振回路
（Ｂ＝0.7，ｈ＝1，ｋ＝0.1，γ＝2，ν＝1）
←（ａ）Poincaré写像（$x_1(iT)$，$y_1(iT)$）
（ｉ＝501，…，1000）
（ｂ）$x_1(t)$の定常波形
↓



第９章　結言

９．１　まとめ

本論文における研究結果を，論文の構成に従って以下に示す．

９．１．１　第２章のまとめ

第２章では，プライザッハモデルを用いたヒステリシス特性の表現方法について述べた．本論文では，可飽和インダクタにおける電流ηと磁束ｘとの関係を，プライザッハモデルを用いて，

$$x = H(\eta) = l_s \cdot \eta + \iint_{D(\eta)} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u\, d\eta_v + H_{min}$$

（$K(\eta_u, \eta_v)$：プライザッハ分布関数，$D(\eta)$：積分領域）

とおいた．第２．１節では，ηの時点系列$\eta_{[p]}$（$p = 0,1,\cdots$）からＨの時点系列$H_{[p]}$（$p = 0,1,\cdots$）を求めるためのアルゴリズムを示した．その際，次章以降での解析の際に$H(\eta)$の微分計算が必要であることを考慮して，分布関数$K(\eta_u, \eta_v)$を連続関数で与えることができ，かつ，ηの変化に対する積分領域$D(\eta)$の変化が連続的に行われるような計算法を用いた．

第２．２節では，まず，解析の際の取扱いを容易にするため，ヒステリシス関数を，

$$x_{[p]} = H_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \eta_{[1]}, \cdots, \eta_{[p-1]})$$

のように過去の時点の値を変数に持つ関数として表現し，その上で，このヒステリシス関数の各$\eta_{[i]}$（$i = 0,\cdots,p$）による微分計算について述べた．その中で，１階微分$\partial H_{[p]} / \partial \eta_{[i]}$や，２階微分$\partial^2 H_{[p]} / \partial \eta_{[p]}{}^2$などが，領域$D_{[p]}$（$= D(\eta_{[p]})$）の境界をなす線分上における線積分で表されることを述べ，その境界線分の表現法を示した．最後に，上記のヒステリシス関数の逆関数について述べた．

９．１．２　第３章のまとめ

第３章では，ヒステリシス素子を含む強制振動系における定常解析の方法について述べた．

第３．１節では，まず，ヒステリシス素子を含む強制振動系の状態方程式を与

え，それを時間に関して離散化することにより，以後の解析に必要な第１および第２変分方程式を導出した．その際，変分方程式に，ヒステリシス関数特有の項（履歴項）が現れることを示した．

第３．２節では，周期解が不飽和ループを作る場合について，幾つかの考察を行った．まず，定常周期解が不飽和ループを作る場合には，プライザッハ分布関数の定義域は，定常状態において，４つの部分領域（D_+，D_-，D_0，D_*）に分割されることを示した．次に，周期解が不飽和ループを作る場合には，この中の領域D_0（定常状態に至るまでの過程によって磁化状態が定まる領域）の磁化状態の違いにより，周期解が有限個にとどまらず，無限集合をなすことがあることを例を挙げて示した．

第３．３節では，shooting法を用いた周期解の求解の方法について述べた．まず，状態方程式がヒステリシス関数を含む場合には，状態方程式の始点（出発点）以前の履歴を考慮する必要があるために，出発点の設定に注意を要することを示した．次に，出発点の設定法の一つとして，振幅が徐々に増大して定常状態に達する場合に生じる領域D_0の磁化状態を仮定した上で，始点の時刻を$|\eta(x)|$が最大となる時刻にとる方法を提案した．最後に，この始点の時刻を未知数に加えて，Poincaré写像の不動点をNewton法を用いて探索することにより周期解を求める方法を示した．

第３．４節では，parallel shooting法を用いた定常解析について述べた．まず，解曲線の追跡や特異点の算出などを行う際には，parallel shooting法を用いた解析法が有効であることを述べた．次に，１周期を２つの区間（subinterval）に分割する場合について，ヒステリシス関数が前区間の履歴の影響を受けることを考慮して，状態方程式と変分方程式を導出した．最後に，parallel shooting法を用いて，周期解を求める方法を示した．

第３．５節では，周期解の安定判別法について述べた．周期解が不飽和ループを作る場合，領域D_0の磁化状態により周期解の安定性が異なり，その全ての場合について安定判別をすることは容易でない．そこで，次の２つの場合，

①振幅が徐々に大きくなって定常状態に達する場合．

②振幅が徐々に小さくなって定常状態に達する場合

について，想定されるD_0の磁化状態をそれぞれ仮定し，この２種類の磁化状態の仮定の下に，それぞれ安定判別を行うことを提案した．また，その安定判別の方法として，第１変分方程式の特性数による判別法に相当する方法を示した（本論

文では，①，②の仮定の下に安定判別を行う方法を，それぞれ，判別法①，判別法②と呼ぶ）．

9．1．3　第4章のまとめ

第4章では，ヒステリシス素子を含む強制振動系における基本調波周期振動の分岐について述べた．

第4．1節では，系のパラメータの変化に対する定常特性の変化を，連続変形法を用いて調べる方法を述べた．

第4．2節では，まず，特性曲線（解曲線）の単純特異点の前後における周期解の分岐の仕方について述べた．さらに，parallel shooting法を用いない場合，および，parallel shooting法を用いる場合について，それぞれ，特異点の前後において，ヒステリシス素子を含まない強制振動系の場合と同様に安定性が変化する条件を示した．

第4．3節では，まず，解曲線上の単純極限点の検出と算出の方法を示し，これを応用して，マイナーループの発生（消滅）点を算出する方法を述べた．次に，解曲線上の単純分岐点の検出と算出の方法を示し，単純分岐点におけるbranch switchingの方法を述べた．最後に，分岐集合の追跡について述べた．

9．1．4　第5章のまとめ

第5章では，分数調波周期振動の分岐について述べた．

第5．1節では，基本調波周期振動の解曲線から，倍周期振動，および，M倍周期振動の解曲線が分岐するための条件を示した．

第5．2節では，まず，倍周期分岐点の検出と算出の方法を示し，次に，分岐点におけるbranch switchingの方法を示した．

第5．3節では，まず，M倍周期分岐点の検出と算出の方法を示し，次に，分岐点におけるbranch switchingの方法を示した．

9．1．5　第6章のまとめ

第6章では，前章までに述べた解析法を用いて，2階の強制振動系における分岐現象の解析を行った．

第6．1節では，解析に用いるヒステリシス特性を与えた．まず，プライザッハモデルによるヒステリシス特性（$\eta(x)$）と，その心線特性（$c(x)$）を組み

合わせて用いることにより，メジャーループの面積を連続的に変化させることが可能なようにヒステリシス特性を与える方法を示した．次に，解析に適したプライザッハ分布関数を与えてヒステリシス関数η(x)を決定し，その心線特性c(x)を２種類示した．

第６．２節では，解析の対象とする２階の強制振動系として，並列共振回路と直列共振回路を取り上げ，それぞれ，状態方程式を示した（並列共振回路の状態方程式はDuffing方程式となる）．

第６．３節では，第３章で述べた定常解析法の解析例を示し，解析法の有効性を検討した．その中で，変分方程式の履歴項の必要性などを示した．

第６．４節では，第４章で述べた方法を用いて，２階の並列共振回路と直列共振回路について，基本調波周期振動の分岐現象の解析を行った．まず，両共振回路において振幅特性を示し，その中で，ヒステリシス特性が存在するために生じる分岐の例，および，安定判別法①と②とでは判別結果が異なる例を示した．次に，角周波数特性において，島状領域が現れることを示した．次に，ヒステリシス損と抵抗損の変化に対する周期解の分岐を調べ，ヒステリシス損と抵抗損とでは，周期解の安定性に与える影響が異なる例を示した．次に，それまでに示した特性曲線上に見られる単純特異点について分岐集合を示し，パラメータの変化による特異点の発生や消滅の様子を示した．最後に，第６．１節で与えたヒステリシス特性とは異なる非線形特性を用いた場合の解析結果を示し，ヒステリシス特性が分岐現象に及ぼす影響を再検討した．

第６．５節では，第５章で述べた方法を用いて，並列共振回路について，分数調波周期振動の分岐現象の解析を行った．まず，倍周期解の解曲線の例を示した．次に，Ｍ倍周期分岐点の算出を行い，ヒステリシス特性が３倍周期分岐の発生のための条件に与える影響を考察した．最後に，３倍周期解の解曲線を示した．

第６．６節では，それまでに得られた解析結果と比較するために，系の状態方程式を定常状態に至るまで数値積分して得られる解析結果を示した．その中で，第３章で述べた安定判別法①，②の検証を行った．また，ヒステリシスループが不飽和ループとなる場合には，初期値の違いによって異なる定常状態になる例を示した．また，ヒステリシス特性が存在するために発生するカオスの例を示した．

９．１．６　第７章のまとめ

第７章では，２階の並列共振回路における周期解の無限集合の性質について調

べた．

第７．１節では，系の状態方程式を，様々な初期条件の下に数値積分して様々な定常ループを求めることにより，定常周期解の集合を概観した．その中で，ループの相似性が，周期解の集合の性質や周期解の分岐に及ぼす影響について考察した．

第７．２節では，第３章で設けた領域D_0の磁化状態の仮定を変更して様々な周期解を求めることにより，周期解の集合について調べた．まず，領域D_0が全て正あるいは全て負に磁化されている状態をそれぞれ仮定して，特性曲線（特性曲線(＋)あるいは(－)）を求め，この２つの特性曲線を用いて周期解の存在範囲を示した．また，上記以外にも様々な磁化状態を仮定して特性曲線を求めることにより，周期解の分布について調べ，特性曲線(＋)と特性曲線(－)とに挟まれた領域が，４種類の部分領域（周期解が安定な領域，周期解が不安定な領域，D_0の磁化状態によって周期解の安定性が異なる領域，周期解が存在しない領域）に分割されることを述べた．

９．１．７　第８章のまとめ

第８章では，２個のヒステリシス素子を含む強制振動系における分岐現象の数値解析について述べた．

第８．１節では，まず，２個のヒステリシス素子を含む強制振動系における状態方程式を与えた．次に，周期解の求解などの際に，１周期を４つの区間に分割したparallel shooting法を用いることを仮定して，状態方程式を時間に関して離散化し，変分方程式を導出した．

第８．２節では，定常解析の方法について述べた．まず，parallel shooting法を用いた周期解の求解の方法を示し，その周期解の安定判別の方法を示した．また，特性曲線（解曲線）の特異点の前後における周期解の分岐の仕方と安定性の変化の仕方について述べ，ヒステリシス素子を含まない強制振動系の場合と同様に安定性が変化する条件を示した．

第８．３節では，２個のヒステリシス素子を含む強制振動系の例として２相共振回路を解析し，２相共振回路では単相共振回路と比較して，複雑な特性曲線が得られる理由を考察した．

9．2　今後の課題など

素子のヒステリシス特性が系の分岐現象に及ぼす影響については，今まで，あまり調べられていなかった．本論文では，幾つかの共振回路について分岐現象の解析を行ったが，今後，ヒステリシス素子を含む他の系についても，本論文で提案した解析法を用いて解析を行うことにより，新しい知見が得られることが期待される．今後の研究課題としては，ヒステリシス素子を含む自由振動系における分岐現象の解析や，プライザッハモデル以外のヒステリシス特性を用いる場合の解析などが残される．

謝辞

本研究を進めるにあたり，終始適切な御指導と御助言を頂きました京都大学工学部木嶋昭教授に深く感謝致します．また，特別研究の頃から常に有益な御助言を頂きました京都大学工学部奥村浩士助教授に深く感謝致します．また，貴重な御助言を頂きました京都大学工学部上田睆亮教授，龍谷大学理工学部小澤孝夫教授および京都大学工学部市川哲助手に感謝致します．

また，データの採取などに協力して頂き，有益な討論をして頂きました東京電力(株)舘野澄夫氏に深く感謝致します．また，データの採取や図面の作成などに協力して頂きました京都大学大学院生宮本尚文氏に深く感謝致します．また，図面の作成に協力して頂きました京都大学大学院生村田悟氏，後藤努氏，辻浩也氏，前場敏治氏に感謝致します．

参考文献

(1) J.Guckenheimer,P.Holmes:"Nonlinear Oscillations,Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields",Springer-Verlag(1983)

(2) G.Iooss,D.D.Joseph:"Elementary Stability and Bifurcation Theory", Springer-Verlag(1990)

(3) J.M.T.Thompson,H.B.Stewart著,武者,橋口訳:"非線形力学とカオス",オーム社(1988)

(4) L.O.Chua,P.Lin:"Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits", Prentice-Hall,Inc.(1975)

(5) H.B.Keller:"Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems",Ginn-Blaisdell,Waltham,Mass.(1968)

(6) T.J.Aprille,Jr.,T.N.Trick:"Steady-state analysis of Nonlinear circuits with periodic inputs",Proc.IEEE,60,1,pp.108-114(1972)

(7) 上田睆亮:"非線形性に基づく確率統計現象",電学論(A),98,3,pp.167-173 (1978)

(8) F.Preisach:"Über die magnetische Nachwirkung",Z.Phys.**94**,pp.277-302, (1935)

(9) O.I.Butler,M.R.Sarma:"Relaxation methods applied to the problem of a.c. magnetization of ferromagnetic laminae",Proc.IEE,98,pt.2,pp.389 -398(1951)

(10) C.Hayashi:"The influence of hysteresis on nonlinear resonance", J.Franklin Institute,**281**,5,pp.379-386(1966)

(11) L.O.Chua,S.C.Bass:"A generalized hysteresis model",IEEE Trans.**CT-19**, 1,pp.36-48(1972)

(12) 安陪稔:"磁気ヒステリシス特性のアナログシミュレーションとその応用",システムと制御,21,2,pp.123-131(1977)

(13) U.Hornung:"The mathematics of hysteresis",Bull. Austral.Math.Soc., **30**,pp.271-287(1984)

(14) L.Néel:"Théorie des lois d'aimantation de Lord Rayleigh,I-Les déplacements d'une paroi isolée",Cahiers Phys.12,pp.1-20(1942)

(15) M.A.Krasnosel'skii,A.V.Pokrovskii:"Systems with Hysteresis",

Springer-Verlag(1989)
(16) I.D.Mayergoyz:"Hysteresis models from the mathematical and control theory points of view",J.Appl.Phys.**57**,1,pp.3803-3805(1985)
(17) E.D.Daniel,I.Levine:"Experimental and theoretical investigation of the magnetic properties of iron oxide recording tape",J.Acoustical Soc.,**32**,1,pp.1-15(1960)
(18) 奥村浩士,木嶋昭:"ヒステリシス特性のディジタルシミュレーションとその応用",電学論(B),**103**,7,pp.451-458(1983)
(19) 奥村浩士,加藤千詞,木嶋昭:"ヒステリシス特性を持性を考慮した鉄共振回路の解析",信学論,**J70-A**,6,pp.889-896(1987)
(20) A.Friedman,K.-H.Hoffmann:"Control of free boundary problems with hysteresis,SIAM J.Control and Optimization,**26**,1,pp.42-55(1988)
(21) W.C.Rheinboldt:"Numerical Analysis of Parametrized Nonlinear Equations",A Wiley-Interscience Publication(1986)
(22) H.B.Keller:"Numerical Methods in Bifurcation Problems",Lectures on Mathematics and Physics,Tata Institute of Fundamental Research(Bombay), Springer-Verlag(1987)
(23) P.Deuflhard,B.Fiedler,P.Kunkel:"Efficient numerical Pathfollowing beyond critical points",SIAM J.Numer.Anal.,**24**,4,pp.912-927(1987)
(24) 川上博, 松尾次郎:"ダフィング方程式にみられる周期解の分岐集合", 信学論(A),**J64-A**,12,pp.1018-1025(1981)
(25) ポントリャーギン,千葉訳:"常微分方程式",共立出版(1968)など
(26) 奥村浩士, 加藤千詞, 木嶋昭:"プライザッハ分布関数の対称化とヒステリシス特性のシミュレーション",電学論(D),**108**,1,pp.54-60(1988)など
(27) G.Moore ,A.Spence:"The calculation of turning points of Nonlinear Equations",SIAM J.Numer.Anal.,**17**,4,pp.567-576(1980)
(28) N.Yamamoto:"Newton's method for singular problems and its application to boundary value problems",J.Math.Tokushima univ.**17**, pp.27-88(1983)
(29) C.Hayashi:"Nonlinear Oscillations in Physical Systems",McGraw-Hill (1964)

その他，本論文に関係のある著者関係の文献

(30) 奥村浩士,松尾哲司,木嶋昭:"ヒステリシス特性のディジタルシミュレーションによる自励振動系の解析について",信学技報NLP86-7,pp.17-25(1986)

(31) 奥村浩士,松尾哲司,木嶋昭:"ヒステリシス特性を持つ非線形系の自励振動の解析",信学論,J70-A,6,pp.882-888(1987)

(32) 松尾哲司,奥村浩士,木嶋昭:"ヒステリシス関数を含む微分方程式系の周期解の安定判別の一手法",昭63関西支連大G1-25(1988)

(33) 松尾哲司,奥村浩士,木嶋昭:"ヒステリシス素子を含む回路の定常解析法について",信学技報NLP88-60,pp.17-24(1989)

(34) 松尾哲司,木嶋昭:"ヒステリシス素子を含む回路のホモトピー法を用いた定常解析について",平1信学春期全大A-232(1989)

(35) 松尾哲司,木嶋昭:"ヒステリシス素子を含む非線形系における周期振動の折り目分岐点の追跡",平1関西支連大G1-33(1989)

(36) 松尾哲司,木嶋昭:"ヒステリシス素子を含む非線形系における周期振動の分岐について",信学技報NLP89-81,pp.23-28(1990)

(37) 松尾哲司,奥村浩士,木嶋昭:"ヒステリシス素子を含む非線形系の一定常解析法:",信学論(A),J73-A,3,pp.478-485(1990)

(38) 松尾哲司,木嶋昭:"ヒステリシス素子を含む強制振動系における周期解の分岐現象の一数値解析法:",信学論(A)掲載予定

付録A　ヒステリシス関数の逆関数

与えられた$x_{[p]}$に対して，式(2.31)を満たす$\eta_{[p]}$を求めることは，$\eta_{[p]}$に関する非線形方程式，

$$H_{[p]}(\eta_{[p]} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) - x_{[p]} = 0 \tag{A.1}$$

を解くことに等しい．方程式(A.1)の解法には，Newton法を用いるとして，以下のアルゴリズムを得る．

Step 1 ：$x_{[p]} \geqq H(\eta_S)$（正方向の飽和の場合）

　　$\eta_{[p]} := \eta_S + (x_{[p]} - H(\eta_S)) / l_S$　として終了（正常終了）

Step 2 ：$x_{[p]} \leqq H(-\eta_S)$（負方向の飽和の場合）

　　$\eta_{[p]} := -\eta_S + (x_{[p]} - H(-\eta_S)) / l_S$　として終了（正常終了）

Step 3 ：$\eta_{[p]}{}^{(0)} := \eta_{[p-1]}$　，$\Delta H_{[p]}{}^{(-1)} := \infty$

　　$j := 0$

Step 4 ：$\Delta H_{[p]}{}^{(j)} := H_{[p]}(\eta_{[p]}{}^{(j)} \mid \eta_{[0]}, \cdots, \eta_{[p-1]}) - x_{[p]}$

　　$|\Delta H_{[p]}{}^{(j)}| \leqq \varepsilon_H$のときはStep 1 0へ

　　$|\Delta H_{[p]}{}^{(j)}| > |\Delta H_{[p]}{}^{(j-1)}|$のときはStep 6へ

Step 5 ：$$\Delta \eta_{[p]}{}^{(j)} := -\frac{\Delta H_{[p]}{}^{(j)}}{\left.\dfrac{\partial H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}}\right|_{\eta_{[p]} = \eta_{[p]}{}^{(j)}}}$$

　　として，

　　$|\Delta \eta_{[p]}{}^{(j)}| \leqq \varepsilon$のときはStep 1 0へ

　　そうでなければStep 7へ

Step 6 ：$\eta_{[p]}{}^{(j)} := \eta_{[p]}{}^{(j-1)}$　，$\Delta \eta_{[p]}{}^{(j)} := \Delta \eta_{[p]}{}^{(j-1)} / 2$

Step 7 ：$\eta_{[p]}{}^{(j+1)} := \max(\min(\eta_{[p]}{}^{(j)} + \Delta \eta_{[p]}{}^{(j)}, \eta_S), -\eta_S)$

Step 8 ：$j := j + 1$　として

　　$j \leqq j_{max}$のときはStep 4へ，

Step 9 ：条件を満たす$\eta_{[p]}$が求められなかったとして終了（異常終了）

Step 1 0 ：$\eta_{[p]} := \eta_{[p]}{}^{(j)}$として終了（正常終了）

ここで，ε_H，εは収束条件を定める閾値であり，j_{max}はNewton反復の上限を定める閾値である．Step3から分かるように，Newton法の初期値には，前時点におけるηの値を用いる．また，Step7は，Newton法の修正がうまく行われなれていない場合の処置である．

付録B　完全消磁状態を考慮したアルゴリズム

第2章では，端点 $(\eta_u(0), \eta_v(0))$ が，

$\eta_u = \eta_s$　または　$\eta_v = -\eta_s$

上にあると仮定したが，ここでは，

$$\eta_u = \eta_s \quad \text{または} \quad \eta_v = -\eta_s \quad \text{または} \quad \eta_v = -\eta_u \tag{B.1}$$

上にあると仮定する（図B.1参照）．完全消磁の状態は，

$$m_{[p]} = 0 \;,\; (\eta_u(0), \eta_v(0)) = (0, 0) \tag{B.2}$$

とすることにより実現される（図B.2参照）．

η の時点系列（$\eta_{[p]}$，$p = 0, \cdots, N$）からHの時点系列（$H_{[p]}$，$p = 0, \cdots, N$）を計算するためのアルゴリズムは以下のように変更される．

Step0：時点 $t_{[0]}$ における積分領域（境界線分の数 $m_{[0]}$ と各端点の座標）を定め，$H_{[0]}$ を求めておく．$p := 1$

Step1：$\eta_{[p]} = \eta_{[p-1]}$ のときは，　$H_{[p]} := H_{[p-1]}$　としてStep10へ．

Step2：$\eta_{[p]} \geqq \eta_s$（正方向の飽和）のときは，

$$H_{[p]} := H_{max} + l_s \cdot \eta_{[p]} \;,\quad m_{[p]} := 0$$

$$\eta_u(0) := \eta_s \;,\quad \eta_v(0) := \eta_s$$

としてStep10へ．

Step3：$\eta_{[p]} \leqq -\eta_s$（負方向の飽和）のときは，

$$H_{[p]} := H_{min} + l_s \cdot \eta_{[p]} \;,\quad m_{[p]} := 0$$

$$\eta_u(0) := -\eta_s \;,\quad \eta_v(0) := -\eta_s$$

としてStep10へ．

Step4：$\eta_{[p]} > \eta_{[p-1]}$ のとき，

$\eta_u(k) < \eta_{[p]}$ を満たす最小の k を見つけ，

$k = 0$　かつ　$\eta_v(0) = -\eta_u(0)$　のときは，Step6へ，

そうでなければ，

$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]} - k}{2}\right) \qquad (\mathrm{int}：小数切捨)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + l_s(\eta_{[p]} - \eta_{[p-1]}) + \Delta H(\eta_u(k), \eta_{[p]}, \eta_v(k))$$
$$+ \sum_{i=1}^{j} \Delta H(\eta_u(k+2i), \eta_u(k+2i-1), \eta_v(k+2i))$$

$$m_{[p]} := k + 1$$

$\eta_u(m_{[p]}) := \eta_{[p]}$, $\eta_v(m_{[p]}) := \eta_{[p]}$

$\eta_u(m_{[p]} - 1) := \eta_{[p]}$

としてStep１０へ.

Step５：$\eta_{[p]} < \eta_{[p-1]}$のとき,

$\eta_v(k) > \eta_{[p]}$を満たす最小のｋを見つけ

$k = 0$ かつ $\eta_v(0) = -\eta_u(0)$ のときはStep８へ,

そうでなければ,

$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]} - k}{2}\right)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + l_s(\eta_{[p]} - \eta_{[p-1]}) - \nabla H(\eta_{[p]}, \eta_v(k), \eta_u(k)) - \sum_{i=1}^{j} \nabla H(\eta_v(k+2i-1), \eta_v(k+2i), \eta_u(k+2i))$$

$m_{[p]} := k + 1$

$\eta_u(m_{[p]}) := \eta_{[p]}$, $\eta_v(m_{[p]}) := \eta_{[p]}$

$\eta_v(m_{[p]} - 1) := \eta_{[p]}$

としてStep１０へ.

Step６：$m_{[p-1]} > 0$ かつ $\eta_v(1) = \eta_v(0)$のときはStep７へ.

そうでなければ,

$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]}}{2}\right)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + l_s(\eta_{[p]} - \eta_{[p-1]}) + \Delta_* H(\eta_u(0), \eta_{[p]}) + \sum_{i=1}^{j} \Delta H(\eta_u(2i), \eta_u(2i-1), \eta_v(2i))$$

$m_{[p]} := 1$

$\eta_u(1) := \eta_{[p]}$, $\eta_v(1) := \eta_{[p]}$

$\eta_u(0) := \eta_{[p]}$, $\eta_v(0) := -\eta_{[p]}$

としてStep１０へ.

Step７：$j := \mathrm{int}\left(\dfrac{m_{[p-1]} - 1}{2}\right)$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + l_s(\eta_{[p]} - \eta_{[p-1]}) + \Delta_* H(\eta_u(0), \eta_{[p]}) + \sum_{i=0}^{j} \Delta H(\eta_u(2i+1), \eta_u(2i), \eta_v(2i))$$

$m_{[p]} := 1$

$\eta_u(1) := \eta_{[p]}$, $\eta_v(1) := \eta_{[p]}$

$\eta_u(0) := \eta_{[p]}$, $\quad \eta_v(0) := -\eta_{[p]}$

としてStep１０へ

Step８：$m_{[p-1]} > 0$ かつ $\eta_u(1) = \eta_u(0)$のときはStep９へ.

そうでなければ，

$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]}}{2}\right)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + l_s(\eta_{[p]} - \eta_{[p-1]}) - \nabla_s H(\eta_{[p]}, \eta_v(0))$$
$$- \sum_{i=1}^{j} \nabla H(\eta_v(2i-1), \eta_v(2i), \eta_u(2i))$$

$m_{[p]} := 1$

$\eta_u(1) := \eta_{[p]}$, $\quad \eta_v(1) := \eta_{[p]}$

$\eta_v(0) := \eta_{[p]}$, $\quad \eta_u(0) := -\eta_{[p]}$

としてStep１０へ.

Step９：
$$j := \mathrm{int}\left(\frac{m_{[p-1]} - 1}{2}\right)$$

$$H_{[p]} := H_{[p-1]} + l_s(\eta_{[p]} - \eta_{[p-1]}) - \nabla_s H(\eta_{[p]}, \eta_v(0))$$
$$- \sum_{i=0}^{j} \nabla H(\eta_v(2i), \eta_v(2i+1), \eta_u(2i))$$

$m_{[p]} := 1$

$\eta_u(1) := \eta_{[p]}$, $\quad \eta_v(1) := \eta_{[p]}$

$\eta_v(0) := \eta_{[p]}$, $\quad \eta_u(0) := -\eta_{[p]}$

Step１０：$p < N$のときは，$p := p + 1$としてStep１へ.

そうでなければ終了.

ただし，Step６～Step９における$\lrcorner_s H$，$\nabla_s H$は，それぞれ，

$$\lrcorner_s H(\eta_a, \eta_b) = \int_{\eta_a}^{\eta_b} \int_{-\eta_u}^{\eta_u} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_v\, d\eta_u \tag{B.3}$$

$$\nabla_s H(\eta_a, \eta_b) = \int_{\eta_a}^{\eta_b} \int_{\eta_v}^{-\eta_v} K(\eta_u, \eta_v)\, d\eta_u\, d\eta_v \tag{B.4}$$

で与えられる.

なお，端点（$\eta_u(0), \eta_v(0)$）の座標を式(B.1)上としたことにより，式(2.27),(2.28)の$H_{[p]}$の２階微分の計算は，それぞれ，次のように変更される.

$$\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[p]}^2} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]}} \frac{\partial K(\eta_{[p]},\eta_v)}{\partial \eta_{[p]}} d\eta_v + K(\eta_{[p]},\eta_{[p]}) & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]} // \eta_v\text{軸,}\\ \text{かつ, } (\eta_{[p]},-\eta_{[p]}) \neq \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]}} \frac{\partial K(\eta_u,\eta_{[p]})}{\partial \eta_{[p]}} d\eta_u - K(\eta_{[p]},\eta_{[p]}) & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]} // \eta_u\text{軸,}\\ \text{かつ, } (-\eta_{[p]},\eta_{[p]}) \neq \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]}} \frac{\partial K(\eta_{[p]},\eta_v)}{\partial \eta_{[p]}} d\eta_v + K(\eta_{[p]},\eta_{[p]}) + K(\eta_{[p]},-\eta_{[p]}) & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]} // \eta_v\text{軸,}\\ \text{かつ, } (\eta_{[p]},-\eta_{[p]}) = \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]}} \frac{\partial K(\eta_u,\eta_{[p]})}{\partial \eta_{[p]}} d\eta_u - K(\eta_{[p]},\eta_{[p]}) - K(-\eta_{[p]},\eta_{[p]}) & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[p]} // \eta_u\text{軸,}\\ \text{かつ, } (-\eta_{[p]},\eta_{[p]}) = \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \end{cases} \tag{B.5}$$

$$\frac{\partial^2 H_{[p]}}{\partial \eta_{[1]}^2} = \begin{cases} 0 & (\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]}\text{が存在しない場合}) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]}} \frac{\partial K(\eta_{[1]},\eta_v)}{\partial \eta_{[1]}} d\eta_v & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]} // \eta_v\text{軸,}\\ \text{かつ, } (\eta_{[1]},-\eta_{[1]}) \neq \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]}} \frac{\partial K(\eta_u,\eta_{[1]})}{\partial \eta_{[1]}} d\eta_u & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]} // \eta_u\text{軸,}\\ \text{かつ, } (-\eta_{[1]},\eta_{[1]}) \neq \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]}} \frac{\partial K(\eta_{[1]},\eta_v)}{\partial \eta_{[1]}} d\eta_v + K(\eta_{[1]},-\eta_{[1]}) & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]} // \eta_v\text{軸,}\\ \text{かつ, } (\eta_{[1]},-\eta_{[1]}) = \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \\ \displaystyle\int_{\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]}} \frac{\partial K(\eta_u,\eta_{[1]})}{\partial \eta_{[1]}} d\eta_u - K(-\eta_{[1]},\eta_{[1]}) & \left(\begin{array}{l}\partial D_{[p]}/\partial\eta_{[1]} // \eta_u\text{軸,}\\ \text{かつ, } (-\eta_{[1]},\eta_{[1]}) = \\ (\eta_u(0),\eta_v(0))\text{の場合}\end{array}\right) \end{cases} \tag{B.6}$$

付録C 第１変分方程式

C．1 状態方程式(3.5)の第１変分方程式

状態方程式(3.5)および式(3.7)を，$\mathbf{x}_{[0]}$，$\mathbf{t}_{[0]}$，α（$\in \mathbb{R}$：系のパラメータ）で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{[p+1]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} = (\mathbb{1} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[p]}}) \frac{\partial \mathbf{x}_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} + \mathbf{a} \Delta t \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{[p+1]}}{\partial t_{[0]}} = (\mathbb{1} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[p]}}) \frac{\partial \mathbf{x}_{[p]}}{\partial t_{[0]}} + \mathbf{a} \Delta t \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial t_{[0]}} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{[p]}}{\partial t_{[p]}} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}_{[p+1]}}{\partial \alpha} &= (\mathbb{1} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{f}_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[p]}}) \frac{\partial \mathbf{x}_{[p]}}{\partial \alpha} + \mathbf{a} \Delta t \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \alpha} \\ &\quad + \Delta t (\frac{\partial \mathbf{f}_{[p]}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha} \eta_{[p]})\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} = \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[p]}} \frac{\partial \mathbf{x}_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \eta_{[l]}} \frac{\partial \eta_{[l]}}{\partial \mathbf{x}_{[0]}} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial t_{[0]}} = \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[p]}} \frac{\partial \mathbf{x}_{[p]}}{\partial t_{[0]}} + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \eta_{[l]}} \frac{\partial \eta_{[l]}}{\partial t_{[0]}} \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \mathbf{x}_{[p]}} \frac{\partial \mathbf{x}_{[p]}}{\partial \alpha} + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial \eta_{[p]}}{\partial \eta_{[l]}} \frac{\partial \eta_{[l]}}{\partial \alpha} \tag{C.4}$$

ただし，

$$\partial \mathbf{x}_{[0]} / \partial \mathbf{x}_{[0]} = \mathbb{1} \tag{3.17}$$

$$\partial \mathbf{x}_{[0]} / \partial t_{[0]} = \mathbb{0} \tag{C.5}$$

$$\partial \mathbf{x}_{[0]} / \partial \alpha = \mathbb{0} \tag{C.6}$$

が得られる．式(C.1)は，状態方程式(3.5)の$t_{[0]}$に関する第１変分方程式であり，式(C.2)は，状態方程式(3.5)のαに関する第１変分方程式である．ただし，式(C.2)は，周期Tがαの関数でない場合を示す．

C．2 状態方程式(3.46)の第１変分方程式

状態方程式(3.46)を，$\mathbf{x}_{[r,0]}$（$r = 1,2$）で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{[q,p+1]}}{\partial \mathbf{x}_{[r,0]}} = (\mathbb{1} + \Delta t_q \frac{\partial \mathbf{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}}) \frac{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[r,0]}} + \mathbf{a} \Delta t_q \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[r,0]}} \tag{C.7}$$

（q，$r = 1,2$）

また，状態方程式(3.46)を，$t_{[r,0]}$（$r = 1,2$）で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p+1]}}{\partial t_{[r,0]}}=(\mathbb{1}+\Delta t_q\frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}})\frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial t_{[r,0]}}+\mathbb{a}\Delta t_q\frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial t_{[r,0]}}$$
$$+\Delta t_q\frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial t_{[q,p]}}\frac{\partial t_{[q,p]}}{\partial t_{[r,0]}}+\frac{\partial \Delta t_q}{\partial t_{[r,0]}}(\mathbb{f}_{[q,p]}+\mathbb{a}\,\eta_{[q,p]}) \quad (C.8)$$
$(q,\ r=1,2)$

ただし，式(3.46),(3.47)より，

$$\frac{\partial t_{[1,p]}}{\partial t_{[1,0]}}=\frac{N-p}{N},\ \frac{\partial t_{[1,p]}}{\partial t_{[2,0]}}=\frac{p}{N},\ \frac{\partial t_{[2,p]}}{\partial t_{[1,0]}}=\frac{p}{N},\ \frac{\partial t_{[2,p]}}{\partial t_{[2,0]}}=\frac{N-p}{N}$$
$$\frac{\partial \Delta t_1}{\partial t_{[1,0]}}=-\frac{1}{N},\ \frac{\partial \Delta t_1}{\partial t_{[2,0]}}=\frac{1}{N},\ \frac{\partial \Delta t_2}{\partial t_{[1,0]}}=\frac{1}{N},\ \frac{\partial \Delta t_2}{\partial t_{[2,0]}}=-\frac{1}{N} \quad (C.9)$$

また，状態方程式(3.46)を，α（$\in \mathbb{R}$：系のパラメータ）で微分すると，

$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p+1]}}{\partial \alpha}=(\mathbb{1}+\Delta t_q\frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}})\frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial \alpha}+\mathbb{a}\Delta t_q\frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial \alpha}$$
$$+\Delta t_q(\frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial \alpha}+\frac{\partial \mathbb{a}}{\partial \alpha}\eta_{[q,p]}) \quad (C.10)$$

が得られる．式(C.7),(C.8),(C.10)は，それぞれ，状態方程式(3.46)の，$\mathbb{x}_{[r,0]}$（$r=1,2$），$t_{[r,0]}$（$r=1,2$），αに関する第１変分方程式である．ただし，式(C.10)は，周期Tがαの関数でない場合を示す．ただし，出発点は，それぞれ，

$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}=\mathbb{1},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}=\mathbb{1} \quad (C.11)$$
$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial t_{[1,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial t_{[2,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}{\partial t_{[1,0]}}=\mathbb{0},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}{\partial t_{[2,0]}}=\mathbb{0} \quad (C.12)$$
$$\frac{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}{\partial \alpha}=\mathbb{0},\ \frac{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}{\partial \alpha}=\mathbb{0} \quad (C.13)$$

である．

式(C.7),(C.8),(C.10)の$\partial \eta_{[q,p]}/\partial \mathbb{x}_{[r,0]}$などは次のようにして得られる．表記の便宜のため，式(3.58)などで表される$x_{[q,p]}$（$q=1,2,\ p=0,\cdots,N-1$）を，

$$x_{[q,p]}=H_{[q,p]}(\eta_{[q,p]}\mid \eta_{[r,0]},\eta_{[q,0]},\eta_{[q,1]},\cdots,\eta_{[q,p-1]}) \quad (C.14)$$
（$r=1,2$，ただし，$r\neq q$）

と書く．式(C.14)を，$\mathbb{x}_{[1,0]}$，$\mathbb{x}_{[2,0]}$で微分すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x_{[1,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,i]}} \frac{\partial \eta_{[1,i]}}{\partial x_{[1,0]}} \\
\frac{\partial x_{[1,p]}}{\partial x_{[2,0]}} &= \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[2,0]}} \frac{\partial \eta_{[2,0]}}{\partial x_{[2,0]}} + \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,i]}} \frac{\partial \eta_{[1,i]}}{\partial x_{[2,0]}} \\
\frac{\partial x_{[2,p]}}{\partial x_{[1,0]}} &= \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} + \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,i]}} \frac{\partial \eta_{[2,i]}}{\partial x_{[1,0]}} \\
\frac{\partial x_{[2,p]}}{\partial x_{[2,0]}} &= \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,i]}} \frac{\partial \eta_{[2,i]}}{\partial x_{[2,0]}}
\end{aligned}
\tag{C.15}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
&|\eta_{[1,0]}| \geqq |\eta_{[2,0]}| \text{ のとき，} \quad \partial H_{[1,p]} / \partial \eta_{[2,0]} = 0 \\
&|\eta_{[1,0]}| \leqq |\eta_{[2,0]}| \text{ のとき，} \quad \partial H_{[2,p]} / \partial \eta_{[1,0]} = 0
\end{aligned}
\tag{C.16}
$$

が得られ，また，式(C.14)を $t_{[1,0]}$，$t_{[2,0]}$，α で微分すると，

$$
\frac{\partial x_{[q,p]}}{\partial t_{[r,0]}} = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,i]}} \frac{\partial \eta_{[q,i]}}{\partial t_{[r,0]}} \tag{C.17}
$$

$$
\frac{\partial x_{[q,p]}}{\partial \alpha} = \sum_{i=0}^{p} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,i]}} \frac{\partial \eta_{[q,i]}}{\partial \alpha} \tag{C.18}
$$

$(q, r = 1,2)$

が得られるので，式(C.15),(C.17),(C.18)より，

$$
\frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial x_{[q,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[q,p]}}{\partial x_{[q,0]}} - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,i]}} \frac{\partial \eta_{[q,i]}}{\partial x_{[q,0]}} \right) \tag{C.19}
$$

$(q = 1,2)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial x_{[r,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,p]}}} \Bigg(& \frac{\partial x_{[q,p]}}{\partial x_{[r,0]}} - \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[r,0]}} \frac{\partial \eta_{[r,0]}}{\partial x_{[r,0]}} \\
& - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,i]}} \frac{\partial \eta_{[q,i]}}{\partial x_{[r,0]}} \Bigg)
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

$(q, r = 1,2$，ただし，$r \neq q)$

$$
\frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial t_{[r,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[q,p]}}{\partial t_{[r,0]}} - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,i]}} \frac{\partial \eta_{[q,i]}}{\partial t_{[r,0]}} \right) \tag{C.21}
$$

$(q, r = 1,2)$

$$
\frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,p]}}} \left(\frac{\partial x_{[q,p]}}{\partial \alpha} - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,i]}} \frac{\partial \eta_{[q,i]}}{\partial \alpha} \right) \tag{C.22}
$$

$(q = 1,2)$

が得られる.

ただし，式(C.7),(C.11),(C.16),(C.20)より，

$$|\eta_{[1,0]}| \geqq |\eta_{[2,0]}| \text{のとき,} \quad \partial x_{[1,p]} / \partial x_{[2,0]} = O$$
$$|\eta_{[1,0]}| \leqq |\eta_{[2,0]}| \text{のとき,} \quad \partial x_{[2,p]} / \partial x_{[1,0]} = O \qquad (C.23)$$
$$(p = 0, 1, \cdots, N)$$

である.

C. 3 Jacobian行列の計算

方程式(3.46)をNewton法で解く際に必要なJacobian行列DFは,

$$\mathrm{D}\mathbb{F}(x_{[1,0]}, x_{[2,0]}, t_{[1,0]}, t_{[2,0]})$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\partial x_{[2,N]}}{\partial x_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial x_{[2,N]}}{\partial x_{[2,0]}} & -\dfrac{\partial x_{[2,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial x_{[2,N]}}{\partial t_{[2,0]}} \\ -\dfrac{\partial x_{[1,N]}}{\partial x_{[1,0]}} & 1 - \dfrac{\partial x_{[1,N]}}{\partial x_{[2,0]}} & -\dfrac{\partial x_{[1,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & -\dfrac{\partial x_{[1,N]}}{\partial t_{[2,0]}} \\ \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}} & \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial x_{[2,0]}} & \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial e_{[1,0]}}{\partial t_{[2,0]}} \\ \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial x_{[1,0]}} & \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial x_{[2,0]}} & \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial e_{[2,0]}}{\partial t_{[2,0]}} \end{pmatrix} \qquad (C.24)$$

ただし,

$$e_{[q,0]} = f_{[q,0]} + a \cdot \eta_{[q,0]} \qquad (q = 1, 2)$$

で与えられる. 式(C.24)の $\partial x_{[q,N]} / \partial x_{[r,0]}$, $\partial x_{[q,N]} / \partial t_{[r,0]}$ $(q, r = 1, 2)$ などは, 変分方程式(C.7),(C.8)を式(C.11),(C.12)から出発して $p = 0$ からN-1まで順に計算することにより得られる. ただし, 境界線分は, 式(3.77)または式(3.79)を仮定する.

C. 4 式(3.87),(3.88)の行列の計算について

式(3.77)または式(3.79)の境界線分を仮定する場合には, 式(3.87),(3.88)中の行列,

$$\frac{\partial x_{[2,N]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial x_{[1,0]}}, \quad \frac{\partial x_{[1,N]}}{\partial \eta_{[2,0]}} \frac{\partial \eta_{[2,N]}}{\partial x_{[2,0]}} \qquad (C.25)$$

は, それぞれ, 式(C.24)のDF中の行列, $\partial x_{[2,N]} / \partial x_{[1,0]}$, $\partial x_{[1,N]} / \partial x_{[2,0]}$と等しい. また, 式(3.78)の境界線分を仮定する場合には, 式(C.25)の行列は, それぞれOとなる.

付録D　連続変形法による解曲線の追跡

式(4.6)を満たす解曲線$\tilde{\mathbf{z}}(\theta)$の追跡は，図D．1に示すように，曲線上の点列，

$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle 0\rangle}$，$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle 1\rangle}$，…，$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}$，…

を順次求めていくことにより行われる．曲線上の点列の追跡は，図D．2に示すように，次の点$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}$の大体の位置を予測し，次に$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}$が式(4.6)を満たすように修正するという方法（予測子修正子法）を用いて行われるのが一般的である．以下，この予測子修正子法について簡単に述べる．

まず，点$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}$における接線ベクトル，

$$\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}=\left.\frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{\langle i\rangle}} \tag{D.1}$$

を用いて，次の点$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}$の大体の位置を予測する．$\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}$は，次の条件式，

$$\begin{cases} D\mathbb{F}(\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle})\cdot\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}=\mathbb{0} \\ \|\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}\|=1 \\ \dot{\mathbf{z}}_{\langle i-1\rangle}\cdot\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}>0 \end{cases} \tag{D.2}$$

ただし，

$$D\mathbb{F}=\partial\mathbb{F}/\partial\tilde{\mathbf{z}}$$

を満たすように定められる．θの刻み幅を，

$$\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}=\theta_{\langle i+1\rangle}-\theta_{\langle i\rangle}$$

として，次の点$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}=\tilde{\mathbf{z}}(\theta_{\langle i+1\rangle})$の位置を，1次の予測子，

$$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{E}=\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}+\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle} \tag{D.3}$$

または，2次の予測子，

$$\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{G}=\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}+\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}+\frac{\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}{}^{2}}{\Delta\theta_{\langle i\rangle}}\left(\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}-\frac{\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}-\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i-1\rangle}}{\Delta\theta_{\langle i\rangle}}\right) \tag{D.4}$$

などを用いて予測することができる．本論文では，2次の予測子（式(D.4)）を用いて予測を行い，その際の刻み幅$\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}$を，

$$\|\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{G}-\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{E}\|=\frac{\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}{}^{2}}{\Delta\theta_{\langle i\rangle}}\left\|\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}-\frac{\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}-\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i-1\rangle}}{\Delta\theta_{\langle i\rangle}}\right\|\fallingdotseq\varepsilon_{z}$$

（$\varepsilon_z>0$：適当な閾値）

すなわち，

$$\Delta\theta_{\langle i+1\rangle}\fallingdotseq\left(\frac{\varepsilon_{z}}{\|\Delta\theta_{\langle i\rangle}\dot{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}-\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i\rangle}+\tilde{\mathbf{z}}_{\langle i-1\rangle}\|}\right)^{\frac{1}{2}}\Delta\theta_{\langle i\rangle} \tag{D.5}$$

となるように定めた．

次に，

$$\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{(0)} = \tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{G} \tag{D.6}$$

を出発点として，Newton修正，

$$\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{(j+1)} = \tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{(j)} + \Delta\,\tilde{\mathbb{z}}^{(j)} \tag{D.7}$$

$(\ j = 0, 1, \cdots)$

ただし，

$$\begin{bmatrix} D\,\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{(j)}) \\ \mathbb{u}^{tr} \end{bmatrix} \Delta\,\tilde{\mathbb{z}}^{(j)} = \begin{bmatrix} -\mathbb{F}(\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{(j)}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{u} = \dot{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}{}^{G} = \dot{\mathbb{z}}_{\langle i\rangle} + 2\,\frac{\Delta\,\theta_{\langle i+1\rangle}}{\Delta\,\theta_{\langle i\rangle}}\left(\dot{\mathbb{z}}_{\langle i\rangle} - \frac{\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i\rangle} - \tilde{\mathbb{z}}_{\langle i-1\rangle}}{\Delta\,\theta_{\langle i\rangle}}\right) \tag{D.8}$$

を行うことにより，$\tilde{\mathbb{z}}_{\langle i+1\rangle}$が求められる．

付録Ｅ　式（４．１４），式（４．２２），式（８．５１）の導出

Ｅ．１　式(4.14)，式(4.22)の導出

系(3.4)において，

$$\mathbf{x}(t_a)=\mathbf{x}_0 \tag{E.1}$$

とおくと，$t=t_b$における$\mathbf{x}$は，

$$\mathbf{x}(t_b)=\mathbf{x}_0+\int_{t_a}^{t_b}\{\mathbf{f}(t,\mathbf{x})+a\,\eta(\mathbf{x})\}dt \tag{E.2}$$

で与えられる．このとき，$\mathbf{x}(t_b)$をt_aおよびt_bで微分すると，式(E.2)より，

$$\frac{\partial\mathbf{x}(t_b)}{\partial t_a} = -\{\mathbf{f}(t_a,\mathbf{x}_0)+a\,\eta(\mathbf{x}_0)\}+\int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial\{\mathbf{f}(t,\mathbf{x})+a\,\eta(\mathbf{x})\}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t_a}dt \tag{E.3}$$

$$\frac{\partial\mathbf{x}(t_b)}{\partial t_b}=\mathbf{f}(t_b,\mathbf{x}(t_b))+a\,\eta(\mathbf{x}(t_b)) \tag{E.4}$$

が得られる．ここで，式(E.3)より，$\partial\mathbf{x}(t_b)/\partial t_a$は，初期条件，

$$\left.\frac{\partial\mathbf{x}(t_b)}{\partial t_a}\right|_{t_b=t_a}=-\{\mathbf{f}(t_a,\mathbf{x}_0)+a\,\eta(\mathbf{x}_0)\} \tag{E.5}$$

の下に，系(3.4)の初期値による第１変分方程式を$t=t_b$まで積分した結果と等しいので，

$$\frac{\partial\mathbf{x}(t_b)}{\partial t_a}=-\frac{\partial\mathbf{x}(t_b)}{\partial\mathbf{x}_0}\{\mathbf{f}(t_a,\mathbf{x}_0)+a\,\eta(\mathbf{x}_0)\} \tag{E.6}$$

と書くことができる．式(E.4),(E.6)は，離散系(3.46)においては，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[1,0]}} &\fallingdotseq -\frac{\partial\mathbf{x}_{[1,N]}}{\partial\mathbf{x}_{[1,0]}}(\mathbf{f}_{[1,0]}+a\,\eta_{[1,0]})\\
\frac{\partial\mathbf{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[2,0]}} &\fallingdotseq \mathbf{f}_{[1,N]}+a\,\eta_{[1,N]}=\mathbf{f}_{[2,0]}+a\,\eta_{[2,0]}\\
\frac{\partial\mathbf{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[2,0]}} &\fallingdotseq -\frac{\partial\mathbf{x}_{[2,N]}}{\partial\mathbf{x}_{[2,0]}}(\mathbf{f}_{[2,0]}+a\,\eta_{[2,0]})\\
\frac{\partial\mathbf{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[1,0]}} &\fallingdotseq \mathbf{f}_{[2,N]}+a\,\eta_{[2,N]}=\mathbf{f}_{[1,0]}+a\,\eta_{[1,0]}
\end{aligned} \tag{E.7}$$

と書き表すことができる．ただし，離散化に伴う誤差のために等号が成立していない．

他方，$\eta(\mathrm{x})$は，xの関数であって，yの関数ではないので，

$$\frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathrm{x}_{[1,0]}} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \tag{E.8}$$

であり，および，式(3.64)より，

$$\mathbb{f}_{[1,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[1,0]} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{g}_{[1,0]} + \mathbb{b}\,\eta_{[1,0]} \end{bmatrix} \tag{E.9}$$

であることから，

$$\frac{\partial \eta_{[1,0]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}(\mathbb{f}_{[1,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[1,0]}) = 0 \tag{E.10}$$

が成り立つ．よって，式(E.7),(E.10)より，式(4.22)が成り立つ．

また，

$$t_a = t_0,\quad t_b = t_0 + T \tag{E.11}$$

とすると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{x}(t_b)}{\partial t_0} &= \frac{\partial \mathbb{x}(t_b)}{\partial t_a} + \frac{\partial \mathbb{x}(t_b)}{\partial t_b} \\ &= -\frac{\partial \mathbb{x}(t_b)}{\partial \mathbb{x}_0}\{\mathbb{f}(t_a, \mathbb{x}_0) + \mathbb{a}\,\eta(\mathrm{x}_0)\} \\ &\quad + \mathbb{f}(t_b, \mathbb{x}(t_b)) + \mathbb{a}\,\eta(\mathrm{x}(t_b)) \end{aligned} \tag{E.12}$$

が成り立つ．式(E.12)は，離散系(3.5)においては，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial t_{[0]}} &\fallingdotseq -\frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}}(\mathbb{f}_{[0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[0]}) + \mathbb{f}_{[N]} + \mathbb{a}\,\eta_{[N]} \\ &= \left(\mathbb{1} - \frac{\partial \mathbb{x}_{[N]}}{\partial \mathbb{x}_{[0]}}\right)(\mathbb{f}_{[0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[0]}) \end{aligned} \tag{E.13}$$

と書き表すことができ，従って，式(4.14)を得る．やはり，離散化に伴う誤差のために，等号が成立していない．

E．2　式(8.51)の導出

E．1と同様に考えて，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[4,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[4,N]}}{\partial t_{[2,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[4,N]}}{\partial t_{[3,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[4,N]}}{\partial t_{[4,0]}} \\ \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[2,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[3,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[1,N]}}{\partial t_{[4,0]}} \\ \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[2,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[3,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[2,N]}}{\partial t_{[4,0]}} \\ \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[3,N]}}{\partial t_{[1,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[3,N]}}{\partial t_{[2,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[3,N]}}{\partial t_{[3,0]}} & \dfrac{\partial \mathbb{x}_{[3,N]}}{\partial t_{[4,0]}} \end{bmatrix} \tag{E.14}$$

$$\fallingdotseq \begin{bmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{A}_4 \\ -\mathbb{A}_1 & \mathbb{1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{A}_2 & \mathbb{1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{A}_3 & \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{e}_{[1,0]} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{e}_{[2,0]} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{e}_{[3,0]} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{e}_{[4,0]} \end{bmatrix}$$

ただし， $\mathbb{e}_{[q,0]} = \mathbb{f}_{[q,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[q,0]}$ 　$(q = 1,2,3,4)$

および，

$$\begin{aligned} &\mathbb{B}_{q1}(\mathbb{f}_{[1,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[1,0]}) = 0 \quad (q = 2,3,4) \\ &\mathbb{C}_{q2}(\mathbb{f}_{[2,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[2,0]}) = 0 \quad (q = 1,3,4) \\ &\mathbb{B}_{q3}(\mathbb{f}_{[3,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[3,0]}) = 0 \quad (q = 1,2,4) \\ &\mathbb{C}_{q4}(\mathbb{f}_{[4,0]} + \mathbb{a}\,\eta_{[4,0]}) = 0 \quad (q = 1,2,3) \end{aligned} \tag{E.15}$$

が成り立つので，式(E.14)において等号が成り立つとして，式(E.14),(E.15)より，式(8.51)を得る．

付録F　$(\partial \mathbb{F}/\partial \mathbb{z})\mathbb{u}$とその微分について

ここでは，pararell shootingを用いる場合について，$(\partial \mathbb{F}_1/\partial \mathbb{z})\mathbb{u}$とその微分について述べる．

F．1　$(\partial \mathbf{F}_1/\partial \mathbf{z})\mathbf{u}$の計算

まず，

$$\mathbb{u} = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_{x1} \\ \mathbb{u}_{x2} \\ u_{t1} \\ u_{t2} \end{bmatrix} \tag{F.1}$$

$$\mathbb{w}_{[q,p]} \equiv \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{z}}\mathbb{u} = \begin{bmatrix} w_{x[q,p]} \\ w_{y[q,p]} \end{bmatrix} \tag{F.2}$$

$$\xi_{[q,p]} \equiv \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial \mathbb{z}}\mathbb{u} \tag{F.3}$$

と置くと，式(4.21),(F.2)より，

$$\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \mathbb{z}}\mathbb{u} = \begin{bmatrix} \mathbb{u}_{x1} - \mathbb{w}_{[2,N]} \\ \mathbb{u}_{x2} - \mathbb{w}_{[1,N]} \end{bmatrix} \tag{F.4}$$

と書くことができる．式(F.4)の$\mathbb{w}_{[1,N]}$，$\mathbb{w}_{[2,N]}$は以下のようにして求められる．式(F.1)～(F.3)より，

$$\mathbb{w}_{[q,p]} = \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}\mathbb{u}_{x1} + \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}\mathbb{u}_{x2} + \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial t_{[1,0]}}u_{t1} + \frac{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}{\partial t_{[2,0]}}u_{t2} \tag{F.5}$$

$$\xi_{[q,p]} = \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[1,0]}}\mathbb{u}_{x1} + \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[2,0]}}\mathbb{u}_{x2} + \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial t_{[1,0]}}u_{t1} + \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial t_{[2,0]}}u_{t2} \tag{F.6}$$

である．式(C.7)～(C.10),(F.5),(F.6)より，

$$\begin{aligned} \mathbb{w}_{[q,p+1]} = &\left(\mathbb{1} + \Delta t_q \frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbb{x}_{[q,p]}}\right)\mathbb{w}_{[q,p]} + \mathbb{a}\Delta t_q \xi_{[q,p]} \\ &+ \rho_{[q,p]}\frac{\partial \mathbb{f}_{[q,p]}}{\partial t_{[q,p]}} + \sigma_q(\mathbb{f}_{[q,p]} + \mathbb{a}\eta_{[q,p]}) \end{aligned} \tag{F.7}$$

$(q = 1,2)$

ただし，

$$\rho_{[1,p]} = \frac{(N-p)u_{t1} + p\,u_{t2}}{N}, \quad \rho_{[2,p]} = \frac{(N-p)u_{t2} + p\,u_{t1}}{N} \tag{F.8}$$

$$\sigma_1 = \frac{u_{t2} - u_{t1}}{N} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{u_{t1} - u_{t2}}{N} \tag{F.9}$$

を得る．ただし，式(C.11)～(C.13),(C.16),(C.19)～(C.22),(F.2),(F.5),(F.6)より，

$$\xi_{[1,p]} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,p]}}} \left(w_{x[1,p]} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,l]}} \xi_{[1,l]} - \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[2,0]}} \xi_{[2,0]} \right)$$

$$\xi_{[2,p]} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,p]}}} \left(w_{x[2,p]} - \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \xi_{[1,0]} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,l]}} \xi_{[2,l]} \right) \tag{F.10}$$

あるいは，

$$w_{x[1,p]} = \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[2,0]}} \xi_{[2,0]} + \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{[1,p]}}{\partial \eta_{[1,l]}} \xi_{[1,l]}$$

$$w_{x[2,p]} = \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[1,0]}} \xi_{[1,0]} + \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial H_{[2,p]}}{\partial \eta_{[2,l]}} \xi_{[2,l]} \tag{F.11}$$

である．式(F.7)の計算を，

$$\mathbf{w}_{[1,0]} = \mathbf{u}_{x1} \quad , \quad \mathbf{w}_{[2,0]} = \mathbf{u}_{x2} \tag{F.12}$$

から出発して，$p = 0$から$N-1$まで順に行うことにより，$\mathbf{w}_{[1,N]}$，$\mathbf{w}_{[2,N]}$が求められる．

F．2　$(\partial F_1 / \partial \mathbf{z})\mathbf{u}$の微分計算について

式(F.4)を$\mathbf{x}_{[r,0]}$（$r = 1,2$）で微分すると，

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{[r,0]}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{u} \right) = - \begin{pmatrix} \partial \mathbf{w}_{[2,N]} / \partial \mathbf{x}_{[r,0]} \\ \partial \mathbf{w}_{[1,N]} / \partial \mathbf{x}_{[r,0]} \end{pmatrix} \tag{F.13}$$

となる．式(F.13)の$\partial \mathbf{w}_{[1,N]} / \partial \mathbf{x}_{[r,0]}$，$\partial \mathbf{w}_{[2,N]} / \partial \mathbf{x}_{[r,0]}$は以下のようにして求められる．式(F.7),(F.10)を，

$$\mathbf{x}_{[r,0]} = (x_{1[r,0]}, x_{2[r,0]}, \cdots, x_{n[r,0]})^{tr} \tag{F.14}$$

で微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}_{[q,p+1]}}{\partial x_{k[r,0]}} = & \left(\mathbb{1} + \Delta t_q \frac{\partial \mathbf{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}} \right) \frac{\partial \mathbf{w}_{[q,p]}}{\partial x_{k[r,0]}} + \mathbf{a} \Delta t_q \frac{\partial \xi_{[q,p]}}{\partial x_{k[r,0]}} \\ & + \Delta t_q \frac{\partial^2 \mathbf{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}^2} \left(\mathbf{w}_{[q,p]}, \ \frac{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}}{\partial x_{k[r,0]}} \right) \\ & + \rho_{[q,p]} \Delta t_q \frac{\partial^2 \mathbf{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[q,p]} \partial t_{[q,p]}} \frac{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}}{\partial x_{k[r,0]}} \\ & + \sigma_q \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{[q,p]}}{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}} \frac{\partial \mathbf{x}_{[q,p]}}{\partial x_{k[r,0]}} + \mathbf{a} \frac{\partial \eta_{[q,p]}}{\partial x_{k[r,0]}} \right) \end{aligned} \tag{F.15}$$

（$k = 1,\cdots,n$　，$q, r = 1,2$　，$p = 0,\cdots,N-1$）

$$\frac{\partial \xi_{[q,p]}}{\partial x_{[q,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,p]}}} \left(\frac{\partial w_{x[q,p]}}{\partial x_{[q,0]}} - \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,l]}} \frac{\partial \xi_{[q,l]}}{\partial x_{[q,0]}} \right.$$
$$- \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[r,0]} \partial \eta_{[q,j]}} \xi_{[r,0]} \frac{\partial \eta_{[q,j]}}{\partial x_{[q,0]}}$$
$$\left. - \sum_{l=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,l]} \partial \eta_{[q,j]}} \xi_{[q,l]} \frac{\partial \eta_{[q,j]}}{\partial x_{[q,0]}} \right)$$

$(q = 1,2)$ (F.16)

$$\frac{\partial \xi_{[q,p]}}{\partial x_{[r,0]}} = \frac{1}{\dfrac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,p]}}} \left(\frac{\partial w_{x[q,p]}}{\partial x_{[r,0]}} - \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[r,0]}} \frac{\partial \xi_{[r,0]}}{\partial x_{[r,0]}} \right.$$
$$- \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,l]}} \frac{\partial \xi_{[q,l]}}{\partial x_{[r,0]}}$$
$$- \frac{\partial^2 H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[r,0]}^2} \xi_{[r,0]} \frac{\partial \eta_{[r,0]}}{\partial x_{[r,0]}}$$
$$- \sum_{l=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[r,0]} \partial \eta_{[q,l]}} \xi_{[q,l]} \frac{\partial \eta_{[r,0]}}{\partial x_{[r,0]}}$$
$$- \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[r,0]} \partial \eta_{[q,j]}} \xi_{[r,0]} \frac{\partial \eta_{[q,j]}}{\partial x_{[r,0]}}$$
$$\left. - \sum_{l=0}^{p} \sum_{j=0}^{p} \frac{\partial^2 H_{[q,p]}}{\partial \eta_{[q,l]} \partial \eta_{[q,j]}} \xi_{[q,l]} \frac{\partial \eta_{[q,j]}}{\partial x_{[r,0]}} \right)$$

(F.17)

$(q, r = 1,2$ ，ただし，$q \neq r)$

ただし，

$$\frac{\partial w_{[q,0]}}{\partial x_{[r,0]}} = 0 \qquad (q, r = 1,2) \tag{F.18}$$

が得られる．式(F.15)の計算を式(F.18)から出発して，$p = 0$からN-1まで順に行えば，$w_{[q,N]} / \partial x_{[r,0]}$ $(q,\ r = 1,2)$ が得られる．ただし，式(C.16)，(C.23)，(F.6)，(F.15)，(F.17)，(F.18)より，

$|\eta_{[1,0]}| \geqq |\eta_{[2,0]}|$のとき，$\partial w_{[1,p]} / \partial x_{[2,0]} = 0$

$|\eta_{[1,0]}| \leqq |\eta_{[2,0]}|$のとき，$\partial w_{[2,p]} / \partial x_{[1,0]} = 0$ (F.19)

$(p = 0, 1, \cdots, N)$

である．

その他，$\partial w_{[q,N]} / \partial t_{[r,0]}$，$\partial w_{[q,N]} / \partial \alpha$なども同様にして求めることができる．

付録G　方程式(3.64)に与える微小摂動について

3．4節では，時点$t_{[1,0]}$において，

$$\dot{x} = f_{[1,0]} + a\eta_{[1,0]} = 0 \qquad (G.1)$$

とした．方程式(3.64)では，その解$(\tilde{\mathbb{z}}, \mathbb{u})$が求まった場合に式(G.1)が満たされる．しかし，解$\tilde{\mathbb{z}}$を求めるためにNewton法で$\tilde{\mathbb{z}}$を修正していく過程においては，一般には時点$t_{[1,0]}$において，

$$\dot{x} = f_{[1,0]} + a\eta_{[1,0]} \neq 0 \qquad (G.2)$$

であり，$\tilde{\mathbb{z}}$の値によって，$\dot{x} > 0$あるいは$\dot{x} < 0$となる．しかし，$\tilde{\mathbb{z}}$の修正を繰り返す際に，$\dot{x}$の符号が変化することは，以下に述べる理由により好ましくない．$\eta(x)$が飽和領域に達していない場合（式(3.25)），図3．12に示すように，xが増加する場合と減少する場合では，$\eta(x)$の微係数が異なる．従って，時点$t_{[1,0]}$において，$\dot{x}$の符号が変化すると$\eta(x)$の微係数が不連続に変化し，その結果，第1変分方程式(F.7)の積分結果が不連続に変化する．このため，$(\partial\mathbb{F}/\partial\mathbb{z})\mathbb{u}$の値が不連続に変化し，方程式(3.64)をNewton法で解く際に支障が生じる．

そこで，このような，$\dot{x}$の符号の変化を避けるために，時点$t_{[1,0]}$および$t_{[2,0]}$において，厳密に$\dot{x} = 0$とせず，微小な摂動ε_1，ε_2を与えて，

$$\begin{aligned} &\text{時点}\ t_{[1,0]}\ \text{では}\quad \dot{x} = \varepsilon_1 \\ &\text{時点}\ t_{[2,0]}\ \text{では}\quad \dot{x} = \varepsilon_2 \end{aligned} \qquad (G.3)$$

とすることにする．すなわち，周期解を求めるための方程式を，式(3.64)から，

$$\mathbb{F}(\mathbb{z}) = \begin{bmatrix} \mathbb{x}_{[2,0]} - \mathbb{x}_{[1,N]} \\ \mathbb{x}_{[1,0]} - \mathbb{x}_{[2,N]} \\ f_{[1,0]} + a\eta_{[1,0]} - \varepsilon_1 \\ f_{[2,0]} + a\eta_{[2,0]} - \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \mathbb{0} \qquad (G.4)$$

に変更する．$\mathbb{F}$をこのように変更することにより，方程式(G.4)の解$(\tilde{\mathbb{z}}, \mathbb{u})$の近傍においては，$\tilde{\mathbb{z}}$の（微小）変化による$\dot{x}$の符号の変化は生じなくなる．さらに，数値積分の出発点付近，

$$t_{[1,0]} \leqq t \leqq t_{[1,1]} \quad , \quad t_{[2,0]} \leqq t \leqq t_{[2,1]} \qquad (G.5)$$

における$\dot{x}$の符号の変化をさけるために，

$$\varepsilon_1 < 0, \quad \varepsilon_2 > 0 \qquad (G.6)$$

として，式(4.32)を得た．

付録H　式（5．15），（5．16）の導出

巡回行列式の場合と同様に考えて，

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \cdots & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \lambda\mathbb{1} & & \lambda^{M-1}\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \lambda^{2}\mathbb{1} & \cdots & \lambda^{2(M-1)}\mathbb{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{1} & \lambda^{M-1}\mathbb{1} & \cdots & \lambda^{(M-1)^2}\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q} & \mathbb{P} & \mathbb{O} & & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{Q} & \mathbb{P} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{Q} & \mathbb{P} \end{pmatrix} \tag{H.1}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{P}+\mathbb{Q} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{P}+\lambda\mathbb{Q} & & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{P}+\lambda^{M-1}\mathbb{Q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \cdots & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \lambda\mathbb{1} & & \lambda^{M-1}\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \lambda^{2}\mathbb{1} & \cdots & \lambda^{2(M-1)}\mathbb{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{1} & \lambda^{M-1}\mathbb{1} & \cdots & \lambda^{(M-1)^2}\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

ただし，$\lambda=\lambda_{(M,1)}=\exp(j\,2\pi/M)$　（j：虚数単位）

かつ

$$\begin{vmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} & \cdots & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \lambda\mathbb{1} & & \lambda^{M-1}\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \lambda^{2}\mathbb{1} & \cdots & \lambda^{2(M-1)}\mathbb{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{1} & \lambda^{M-1}\mathbb{1} & \cdots & \lambda^{(M-1)^2}\mathbb{1} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{H.2}$$

より，式(5.15),(5.16)を得る．

付録I rank$(\partial \mathbb{F}_{(M)}/\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(M)})$について

式(5.25)より，解曲線(5.1)において点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$は通常点であり，従って，点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(1)sb}$において$\dot{\alpha} \neq 0$である．従って，解曲線$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}$についても，点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$において$\dot{\alpha} \neq 0$である．ここで，点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$における，解曲線$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}$の接線ベクトルを，

$$\dot{\tilde{\mathbb{Z}}}_{(M)} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{Z}}_{(M)} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{I.1}$$

とおく．ここで，式(5.5)より，

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}} \dot{\tilde{\mathbb{Z}}}_{(M)} = \frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{Z}_{(M)}} \dot{\mathbb{Z}}_{(M)} + \dot{\alpha}\, \frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \alpha} = 0 \tag{I.2}$$

であるので，

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\dot{\alpha}} \frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{Z}_{(M)}} \dot{\mathbb{Z}}_{(M)} \in \mathrm{Range}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{Z}_{(M)}}\right) \tag{I.3}$$

従って，分岐点$\tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}{}^{1}{}_{sb}$において，

$$\mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \tilde{\mathbb{Z}}_{(M)}}\right) = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial \mathbb{F}_{(M)}}{\partial \mathbb{Z}_{(M)}}\right)$$

が成り立つ． (I.4)

付録J　3倍周期分岐が生じるための条件について

ヒステリシス素子のない強制振動系において，3倍周期分岐が生じるための条件は，状態方程式の初期値に関する変分方程式が，

$\lambda_1 = \exp(\pm j 2\pi/3)$，$\lambda_2 = \exp(\mp j 2\pi/3)$　（複号同順）　(J.1)

（j：虚数単位）

を満たす2つの特性数を持つことである[2]．状態方程式が式(6.14)で与えられる場合には，変分方程式の2つの特性数の積が，Liouvilleの公式より，

$\lambda_1 \lambda_2 = \exp(-2\pi k)$　(J.2)

で与えられるので，式(J.1)が満たされるのは，k＝0の場合に限られることが分かる．

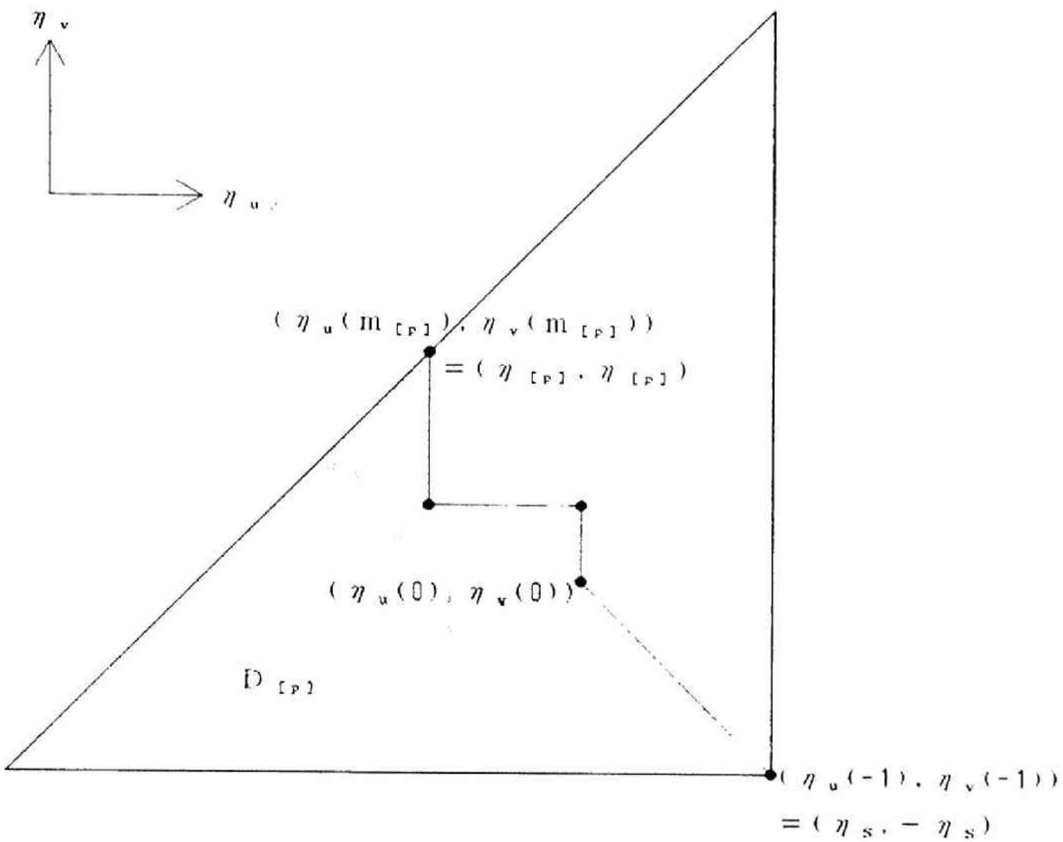
また，図J.1(a)～(c)に，non-resonant stateにおける固有値λ_1の変化を，

(a)　$h=0$（心線特性Ｉ），$k=0$，$\nu=1$，$B_0=0$

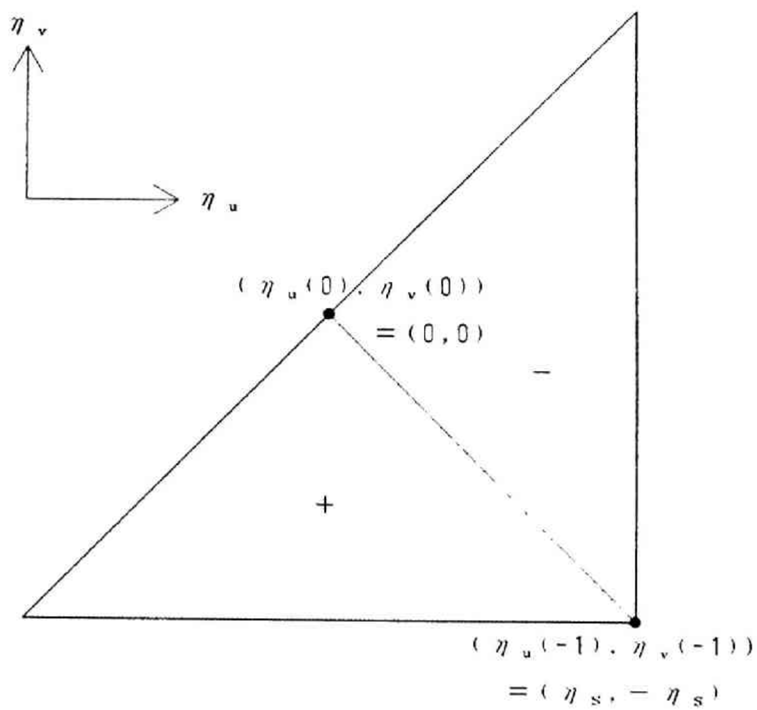
(b)　$h=0$（心線特性II），$k=0$，$\nu=1$，$B_0=0$

(c)　3乗特性，　　　　，$k=0$，$\nu=1$，$B_0=0$

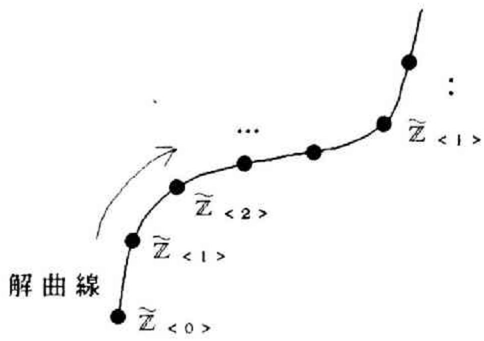
の場合について示す．図J.1を見ると，3乗特性の場合（図(c)）には，式(J.1)を満たす点が2点（3倍周期分岐点Ⓐ,Ⓑ）存在するのに対し，心線特性IIの場合（図(b)）には式(J.1)を満たす点が1点（3倍周期分岐点Ⓑ）しか存在せず，また，心線特性Ｉの場合（図(a)）には式(J.1)を満たす点が存在しないことが分かる．



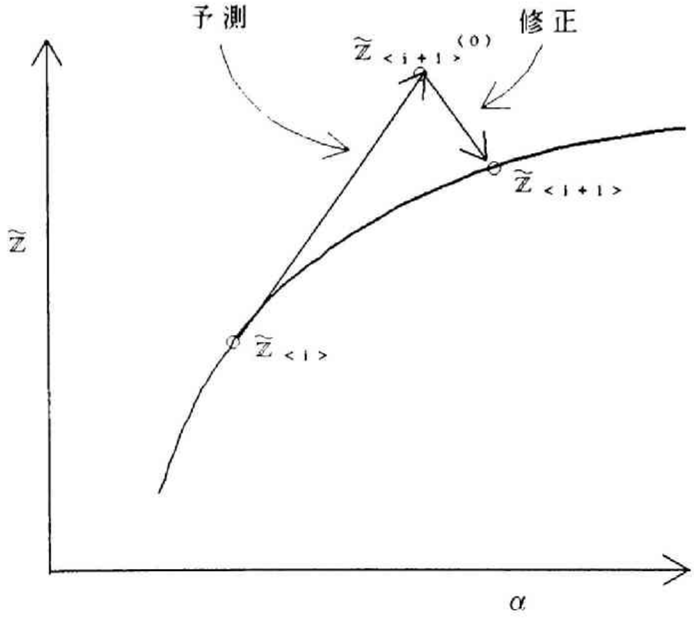
図B．1　端点$(\eta_u(0), \eta_v(0))$が直線$\eta_v = -\eta_u$上にある例



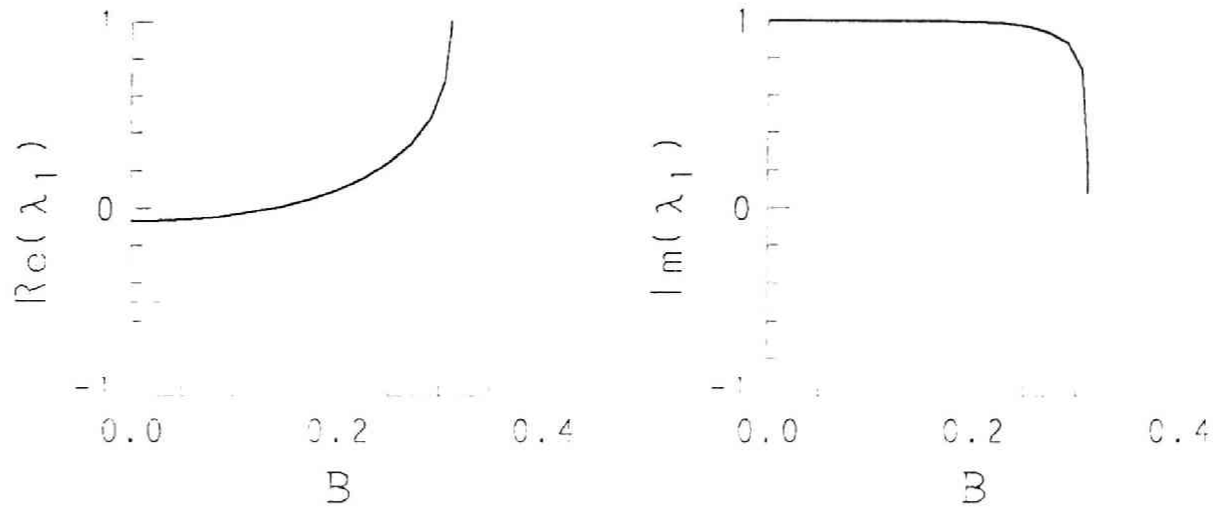
図B．2　完全消磁状態



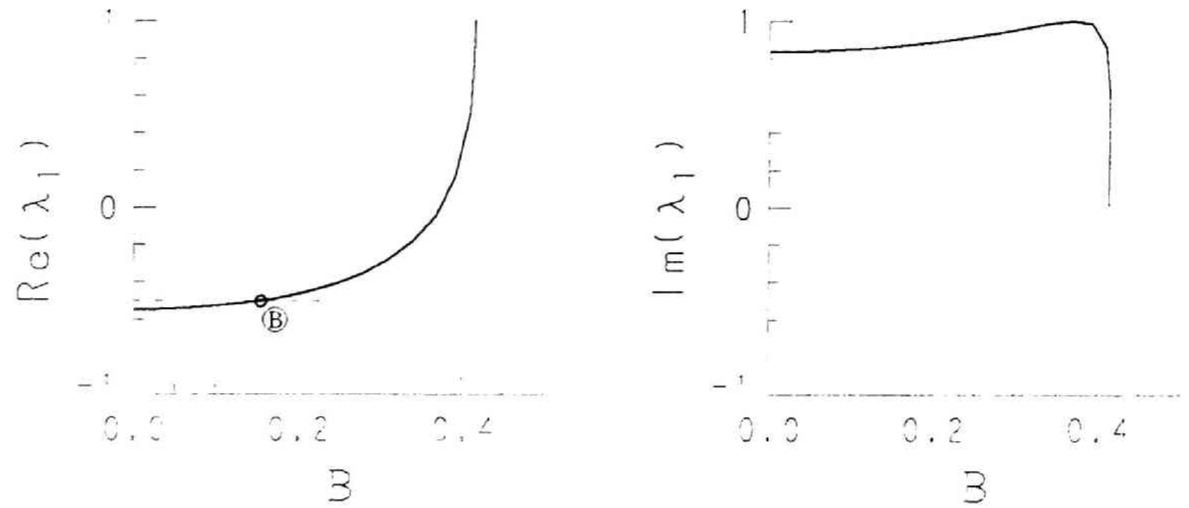
図Ｄ．１　解曲線の追跡



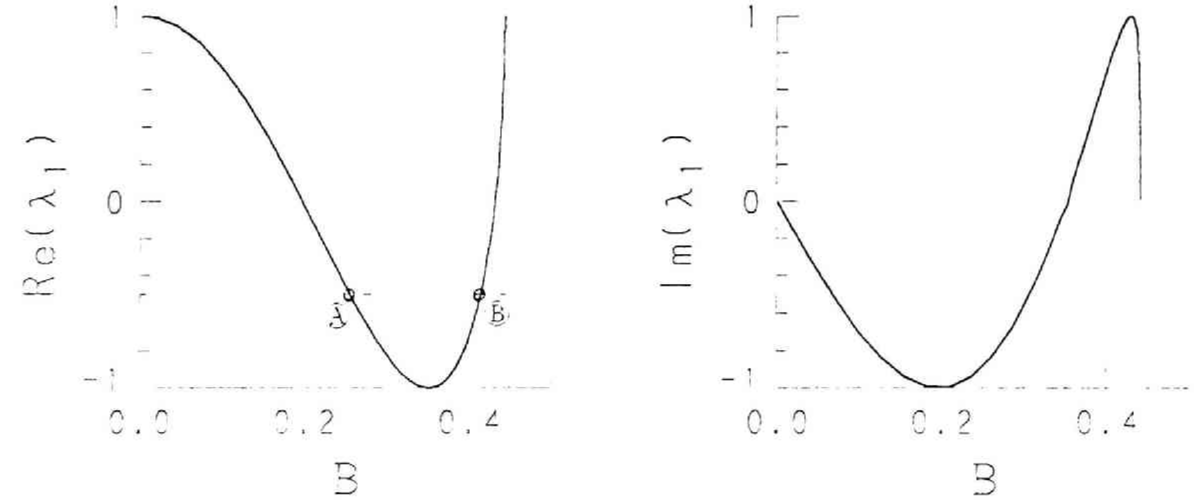
図Ｄ．２　点列の追跡



（a） h = 0（心線特性Ⅰ），k = 0，ν = 1，B_0 = 0



（b） h = 0（心線特性Ⅱ），k = 0，ν = 1，B_0 = 0



（c） 3乗特性，k = 0，ν = 1，B_0 = 0

図J．1　固有値λ_1の変化（non-resonant state）