

新 制
工
692

京大附図

開水路非定常流の数値計算法とその水工学 への応用に関する研究

1986年11月

井 上 和 也

開水路非定常流の数値計算法とその水工学 への応用に関する研究

1986年11月

井 上 和 也

目 次

序 論	1
第 1 編 一次元流れの数値計算法とその応用	
第 1 章 一次元流れの基礎式の保存則性と特性曲線表示	6
1.1 基礎式	6
1.2 保存則系	8
1.3 不連続部における条件	10
1.4 保存則系の展開	12
1.5 双曲型保存則系の特性曲線表示	13
1.6 基礎式の特性曲線表示	15
(1)運動量解析法の特性曲線表示	16
(2)エネルギー解析法の特性曲線表示	16
(3)運動量解析法とエネルギー解析法の比較	17
(4)境界条件	18
1.7 結語	19
第 2 章 一次元流れに関する従来の理論的研究とその考察	21
2.1 dynamic wave と kinematic wave	21
2.2 dynamic wave 理論と kinematic wave 理論の適用性	23
2.3 段波の発生条件および dynamic wave の減衰の時間スケール	24
2.4 線型系における理論解	27
(1)擾乱の波先の挙動	29
(2)擾乱の主要部の解	30
2.5 kinematic wave の非線型性の効果—単斜上昇波—	32
2.6 流れの安定性	37
2.7 結語	40
第 3 章 kinematic wave 理論	42
3.1 kinematic wave 理論の第 1 次近似	42
3.2 kinematic wave 理論の第 2 次近似の分類	47
3.3 摂動法および逐次近似法による第 2 次近似	48
(1)第 1 次近似解の無次元化と波形の変化	49
(2)摂動法による解	52
(3)逐次近似法による解	54

3.4	摂動解および逐次近似解の比較および検討	56
	(1)摂動解と逐次近似解の比較	56
	(2)次元表示	57
	(3)従来の結果との比較	58
	(4)水深のピークの減衰	59
	(5)無次元のパラメータ	60
3.5	拡散項を含む第2次近似	62
	(1)基礎式	62
	(2)線型化	63
	(3)水深のピークの伝播	64
	(4)水深のピークの伝播に及ぼす拡散項の影響	65
	(5)摂動解および逐次近似解との比較	66
3.6	結語	67
第4章	一次元流れの数値計算法	69
4.1	概説	69
4.2	kinematic wave理論による数値計算法	71
	(1)第1次近似の差分式	72
	(2)第2次近似の差分式	73
	(3)安定性の検討	74
4.3	dynamic wave理論による数値計算法	76
	(1)Lax-Wendroff法	78
	(2)特性曲線法	80
	(3)Lax-Wendroff法と特性曲線法の関係	82
4.4	dynamic wave理論による数値計算法の安定性	84
	(1)Lax-Wendroff法の安定性	84
	(2)特性曲線法の安定性	86
	(3)Vasilievの安定条件	87
	(4)射流の計算	88
4.5	特性曲線法による計算手順	92
	(1)基礎式	92
	(2)計算法	94
	(3)境界点におけるbox型差分法の問題点	98
4.6	結語	101
第5章	一次元非定常流への応用	104

A. 応用に当たっての基本的事項の研究	105
5.1 微小擾乱の計算	105
5.2 水深変化の大きい流れの計算	111
5.3 実験水路における非定常流の計算	116
(1)実験方法	116
(2)実験値と計算値の比較	117
B. 実際河川への適用	122
5.4 淀川中・下流部における洪水の追跡	122
5.5 上野遊水池の調節計算	126
5.6 瀬田川における遡上波の計算	134
(1)遡上波の追跡計算	135
(2)遡上波の予測	137
5.7 洪水の遡上追跡	141
(1)計算法の構成	141
(2)淀川における洪水の遡上追跡	143
5.8 結語	144

第2編 二次元平面流れの数値計算法とその応用

第1章 浅水湖における流動と拡散	148
1.1 概説	148
1.2 基礎式とその差分化	149
(1)基礎式	149
(2)二次元一層モデル	150
(3)拡散に関する基礎式	151
(4)差分式	151
(5)琵琶湖南湖への適用	154
1.3 湖流	157
(1)静振	157
(2)平均的な湖流	158
(3)非定常な条件下での湖流	161
1.4 湖水の滞留と拡散	165
(1)濃度分布の変化	166
(2)滞留特性	167
1.5 結語	169

第2章 氾濫原における洪水の挙動	171
2.1 概説	171
2.2 基礎式と境界条件	172
(1)基礎式とその差分化	172
(2)地形を考慮した境界条件の設定	174
2.3 二次元平面流れによる氾濫解析	177
(1)由良川中流部への適用	177
(2)由良川中・下流部への適用	183
2.4 非線型項を考慮した氾濫解析	189
(1)一次元流れにおける非線型項の差分化	189
(2)非線型項の導入と試算	190
(3)河川改修事業の影響予測への適用	194
2.5 一次元解析法と結合した氾濫解析	198
(1)淀川および旧巨椋池干拓地への適用	199
(2)差分格子より狭小な水路を考慮した解析	204
2.6 結語	214
第3章 特性曲線法による二次元平面流れの数値計算法に関する研究	217
3.1 特性曲線理論による二次元平面流れの解析法	217
(1)基礎式と特性曲面	217
(2)特性曲面内の関係	219
(3)差分式の誘導	221
3.2 staggered schemeによる差分式との比較および計算例	223
(1)staggered schemeによる差分式	223
(2)特性曲線法の適用と差分式	224
(3)内挿法	226
(4)staggered schemeによる差分式との比較	227
(5)琵琶湖南湖の湖流計算	228
3.3 結語	229
結 論	231

序 論

近年の電子計算機の日まじしい進歩とそれに伴う計算技術の発達により、水工学の研究においても、その研究方法として数値計算を用いた研究が活発に行われるようになってきている。それらの研究対象は多岐にわたっているが、そのなかで極めて重要な位置を占めるのが自由表面を有する流れ、つまり開水路流れの解析である。すなわち、小は実験水路や水槽から始まり、大は、実物の河川、湖沼、貯水池および沿岸域などに至る種々の空間スケールと時間スケールを有する水域において、自由表面をもつ水の運動と、それに相互に影響しあっている物質や熱の輸送を取扱う問題であり、土木工学のなかでの水工学の基礎を形成している。

この開水路流れの現象を記述する数学モデルは、一般に非線型の偏微分方程式系で表わされる。したがって、流れの場が時間とともに変化する場合、数学的には非線型の運動方程式系の初期値・境界値問題が構成されるが、それらは一般に解析的な方法によっては解けないことが多い。ここに、「解析的」というのは数式に一連の処理を行ってゆくことを意味し、具体的に数値を用いて数式を評価してゆく、いわゆる数値解析的な意味は含めないとする。

高速に大量の数値を自動的に処理する手段のなかった時代には、数学モデルの解析といえ、上記の意味での解析的な方法が大部分であり、したがってそれを可能にするため、観察される現象の特性およびその現象のうちの何を知らうとするかという目的に応じて、対象とする現象の数学モデルに何らかの仮定や近似が加えられてきた。もちろん、今日において解析的な方法を採用するとき、このような事情は変わっていない。したがって、こうした方法によって行われる解析の良否、つまりいかに現象をより忠実により広い範囲で表現するかということは、加えられた仮定や近似の良否にそのまま依存しているといえる。また、これらの仮定や近似は、それがいかに良好なものであっても、その数学モデルに対する制約であることには変わりなく、数学モデルの適用性を、その程度はまちまちであるものの、狭くするものであろう。

電子計算機、とくにデジタル型電子計算機の驚異的な発達は、こうした解析的な方法の問題点を一変するものであった。すなわち、電子計算機の使用により、数学モデルの解析的な解がこれまで求められなかった場合でも、解を数値的に求めるという方法が徐々に可能になってきたのである。もちろん、このような数値的な方法によるときには、特定の初期条件および境界条件のもとでの解が数値的に求められるだけであるので、解析的な方法の結果ほど解は一般性をもつものではないが、解析的な方法の場合に導入される仮定や近似が必ずしも必要ではなく、いわば現象を記述する数学モデルをそのまま解くことができる点、さらに種々の条件のもとでの解を求めることによって数学モデルの特性を明らかにすることができる点に、大きい利点を有している。このような数値的な方法は、はじめに述べたように電子計算機の大規模化と高速化および使用費用の低廉化にしたがって、ますますその適用性を広めている。水工学の分野において重要な研究方法の一つとして従来より用いられている実験

(模型実験を含む)による方法に比べ、数値的な方法は、現象そのものを観察できないという欠点を有しているものの、装置や模型の作製および実験遂行に要する程の多くの時間と費用を必要としないという点において有利な方法であるといえる。このような状況を背景として、水工学の分野において数値水理学といった領域が形成されつつあるといえる状態に至っており、今後実験による方法と数値的な方法は相互に補完的な役割を果たしてゆくものと考えられる。

電子計算機によるこのような数値的な方法を可能にしているもう一つの要素として、電子計算機とともに並行して進んでいる数値計算技術の発達が挙げられる。ここに、数値計算技術とは数値計算によって意味のある解を得るために、もとの数学モデルをいかに数値計算のモデルに変換し、計算のアルゴリズムを確立させるかということを表わすとしておく。たとえば、数学モデルが非定常な初期値・境界値問題である場合、数値計算のモデルに必要とされるのは、一致性、収束性および安定性であり、これらが保証されていない計算モデルは、もとの数学モデルにとって意味のない結果しか与えない。また、境界条件の計算モデルにおける取扱い方は、問題の性質をよく反映したものでなければならない。さらに、数値的な方法を用いるときの実際上の問題として、いかに速く所要の精度の解を得るかという点も大事である。このような問題を計算モデルの中でどのように解決するかが数値計算技術であり、数値計算を実施するときの重要な課題である。

本研究は、一次元および二次元の開水路流れの解析において、数値計算による方法を用いる場合のそれぞれの流れに応じた計算モデルを構成し、上記のような数値計算技術の種々の問題について検討し、計算のアルゴリズムを確立するとともに、水工学の分野に現われる実際の開水路流れの問題に数値計算法を適用し、それぞれの問題についての解析を行うと同時に、数値計算による解析がどの程度の有効性と有用性をもつかを考察することを目的としている。

この研究で扱われる流れは、上記のように開水路の一次元および二次元の流れであるが、さらにこれにつきのような前提を加えておく。

- (1) 流れの微視的な構造には立入らない。すなわち、乱れの影響は平均的な水量量によって表わされるものとし、乱れの問題には触れない。いわゆる turbulent closure に関係する Reynolds 応力には、Manning の粗度係数による表示を用いるにとどめる。
- (2) 漸変流を扱う。すなわち、圧力分布は静水圧分布であるとする。
- (3) 自由表面の曲率は無視される程度としておく。
- (4) 水路床は時間的に変化しない固定床とする。

このような前提を、一次元流れについていえば、基礎式が Saint Venant の式で表現されるような流れに限ることを意味している。さらにこのような流れが二次元の場に拡がった場合を二次元の流れとして扱うことにする。つまり、水工学の分野において波動理論を除けばこれまで伝統的に扱われている流れであり、上のような制約があっても水工学上のかなり広い範囲の問題を対象としうることは以下の各章に述べられるとおりである。

上述した研究目的より明らかなように、この研究で中心となるのは、数値計算による方法が適用される個々の現象そのものではなく、数値計算という方法である。対象とされる開水路流れを数値計算するための方法としては、周知のように有限差分法（単に差分法と呼ぶ）、有限要素法および境界要素法が挙げられる。差分法は、もとの数学モデルに含まれる微分を適切な差分に置き換える方法であり、一次元流れの場合だけでなく二次元流れ、さらには本研究では取扱わないが三次元流れの場合にも容易に拡張しうる方法である¹¹。有限要素法は現在二次元流れの問題に広く応用されており、とくに境界形状が複雑な場合に、これを比較的簡単に境界条件とともに計算モデルに組み込むことができる点が、差分法と比較したときの著しい利点とされている。境界要素法は Green の定理を用いて対象領域内の積分を境界上の積分に置き換え、境界からの影響を重ね合せるという方法で、次元数が一つ減ぜられる点に大きい利点を有する。

これらの計算方法はいずれも一長一短の特徴を持っている。有限要素法は上記のように任意の境界形状をそのまま扱おうる反面、一般に計算式は大規模な行列を用いて表現され、差分法に比べてかなり複雑である。また、二次元流れが主として扱われており、一次元流れにはほとんど適用されておらず、また三次元流れへ拡張することは二次元流れの場合よりさらにはるかに複雑である。境界要素法もまた主として二次元流れが対象とされ、問題が線型の場合には威力を発揮するといわれているが、非線型の流れの問題には最近適用のための研究が始められたばかりであって、非線型項の領域内の積分が最大の問題といわれる²¹。

これらのうちのいずれの計算方法を用いるかは、対象とする流れの性質に依るのはもちろんであるが、この問題については现阶段では明確な結論は得られているとはいえず、むしろ流儀に属する問題とみられることも多い。この研究のように、一次元および二次元流れを扱う場合、空間の次元数にかかわらず同じ考え方で計算法を導くことができる差分法が、他の方法に比較して計算式を導くのに便利であり、また得られた計算式の解釈も分かりやすいので、本研究では差分法を用いることにする。特に、二次元流れの場合には、もとの微分方程式を有限の大きさの control volume について積分した後、差分式を誘導する。

以下にこの論文の概要を示しておく。

第 1 編は一次元流れを対象としている。第 1 章においては、一次元流れを表わす基礎式の運動量およびエネルギーに関する一次元の保存則性を導くとともに、これを一般的な形で特性曲線法による表示に改め、さらに運動量解析法およびエネルギー解析法の特性格線表示を求める。これらは後に数値計算のための計算式の誘導に用いられる。第 2 章においては、一次元の非定常流に関する従来の解析的な研究のうち、本研究の後の展開に関連する研究についてのとりまとめを行う。すなわち、まず一次元の非定常流は kinematic wave と dynamic wave によって特徴づけられることを明らかにする。ついで、kinematic wave および dynamic wave のそれぞれに注目して導かれる流れの解析法の適用性、dynamic wave の非線型性による段波の発生条件、dynamic wave の減衰の時間スケール、kinematic

wave と dynamic wave が共存するときのそれぞれの役割、kinematic wave の非線型性による単斜上昇波、ならびにこれらの取り扱いでしばしば現われる流れの安定性の問題について、解析的な検討を行う。第3章においては、kinematic wave 理論による流れの解析法について詳述する。まず、この理論による第1次近似解を要約するとともに、第1次近似解では、波形の変形は表わされるが減衰が示されないこと、および kinematic shock が発生すれば取扱い方法を変えなければならないことを明らかにする。また、この理論は水深方向の長さのスケールと流れ方向の長さのスケールの比を底こう配で除したパラメータが1に比べ十分小さいときに適用されることに注目し、このパラメータに関する摂動法および逐次近似法による第2次近似を導き、波形の減衰について考察する。さらに、これらの取扱いで理論上つねに問題となる kinematic shock に関して、これを連続な解として扱える基礎式に拡散項を含める第2次近似の方法について述べ、その解の特性について考察を加える。

以上は一次元の非定常流に関する解析的な取扱いである。とくに、第2および第3章においては、理論的な取扱いを可能にするため、水路幅は十分に広く単位幅で考えることができ、径深は水深で近似されることが仮定されている。しかし、実際の水路や河川の流れではこのような仮定は一般につねに成立するものではない。第4章では、上記のような解析的な立場を離れ、数値計算の方法を用いるときの計算手法を、実際の流れに適用しうるようになるべく一般的に述べる。すなわち、kinematic wave 理論の第1次近似および第2次近似による数値計算法ならびに dynamic wave 理論による数値計算法のうち、Lax-Wendroff 法および特性曲線法について述べるとともに、それぞれの計算法に対する安定性の必要条件を導く。また、特性曲線法に関しては、境界条件や分・合流点の取扱い方、初期条件の設定法などの詳細を述べ、計算法の構成を示す。明らかに、特性曲線法に重点が置かれているが、それは特性曲線が dynamic wave による影響の伝播の水理学的表現であるからである。第5章においては、以上の計算法を水工学の分野において現われる各種の一次元の非定常流に応用する。仮想的な水路における非定常流に関しては、各種の計算法の比較を中心に行う。また、実際の水路や河川における非定常流に関しては、dynamic wave 理論による計算法、とくに特性曲線法を適用し、流れの解析を行うとともに、それらを通じて数値計算という方法の有効性と有用性を検討する。

第2編においては、水平面内の2方向について流れの変化を考えるいわゆる二次元平面流れを対象とする。このような流れでは、空間に関する独立変数は2個であり、これに時間に関する独立変数が加わる。二次元平面流れに関しては、従来、個々の流れに応じた近似を行った上で解析的にそれぞれの特徴を求めるといった方向の研究が主であって、第1編第2章および第3章で行うような与えられた初期条件および境界条件のもとの具体的な解を解析的に求めることはほとんど行われていない。これは、開水路流れに関する研究ではこれまで一次元流れが主流を占めていて二次元流れがあまり取扱われてこなかったという伝統とともに、空間の次元数の増加により数学的な困難さが飛躍的に増加するからであると考えられ、上記の意味で解が求められるようになったのは、数値計算が普及しはじめてからである。この研究においても、二次元流れの数値計算による解析について述べることにする。

まず、第1章では浅水湖における平面的な湖流と物質の拡散をとり上げる。二次元平面流れの基礎

式を control volume について積分し、この結果より流れの非線型項（移流項）を省略した場合の計算式である差分式を導く。また、この方法を琵琶湖を南湖に適用する場合の各種の資料を整理して、計算法の全体を明らかにするとともに、湖流および拡散に関する計算結果より南湖の水理学的特性について検討を加える。第2章においては、氾濫水の平面的な挙動を追跡する計算法を述べる。使用される計算法は基本的には第1章と同様であるが、氾濫水の場合には氾濫原において内部的な境界条件が現われるので、その計算法を詳述し、氾濫水の計算法の特徴を明らかにする。また、第1章では省略された非線型項の取扱いについて、試算を行いながら検討する。さらに、氾濫原に有堤部と無堤部が混在して堤内地と堤外地が区別できない場合と、連続堤により堤内地と堤外地が区別できる場合のそれぞれについて現地への適用例を示し、氾濫水の挙動を考察する。第3章においては、二次元流れを特性曲線理論によって数値計算する方法について考える。先に述べたように、二次元流れの場合独立変数が3個になるので、特性曲線（面）による表示は一次元流れの場合よりはるかに複雑であり、したがってこの理論を用いた数値計算法は一次元流れの場合ほど簡単ではない。この章では特性曲線理論を用いた従来の計算法のまとめを行うとともに、若干の検討を加える。

最後に、以上の各章の結果を要約して結論とする。

参考文献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 劉樹坤, 阿部徹: 琵琶湖湖流の三次元的な解析, 京都大学防災研究所年報, 第26号B-2, 1983.
- 2) 岩佐義朗, 多田彰秀, 泊 宏: 境界要素法を適用した諏訪湖の湖流に関する数値解析, 京都大学防災研究所年報, 第29号B-2, 1986.

第1編 一次元流れの数値計算法とその応用

第1章 一次元流れの基礎式の保存則性と特性曲線表示

一次元流れの解析は、流れに卓越した方向性すなわち主流方向が存在するときに適用が可能であって、空間的な変化の方向も、この卓越した主流方向にとられる。序論で述べた前提のもとで、一次元解析の基礎となる流体力学的な原理とその数学的な表現およびそれらから一次元解析法を展開する方法についてはすでに詳細に研究されている^{1, 2)}。本章では、その結果である開水路一次元非定常流の基礎式のもつ一次元の保存則性について若干の考察を加え、ついでこれらの基礎式が双曲型偏微分方程式系を構成することから、これらを後の数値計算において必要とされる特性曲線による表示に変形するとともに、その水理学的な意義について考察することにする。

1.1 基礎式

一次元解析法による開水路非定常流の基礎式はつぎのように導かれている²⁾。

$$\text{連続式} \quad : \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1.1)$$

$$\text{運動量式} \quad : \quad \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\beta v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda' \cos \theta}{A} \frac{\partial}{\partial x} (h_c A) = s_o - s_f \quad (1.2)$$

$$\text{エネルギー式} : \quad \frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} = s_o - s_f \quad (1.3)$$

ここに、 x ：一次元の空間座標（主流方向の下流向きにとられる）、 t ：時間、 A ：流水断面積、 Q ：流量、 q ： x 方向単位長さあたりの横流入流量、 $v=Q/A$ ：断面平均流速、 h_c ：水面から流水断面の図心までの深さ、 $s_o=\sin \theta$ ：水路底こう配で、基準面から河床までの高さを z とすれば、 $\sin \theta=-dz/dx$ 、 s_f ：摩擦こう配で、抵抗則としてManning公式を用いるとき、 $s_f=n^2 v^2/R^{4/3}$ (n ：Manningの粗度係数、 R ：径深)、 h ：水深、 α ：エネルギー係数、 β ：運動量係数、 λ' および λ ：それぞれ運動量解析法およびエネルギー解析法における圧力分布補正係数である。以後の取扱いにおいては、簡単のため α 、 β 、 λ' および λ は一定とし、また θ の x 方向の変化は無視される程度としておく。

一次元非定常流の解析は、(1.1) および (1.2) 式から構成される運動量解析法と、(1.1) および (1.3) 式から構成されるエネルギー解析法の2つに分類される。これらのうちいずれの解析法を用いるかは、解析の対象とされる流れの特徴によらなければならない²⁾。(1.2) 式は本来ベクトル量で

ある運動量の一成分の一方向の変化を示すに過ぎず、しかも運動量の時間的変化に寄与する外力には重力および摩擦力しか考えられていない。したがって、それ以外の力が問題になる場合、たとえば水路が一様でなく水路壁面から受ける x 方向の力が無視されない場合には、(1.2) 式はこのままでは不適当である。つまり、(1.2) 式がそのまま適用されるのは、実験水路のような一様な人工水路にほぼ限られる。(1.3) 式で表わされるエネルギー解析法では、力そのものでなくスカラー量であるエネルギーと仕事の関係が表現されている。したがって、たとえば水路が非一様であっても、非一様性によって生ずる力が仕事をしない限り、つまりエネルギーの供給や損失を伴わない限り問題とされないから、この解析法が適用されるのは一様水路には限られない。むしろ、洪水の伝播とそれに伴う減衰などのように、長い区間にわたって重力や摩擦力によって、流れが巨視的にどのように変化するかというものの解析に適しているとされる。以下においては、洪水のような非定常流の必ずしも一様とは限らない水路における巨視的な変化を中心に取扱うので、エネルギー解析法を主として適用することにする。

なお、従来より非定常流の運動方程式として慣用されている Saint Venant の式³⁾

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = s_0 - s_f \quad (1.4)$$

は、水路を一様とすれば、(1.2) および (1.3) 式のいずれからも誘導されることが以下のようにして知られる。まず、(1.3) 式から (1.4) 式への近似は明らかであろう。また (1.2) 式においては、左辺第 3 項が問題である。この項はつぎのように定義されている。

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_c A) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (h-y) B dy \quad (1.5)$$

ここに、 y : 河床からの座標、 B : y における水路幅である (図1.1)。いま水路が x 方向に滑めらかに変化しているとするれば、(1.5) 式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(h_c A) &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial x}(h-y) B dy + (h-y) B(y) \Big|_{y=h} \frac{\partial h}{\partial x} \\ &= \int_0^h (h-y) \frac{\partial B}{\partial x} \Big|_{h: \text{const}} dy + A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.6) \end{aligned}$$

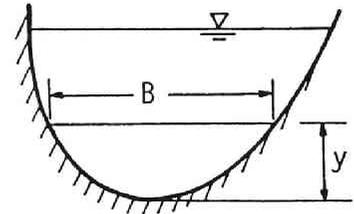


図1.1 水路の横断面

と変形される。先述のように運動量解析法の適用性からみて、水路を一様と仮定すれば、 $\partial B / \partial x \Big|_{h: \text{const}} = 0$ であるから、(1.6) 式より

$$\frac{\partial}{\partial x}(h_c A) = A \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.7)$$

が得られ、ここで $\beta = \alpha$, $\lambda = 1$, $\cos\theta = 1$ とすれば、(1.2) 式は (1.4) 式で近似されることが導かれる。

1.2 保存則系

(1.1), (1.2) および (1.3) 式は、質量保存則および運動量保存則を流体運動に適用した、連続式およびNavier-Stokesの式とその第一積分から導かれている。すなわち、質量および運動量に関するそれぞれの保存則が基礎原理となっているのであるが、本節では (1.1), (1.2) および (1.3) 式がこのような流体力学の三次元的な意味でなく、一次元的な意味において近似的に保存則を満たすことを導いておく⁹⁾。

一次元的な保存則系は、つぎの方程式で表わされる⁹⁾。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = q \quad (1.8)$$

ただし、通常 $q=0$ の場合が保存則系とされているが、本節ではこれを拡張して (1.8) 式のように表わすことにする。また、 U , F および q はいくつかの成分よりなるベクトルで、 F および q は一般に U だけでなく x および t にも陽に依存すると考えられるから、 $F = F(U, x, t)$ および $q = q(U, x, t)$ である。

(1.8) 式は、 $x-t$ 平面の任意の閉曲線を C とし、 C によって囲まれる平面を S とするとき、

$$\oint_C (F dt - U dx) = \int_S q ds \quad (1.9)$$

と変形される。ただし、 ds は S の面積要素である。

(1.8) あるいは (1.9) 式のもつ物理的な意義はつぎのようである。いま、 U のある成分を、物理量 P の x 方向の単位長さに含まれる量、つまり P の x 方向についての濃度あるいは貯留量とし、 F の対応する成分を P の x 方向のフラックス、 q の対応する成分を P の単位長さあたり単位時間に発生する率とする。このとき、(1.8) あるいは (1.9) 式は、 P の貯留量の時間的变化率が、 P のフラックスの x 方向のこう配および P の発生率とつりあっていること、すなわち P に関して収支の平衡状態が保たれていることを表わしている。また、(1.8) あるいは (1.9) 式は、空間座標が一個 (x) であるので、一次元の保存則を表わすといわれる。

さて、(1.1), (1.2) および (1.3) 式が上の一次元の保存則を近似的に満たすことを示そう。まず、(1.1) 式に関しては両辺に密度 ρ (一定とする) を乗ずれば、質量に関する一次元の保存則を満たすことは明らかである。

(1.2) 式に関しては、 $v = Q/A$ を用いてこれを書き改め、さらに (1.1) 式より $\partial A / \partial t + \beta \partial Q / \partial x \doteq q$ と近似すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} = gA(s_0 - s_r) + vq \quad (1.10)$$

ここに、Mは比力で次式で定義される。

$$M = \frac{\beta Q^2}{gA} + \lambda' h_c A \cos \theta \quad (1.11)$$

水路の単位長さあたりに含まれる x 方向の運動量は、 x 方向の流速を u とすれば $\int \rho u dA = \rho Q$ である。また x 方向の運動量の x 方向のフラックスは $\int (\rho u u + p) dA$ (p : 圧力) であり、これは $\rho \beta v^2 A + \rho \lambda' g h_c A \cos \theta = \rho g M$ に等しい。一方、(1.10) 式の右辺に ρ を乗ずると、 $\rho g A s_0$ は x 方向単位長さあたりの流れに作用する重力、すなわち運動量の発生率を表わし、 $\rho g A s_r$ は摩擦力による運動量の減少率（負の発生率）を表わし、 $\rho v q$ は横流入流量によって持ち込まれる x 方向単位長さあたりの運動量を表わしていることが分る。以上をまとめると、(1.10) 式は運動量に関する一次元の保存則を満たしているといえることができる。

最後に (1.3) 式について考える。図1.1において、水路床から流水断面の図心までの距離を y_c 、つまり $y_c = h - h_c$ とするとき、

$$\frac{\partial}{\partial t} (y_c A) = \frac{\partial}{\partial t} \int_A y dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h y B dy = (yB)_{y=h} \frac{\partial h}{\partial t} = h \frac{\partial A}{\partial t} \quad (1.12)$$

であることを用いれば、(1.3) 式の両辺に Q を乗じた結果はつぎのように変形される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\beta v^2}{2} + g(z + \lambda y_c \cos \theta) \right\} A + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\alpha v^2}{2} + g(z + \lambda h \cos \theta) \right\} Q \\ & = -gQs_r + \left\{ \frac{\alpha v^2}{2g} + g(z + \lambda h \cos \theta) \right\} q \end{aligned} \quad (1.13)$$

ただし、ここでの変形では近似的に $(\alpha - \beta)vQ \partial v / \partial x = 0$ 、 $(\lambda - 1) \partial A / \partial t = 0$ とされている。(1.13) 式に ρ を乗ずると、左辺の第1項は、流れのもつ運動および位置エネルギーを合わせた力学的エネルギーの x 方向の単位長さあたりに貯留されている量の時間的変化率を表わしており、また、第2項は力学的エネルギーのフラックスと圧力によって単位時間になされる仕事との和の x 方向のこう配であることが分る。一方、右辺は摩擦によって失なわれるエネルギーおよび横流入流量によって流入するエネルギーのそれぞれ単位時間・単位長さあたりの割合を示している。つまり、(1.13) 式はエネルギーの一次元の収支則を表わしており、エネルギーに関する一次元の保存則を満たしているといえる。

以上から、一次元の非定常流の基礎式の保存則の形 (1.8) 式にまとめると、運動量解析法の場合、

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ gM \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q \\ gA(s_0 - s_f) + vq \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

であり、エネルギー解析法の場合、

$$E_g = \left\{ \frac{\beta v^2}{2} + g(z + y_0 \cos \theta) \right\} A \quad (1.15)$$

$$H_g = \frac{\alpha v^2}{2} + g(z + \lambda h \cos \theta) \quad (1.16)$$

とすると、つぎのようである。

$$U = \begin{bmatrix} A \\ E_g \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} Q \\ H_g Q \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q \\ -g s_f Q + H_g q \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

1.3 不連続部における条件

以上のような水理学的に一次元の保存則を満たす (1.1), (1.10) および (1.13) 式より、不連続部における条件が導かれる。流れには、不連続部として扱われるいくつかの現象があり、その最も顕著な例が段波である。このような不連続部では、(1.8) 式のような微分の形式の方程式は適用できないが、その積分形である (1.9) 式を適用することにより、不連続部における跳躍条件を求めることができる。いま、流れに段波などの不連続部が存在するとして、その伝播速度を w とすれば、その軌跡は $x-t$ 平面上で $dx/dt=w$ で表わされる。(1.9) 式の閉曲線 C を図 1.2 のようにとり、 $dx/dt=w$ をはさむそれぞれの側の値を添字 1 および 2 で示すことにより、(1.9) 式を適用すれば、

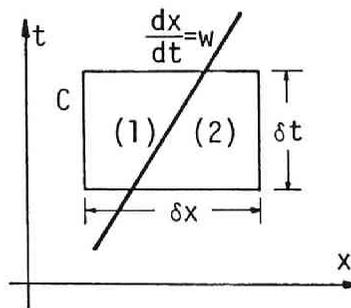


図 1.2 不連続部の伝播

$$(F_2 - F_1)\delta t - (U_2 - U_1)\delta x = \int_S q dx dt + q_s \delta t \quad (1.18)$$

が得られる。ここに、 q_s は流れが不連続であることにより発生する U の単位時間あたりの割合である。また、 $\delta x = w \delta t$ で図中に示されるとおりである。(1.18) 式において $\delta t \rightarrow 0$ とすれば、不連続部

における条件として、

$$-w(U_2 - U_1) + (F_2 - F_1) = q_s \quad (1.19)$$

が導かれる。この関係は、不連続部の前後（上・下流）における水理量の跳躍に対する条件を示すもので、 $q_s = 0$ の場合は、Rankine-Hugoniotの関係と呼ばれる⁵⁾。

運動量解析法による (1.14) 式の諸量を (1.19) 式にあてはめると、この場合不連続部であるために生ずる質量および運動量はないから $q_s = 0$ とでき、したがって、(1.14) 式の第 1 および第 2 の成分に関する (1.19) 式より、それぞれ次式が得られる。

$$-w(A_2 - A_1) + (Q_2 - Q_1) = 0 \quad (1.20)$$

$$-w(Q_2 - Q_1) + g(M_2 - M_1) = 0 \quad (1.21)$$

(1.20) 式より質量フラックス m を、

$$m = -\rho A_2(w - v_2) = -\rho A_1(w - v_1) \quad (1.22)$$

で定義すると、(1.21) 式は、

$$m(w - v_1) - (w - v_2) = \rho g \lambda \cos \theta (h_{c_1} A_1 - h_{c_2} A_2) \quad (1.23)$$

と変形される。ここに、 $\beta \approx 1$ とされている。(1.22) および (1.23) 式は、水理学において段波に適用される関係式⁶⁾に他ならない。

エネルギー解析法からは、(1.17) 式の第 2 の成分に関して (1.19) 式を適用することにより、段波におけるエネルギー消費量が求められる。すなわち、 q_s の対応する成分に、段波によって単位時間に失われるエネルギーとして、 $-\rho E_t$ を考えると、(1.19) 式より、

$$\rho E_t = w(E_{g_2} - E_{g_1}) - (H_{g_2} Q_2 - H_{g_1} Q_1) \quad (1.24)$$

が得られる。(1.21) 式および (1.22) 式を用いれば、(1.24) 式はつぎのように変形される。

$$\rho E_t = \frac{m \cos \theta}{2A_2 A_1} \{ A_2^2 h_{c_2} - A_1 A_2 (2h_2 - h_{c_2}) + A_1 A_2 (2h_1 - h_{c_1}) - A_1^2 h_{c_1} \} \quad (1.25)$$

ただし、 α 、 β 、 λ および χ はすべて 1 に等しいとされている。(1.25) 式は、水理学において段波でのエネルギー損失として求められている関係⁶⁾に一致する。

以上から明らかなように、質量、運動量およびエネルギーに関して、水理学的な意義を有して一次元の保存則系 (1.8) 式を満たすのは、運動量解析法では (1.14) 式、エネルギー解析法では (1.17) 式であるということができる。

しかし、エネルギー解析法に関しては、実際には通常 (1.17) 式は用いられない。エネルギー解析法では、次式で定義される全水頭 H ,

$$H = \frac{H_0}{g} = \frac{\alpha v^2}{2g} + z + \lambda h \cos \theta \quad (1.26)$$

が導入され、(1.3) 式あるいは (1.17) 式の第 2 の成分に関する式は

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = -s_f \quad (1.27)$$

と変形される。ここで、(1.1) および (1.27) 式よりなる系に対して、 \mathbf{U} 、 \mathbf{F} および \mathbf{q} をつぎのように定義する。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q \\ gH/\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q \\ -gs_f/\beta \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

エネルギー解析法の基礎式は、(1.28) 式を用いれば、(1.8) 式の保存則系にまとめられる。もちろん、(1.28) 式によれば、先に述べたようなエネルギーに関する一次元の保存則という水理学的な意義は失なわれているが、形式上保存則が満たされるといえる。エネルギー解析法では、(1.27) 式が慣用されており、また形式も (1.17) 式の第 2 成分よりはるかに簡単であるので、本研究においても、以後 (1.1) および (1.27) 式をエネルギー解析法の基礎式にする。

1.4 保存則系の展開

(1.8) 式の保存則系はつぎのように展開される⁵⁾。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{q}' \quad (1.29)$$

ここに、 $\bar{A} = [a_{ij}] = [\partial F_i / \partial U_j]$ (F_i および U_j は、それぞれ \mathbf{F} および \mathbf{U} の i および j 成分) で定義される行列であり、また $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - (\partial \mathbf{F} / \partial x)_{U: \text{const}}$ である。

運動量解析法の場合、(1.14) 式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial Q} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial Q} = 2\beta v/g \\ \frac{\partial M}{\partial A} = -\frac{\beta v^2}{g} + \lambda' \cos \theta \frac{\partial(h_c A)}{\partial A} \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

である。運動量解析法の適用性から水路を一様と仮定すれば、(1.7) 式より $\partial(h_c A) / \partial A = A(\partial A / \partial h)_{x: \text{const}}$ (ただし、 $B = (\partial A / \partial h)_{x: \text{const}}$ で水面幅) であるから、(1.30) 式の第

4式は $\partial M/\partial A = -\beta v^2/g + \lambda \cos\theta A/B$ と変形される。したがって、運動量解析法では保存則系はつぎのように展開される。

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -\beta v^2 + \lambda g A \cos\theta/B, & 2\beta v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \mathbf{q} \quad (1.31)$$

一方、エネルギー解析法の場合、(1.28)式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial A} = v, \quad \frac{\partial Q}{\partial v} = A, \quad \frac{\partial(gH/\beta)}{\partial v} = \frac{\alpha v}{\beta} \\ \frac{\partial(gH/\beta)}{\partial A} = \frac{g}{\beta} \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial A} \right)_{x: \text{const}} + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{A: \text{const}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.32)$$

である。ここに、 $Z = z + \lambda h \cos\theta$ で定義される基準面からピエゾ水頭までの高さであるが、本研究で取扱う流れでは Z は水位に等しいとしてよい。したがって、 $(\partial Z/\partial A)_{x: \text{const}} = \lambda \cos\theta/B$ であり、また $(\partial Z/\partial x)_{A: \text{const}}$ とは断面積を一定にする水位の x 方向の変化率で、水路の幾何学的条件より求められる。以上より、エネルギー解析法では保存則系はつぎのように展開される。

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} v & A \\ \lambda g \cos\theta/\beta B & \alpha v/\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \begin{bmatrix} q \\ -g|s_f + (\partial Z/\partial x)_{A: \text{const}}/\beta \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

1.5 双曲型保存則系の特性曲線表示⁷⁾

一次元非定常流の基礎式は、いずれの解析法の場合でも後述するように双曲型の偏微分方程式系を構成し、したがって基礎式を特性曲線によって表示すること、すなわちもとの微分方程式系を特性曲線に沿って成立する常微分方程式系に書き改めることが可能である。本節では、まず(1.8)式あるいはその展開形である(1.29)式を用いて特性曲線による表示を一般的に求めることにし、それぞれの解析法についての具体的な変形結果は次節で示すことにする。

\mathbf{U} 、 \mathbf{F} および \mathbf{q} の成分の数は、いずれの解析法でも2個であるので、簡単のためそれらを U_1 、 U_2 などで表わすことにする。さて、特性曲線は種々の方法によって定義される⁹⁾。すなわち、

- (i) この曲線を挟んで積分曲面がある種の不連続を有しうる曲線、
- (ii) この曲線に沿う積分曲面上では無限に多くの積分曲面が接触しあう曲線、
- (iii) もとの方程式をこの曲線に沿った微係数のみからなる方程式に改めうる曲線、

などである。(i)の定義より、特性曲線とは物理的には擾乱などによる不連続の伝播の軌跡と解される。また、(ii)の定義はCauchyの問題に対して解が一意的に定まらないことを意味する。これをさらに詳しく述べれば、特性曲線とは $x-t$ 平面上のある曲線 C 上で、 \mathbf{U} がすべて与えられたとしても、

(1.8) あるいは (1.29) 式によって $\partial U_i / \partial t$ および $\partial U_i / \partial x$ ($i=1, 2$) が一意的に定められず、したがって積分曲面を構成することができない曲線として定義される。また、これから逆に、特性曲線に沿っては U を任意に与えることはできず、 U はこれに沿った微分方程式によって支配されることが導かれる。このことは(iii)の定義の意味するところである。

いま、 $x-t$ 平面上の曲線 $C: \phi(x, t)$ の上で U の値がすべて与えられたとする。このとき、 C 上の隣接する 2 点 $P_1(x, t)$ および $P_2(x+dx, t+dt)$ で U の値の間には、

$$U_{P_2} = U_{P_1} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt \right)_{P_1} + B \quad (1.34)$$

が成立する。ただし、 B は、 C 上の U の値より既知としてよい量を表わしている。(1.34) 式より、

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + B' \quad (1.35)$$

が得られる。もちろん、 dx/dt は C のこう配を表わしている。(1.35) 式を (1.29) 式に代入すれば、

$$\left(\bar{A} - E \frac{dx}{dt} \right) \frac{\partial U}{\partial x} = B'' \quad (1.36)$$

である。ただし、 E は単位行列であり、また B' および B'' は既知量である。ここで、行列 \bar{Q} を

$$\bar{Q} = \bar{A} - E \frac{dx}{dt} \quad (1.37)$$

で定義すると、 $\det \bar{Q} \neq 0$ であれば (1.36) 式より $\partial U / \partial x$ が一意的に定められ、したがって (1.35) 式より $\partial U / \partial t$ も一意的に決定される。一方、 $\det \bar{Q} = 0$ であれば、 $\partial U / \partial x$ 、したがって $\partial U / \partial t$ は一意的に定められない。 $\det \bar{Q} = 0$ を満たす曲線が特性曲線であって、先述の(iii)の定義の意義である。

(1.37) 式より、特性曲線の方向 dx/dt は \bar{A} の固有値に等しいことが分る。 \bar{A} の固有値（この場合、従属変数が 2 個であるので、固有値も 2 個である）が互いに異なる実数であるとき、(1.29) したがって (1.8) 式は双曲型と分類される。ここで取扱われている系を双曲型と仮定すれば、特性曲線の方向は、(1.37) 式より次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = \bar{v} \pm \bar{c} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12} a_{21}} \quad (1.38)$$

ここに、 a_{ij} は \bar{A} の要素である。

dx/dt が (1.38) 式の値をとるとき、 $\det \bar{Q} = 0$ より、 $\mu \bar{Q} = 0$ を満たす $\mu \neq 0$ が存在する。すなわ

ち, (1.37)および(1.38)式より,

$$\mu_1 : \mu_2 = a_{21} : \left(\frac{dx}{dt} - a_{11} \right) \quad (1.39)$$

が得られる。(1.29)式に μ を乗ずると

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial U}{\partial x} \right) = \mu q' \quad (1.40)$$

であるが, $\mu \bar{Q} = 0$ より $\mu \bar{A} = \mu dx/dt$ であるから, (1.40)式はつぎのように変形される。

$$\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right) U = \mu q' \quad (1.41)$$

微分演算子 $(\partial/\partial t + (dx/dt)\partial/\partial x)$ は, 方向が dx/dt で表わされる曲線に沿ってとられる微分を意味するから, (1.41)式は特性曲線に沿った U の各成分の微分方程式の μ による線型結合を表わす。したがって, 先に述べたとおり, 特性曲線に沿って U は任意には与えられず, (1.41)式の微分方程式によって支配される。すなわち, 特性曲線に沿った U および t の微分をそれぞれ dU および dt と表わすとき, (1.41)式より

$$\mu(dU - q'dt) = 0 \quad (1.42)$$

が成立する。また, (1.40)式は明らかに

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - q \right) = 0 \quad (1.43)$$

と変形されるから, (1.8)式を(1.39)式の μ によって線型結合した上記の関係は, (1.41)あるいは(1.42)式と同等であり, 特性曲線に沿って成立する微分方程式を表わすといえる。

1.6 基礎式の特性曲線表示

一次元の開水路非定常流の基礎式を特性曲線による表示に改めることは, 従来より行われており, その方法および結果はStoker¹⁰⁾によって要約されている。これらの方法においては, 取扱いを容易にするため, 水路は一様であるか, あるいは十分幅が広く単位幅での取扱いが可能であると仮定(ある場合には暗黙のうちに仮定)されてきたようであり, また従属変数の1つは(1.38)式で定義される波速 \bar{c} (具体的な表示は, 後述の(1.45)式の c_m あるいは(1.50)式の c_e)に変換されることが多かった。

しかし, 上のような仮定は実用的な面からみれば必ずしもつねに成立するものではなく, また適切とはいえない。また, 波速への変換も実際にはそれほど便利なものではない。本節ではこうした点

を改めるため、前節で導かれた一般的な方法による結果を用いて、基礎式の特性格線による表示を求め、さらに境界条件などについて考察することにする。

(1) 運動量解析法の特性格線表示

(1.31) 式の \tilde{A} より、次式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = \beta v \pm c_m \quad (1.44)$$

ここに、

$$c_m = \sqrt{\beta(\beta-1)v^2 + \frac{\lambda' g A \cos \theta}{B}} \quad (1.45)$$

である。 $\beta \geq 1$ であり、また A および B も正の数であるから、(1.44) 式の dx/dt は互いに異なる実数であり、運動量解析法の系は、双曲型であることが確認される。

特性格線に沿う微分方程式は、(1.31) および (1.39) 式より、 $\mu_1 : \mu_2 = (-\beta v^2 + \lambda' g A \cos \theta / B) : (\beta v \pm c_m) = (-\beta v \pm c_m) : 1$ であるから、(1.43) 式を用いて、次式のように得られる。

$$(-\beta v \pm c_m) \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + g \frac{\partial M}{\partial x} - g A (s_0 - s_f) - v q \right) = 0 \quad (1.46)$$

ここで、運動量解析法の適用性より水路を一様として、(1.42) 式の表示を用いると、

$$(-\beta v \pm c_m) dA + dQ = [g A (s_0 - s_f) + |\pm c_m - (\beta - 1)v| q] dt \quad (1.47)$$

が得られるが、これはさらに $dQ = v dA + A dv$ を用いて、

$$|\pm c_m - (\beta - 1)v| dA + A dv = [g A (s_0 - s_f) + |\pm c_m - (\beta - 1)v| q] dt \quad (1.48)$$

と改められる。

(2) エネルギー解析法の特性格線表示

(1.33) 式の \tilde{A} より、次式が得られる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v \pm c_e \quad (1.49)$$

ここに、

$$c_e = \sqrt{\left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \right)^2 + \frac{\lambda g A \cos \theta}{\beta B}} \quad (1.50)$$

である。(1.49) および (1.50) 式より、エネルギー解析法の系も双曲型であることが確認される。

特性曲線に沿う微分方程式は、(1.33)および(1.39)式より、

$\mu_1 : \mu_2 = \lambda g \cos \theta / \beta B : ((\alpha - \beta)v / 2\beta \pm c_e) = \lambda \cos \theta / B : (\beta / g)((\alpha - \beta)v / 2\beta \pm c_e)$ であるから、(1.43)式を用いて、次式のように得られる。

$$\frac{\lambda \cos \theta}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c_e \right) \left(\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + s_f \right) = 0 \quad (1.51)$$

また、(1.42)式による表示を用いると、

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda \cos \theta}{B} dA + \frac{\beta}{g} \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c_e \right) dv \\ & = \left[\frac{\lambda \cos \theta}{B} q - \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c_e \right) \left(s_f + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{A: \text{const}} \right) \right] dt \end{aligned} \quad (1.52)$$

が得られる。(1.50)式より、 $\lambda \cos \theta / B = [c_e - ((\alpha - \beta)v / 2\beta)^2]$ を用いると、(1.52)式は次式のように変形される。

$$\left(-\frac{\alpha + \beta}{2\beta} v \pm c_e \right) dA + dQ = \left[-\frac{gA}{\beta} \left\{ s_f + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)_{A: \text{const}} \right\} + \left(\pm c_e - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \right) q \right] dt \quad (1.53)$$

さらに、水路を一様と仮定すれば、 $(\partial Z / \partial x)_{A: \text{const}} = -s_0$ であるから、(1.52)式は

$$\left(\pm c_e - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \right) dA + A dv = \left[\frac{gA(s_0 - s_f)}{\beta} + \left(\pm c_e - \frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \right) q \right] dt \quad (1.54)$$

と改められる。

(3) 運動量解析法とエネルギー解析法の比較

α 、 β 、 λ および λ' がともに1に近い量であって、したがって $c_m \approx c_e$ であることを考えて、(1.48)および(1.54)式を比較すれば明らかなように、いずれの解析法の特性格線表示はみかけ上、大差のない結果となっていることが分る。これは、1.1で述べたように、基礎式(1.2)式と(1.3)式とが水路を一様とした場合に、みかけの上で互いに大差のないことからの当然の結果である。

同様のことは、(1.46)式と(1.51)式についてもいえる。たとえば、(1.46)式の左辺第2項について、(1.2)式から(1.10)式の変形の逆をたどり、さらに水路を一様として(1.7)式を用いれば、

$$\begin{aligned} & \left\{ -(\beta - 1)v \pm c_m \right\} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \\ & + A \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \beta v \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda' g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - g(s_0 - s_f) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

が得られる。ここで、(1.45)式を用いて変形すれば

$$\frac{\lambda' \cos \theta}{B} \left\{ 1 - (1 - \beta) \frac{v^2}{gA/B} \right\} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left\{ (\beta - 1)v \pm c_m \right\} \left\{ \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta v^2}{2g} + \lambda' h \cos \theta + z \right) + s_f \right\} = 0 \quad (1.56)$$

が得られる。 α 、 β 、 λ および λ' がともに1に近く、 $c_m \approx c_e$ であることを考えると、(1.56)式は(1.51)式とほとんど変るところはなく、結局(1.46)式と(1.51)式とが互いに大差のないという結果が得られる。

本章では運動量解析法とエネルギー解析法を区別してそれぞれについて記述してきたが、以上述べたことから分るように、両者は水理学的な性格を異にするとはいうものの、水路を一様とし、また流れに不連続部がないとすると、形式上ほとんど相違がないといえる。このことを考え、本研究では以後エネルギー解析法を中心に扱うことにする。

(4) 境界条件

特性曲線に沿って成立する微分方程式(1.51)あるいは(1.52)式は、(1.49)式の伝播速度を有する波動(後述するdynamic wave)によって伝えられる影響を表わしており、特性曲線の水理学的な意義もここにある¹⁾。(1.49)式のdynamic waveの伝播速度が互いに異符号とすれば、つまり流れを常流とすれば、(1.51)式の正号の関係は上流から下流へ流下して伝えられる影響を表わし、負号の関係は逆に下流から上流へ遡上して伝えられる影響を表わしている。また、流れを射流とすれば、dynamic waveの伝播速度はいずれも正であって、(1.51)式の関係は上流から下流へ流下して伝えられる影響だけを表わしている。これらは、ある点における影響が、常流では上、下流のいずれにも伝わり、射流では下流のみに伝わり上流へは伝わらないという流れの水理学的特徴を表現したもので、特性曲線による表示によってこの特徴が数学的に示されたといえることができる。

以上のことは、一次元の非定常流の境界条件の与え方を規定している。すなわち、流れが常流の場合、対象区間の上、下流端に与えられるべき境界条件は、それぞれ1個に限られる。たとえば上流端では、(1.51)式で負号を採った下流から上流に伝わる影響を示す関係と、境界条件とから、上流端での2つの未知量(従属変数 A および v)が求められる。また、下流端では、(1.51)式の正号の関係(上流から下流へ伝わる影響)と境界条件とから2つの未知量が決められる。一方、射流の場合、上流端では下流から伝えられる影響が無いから、未知数の数に等しい2個の境界条件が必要とされ(2つの未知量はいずれも境界条件として与えられる)、また下流端では上流から下流へ伝えられる影響が2個存在し、これにより2個の未知量が決定されるから、境界条件を与えることはできない。

このように、特性曲線による表示の大きい特徴の一つは、境界条件の与え方に、水理学的に明解な解釈が得られることにある。なお、境界条件の具体的な計算法については第4章で詳細に考察をす

める。

1.7 結 語

本章においては、一次元解析法による開水路非定常流の基礎式に関して、運動量解析法およびエネルギー解析法のそれぞれについて一次元の保存則および特性曲線による表示への変換を述べた。得られた成果を要約すれば、つぎのとおりである。

(1) 開水路の一次元非定常流の基礎式は、質量、運動量および力学的エネルギーに関して、一次元の保存則の関係、すなわち x の単位長さに含まれる物理量の時間的变化率は、その物理量のフラックスの x 方向のこう配およびその区間内での物理量の単位時間あたりの発生量と平衡するという関係を、近似的に満たしていることを示した。

(2) 保存則系の不連続部における跳躍条件（Rankine-Hugoniotの関係）を、保存則系に改められた非定常流の基礎式に適用した結果は、従来より段波に対して水理学的に導かれている関係に一致することを示した。

(3) (1)のような意義を有する保存則系として表現された基礎式のうち、質量および運動量に関する式は、それぞれそのまま慣用されている式と一致するが、エネルギーに関する式は一致しない。しかし、この式も少し変形すれば慣用のエネルギー式に帰着され、さらにそれが形式上保存則系となることから、この研究では、エネルギー式としてこの形式的な保存則系を用いることを述べた。

(4) 双曲型の保存則系における特性曲線の意義および特性曲線による表示への変換について一般的に述べ、とくに後の数値計算において重要な役割を果たす特性曲線に沿って成立する微分方程式が、基礎式の線型結合で表現されることを述べた。

(5) 一般的な方法によって導かれた特性曲線による表示を、運動量解析法およびエネルギー解析法の基礎式に適用して、それぞれを特性曲線に沿う微分方程式に変換した。また、変換された基礎式のもつ水理学的な意義について述べ、これから境界条件の取扱い方を明らかにした。

(6) 運動量解析法とエネルギー解析法はその基本原理および適用性において性格を異にするにもかかわらず、水路を一樣とすれば基礎式はみかけ上ほとんど互いに差がなく、またこのことは特性曲線による表示に改めたときにも当然変りないことを示した。

参考文献

- 1) 岩佐義朗：開水路流れの基礎理論，水工学シリーズ，64-01，土木学会水理委員会，1964
- 2) 岩佐義朗：水理学の解析法，石原藤次郎編，水工水理学，丸善，1972
- 3) Ven Te Chow：開水路の水理学，石原藤次郎訳，丸善，1962
- 4) 岩垣雄一：開水路流の理論，水工学の最近の進歩，土木学会編，1953
- 5) Richtmyer, R. D. and K. W. Morton：Difference methods for initial-value problems, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1967

- 6) 岩佐義朗：水理学，朝倉土木工学講座 3，朝倉書店，1967
- 7) 岩佐義朗，井上和也，片山猛：開水路非定常流の数値解析法について，京都大学防災研究所年報，19号B-2，1976
- 8) Courant, R. and D. Hilbert：Methods of mathematical physics, Vol. II，Interscience Pub., 1962
- 9) 犬井鉄郎：応用偏微分方程式論，岩波書店，1951
- 10) Stoker, J. J.: Water waves, Interscience Pub., 1957

第2章 一次元流れに関する従来の理論的研究とその考察

開水路の一次元の非定常流に関しては、従来より数多くの理論的研究が行われており、その数学モデルとモデルの示す基本的特性はすでに明らかにされている^{1), 2)}。この章では、これらの研究のうち、この研究を進める上で基礎となる事柄についてまとめる³⁾とともに、若干の考察を行うことにする。序論で述べたような前提に立てば、基礎式は(1.1)、(1.2)および(1.3)式で表わされるが、この章では理論的な取扱いが中心になるので、それを可能にするため、さらに水路幅が十分に大きく単位幅での取扱いができると仮定し、また径深は水深で近似されるものとしておく。

2.1 dynamic waveとkinematic wave

上のような仮定のもとでは、前章で述べたように運動量解析法とエネルギー解析法とは、たがいにみかけ上大差がないので、この章では次式を基礎式として用いる。

$$\text{連続式: } \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{Saint Venantの式: } \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = s_0 - s_f \quad (2.2)$$

ただし、簡単のため横流入流量はないとしている。抵抗則としてManning公式を用いると、 $s_f = n^2 v^2 / h^{4/3}$ である。

(2.1) および (2.2) 式を、前章で考察をすすめた保存則系の形(1.8)式で表わせば、

$$U = \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} vh \\ gh + (1/2)v^2 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 0 \\ g(s_0 - s_f) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

であり、またこれを展開した(1.29)式の形では

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} v & h \\ g & v \end{bmatrix}, \quad q' = q \quad (2.4)$$

である。 \bar{A} より、(2.1) および (2.2) 式で示される双曲型偏微分方程式は、次式で示される特性曲線を有する。

$$\frac{dx}{dt} = v \pm c, \quad c = \sqrt{gh} \quad (2.5)$$

(2.5) 式で示される伝播速度(より一般的には前章の(1.44)あるいは(1.49)式の伝播速度)を有する波動はdynamic waveと呼ばれる。(2.4) および (2.5) 式より、(1.39)式で定義される μ は、

$$\mu = [g, \pm c] \quad (2.6)$$

であるから、(2.5) 式で示される特性曲線に沿って、(1.42) 式に相当する次式が成立する。

$$gdh \pm cdv = \pm cg(s_0 - s_f)dt \quad (2.7)$$

(2.7) 式は、(2.5) 式の第 2 式を用いて、つぎのように変形される。

$$\pm cdh + hdv = gh(s_0 - s_f)dt \quad (2.8)$$

あるいは、

$$d(v \pm 2c) = g(s_0 - s_f)dt \quad (2.9)$$

である。(2.5) 式より、この場合の dynamic wave の伝播速度は $v+c$ あるいは $v-c$ であり、それぞれの dynamic wave に沿っての $v+2c$ あるいは $v-2c$ の変化が (2.9) 式によって示される。明らかに dynamic wave の伝播速度は (2.4) 式の \bar{A} 、すなわち (2.1) および (2.2) 式の導関数の係数だけから決められ、底こう配項および摩擦項は c に関係しない。さらに c は水深が大きくなれば増大するから、たとえば考えている区間の上流端において水深が時間とともに増大するハイドログラフが与えられた場合、同じ族の特性曲線（この場合なら、(2.5) 式の正号の特性曲線）は $x-t$ 平面上で次第に収束し、最終的に交差することが生じうる。これは dynamic shock といわれ、水理学的には段波の発生に他ならない。しかし、このような変化の急な流れを除いて、底こう配項および摩擦項が考慮される場合、後述するようにこれらの項の影響により dynamic wave は比較的短かい時間で減衰する。したがって、同じ族の特性曲線の収束による段波の発生を一般的に考えるには、dynamic wave の減衰とそれに伴う伝播速度の低下も含めて dynamic wave を追跡しなければならない。その場合の段波の発生条件は 2.3 で述べるように、上流端の水深の時間的変化率がある一定の値以上になったときとされる。一方、洪水流のような変化の緩やかな流れでは通常水深の時間的変化率は上のような限界以下であって、このような流れにおいては、むしろ底こう配項と摩擦項とが釣り合うとして導かれる kinematic wave が重要な位置を占める。

kinematic wave 理論による非定常流の取扱いは第 3 章で詳述するので、本章ではその基本的な部分だけをまとめておく。kinematic wave は、(2.2) 式の左辺が右辺に比べ小さいとして無視され、 $s_0 = s_f$ と近似できる場合に導かれる。すなわち、抵抗則として Manning 公式を用いれば、近似された (2.2) 式より次式が得られる。

$$q = \frac{1}{n} s_0^{1/2} h^{5/3} \quad (2.10)$$

ここに、 $q = vh$ (単位幅流量) である。(2.1) および (2.10) 式より

$$w = \frac{dq}{dh} = \frac{5}{3}v \quad (2.11)$$

とおくとき、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}\right)h = 0, \text{ または } \left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}\right)q = 0 \quad (2.12)$$

が導かれる。(2.12) 式は、 $dx/dt=w$ に沿って h (したがって q) が一定であること、つまり h および q が w の速さで伝播されるという波動を示すことになる (Kleitz-Seddon の法則)。明らかに、この波は連続式 (2.1) 式のみから導かれており、力学的な関係に依らないという意味で kinematic wave と呼ばれる。(2.11) 式は kinematic wave の伝播速度を表わし、この場合の特性曲線 $dx/dt=w$ は $x-t$ 平面上において kinematic wave の軌跡を表わす。(2.11) 式で分るように、kinematic wave の伝播速度は v が大きいほど、したがって h が大きいほど速い。このため、先と同様に水深が時間的に上昇するとき、伝播に伴って kinematic wave は $x-t$ 平面上で収束し、最終的に交差する。これは、dynamic wave の収束による段波とは異なるので、kinematic shock と呼ばれ、この部分では (2.12) 式より h および q が不連続に変化することが導かれる。

以上の kinematic wave 理論は、次章で述べるようにこの理論の第 1 次近似であって、kinematic wave の減衰は示されない。したがってこの理論では、水深が上昇する部分で適用区間の長さがある程度以上になれば、kinematic shock が不可避免的に発生するから、これに対する考慮が必要である。また同時にこの理論が適用されうるような変化の緩やかな流れでは、不連続な水面形という急激な変化は前提として除外されているはずであるから、kinematic wave が収束する場合にこの理論を適用するには、kinematic shock を何らかの連続的な水面に置き換えるための修正が必要とされる。

2.2 dynamic wave 理論と kinematic wave 理論の適用性

dynamic wave 理論と kinematic wave 理論の適用性を分類するパラメータとして、林⁴⁾は定常等流状態に加えられた微小な擾乱について、線型化された (2.1) および (2.2) 式 (後述の (2.27) および (2.28) 式) の各項の大きさを比較して、等流水深を h_0 、加えられた擾乱の波長を L とするとき、 h_0/s_0L という量を導くとともに、それぞれの理論の適用性をつぎのように導いた。

- (i) $h_0/s_0L \ll 1$: kinematic wave 理論が適用される。
- (ii) $h_0/s_0L \gg 1$: (2.2) 式の右辺を無視した dynamic wave 理論が適用される (減衰のない dynamic wave, 移動波理論⁵⁾)。
- (iii) $h_0/s_0L \approx 1$: (2.1) および (2.2) 式のすべての項を考慮した dynamic wave 理論が適用される。

同様の結果は (2.1) および (2.2) 式を無次元化することによっても得られる。すなわち、対象と

する非定常流の時間スケールを T_* 、水深方向の長さのスケールを h_* とし、さらに流速のスケールを $\sqrt{gh_*}$ 、 x 方向の長さのスケールを $x_* = \sqrt{gh_*} T_*$ とし、

$$x = x_* x', \quad t = T_* t', \quad h = h_* h', \quad v = \sqrt{gh_*} v', \quad q = \sqrt{gh_*^3} q' \quad (2.13)$$

などによって、(2.1) および (2.2) 式を無次元化すれば（ここに、プライムのついた量が無次元量である）、

$$(2.1) \text{ 式: } \frac{\partial h'}{\partial t'} + \frac{\partial q'}{\partial x'} = 0 \quad (2.14)$$

$$(2.2) \text{ 式: } \sigma \left\{ \frac{1}{h'} \frac{\partial q'}{\partial t'} + \left(1 - \frac{q'^2}{h'^3} \right) \frac{\partial h'}{\partial x'} + \frac{2q'}{h'^2} \frac{\partial q'}{\partial x'} \right\} = 1 - \frac{1}{F_r^2} \frac{q'^2}{h'^{10/3}} \quad (2.15)$$

である。ここに、

$$\sigma = \frac{h_*}{s_0 x_*} = \frac{v_*}{g s_0} \frac{1}{T_* F_r} \quad (2.16)$$

$$F_r = \frac{s_0 h_*^{1/3}}{n^2 g} = \frac{v_*^2}{g h_*}, \quad v_* = \frac{1}{n} s_0^{1/2} h_*^{2/3} \quad (2.17)$$

である。

kinematic wave 理論への近似が可能なのは、(2.15) 式の左辺が十分小さい場合であって、これより $\sigma \ll 1$ の条件が得られる。明らかにパラメータ σ は林の導いた $h_0/s_0 L$ と同じ性格のパラメータと解することができるから、 $\sigma \ll 1$ という kinematic wave の適用条件は林の結果と同じである。このように、基礎式の無次元化によっても適用条件が明らかにされることが分る。

(2.16) 式における $v_*/g s_0$ は、2.3で述べるように dynamic wave の減衰に関する時間スケールである。kinematic wave 理論が適用される $\sigma \ll 1$ の条件は、(2.16) 式より $v_*/g s_0 \ll T_*$ と改められるから、これより kinematic wave 理論が適用されるのは、対象とする流れの時間スケールが dynamic wave の減衰の時間スケールに比べて十分大きいときであると解釈することができる。Woolhiser および Liggett⁶⁾ は dynamic wave の波先での減衰より kinematic wave 理論の適用条件として $x_* s_0 / h_* F_r^2 > 10$ を導いているが、この条件も上述のことと同じ内容を持つと理解される。

2.3 段波の発生条件および dynamic wave の減衰の時間スケール

さきに、段波は dynamic wave の軌跡を表わす特性曲線 (2.5) 式の同じ族 ((2.5) 式で正号および負号の特性曲線がそれぞれ一つの族となる) の収束・交差によって生ずることを述べた。しかし、

本節ではこのような同族の特性曲線の収束という機構をそのまま追跡するのではなく、流れに加えられた擾乱の伝播にともなう変化より段波の発生条件を求めることにする³⁾。いま水深 h_0 、流速 v_0 の定常等流状態 ($v_0 = (1/n)s_0^{1/2}h_0^{2/3}$) に、水面こう配が不連続であるような擾乱が加えられたとする (図2.1)。擾乱は dynamic wave によって伝播される (これが dynamic wave の水理学的な意義である) が、そのうちの $dx/dt = v_0 + \sqrt{gh_0}$ に沿っての擾乱の変化を求める。すなわち、まず、 $\tau = t - x/(v_0 + \sqrt{gh_0})$ として、dynamic wave の波先の近傍で h および v をつぎのように展開する。

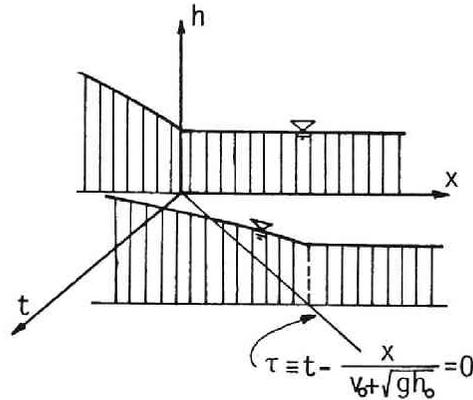


図2.1 dynamic wave の波先の擾乱

$$\begin{aligned}
 h &= h_0 + \tau h_1(t) + \tau^2 h_2(t) + \dots \\
 v &= v_0 + \tau v_1(t) + \tau^2 v_2(t) + \dots \\
 h &= h_0, \quad v = v_0
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} ; \tau \geq 0$$

$$\quad ; \tau < 0$$
(2.18)

これより波先での擾乱の大きさ、つまり水深の上昇率および水面こう配は

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\tau=+0} = h_1(t), \\ \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\tau=+0} = -\frac{h_1(t)}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

と表わされる。さて、(2.1) および (2.2) 式の独立変数を t および τ に変換したのち、(2.18) 式を代入すれば、 τ の 0 次の項より、 $v_1 = \sqrt{g/h_0} h_1$ が得られ、この結果と τ の 1 次の項の式とから v_1 を消去すれば、 h_1 に関する次式が得られる。

$$\frac{dh_1}{d\tau} = \frac{3}{2h_0(1 + F_r)} h_1^2 - \lambda \left(1 - \frac{2}{3} F_r\right) h_1 \quad (2.20)$$

ここに、 $F_r = v_0/\sqrt{gh_0}$ であり、また

$$\lambda = \frac{g s_0}{v_0} \quad (2.21)$$

である。ここで、

$$b = \lambda(1 - \frac{2}{3}F_r), \quad K = \frac{2}{3}\lambda h_0(1 - \frac{2}{3}F_r)(1 + F_r) = \frac{2}{3}bh_0(1 + F_r) \quad (2.22)$$

とおけば、(2.20) 式は

$$\frac{dh_1}{dt} = bh_1(h_1 - K) \quad (2.23)$$

と変形されるから、これを $h_1|_{t=0} = h_1(0)$ の条件のもとで解くと次式が得られる。

$$h_1 = \frac{K}{1 - (1 - K/h_1(0))e^{bt}} \quad (2.24)$$

(2.24) 式より、 h_1 の発達あるいは減衰はつぎのようにまとめられる (表2.1)。

	$h_1(0) > 0$		$h_1(0) < 0$	
	$h_1(0) > K$	$h_1(0) < K$	$h_1(0) > K$	$h_1(0) < K$
$b > 0$	(iii)	(i)	/	
$b < 0$	/			

表2.1 (2.24)式の種類 (K と b とは同符号)

- (i) (2.24) 式の分母が $t > 0$ で 0 になることなく発散する $0 < h_1(0) < K$ または $h_1(0) < 0 < K$ の場合：時間の増加とともに $h_1(0)$ は 0 に漸近する。すなわち擾乱は減衰する。
- (ii) (2.24) 式の分母が $t > 0$ で 0 になることなく一定値 1 に近づく $h_1(0) < 0$ で、かつ $b < 0$ の場合：時間の増加とともに、 h_1 は一定値 K に漸近する。すなわち一定の水面こう配の不連続が変化せずに流下する。
- (iii) (2.24) 式の分母が $t > 0$ で 0 になる $h_1(0) > 0$ で、かつ $h_1(0) > K$ の場合：時間の増加とともに h_1 は発散する。すなわち擾乱は発達し、水面こう配は無限大に近づき、段波の発生につながる。

(iii) の場合は、 $h_1(0) > 0$ で、かつ $b < 0$ あるいは $h_1(0) > K (> 0)$ の 2 つの条件に分けられる (b と K は同符号である)。このうち、 $h_1(0) > K$ 、すなわち次式、

$$h_1(0) \equiv \frac{dh}{dt} \Big|_{x=0} > \frac{2}{3}\lambda h_0(1 - \frac{2}{3}F_r)(1 + F_r) \quad (2.25)$$

が一般に段波の発生条件³¹⁾と呼ばれる。また、 $b < 0$ は $F_r < 3/2$ と同値であり、これは後に述べるように流れが不安定になる条件である。以上より、擾乱が発達する(iii)の場合の条件は、 $F_r < 3/2$ の

ときの (2.25) 式, および $F_r > 3/2$ で $h_1(0) > 0$ という二つの条件にまとめられる。これらの条件は, (2.5) 式の特性曲線に沿って (2.9) 式を底こう配項および摩擦項を考慮して積分し, 同族の特性曲線が交差するとして求められる条件⁷⁾とも一致している。つまり, (iii) の場合のように段波の発生につながるのは, はじめに述べたように同族の特性曲線が収束し交差する場合であることが証明されたといえる。

(i) の場合, $h_1 = Kh_1(0)e^{-bt}/(K - h_1(0)(1 - e^{-bt}))$ と改められるから, h_1 は指数関数的に減少することが知られる。すなわち, 擾乱は減衰し, またその時間スケールは $O(1/b) = O(1/\lambda)$ であることが分る。つまり, dynamic wave が減衰する場合の時間スケールは,

$$1/\lambda = v_0/gS_0 \quad (2.26)$$

で評価されるといえる。このことは, 後の数値計算法において, 摩擦項に起因する不安定として現われる (後述の 4.4(3))。

2.4 線型系における理論解³⁾

dynamic wave と kinematic wave が共存する流れの特徴を考えるのに, (2.1) および (2.2) 式をそのまま用いたのでは, 系が非線型であるため, 数学的な取扱いができない。このような場合, 系を線型化してその基本的な特性を解析することがしばしば行われる。本節では線型系において, dynamic wave と kinematic wave が共存する流れの特徴を見ることにする。まず, 前節と同様に, 水深 h_0 , 流速 v_0 の定常等流状態を考え, これに微小な擾乱が加えられたとして, 水深および流速をそれぞれ $h = h_0 + \eta$ および $v = v_0 + u$ (ただし η および u は微小な変動量) で表わされるとする。これらを (2.1) および (2.2) 式に代入し, 高次の項を無視すれば次式が得られる。

$$(2.1) \text{ 式: } \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.27)$$

$$(2.2) \text{ 式: } \frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \lambda \left(2u - \frac{4}{3} \frac{v_0}{h_0} \eta \right) = 0 \quad (2.28)$$

ここに, λ は (2.21) 式で与えられる。(2.27) および (2.28) 式より u を消去すれば,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} - (gh_0 - v_0^2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2\lambda \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{5}{3} v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.29)$$

が得られる。上式において, 左辺の初めの 3 項が移動波を表わし, 第 4 項が kinematic wave を表わすことは明らかである。

さて, $F_r = v_0/\sqrt{gh_0} < 1$ として, つぎの初期および境界条件のもとでの (2.29) 式の解を考える。

$$\left. \begin{aligned} \text{初期条件: } t=0 \text{ で } \eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \\ \text{境界条件: } x=0 \text{ で } \eta = f(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

ただし、 $\int_0^\infty f(t)dt$ は存在するとしておく。 $x > 0$ で解を求めることにすれば、(2.30) 式の条件は定常等流状態の流れの上流端に、等流状態からの水深の変化が $f(t)$ で表わされる擾乱が与えられた場合に相当する。

つぎに、この条件のもとでの (2.29) 式の解を擾乱の波先および擾乱の主要部について求めよう。

(2.29) 式の η の Laplace 変換を

$$\bar{\eta}(x, s) = L(\eta) = \int_0^\infty \eta(x, t) e^{-st} dt \quad (2.31)$$

とする。(2.30) 式の初期条件のもとで (2.29) 式を Laplace 変換すれば次式が得られる。

$$(gh_0 - v_0^2) \frac{d^2 \bar{\eta}}{dx^2} - 2\left(s + \frac{5}{3}\lambda\right) v_0 \frac{d\bar{\eta}}{dx} - (s^2 + 2\lambda s) \bar{\eta} = 0 \quad (2.32)$$

ここで、 $\bar{\eta} = e^{rx/\sqrt{gh_0}}$ と置けば、 r は次式より求められる。

$$(1 - F_r^2) r^2 - 2\left(s + \frac{5}{3}\lambda\right) F_r r - (s^2 + 2\lambda s) = 0 \quad (2.33)$$

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} r_1 \\ r_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\left(s + \frac{5}{3}\lambda\right) F_r \pm \sqrt{s^2 + 2\lambda\left(1 + \frac{2}{3}F_r^2\right)s + \frac{25}{9}\lambda^2 F_r^2}}{1 - F_r^2} \quad (2.34)$$

である。ただし、 r_1 は (2.34) 式の正号をとった根であり、 r_2 は負号をとった根である。また、(2.30) 式のような条件より、流れは常流、つまり $F_r < 1$ としている。いま特別な場合として、 s の実数部 $\text{Re}(s)$ が十分大きいときを考える。このとき、 r_1 および r_2 はつぎのように近似される。

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{s}{1 - F_r} + \frac{1 + (2/3)F_r}{1 - F_r} \lambda + O\left(\frac{1}{s}\right), \\ r_2 &= -\frac{s}{1 + F_r} - \frac{1 - (2/3)F_r}{1 + F_r} \lambda + O\left(\frac{1}{s}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

(2.35) 式の r_1 および r_2 に対する解 η_1 および η_2 は逆変換を行うことによりつぎのように求められる。

$$r_1 : \eta_1 = e^{\frac{1+(2/3)F_r}{1-F_r} \frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}}} \left[\delta \left(t + \frac{x}{\sqrt{gh_0} - v_0} \right) + O \left\{ U \left(t + \frac{x}{\sqrt{gh_0} - v_0} \right) \right\} \right] \quad (2.36)$$

$$r_2 : \eta_2 = e^{-\frac{1-(2/3)F_r}{1+F_r} \frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}}} \left[\delta \left(t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right) + O \left\{ U \left(t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right) \right\} \right] \quad (2.37)$$

ここに、 δ はデルタ関数、 U はステップ関数である。これらの結果より明らかなように、 η_1 は上流側へ伝わる後退波、 η_2 は下流側へ伝わる進行波をそれぞれ表わしている。いまの場合、上流端の擾乱の下流への伝播を考えているから、 r_2 で表わされる進行波だけを考えることにする。したがって、 $\bar{\eta}|_{x=0} = \bar{f}(s) = L(f(t))$ とするとき、(2.32) 式の解はつぎのように求められる。

$$\bar{\eta} = \bar{f}(s) e^{r_2 x / \sqrt{gh_0}} \quad (2.38)$$

(2.38) 式を逆変換すれば解が求められるが、その結果は複雑で見通しが得にくいので、先に述べたように特殊な場合として擾乱の波先と擾乱の主要部について解を求めることにする。

(1) 擾乱の波先の挙動

$\text{Re}(s)$ が十分に大きいときに相当し、その近似解は (2.38) 式に (2.37) 式を与え、その後逆変換してつぎのように求められる。

$$\eta = e^{-i(1-\frac{2}{3}F_r)\frac{\lambda x}{v_0 + \sqrt{gh_0}}} f \left(t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right) \left\{ 1 + O \left(t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right) \right\} \quad (2.39)$$

(2.39) 式より明らかなように、この場合擾乱の波先は dynamic wave の伝播速度 $v_0 + \sqrt{gh_0}$ で傳播することが知られる。また、この波先では $x = (v_0 + \sqrt{gh_0})t$ であって、このとき (2.39) 式より $\eta \propto e^{-i(1-\frac{2}{3}F_r)\lambda t} = e^{-bt}$ 、 $\partial\eta/\partial t \propto e^{-bt}$ が得られる。先に示した (2.24) 式においてもこのときには $h_1 \propto e^{-bt}$ であるから、結局両者は擾乱の波先における挙動として同じ結果を与えることが分る。

(2.39) 式は $F_r < 1$ の仮定のもとに導かれているが、結果からみて擾乱の波先だけに限れば、(2.39) 式に $F_r < 1$ の仮定は必要ではない。つまり、 $t = x/(v_0 + \sqrt{gh_0})$ の近傍に限れば、(2.39) 式はつねに成立すると考えてよい。したがって、(2.39) 式より再び、 $F_r < 3/2$ のときには擾乱は減衰し、その時間スケールは $O(1/b) = 1/\lambda$ であることが導かれるとともに、 $F_r > 3/2$ のときには水深は増大し擾乱は発達して段波の発生につながる事が予想される。この擾乱の発達は、前節の $b < 0$ かつ $h_1(0) > 0$ の条件に相当すると考えられる。しかし、(2.39) 式は線型系における解であるから、この場合には個々の dynamic wave の伝播速度は $v \pm \sqrt{gh}$ ではなく、 $v_0 \pm \sqrt{gh_0}$ で近似されていて一定である。つまり、線型系においては、同族の特性曲線の収束・交差という機構による段波の発生は初めから除外されている。前節では $F_r > 3/2$ のときも同族の特性曲線が交差することを述べたが、この節の結果より考えれば、 $F_r > 3/2$ のときには、たとえ同族の特性曲線の交差がなくても

擾乱は発達するという結果が得られる。これより、前節で擾乱が発達するとして得られた (2.25) 式の条件と、 $b < 0$ ($F_r > 3/2$) かつ $h_1(0) > 0$ という条件とは、異なる性質を有すると考えられる。後者の条件は、2.6で述べるように、すべての波数の擾乱に対して流れが不安定になる条件として導かれる。

(2) 擾乱の主要部の解

(2.38) 式より、 η は一般につきの逆変換によって与えられる。

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \bar{\eta}(s, x) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \bar{f}(s) e^{hm r_2 + s} ds \quad (2.40)$$

ここに、 i : 虚数単位、 l : s 平面において逆変換にさいしてとられる直線の実軸上の位置、 r_2 : (2.34) 式の第 2 式で与えられる (2.33) 式の根であり、また m はつぎのようである。

$$m = \frac{x}{t\sqrt{gh_0}} \quad (2.41)$$

いま、 $F_r < 1$ として $t \gg 1/\lambda$ のときの (2.40) 式の積分を鞍部点法によって行う。(2.40) 式の積分において、 $t \gg 1/\lambda$ のとき積分値に最も寄与するのは、指数関数の指数の実部 $\text{Re}(m r_2 + s)$ が極大になる近傍での積分である。すなわち、積分の経路として $\text{Re}(m r_2 + s)$ の極大ができるだけ急峻になるような経路 (とうげ道) を選び、極大点の近傍だけで (2.40) 式の積分を評価すれば近似値が得られる。 $\text{Re}(m r_2 + s)$ が極大になる点は、 $\text{Re}(m r_2 + s)$ の鞍部点であり、その位置は、

$$\frac{d}{ds} |m r_2(s) + s| = m r_2'(s) + 1 = 0 \quad (2.42)$$

を s について解いて求められる。ここに、 $r_2'(s) = dr_2(s)/ds$ である。また、上述のような経路は、鞍部点の位置を $s_s(m)$ とするとき、 $\text{Im}(m r_2(s) + s) = \text{Im}(m r_2(s) + s)|_{s=s_s}$ で与えられる。さらに、このような経路をとったとき、(2.40) 式はつぎのように近似される。

$$\eta \doteq \frac{\bar{f}(s_s)}{\sqrt{2\pi t |m r_2'(s) + 1|_{s=s_s}}} e^{hm r_2(s) + s|_{s=s_s}} \quad (2.43)$$

ただし、 $| \prime |$ は s に関する二階の微分を表わす。ここで、擾乱の主要部として、 η の極大値をとることにすれば、それは (2.43) 式の指数が極大になるときに現われる。つまり、擾乱の主要部は、

$$\frac{d}{dm} |m r_2(s_s(m)) + s_s(m)| = 0 \quad (2.44)$$

を満たす m によって表わされることがえられる。(2.44) 式は (2.42) 式を考慮すれば、 $r_2(s_s) = 0$ とできるから、結局 η が極大になるのは鞍部点 s_s が $r_2(s)$ の零点にあるときである。(3.34) 式より

$r_2(s)$ の零点は $s=0$ であるから、このときには $\max |mr_2(s) + s| = 0$ であり、さらに、

$$m = -\frac{1}{r_2'(s)} = \frac{5}{3}F_r, \quad |mr_2(s) + s|'_{s=s_s=0} = \frac{9}{25} \frac{1 - (4/9)F_r^2}{\lambda F_r^2}, \quad (2.45)$$

$$\bar{f}(s)|_{s=s_s=0} = \int_0^\infty f(t) dt$$

である。図2.2は、一例として $F_r=0.5$ の場合に対して (2.34) 式の第2式を用いて、(2.42) 式を s について解いて求められる鞍部点の位置 $s_s(m)/\lambda^*$ およびそのときの (2.43) 式の指数部 $|mr_2(s_s) + s_s|/\lambda$ を示したものである。この図からも、 $m=(5/3)F_r$ のとき、 $mr_2(s_s) + s_s$ は極大になりその値は0であることが確かめられる。

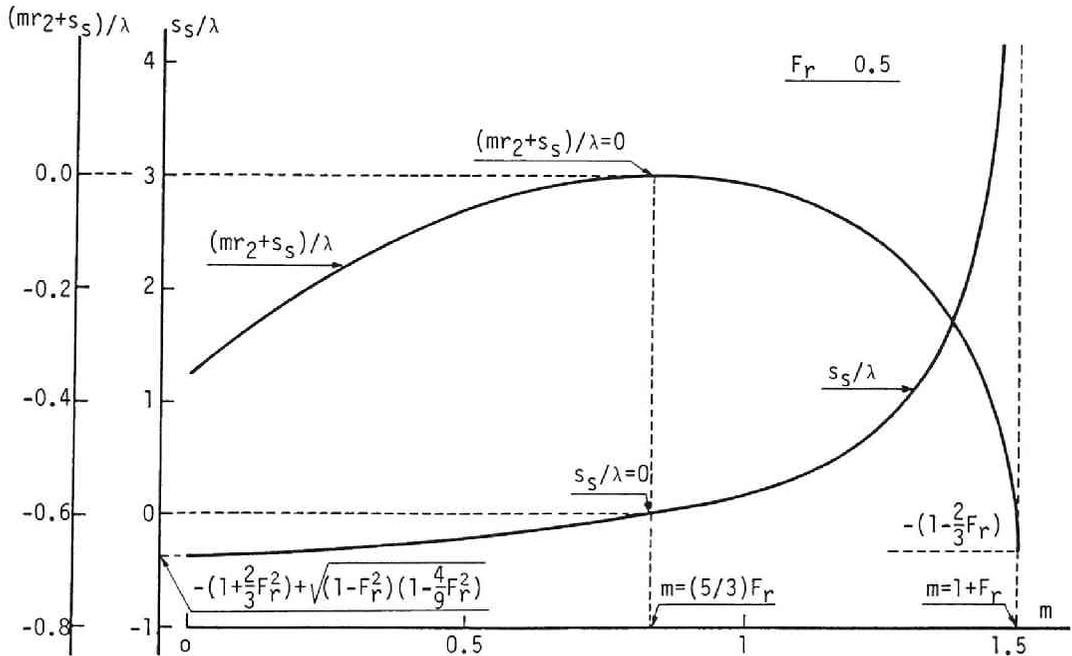


図2.2 鞍部点法による擾乱の主要部の計算 ($F_r = 0.5$)

(2.45) 式の第1式より、 η が極大になるのは、

$$x = \frac{5}{3} v_0 t \quad (2.46)$$

* $F_r < 1$ の場合、 $\text{Im}(s_s(m))=0$ である。また、 λ で除するのは無次元化するためである。

のときであり、またこのとき (2.45) 式の第 2 および第 3 式を用いてその極大値は次式で表わされる
ことが導かれる。

$$\eta_{\max} \doteq \left(\frac{\lambda}{2\pi t}\right)^{1/2} \frac{5F_r}{3(1 - (4/9)F_r^2)^{1/2}} \int_0^\infty f(t) dt \quad (2.47)$$

以上が、擾乱の主要部に関して鞍部点法によって求められる漸近解である。この結果より、 $t \gg 1/\lambda$ のとき η の極大値で示される擾乱の主要部は、(2.46) 式で示される速さ、つまり kinematic wave の伝播速度で流下することが分る。

この結果と 2.4(1) の結果とから、dynamic wave は擾乱の波先を伝えるのに対し、kinematic wave は擾乱の主要部を伝えるとまとめることができ、dynamic wave と kinematic wave が共存する流れにおいて、それぞれの水理学的な役割が明らかにされたといえる。

(2.46) および (2.47) 式を導くにあたって仮定された $t \gg 1/\lambda$ の条件は、2.2 の結果、すなわち kinematic wave 理論が適用されるのは現象の時間スケールが dynamic wave の減衰の時間スケール ($1/\lambda$) より十分に大きいときであるという結果を裏づけるものである。また、(2.47) 式において極大値が伝播に伴って $1/\sqrt{t}$ に比例して減少することは、拡散方程式の理論解と相似な結果であって、(2.29) 式の左辺のはじめの 3 項 ($\propto \partial^2 h / \partial x^2$ etc.) によって水深が「拡散」され平滑化された結果とみることができる。

上流端で与えられる水深の変化が、(2.30) 式とは異なり、ある水深からそれより大きい水深に漸増するような単斜上昇波である場合、 $\eta_t = \partial \eta / \partial t$ を新たな従属変数とすれば (2.29) 式および (2.30) 式の条件がそのまま適用されるから、これまでの結果よりこの流れでは η_t の極大値、つまり水面こう配が極大になる点 (水面形の変曲点) が kinematic wave の伝播速度で流下し、またその極大値が $1/\sqrt{t}$ に比例して減少することが導かれる。

2.5 kinematic wave の非線型性の効果—単斜上昇波³⁾—

kinematic wave の非線型性の効果、つまり個々の kinematic wave の伝播速度の違いによって kinematic wave の軌跡が $x-t$ 平面上で収束あるいは発散することの影響は、2.4 においては系が線型化されていたため全く考えられていない (2.4 では kinematic wave の伝播速度はすべて $(5/3)v_0$ で、一定であった)。非線型性の効果、とくに kinematic wave の収束は、2.1 で少し触れ、3.1 で詳しく述べるように水面形の急峻化、つまり水面こう配を増大させるという影響を与え、その極端な場合が kinematic wave の交差による kinematic shock である。2.4 で述べた単斜上昇波の場合、kinematic wave は明らかに収束するから、上記の影響により水面こう配は次第に急になることが考えられる。しかし一方、2.4 で述べたように、(2.29) 式の左辺のはじめの 3 項で表わされる「拡散」の効果は、水面こう配を緩やかにし水面形を平滑化するように作用するから、その結果単斜上昇波においては上

の「急峻化」と「平滑化」の2つの効果が平衡して、水面形が一定の形状を保持したまま流下するという状態が最終的に形成されると予想される（定常な単斜上昇波³¹，図2.3）。

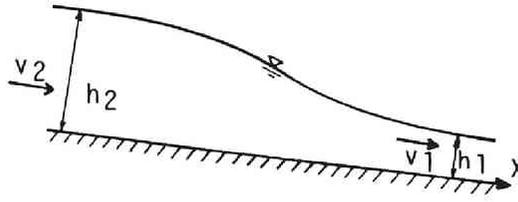


図2.3 定常な単斜上昇波

いま，この定常な単斜上昇波の伝播速度を U とし，この速度で流下する並進座標系 ($X=x-Ut$) において定常であるとして (2.1) 式の連続式を書き改めると，

$$\frac{d}{dX} h(v-U)=0 \quad \text{すなわち} \quad h(v-U)=q_p \quad (\text{一定}) \quad (2.48)$$

が導かれる。図2.3のように単斜上昇波から十分離れた上流側および下流側では，水深がそれぞれ h_2 および h_1 ($h_2 > h_1$) の等流であるとすれば， $v_i=(1/n)s_0^{1/2}h_i^{2/3}$ ($i=1,2$) であるから，これより (2.48) 式の q_p および U がつぎのように求められる。

$$q_p = \frac{1}{n} s_0^{1/2} h_1 h_2 \frac{h_2^{2/3} - h_1^{2/3}}{h_2 - h_1} = h_1 h_2 \frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1} \quad (2.49)$$

$$U = \frac{1}{n} s_0^{1/2} \frac{h_2^{5/3} - h_1^{5/3}}{h_2 - h_1} = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (2.50)$$

ここに， $q_i=v_i h_i$ ($i=1,2$) である。(2.49) および (2.50) 式の q_p および U を用いれば，(2.2) 式は同じ並進座標系において，

$$\frac{dh}{dX} = \frac{s_0 - n^2(U - q_p/h)^2/h^{4/3}}{1 - q_p^2/gh^3} \quad (2.51)$$

と改められる。

伝播速度を与える (2.50) 式は，図2.4に示されるように $h-q$ 曲線（この場合 (2.10) 式）の割線のこう配を表わしており，さらに $h_2 \rightarrow h_1$ のときには (2.50) 式は (2.11) 式に帰着する。すなわち，(2.50) 式は拡張された意味で kinematic

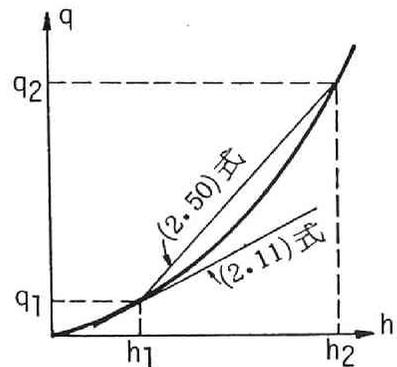


図2.4 kinematic wave の伝播速度

wave の伝播速度を表わすといえる。また、 $(h_2 - h_1)/h_1 \ll 1$ のときには、

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} v_1 + \frac{5}{3} v_2 \right) + O(v_2 - v_1)^2 \quad (2.52)$$

と近似され、これはさらに $U \approx (5/3)v_1$ とできる。この結果は前節で述べた単斜上昇波の線型解において水面形の変曲点が kinematic wave の伝播速度で流下することと一致するものである。

(2.51) 式において、 $h_c = \sqrt[3]{q_p^2/g}$ とするとき、 h_c と h_1 および h_2 の大小関係により、定常な単斜上昇波の水面形はつぎのように分類される。

(i) $h_c < h_1$ のとき：(2.51) 式から $h_1 < h < h_2$ のとき $dh/dX < 0$ であり、さらに $h \rightarrow h_1$ または h_2 のとき $dh/dX \rightarrow 0$ である。したがって、(2.51) 式で示される水面形は図 2.3 のように滑らかな形となる（詳細は数値計算によらなければならない）。この単斜上昇波は水深 h_1 および h_2 の 2 つの等流を分離するとともに滑らかに接続する水面形である。また水深が h_2 から h_1 に変化する遷移区間の長さは $O(h_1/s_0)$ で評価される。kinematic wave の考え方に従えば kinematic shock では水深は不連続に変化することになるが、実際にはこの部分では水面こう配の変化が大きいことに伴う拡散の効果が強く現われると考えられ、kinematic wave による解析が可能であるための前提の (2.10) 式がこの部分では成立せず、(2.2) 式が適用されなければならないであろう。その結果、水面形の急峻化の効果と平滑化の効果が平衡した単斜上昇波（これは、(2.2) 式を並進座標系で表わした (2.51) 式によって示される）が kinematic shock において生ずるであろう。つまり 4.1 で述べるように、単斜上昇波は kinematic shock という不連続な水面形を滑らかな水面形に置き換えるときに適用されるものとして考えることができよう。

(ii) $h_c = h_1$ のとき：このときの単斜上昇波の前面（水深が h_1 の側）の Froude 数を F_i と定義する。 F_i は、 $v_1 = (1/n)s_0^{1/2}h_1^{2/3}$ 、 $h_c^3 = q_p^2/g$ および (2.49) 式より

$$F_i = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} \Big|_{h_1=h_c} = \frac{h_1^{2/3}(h_2 - h_1)}{h_2(h_2^{2/3} - h_1^{2/3})} = \frac{(h_1/h_2)^{2/3}(1 - h_1/h_2)}{1 - (h_1/h_2)^{2/3}} \quad (2.53)$$

と求められる。定義より明らかに $h_c = h_1$ のとき、水深 h_1 の等流の Froude 数 $F_{r1} = v_1/\sqrt{gh_1} = F_i$ である。 F_i は単斜上昇波を構成する 2 つの等流の水深 h_1 および h_2 から決められる量であり、図 2.5 に示されるように $0 < h_1/h_2 < 1$ の範囲で $F_i < 3/2$ であり、 $h_1 \rightarrow h_2$ のとき $F_i \rightarrow 3/2$ である。

$h_c = h_1$ のときの単斜上昇波の伝播速度 U_i および水深が h_1 に等しい波先での水面こう配は、それぞれつぎのように求められる。

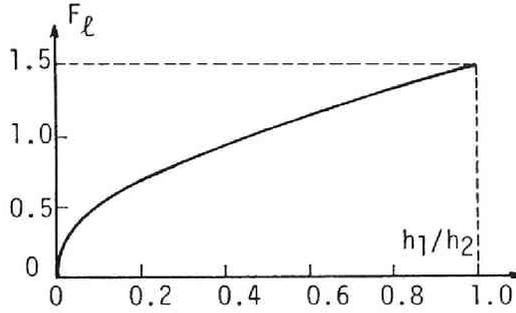


図2.5 $h_c = h_1$ のときの前面の Froude 数 F_l

$$U_i = U|_{h_1=h_c} = v_1 + \sqrt{gh_1} \quad (2.54)$$

$$\left. \frac{dh}{dX} \right|_{\text{wave front}-0} = -\frac{2}{3} s_0 \left(\frac{1}{F_{r1}} - \frac{2}{3} \right), \quad \left. \frac{dh}{dX} \right|_{\text{wave front}+0} = 0 \quad (2.55)$$

ここに、wave front+0とは波先の下流側、wave front-0とは上流側をそれぞれ意味する。さらに、波先における水深の上昇率はつぎのようである。

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{\text{wave front}} = \frac{2}{3} \lambda h_1 \left(1 - \frac{2}{3} F_{r1} \right) (1 + F_{r1}) \equiv K \quad (2.56)$$

ここに、 K は(2.22)式の第2式(h_0 は h_1 と改められている)である。以上の関係より、単斜上昇波において $h_1 = h_c$ のとき、すなわち $F_{r1} = F_l$ のとき、

①kinematic shockが置き換えられるべき単斜上昇波はdynamic waveの伝播速度で流下する、つまりkinematic waveとdynamic waveが同一の速度で伝播する、

②波先での水深のこう配は(2.55)式のように不連続になるから、図2.6のような水面形になる、

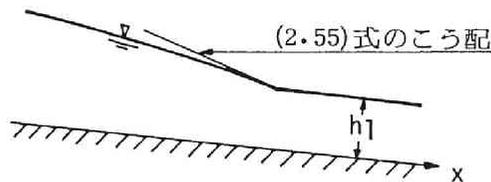


図2.6 $h_c = h_1$ のときの単斜上昇波

③波先での水深の上昇率は、2.3で述べたdynamic waveの収束による段波の発生限界に等しい、とまとめられる。

(iii) $h_2 > h_c > h_1$ のとき ($F_{r1} > F_l$): このとき、(2.51)式を積分すれば図2.7(a)のような曲線が得られる。明らかにこの曲線は水面形として実現されるものではなく、実際には図2.7(b)のような段波で置き換えられなければならない。ここに、 h_* は段波の上流側の水深であり、(1.20)および

(1.21) 式をこの流れに適用して得られる周知のつぎの関係より求められる。

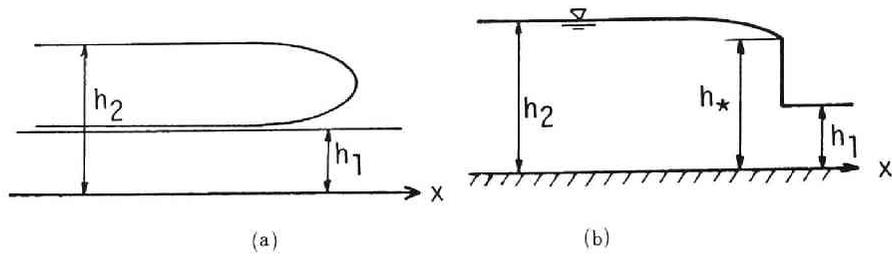


図2.7 $h_c > h_1$ のときの単斜上昇波

$$q_p^2 = \frac{1}{2} g h_* h_1 (h_* + h_1) \text{ あるいは } \frac{h_*}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8(h_c/h_1)^3} - 1}{2} \quad (2.57)$$

ここに、 $h_2 > h_* > h_c > h_1$ である。先述のように、kinematic shock を単斜上昇波で置き換えるとき、 $h_c > h_1$ であればこの単斜上昇波の中に上記のような段波 (dynamic shock) が含まれることになる。

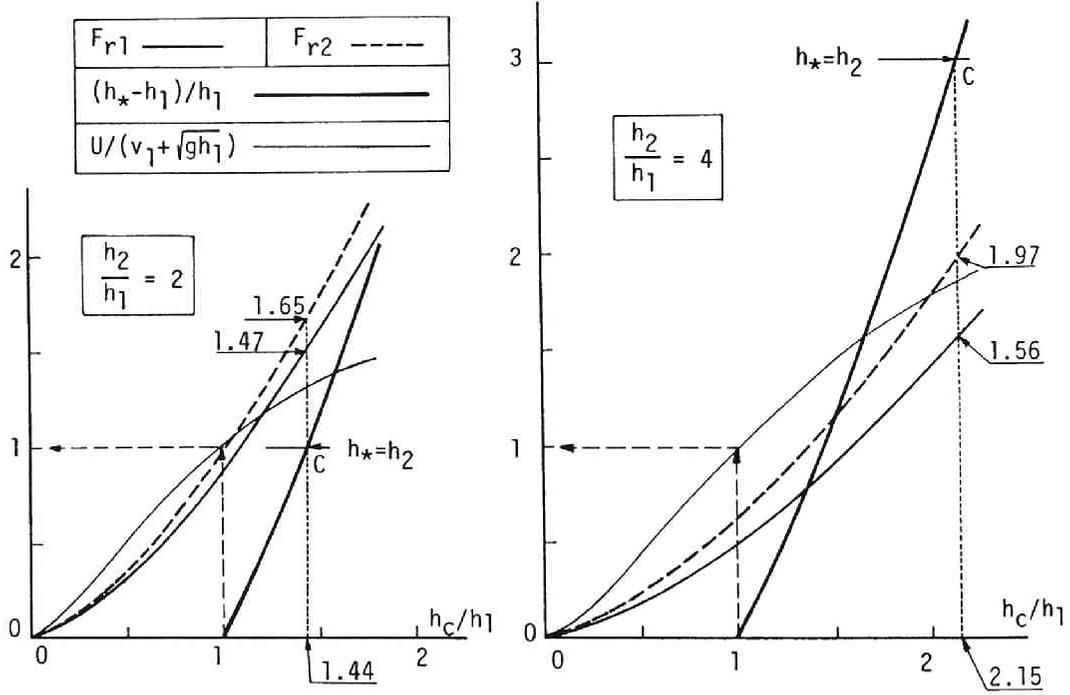


図2.8 h_c/h_1 と F_{r1} , F_{r2} , $(h_* - h_1)/h_1$ および $U/(v_1 + \sqrt{g h_1})$ の関係

図2.8は、 h_2/h_1 を与えて、 h_c/h_1 の関数として上流側と下流側の等流の Froude 数 F_{r2} と F_{r1} 、(2.57) 式を変形して得られる $(h_* - h_1)/h_1$ および (2.50) 式で示される拡張された kinematic wave の伝播速度と波先での dynamic wave の伝播速度との比を示したものである。この図において、 h_* の

変化をみると、 h_c の増加すなわち Froude 数の増加に伴い h_* も大きくなるが、 h_* が h_2 に等しくなる（図中の点 C で示される）までに、 F_r または F_{r_2} のいずれかあるいは双方が $3/2(=1.5)$ 以上になることが分る。次節で述べるように、 $F_r > 3/2$ は流れが不安定になる条件であるから、結局 h_* が h_2 に等しくなるまでに流れは不安定になると考えられる。つまり、図2.7 (b)のような水面形が保たれる場合には $h_* < h_2$ であることが導かれる。また、(ii)で述べたように、 $h_c/h_1=1$ のときには、 $U/(v_1+\sqrt{gh_1})=1$ であり、dynamic wave と kinematic wave の伝播速度が等しくなることがこの図からも確められる。

2.6 流れの安定性

2.4において、 $F_r > 3/2$ のとき、dynamic wave の波先で流れは不安定になることが導かれた。この条件は、また安定性の解析において慣用されている方法、すなわち系に加えられたある波数の微小な擾乱の発達あるいは減衰を考えることによっても導かれる⁸⁾。いま、2.4と同様に定常等流状態（水深 h_0 、流速 $v_0=(1/n)s_0^{1/2}h_0^{2/3}$ ）を考え、これに加えられた微小な擾乱による水深の変化を η とし、これが

$$\eta = \hat{\eta} e^{i\alpha x + \omega t} \tag{2.58}$$

で表わされるとする（ α ：擾乱の波数）。このとき、擾乱の発達あるいは減衰、つまり流れの不安定あるいは安定は $\text{Re}(\omega)$ の符号によって決定される。すなわち、

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Re}(\omega) > 0 & \cdots\cdots \text{擾乱は発達 (不安定)} \\ = 0 & \cdots\cdots \text{中立} \\ < 0 & \cdots\cdots \text{擾乱は減衰} \end{array} \right\} \text{(安定)} \tag{2.59}$$

である。

(2.58) 式を (2.29) 式に代入すれば、

$$\omega^2 + 2(\lambda + iv_0\alpha)\omega + (gh - v_0^2)\alpha^2 + i(10/3)\lambda v_0\alpha = 0 \tag{2.60}$$

が得られ、これより

$$\omega = -\lambda - iv_0\alpha \pm \sqrt{\lambda^2 - gh_0\alpha^2 - i(4/3)\lambda v_0\alpha} \tag{2.61}$$

あるいは、 $F_r = v_0/\sqrt{gh_0}$ と置いて

$$\frac{\omega}{\lambda} = -1 - i\frac{v_0\alpha}{\lambda} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{F_r^2}\left(\frac{v_0\alpha}{\lambda}\right)^2 - i\frac{4}{3}\frac{v_0\alpha}{\lambda}} \tag{2.62}$$

が導かれる。図2.9は(2.62)式より $\text{Re}(\omega/\lambda)$ を v_0x/λ の関数として計算した結果であって、これより(2.62)式の一の実数部はつねに負であるが、他の一の実数部は

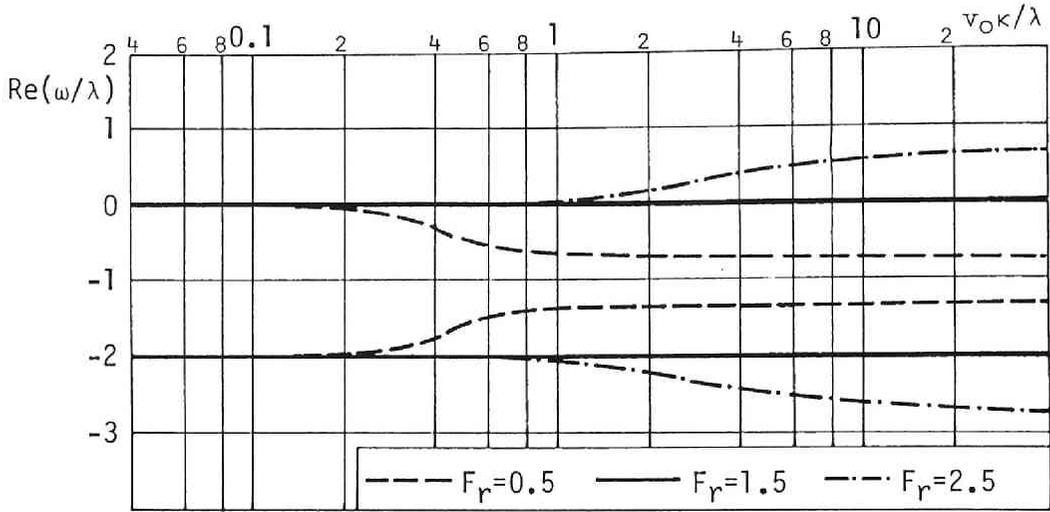


図2.9 擾乱の波数と増幅率

$$v_0x/\lambda \rightarrow 0 \text{ のとき } \quad \text{Re}(\omega/\lambda) \rightarrow 0 \quad (2.63)$$

$$v_0x/\lambda \rightarrow \infty \text{ のとき } \quad \text{Re}(\omega/\lambda) \rightarrow \omega_\infty/\lambda = -\left(1 - \frac{2}{3}F_r\right)$$

であるとともに、いずれの根も v_0x/λ に関して単調な関数であることが分る。したがって、 $F_r > 3/2$ のとき $\omega_\infty > 0$ であって、このときにはすべての波数について $\text{Re}(\omega) > 0$ であるから、流れは不安定であることが結論される。これは2.4で述べたことと一致する結果である。さらに、 $x \rightarrow \infty$ のとき(2.58)式は $\eta \propto e^{w_\kappa t}$ とできるが、これは $t = x/(v_0 + \sqrt{gh_0})$ とするとき $\eta \propto e^{-\left(1 - \frac{2}{3}F_r\right)\lambda x / (v_0 + \sqrt{gh_0})}$ であるから、(2.39)式の指数部と一致する。これから、dynamic waveの波先において成立する(2.39)式では十分に大きい波数の擾乱が考えられているとみられよう。

上記の流れの不安定の条件は、転波列の研究においてよく知られているように、転波の維持条件⁹⁾でもあり、さらに kinematic waveの伝播速度が dynamic waveの伝播速度より速くなるという条件でもある。これらの3種類の条件が同値であることを、抵抗則を一般に

$$s_f = s_f(h, v) \quad (2.64)$$

と表わして以下に示すことにする¹⁰⁾。(2.64)式の抵抗則と(2.1)式より、この場合の kinematic waveの伝播速度 w_κ は、

$$w_\kappa = v - \frac{s_{fh}}{s_{fv}} h \quad (2.65)$$

である。ここに、 $s_{f_h} = \partial s_f / \partial h$ 、 $s_{f_v} = \partial s_f / \partial v$ である。ただし、 $s_{f_h} < 0$ および $s_{f_v} > 0$ を仮定しておく。(2.65) 式を用いれば、流れの不安定の条件を導く (2.60) 式は、左辺の第 4 項の $(10/3)v_0$ が $2w_k$ に置き換わるだけで、これより

$$\frac{\omega_\infty}{\lambda} = -1 + F_r \left(\frac{w_k}{v} - 1 \right) \quad (2.66)$$

が得られる。 $\omega_\infty > 0$ のとき不安定であるから、これより不安定の条件として、

$$F_r > 1 / \left(\frac{w_k}{v} - 1 \right) = - \frac{v}{h} \frac{s_{f_v}}{s_{f_h}} \quad (2.67)$$

が得られる。

つぎに、転波の維持条件を求める。この条件は、ある波形が変形せずに流下するとして導かれる水面形の方程式 (2.51) 式 (ただし、摩擦項は (2.64) 式に置き換えられているとする) において*、 $h = h_c (= \sqrt[3]{q_p^2/g})$ となる断面で、(2.51) 式の分母および分子が同時に 0 になるとともに、さらにこの断面で水面こう配が正になるという条件である⁹⁾。まず、 $h = h_c$ で (2.51) 式の分子が 0 になることおよび (2.48) 式より

$$U = v_c + \sqrt{gh_c} \quad \text{ただし、} s_0 = s_f(h_c, v_c) \quad (2.68)$$

が導かれる。すなわち、 $h = h_c$ の断面で等流の関係が満たされ、また転波の伝播速度はこの等流における dynamic wave の伝播速度に等しいことが得られる。この断面における水面こう配は、(2.51) 式に l'Hospital の定理を適用して、

$$\begin{aligned} \left. \frac{dh}{dX} \right|_{h=h_c} &= \lim_{h \rightarrow h_c} \frac{s_0 - s_f(h, U - q_p/h)}{1 - q_p^2/gh^3} = \lim_{h \rightarrow h_c} - (s_{f_h} + s_{f_v} q_p^2/h^2) / (3q_p^2/h^4) \\ &= - \frac{1}{3F_r} (F_r h s_{f_h} + v s_{f_v}) \end{aligned} \quad (2.69)$$

と求められる。したがって、転波の維持条件 $dh/dX|_{h=h_c} > 0$ から、再び (2.67) 式の条件が導かれ、不安定の条件と一致することが知られる。

* 転波列の水理学的取扱いでは、(2.48) および (2.51) 式が基礎式であるが、単斜上昇波のようにその上・下流で等流であるとはできないので、 q_p および U を決めるのに (2.49) および (2.50) 式の関係を用いることはできない。

dynamic wave の伝播速度 w_d は2.1で述べたように抵抗則 s_f の形には依らず、 $w_d = v + \sqrt{gh}$ ((2.5) 式の正号をとる) であるから、(2.65) 式の w_k が w_d より大きいという条件も (2.67) 式で表わされる。つまり、kinematic wave の伝播速度が dynamic wave の伝播速度より大きくなるという条件もまた流れの不安定の条件と一致することが分る。このことと2.4の結果より、kinematic wave で伝わる擾乱の主たる部分が、dynamic wave で伝わる擾乱の波先より速く伝わる時、流れが不安定になり転波列の発生につながるものと理解することができよう。

Vedernikov によって導かれた流れの不安定の条件は、抵抗則を $v^a = \beta h^{1+b} s_0$ (a, b, β : 定数、径深は水深で近似) とするとき

$$V_e \equiv \frac{(1+b)v}{a(w_d - v)} > 1 \quad (2.70)$$

である。ここで定義された V_e は Vedernikov 数と呼ばれる¹¹⁾。抵抗則が上式の場合、(2.65) 式より $w_k = (1+a+b)v/a$ であるから、これより

$$V_e = \frac{w_k - v}{w_d - v} \quad (2.71)$$

が得られる。すなわち、Vedernikov 数は平均流速 v に相対的にとられた kinematic wave の伝播速度と dynamic wave の伝播速度の比であり、また $V_e > 1$ という条件は先述した kinematic wave が dynamic wave より速く伝わるという条件と同値であり、したがってまた転波の維持条件とも同値であることが知られる。

2.7 結 語

本章では開水路の一次元非定常流に関して、これまでに得られている理論的な成果のうち、本研究を進めるのに関連すると思われる事項について数学的検討を加え、開水路非定常理論のとりまとめを行った。得られた成果を挙げると以下のようなものである。

(1) 非定常流の基礎式を第1章で述べた特性曲線による表示に改めることにより、dynamic wave に沿う流れの変化が示された。また、Saint Venant の式において底こう配項と摩擦項がつり合うと考ええると、連続式より kinematic wave と呼ばれる波形の伝播が示されることを導いた。

(2) dynamic wave 理論と kinematic wave 理論の適用性を分類するために従来用いられているパラメータが、基礎式の無次元化によっても得られることを示し、またこのパラメータは dynamic wave の減衰の時間スケールと対象する流れの時間スケールとの比で表わされることを明らかにした。

(3) 同じ族の dynamic wave が交差して形成される段波 (dynamic shock) の発生条件を、dynamic wave の波先における擾乱の発達を考えることにより、(2.25) 式のように求めるとともに、(2)で用いられる dynamic wave の減衰の時間スケールが (2.26) 式で与えられることを示した。

(4) dynamic wave と kinematic wave が共存する場合の流れの特徴を線型化された系について考え、dynamic wave により擾乱の波先が伝えられること、および kinematic wave により擾乱の主要部（水深の極大値）が伝えられることを導き、dynamic wave および kinematic wave のそれぞれの役割を明らかにした。

(5) kinematic wave が交差して形成される kinematic shock において、kinematic wave の収束による波形の急峻化と拡散による平滑化とが平衡した場合に現われる単斜上昇波の特徴についてまとめ、その前面の Froude 数が (2.53) 式で定義される Froude 数に等しくなったときに kinematic shock と dynamic shock が合体した流れが現われることを導いた。

(6) 流れの安定性に関する従来の研究のまとめを行うとともに、流れに加えられた微小な擾乱の発達条件、転波列の維持条件および kinematic wave の伝播速度が dynamic wave の伝播速度より大きくなる条件が互いに同値であることを摩擦項を一般的な表示にして導き、さらに Vedernikov 数が平均流速に相対的にとられた kinematic wave と dynamic wave の伝播速度の比であることを示した。

参考文献

- 1) Stoker, J. J. : Water waves, Interscience Pub., 1957
- 2) 石原藤次郎, 本間仁編: 応用水理学 (上), 丸善, 1957
- 3) Lighthill, M. J. and G. B. Whitham : On the kinematic waves, Part I, Proc. Roy. Soc. London, A, Vol. 229, 1955
- 4) 林泰造: 河川の不定流について, 水工学シリーズ66-01, 土木学会水理委員会, 1966.
- 5) 岩佐義朗: 漸変流の水理とその応用, 石原藤次郎編, 水工水理学, 丸善, 1972.
- 6) Woolhiser, D.A. and J. A. Liggett : Unsteady, one-dimensional flow over a plane, the rising hydrograph, Water Resources Res., Vol.3, 1967.
- 7) Henderson, F. M. : Open channel flow, Macmillan, 1966.
- 8) 岩佐義朗: 開水路流の不安定限界について, 土木学会誌, 40-6, 1955.
- 9) 石原藤次郎, 岩垣雄一, 岩佐義朗: 急斜面上の層流における転波列の理論——薄層流に関する研究 (第5報)——, 土木学会論文集, 第19号, 1954.
- 10) 岩佐義朗, 井上和也, 西畑雅司: kinematic wave と dynamic wave の特性について, 第34回土木学会年次学術講演会講演概要, II -61, 1979.
- 11) 岩垣雄一, 岩佐義朗: 転波列の水理学的特性について——薄層流に関する研究, 第7報——土木学会誌, 40-1, 1955.

第3章 kinematic wave 理論

前章においては、kinematic wave が一次元非定常流の理論的な取扱いの広い範囲にわたって重要な役割を果たすことが明らかにされた。しかし、kinematic wave は本来 (2.2) 式の左辺が右辺に比べて十分小さいとする仮定から誘導されており、したがって理論上の役割は別として、kinematic wave 理論によって実際に有効に解析される流れは、上の仮定が満たされる流れ、すなわち時間的および空間的变化の緩やかな流れ (その具体的な条件は、2.2で明らかにされている)、たとえば洪水流のような流れに限られることになる。実際にはむしろ逆に、洪水流の一次元的挙動に関する長い歴史をもつ水理学的な研究において、kinematic wave 理論がまず展開されてきたのである。

この章においては、kinematic wave 理論による洪水流の一次元解析法について詳述するとともに、洪水の減衰を表現するための kinematic wave の第2次近似について考察を進める。洪水という実用問題において重要な流れが対象であるので、その適用範囲はできるだけ広く考えなければならないが、しかしそのようにしようとすれば、水路に関する条件および境界条件などをなるべく一般的に想定しなければならないとなり、そのため取扱いが当然複雑になる上、数学的な困難さのために見通しのよい結果が得られなくなる。本章では、kinematic wave 理論の基本的な特徴にのみ注目することにし、前章と同様の基礎式に従って、比較的理論的な取扱いに限定することにする。また数値計算の方法および適用例については、第4および第5章で示すことにする。

3.1 kinematic wave 理論の第1次近似

kinematic wave 理論の第1次近似はつぎの2式より構成される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

$$h = F(q) \quad (3.2)$$

ここに、 $q = vh$: 単位幅流量、 v : 平均流速、 h : 水深である。(3.1) 式は連続式 (2.1) 式と同じであり、(3.2) 式は (2.2) 式の左辺を無視して得られる関係を一般的に示したもので、たとえば抵抗則として Manning 公式を適用するとき、

$$h = (nq/s_0^{1/2})^{3/5} \quad (\text{あるいは } q = \frac{1}{n} s_0^{1/2} h^{5/3}) \quad (3.3)$$

である。

(3.1) および (3.2) 式より、kinematic wave の第1次近似は前章で述べられているとおり、

$$w = \frac{dq}{dh} = 1/F'(q) \quad (3.4)$$

とするとき、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}\right)h = 0 \quad \text{または} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}\right)q = 0 \quad (3.5)$$

で表わされる。すなわち、この場合の基礎式は一階の双曲型偏微分方程式系¹¹⁾であり、その特性曲線は、

$$\frac{dx}{dt} = w = 1/F'(q) \quad (3.6)$$

である。(3.5) 式はさらに

$$\frac{dx}{dt} = w \quad \text{に沿って、} \quad dq = dh = 0 \quad (3.7)$$

と改められる。dynamic wave 理論における特性曲線と (3.6) 式の特性曲線とを混同しないため、以後 kinematic wave 理論の特性曲線を便宜的に伝播曲線と呼ぶことにすれば、(3.7) 式は伝播曲線の上で $dh = 0$ つまり h は一定 (および $dq = 0$ 、したがって q も一定) に保たれることを表わしている。この特性により、伝播曲線に沿って h および q が伝播されるという一種の波動性—kinematic wave—が示され、その伝播速度が w であるということになる。このことを洪水理論にあてはめると、上記の波動性より洪水流を洪水波と呼ぶ研究者もあるということになり、さらにその伝播速度を表わす (3.4) 式は、洪水理論でよく知られている Kleitz-Seddon の法則に他ならないということになる。以上が、後述する kinematic shock が現われない場合の kinematic wave の第 1 次近似である。

この理論による洪水流の追跡はつぎのようにして進められる。まず、対象とする区間の上流端 ($x = 0$ とする) に、 $q = q_*(t)$ という流量ハイドログラフが与えられたとしよう ($h = h_*(t)$ という水深ハイドログラフが与えられても、(3.2) 式によって $q_*(t)$ に変換される)。このとき、 $x = 0$ をある時刻 T に出発した伝播曲線上で

$$dq = 0, \quad \text{すなわち} \quad q = q_*(T) \quad (3.8)$$

である。さらに伝播曲線上で q が一定であるから、(3.4) 式より w も一定で、したがって伝播曲線は実際には直線となり、

$$t = x/w + T \quad \text{または} \quad t = xF'(q) + T \quad (3.9)$$

で表わされる。この手順をいくつかの T について繰返して適用すれば、下流 ($x > 0$) における流量 (および水深) ハイドログラフや、あるいはある時刻における水面形が求められることになる (図 3.1)。これが kinematic wave 理論の第 1 次近似による kinematic shock が現われるまでの洪水追跡法である。

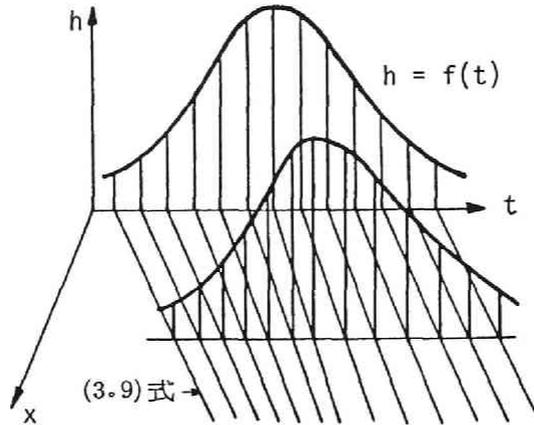


図3.1 kinematic wave 理論による洪水の追跡

開水路流れに関する (3.2) 式においては、流量が増加すれば水深も増加するから、(3.2) 式は q の増加関数である。したがって、伝播速度 w は q が大きいほど速くなる。その結果、図3.1のように、 $q_*(t)$ の増加期では $x = 0$ を後から出た伝播曲線が先に出た伝播曲線に次第に近づき、伝播曲線は収束してゆく。一方逆に、 $q_*(t)$ の減少期では伝播曲線は発散する。この特性および伝播曲線の上で h が一定であることから、洪水の波形は伝播に伴い、前面がより急峻になり、後面がより緩やかになるという現象が説明される。つまり、洪水の波形の変形は、kinematic wave の第1次近似によって表現されることになる。ただし、いうまでもなく第1次近似では伝播曲線の上で $dh = dq = 0$ であるから、洪水の伝播に伴う減衰は表わされていない。

つぎに、伝播曲線が収束し、その結果交差したときを考えよう。これは個々の kinematic wave の伝播速度が h 、したがって q によって変化するというこの理論の非線型性より生ずるものである。上記の追跡法からも明らかのように、kinematic wave が交差すれば、この部分では解は不連続となり、第2章で述べたように kinematic shock が発生する。

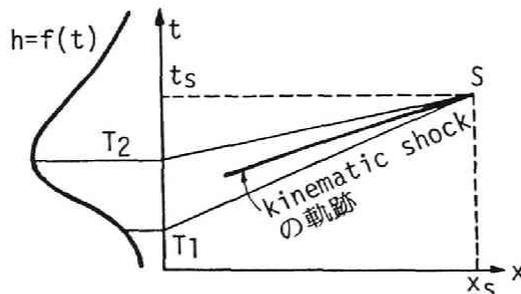


図3.2 kinematic shock

このような kinematic shock が発生したときの kinematic wave の理論の第1次近似はつぎのようである²⁾。図3.2を参照して、上流端を異なる時刻 T_1 および T_2 に出発した伝播曲線 I および II が $x-t$

平面上の S 点 (x_s, t_s) で交差したとする。このとき、まず (3.9) 式より

$$t_s = x_s F'(q_1) + T_1 = x_s F'(q_2) + T_2 \quad (3.10)$$

が成立する。ただし、 $q_i = q_*(T_i)$ ($i = 1, 2$) で、添字 1 および 2 は kinematic shock のそれぞれ下流側および上流側の量であることを示す。つぎに、(3.1) 式を図 3.2 の $T_1 T_2 S$ という三角形の領域において積分すると、

$$\int_{\Delta T_1 T_2 S} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (3.11)$$

であるが、これを三角形の周に沿う積分に改めれば、

$$\int_{T_1}^{T_2} q_* dt + \int_{T_2}^S (q dt - h dx) + \int_S^{T_1} (q dt - h dx) = 0 \quad (3.12)$$

と変形できる。ここで、左辺第 2 項に $dx = w dt = dt / F'(q)$ および $h = F(q)$ を用いれば、この項は $\int_{T_2}^S [q F'(q) - F(q)] dx = x_s [q F'(q) - F(q)]_{q_1, q_2}$ と変形される (伝播曲線 II の上では $q = q_2$ で一定である)。同様の変形を第 3 項について行えば、(3.12) 式は結局つぎのように改められる。

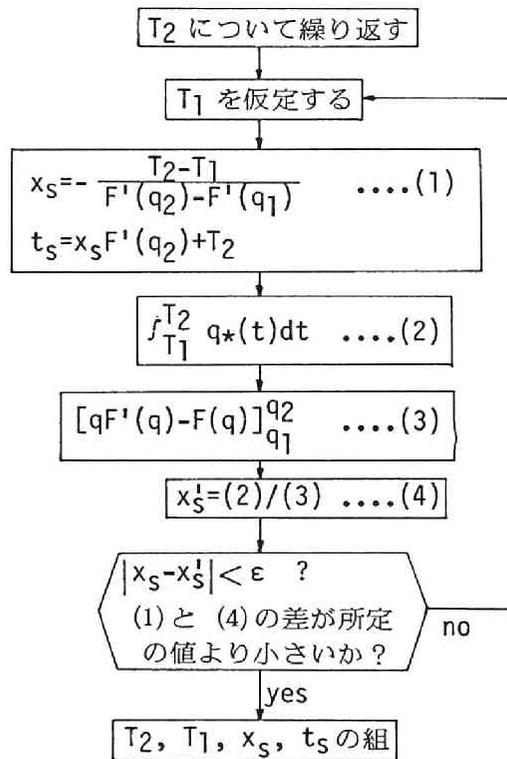


図 3.3 kinematic shock の軌跡の計算法

$$\int_{t_1}^{t_2} q_* dt = -x_s [qF'(q) - F(q)]_{q_1}^{q_2} \quad (3.13)$$

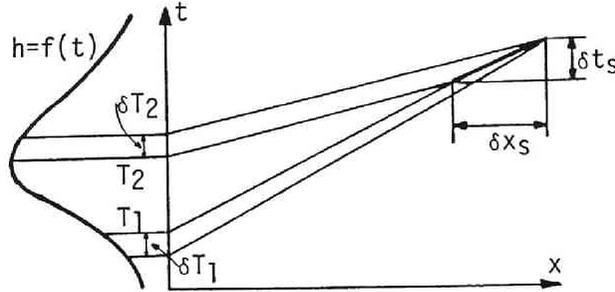


図3.4 kinematic shockの伝播速度

ここに、 $[G(q)]_{q_1}^{q_2} = G(q_2) - G(q_1)$ を意味する。(3.10) および (3.13) 式の計3個の式により、 T_1 、 T_2 、 x_s および t_s の4つの量の間関係が定められる。したがって、たとえば T_2 を変数として、 T_1 、 x_s および t_s が計算される。図3.3は、その計算手順の一例である。この計算により、 $x-t$ 平面上で kinematic shock の軌跡が定められるとともに、shock の上・下流側の流量および水深が求められ、kinematic shock という不連続部における解が計算される。

kinematic shock の伝播速度はつきのように求められる。図3.4において、 T_2 の微小な変化 δT_2 に伴う T_1 、 x_s および t_s の変化をそれぞれ δT_1 (δT_2 とは異符号)、 δx_s および δt_s とするとき、(3.10) 式より

$$\delta t_s = F'(q_1)\delta x_s + [x_s F''(q_1)\dot{q}_1 + 1]\delta T_1 = F'(q_2)\delta x_s + [x_s F''(q_2)\dot{q}_2 + 1]\delta T_2 \quad (3.14)$$

が得られる ($\dot{q}_i = (\partial q_*/\partial t)_{t=T_i}$, $i = 1, 2$)。また、(3.13) 式より、

$$q_2\delta T_2 - q_1\delta T_1 = -x_s [F''(q_2)\dot{q}_2 q_2 \delta T_2]_{t=T_2}^{t=T_1} - [qF'(q) - F(q)]_{q_1}^{q_2} \delta x_s \quad (3.15)$$

である。(3.14) および (3.15) 式より、 δT_1 および δT_2 を消去すれば、

$$U \equiv \frac{\delta x_s}{\delta t_s} = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (3.16)$$

が導かれる*。(3.16) 式は前章で述べた (2.50) 式と全く同じである。つまり、kinematic shock の

* (3.16) 式は、kinematic shock に (3.1) 式についての Rankine-Hugoniot の関係 (1.19) 式を適用すれば、直ちに求められる。(2.50) 式を導くのに用いられた (2.48) 式、すなわち $\partial h(v-U)/dX = 0$ を積分すれば、Rankine-Hugoniot の関係に帰着されるから、(3.16) 式と (2.50) 式とが一致するのは当然の結果である。

伝播速度は、上・下流側の水深がそれぞれ h_2 および h_1 である単斜上昇波の伝播速度に等しいことが分る。

kinematic wave の第 1 次近似では、上記のように kinematic shock で解は不連続となる。これは kinematic wave の非線型性による「波形の急峻化」の極限とみなすことができるが、一方解が不連続になるような kinematic shock では、kinematic wave の時間的および空間的变化は緩やかであるという前提はもはや満たされないと考えられる。つまり、この部分では、(3.2) 式ではなくそれに代って (2.2) 式が考えられなければならない、その結果前章で述べたような「波形の平滑化」の効果が顕著に現われると予想される。したがって結局、非線型性による急峻化と (2.2) 式に含まれる平滑化とが平衡した水面形、つまり単斜上昇波が現われると考えることができる。このことから、kinematic shock が現われる場合の kinematic wave 理論の第 1 次近似の修正として、kinematic shock を伝播速度が等しい単斜上昇波で置き換え（このことは kinematic shock の部分に限って (2.2) 式を考慮したことになる）、連続な水面形を得るという追跡法が考えられる。

以上をまとめると、kinematic wave 理論の第 1 次近似による流れの計算は、つぎのように行うことができる。

- (i) kinematic shock が現われないうち… (3.8) および (3.9) 式。
- (ii) kinematic shock が現われるとき… shock では、(3.8), (3.10) および (3.13) 式、shock 以外では(i)と同じ。
- (iii) shock の置き換え… shock を伝播速度が等しい単斜上昇波で置き換え、連続な水面形とする。

もちろん、(ii)および(iii)の方法は、並進座標系で定常とみられる程度に shock が発達した場合に適用が可能であって、5.2で述べるように shock の発生初期では必ずしも適切でない。

3.2 kinematic wave 理論の第 2 次近似の分類

前節で述べた kinematic wave 理論の第 1 次近似の理論上および実際の計算上の問題点として、つぎの点が挙げられる。

第 1 には、第 1 次近似によって洪水の波形の前面が伝播に伴ってより急峻になり、後面では緩やかになるという「波形の変形」は説明されるが、伝播に伴う「波形の減衰」は表わされないという理論上の問題点である。

第 2 は、上流端で水深が時間的に増加する場合、下流において kinematic shock が不可避免的に発生し、しかもこれによって解が不連続な水面形になることである。実際には不連続な水面形は、kinematic wave 理論の前提からみて考えられないから、前節で述べたように、その修正として kinematic shock を伝播速度が等しい単斜上昇波で置き換える方法が考えられる。しかし、この方法によるときでも、kinematic shock の位置を先に求めておいて、そこを単斜上昇波で置き換えていくという、機械的な計算手法には依りがたい手順をとらなければならないから、計算手法上の問題が残る。

第3は、上流端からの流入ハイドログラフが洪水の全期間にわたって既知であることが、kinematic shock を予め計算するために不可欠であり、したがって既往のすでに流入ハイドログラフがすべて知られている洪水以外には、実用の計算には適用されないという問題である。

さて、これらの問題点を解消することを目的として、従来より kinematic wave 理論の第2次近似が、つぎの2通りの方法によって考えられている。第1の方法は、第1次近似の解を(2.2)式の左辺に代入し、摂動法あるいは逐次近似法によって解く方法であり、林³⁾、田中⁴⁾、および高橋⁵⁾が、洪水の極大値(ピーク値)の減衰を示すのに用いた方法である。しかし、洪水の波形全体を対象にしたこの方法による解(3.3~3.4)から明らかにされるように、この方法は実際には kinematic shock が出現するまでにしか適用されず、したがって上記の第2の問題点を解消するものでない上、さらに kinematic shock の出現を予め知って適用しなければならないから、第3の問題点も解消していないといえる。

第2の方法は、(3.2)式に(2.2)式の左辺のいくつかの項の影響を考慮するもので、速水の理論⁶⁾に代表される。この速水の方法は、(2.2)式の左辺の各項のうち、洪水流においては $\partial h / \partial x$ が他の項に比較して大きいという観測の結果を用いて展開されるもので、 $\partial h / \partial x$ を考慮することにより基礎式に拡散項が導入される。この理論は拡散項によって、洪水のピーク値の減少を表現するとともに、kinematic shock のような不連続性を緩和して連続な水面形を得ようとするものである。したがって、この方法では kinematic shock は自動的に連続な水面形に置き換えられることが予想されるので、前述の第2および第3の点も問題にならず、real time な計算にも適用しうると期待できる。

以下の節においては、洪水の波形全体を対象とした第1の方法による解および第2の方法である速水の理論において、線型化した場合の極大値の伝播とその減衰を示す式を導くことにする。

3.3 摂動法および逐次近似法による第2次近似

摂動法および逐次近似法による第2次近似は、それぞれ高橋⁵⁾および林³⁾の研究によって代表される。一方、田中⁴⁾の研究では、第1次近似を用いて第2次近似の基礎式が導かれているが、ここでいくつかの仮定が設けられ、第1次近似の結果はそのままの形では使用されていない。しかし、この方法も逐次近似法の一つとみなされるので、ここでは林と同様の逐次近似法を採用ことにし、田中の方法による解は求めないことにする。

高橋および林による第2次近似では、対象が洪水の極大値(ピーク値)附近に限られているため、洪水の伝播に伴う水面こう配および水面曲率の変化が考慮されていない。以下の本節では、これらの変化も考慮に入れて波形全体を対象とした第2次近似を、摂動法および逐次近似法によって導き⁷⁾、次節においてそれぞれの結果の比較と検討を行うことにする。

摂動法および逐次近似法のいずれも、ある微小なパラメータを含む系に対して採られる方法である。ここで対象とする流れに関するそのようなパラメータは、基礎式の無次元化によって求めることがで

きる。すなわち、この場合の基礎式 (2.1) および (2.2) 式を、(2.13) 式に従って無次元化した (2.14) および (2.15) 式において、 $\sigma \ll 1$ のとき kinematic wave への近似が可能であったから、結局上述のパラメータとして σ が採られることになる。したがって、本節においては以後 (2.14) および (2.15) 式を基礎式として用いることにするが、記号をそれぞれつぎのように改めることにする。まず、時間スケールを T_* 、水深方向の長さのスケールを h_* とし、(2.13) 式に代って、

$$t = T_*\tau, \quad h = h_*\eta, \quad x = x_*\xi = \sqrt{gh_*} T_*\xi, \quad v = \sqrt{gh_*} v' \quad (3.17)$$

によって、(2.1) および (2.2) 式を無次元化する。

$$(2.1) \text{ 式} : \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial q'}{\partial \xi} = 0 \quad (3.18)$$

$$(2.2) \text{ 式} : 1 - \frac{1}{F_r^2} \frac{q'^2}{\eta^{10/3}} = \sigma \left[\frac{1}{\eta} \frac{\partial q'}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{q'^2}{\eta^3} \right) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{2q'}{\eta^2} \frac{\partial q'}{\partial \xi} \right] \quad (3.19)$$

ここに、 q' は $\sqrt{gh_*^3}$ によって無次元化された単位幅流量 ($q = \sqrt{gh_*^3} q'$ 、 $q' = v'\eta$) であり、また

$$\sigma = \frac{h_*}{x_* s_0} = \frac{h_*}{\sqrt{gh_*} T_* s_0} \quad (3.20)$$

$$F_r^2 = \frac{s_0 h_*^{1/3}}{n^2 g} = \left(\frac{1}{n} s_0^{1/2} h_*^{2/3} \right)^2 / gh_* \quad (3.21)$$

である。ただし、 σ は (2.16) 式で定義される量と同じであって、本章では 1 に比べて十分小さいとされている。また、上流端の境界条件としては、3.1 とは異なり無次元化された水深のヒドログラフ $\zeta(\tau)$ が与えられるものとし、また解は主として水深 η について求めることにする。なお簡単のため本節では、 q' のプライムを略し、 q と表わすことにする。

(1) 第 1 次近似解の無次元化と波形の変化

第 1 次近似解は先に述べたとおりである。それらの結果を (3.17) 式の無次元量を用いてまとめれば、つぎのようである (ただし、kinematic shock が現われるまでとする)。第 1 次近似解の水深および単位幅流量 (無次元) をそれぞれ η_1 および q_1 とすれば、

$$q_1 = F_r \eta_1^{5/3}, \quad \text{および} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \eta_1 = 0 \quad (3.22)$$

である。ただし、

$$\omega_1 = \frac{5}{3} F_r \eta_1^{2/3} = \frac{5}{3} \frac{q_1}{\eta_1} \quad (3.23)$$

である。いうまでもなく、これらの関係は抵抗則として Manning 公式を用いたときの (3.4) および (3.5) 式を無次元化したものである。

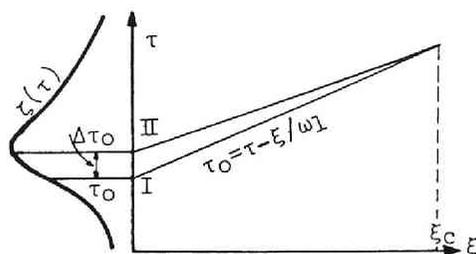


図3.5 伝播直線の交差

$d\xi/d\tau = \omega_1$ で表わされる伝播曲線は、先述のように実際は直線である。いま、この直線を

$$\tau_0 = \tau - \frac{\xi}{\omega_1} \quad (3.24)$$

と表わせば、 τ_0 は伝播曲線（直線）が上流端 $\xi = 0$ を出発する時刻である（(3.9) 式に対応，図3.5 参照）。また，(3.22) 式の解は，

$$\eta(\xi, \tau) = \zeta\left(\tau - \frac{\xi}{\omega_1}\right) \quad (3.25)$$

で表わされる。

つぎに，伝播に伴う（すなわち， $d\xi/d\tau = \omega_1$ の上での）水面こう配および水面曲率の変化を求めらる。まず，(3.25) 式を ξ で微分すると，

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\tau_0} \frac{d\tau_0}{d\xi} \quad (3.26)$$

である。ここで，(3.24) 式より

$$d\tau_0 = d\tau - \frac{d\xi}{\omega_1} + \frac{\xi}{\omega_1^2} d\omega_1 = d\tau - \frac{d\xi}{\omega_1} + \frac{2}{3} \frac{\xi}{\omega_1 \eta} d\eta \quad (3.27)$$

である（(3.23) 式より， $d\omega_1 = (2\omega_1/3\eta)d\eta$ ）から，

$$\frac{d\tau_0}{d\xi} = -\frac{1}{\omega_1} + \frac{2}{3} \frac{\xi}{\omega_1 \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \quad (3.28)$$

となる。(3.26) および (3.28) 式より，第1次近似解 η のこう配の伝播に伴う変化として

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = \frac{3\zeta\zeta_\tau}{2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta} \quad (3.29)$$

が得られる。ただし、ここで右辺の η_1 は ζ で置き換えられており、また $\zeta_\tau = d\zeta/d\tau|_{\tau=\tau_0}$ である。

水面曲率は、(3.26) および (3.28) 式を、さらに ξ で微分した結果よりつぎのように求められる。

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} = \frac{3\zeta}{(2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)^2} \left\{ 2(\zeta_\tau\xi + 6\omega_1\zeta)\zeta_\tau^2 - 9\omega_1\zeta^2\zeta_{\tau\tau} \right\} \quad (3.30)$$

ここに、 $\zeta_{\tau\tau} = d^2\zeta/d\tau^2|_{\tau=\tau_0}$ である。

いま、洪水のピークに限って考えると、ピークでは $\zeta_\tau = 0$ であるから、(3.29) 式より $\partial\eta_1/\partial\xi = 0$ 、および (3.30) 式より $\partial^2\eta_1/\partial\xi^2 = \zeta_{\tau\tau}/\omega_1^2$ が得られ、水面こう配および水面曲率はともに伝播に伴って変化しないことが知られる。また、(3.29) 式より、 $\zeta_\tau > 0$ のとき、すなわち水深の上昇期では $\xi < 3\omega_1\zeta/2\zeta_\tau$ の範囲で $\partial\eta_1/\partial\xi < 0$ であり、 ξ が大きくなるに従い $|\partial\eta_1/\partial\xi|$ も大きくなり、洪水の前面の水面こう配が急になることが導かれる。逆に、 $\zeta_\tau < 0$ のとき、すなわち水深の下降期では水面こう配が次第に緩やかになることが分る。

図3.5を参照して、 $\Delta\tau_0$ だけ隔てた2本の伝播直線 I および II の交点を ξ_c とすると、 $\xi_c = \Delta\tau_0\omega_1(\tau_0)\omega_1(\tau_0 + \Delta\tau_0)/|\omega_1(\tau_0 + \Delta\tau_0) - \omega_1(\tau_0)|$ である。いま、 $\xi_s = \lim_{\Delta\tau_0 \rightarrow 0} \xi_c$ とすると、

$$\xi_s = \frac{\omega_1^2}{\left(\frac{d\omega_1}{d\tau_0}\right)} = \frac{3\omega_1\zeta}{2\zeta_\tau}, \quad \text{ただし } \zeta_\tau > 0 \quad (3.31)$$

である ((3.23) 式より、 $d\omega_1/d\tau_0 = (2\omega_1/3\zeta)\zeta_\tau$)。これより、(3.29) および (3.30) 式の分母を0とする ξ は、上の ξ_s に等しいことが分る。上記より明らかなように、 ξ_s は隣接する伝播直線の交点で、 $\xi - \tau$ 平面上の $\xi < \xi_s$ の領域に kinematic shock が未だ現われていないならば、 ξ_s の点で初めて kinematic shock が発生することになる。つまり、 ξ_s の最小値 $(\xi_s)_{\min}$ の点で初めて kinematic shock が発生し、それ以後は kinematic shock を考慮した取扱いが必要とされる。流れに一たび kinematic shock が現われれば、それ以後は3.1で述べたように、(3.10) および (3.13) 式の3式によって、あらかじめ kinematic shock の位置つまり $\xi - \tau$ 平面における kinematic shock の軌跡およびその上で交わる伝播直線 (T_1 および T_2) の組を定めておかなければならない (いうまでもなく、kinematic shock は隣接する任意の伝播直線で構成されるのではない)。以上のことから、第1次近似の (3.25)、(3.29) および (3.30) 式が適用されるのは、伝播直線が kinematic shock に巻き込まれるまでであって、それは $\xi - \tau$ 平面上では伝播直線と kinematic shock の軌跡との交点までということになる (図3.6)。以後この適用範囲を $\xi_b(\tau_0)$ と表わすことにする。

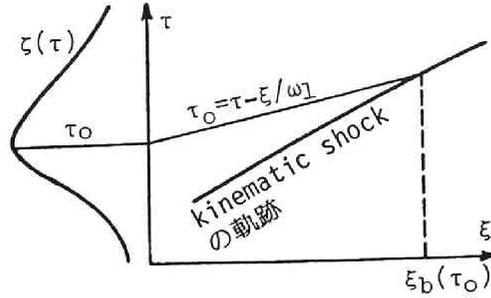


図3.6 第1次近似の適用範囲

第1次近似解が上記のような適用範囲を有することより、これを用いて導かれる摂動法および逐次近似法による第2次近似解はいずれも、同じ適用範囲 ($0 \leq \xi \leq \xi_b(\tau_0)$) を有することになる。このことは、3.2で述べたように、kinematic wave 理論の第2の問題点、ひいては第3の問題点が、摂動法および逐次近似法のいずれによっても解消できないことを示している。

なお、 $(\xi_b)_{\min} = (\xi_b(\tau_0))_{\min}$ は、(3.31) 式より $(\xi_b)_{\max}$ に対応する伝播直線、すなわち一般に $\xi(\tau)$ 曲線の上昇期の変曲点から出発する伝播直線上で現われるものと予想される。

(2) 摂動法による解

摂動法を用いた第2次近似解は、つぎのようにして導かれる。すなわち、 $\sigma \equiv h_*/x_*s_0 \ll 1$ として、(3.18) および (3.19) 式の解を、

$$\eta = \eta_1(\xi, \tau) + \sigma \eta_2(\xi, \tau) + \dots \quad (3.32)$$

$$q = q_1(\xi, \tau) + \sigma q_2(\xi, \tau) + \dots \quad (3.33)$$

と展開して、 η_2 および q_2 を求めることにする。

(3.32) および (3.33) 式を、(3.18) および (3.19) 式に代入し、 σ の次数ごとにまとめると、 σ の0次の項より、上述(1)の第1次近似解が得られ、 σ の1次の項より次式が得られる。

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi} = 0 \quad (3.34)$$

$$-\frac{1}{F_*^2} \frac{q_1^2}{\eta_1^{10/3}} \left(\frac{2q_2}{q_1} - \frac{10}{3} \frac{\eta_2}{\eta_1} \right) = \frac{1}{\eta_1} \frac{\partial q_1}{\partial \tau} + \left(1 - \frac{q_1^2}{\eta_1^3} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{2q_1}{\eta_1^2} \frac{\partial q_1}{\partial \xi} \quad (3.35)$$

(3.22) 式の第1式およびこれより導かれるつぎの関係、

$$\frac{\partial q_1}{\partial \tau} = \omega_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} = \omega_1 \left(-\frac{\partial q_1}{\partial \xi} \right) = -\omega_1^2 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}, \quad \text{および} \quad \frac{\partial q_1}{\partial \xi} = \omega_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \quad (3.36)$$

を, (3.35) 式に代入すれば

$$q_2 = \omega_1 \eta_2 - \frac{3}{10} \omega_1 \eta_1 \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1}\right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \quad (3.37)$$

が得られる。(3.37) 式を (3.34) 式に代入すれば, η_2 に関するつぎの方程式が得られる。

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \omega_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} = \omega_1 \left[-\frac{2}{3\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \eta_2 + G_1 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right)^2 + G_2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} \right] \quad (3.38)$$

ここに,

$$G_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{24}{125} \frac{\omega_1^2}{\eta_1}\right), \quad \text{および} \quad G_2 = \frac{3}{10} \eta_1 \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1}\right) \quad (3.39)$$

である。(3.38) 式はつぎの連立微分方程式と同値である。

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\xi}{\omega_1} = \frac{d\eta_2}{\omega_1 \left[-\frac{2}{3\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \eta_2 + G_1 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right)^2 + G_2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} \right]} \quad (3.40)$$

したがって,

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \omega_1 \quad (3.41)$$

に沿って

$$\frac{d\eta_2}{d\xi} + \frac{2}{3\eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \eta_2 = G_1 \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right)^2 + G_2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} \quad (3.42)$$

である。(3.41) 式より, 第 2 次近似においても, 伝播速度は ω_1 で表わされ, したがって伝播曲線は, 第 1 次近似と同じ直線になることが知られる。伝播直線の上では, η_1 および ω_1 は一定であるから, G_1 および G_2 も一定である。これから, (3.42) 式は, (3.29) および (3.30) 式を代入して, 伝播直線の上で成立する微分方程式として, つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_2}{d\xi} + \frac{3\zeta_r}{2\zeta_r\xi - 3\omega_1\xi} \eta_2 &= G_1 \left(\frac{3\zeta\zeta_r}{2\zeta_r\xi - 3\omega_1\xi} \right)^2 + G_2 \frac{3\zeta}{(2\zeta_r\xi - 3\omega_1\xi)^2} \\ &\times \left\{ 2(\zeta_r\xi + 6\omega_1\xi)^2 \zeta_r^2 - 9\omega_1 \zeta^2 \zeta_{rr} \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

この微分方程式を, 境界条件: $\xi = 0$ で $\eta_2 = 0$ のもとで解き, 第 1 次近似の結果とまとめると,

$$\eta = \zeta \left[1 + \sigma \frac{9\zeta}{10(2\zeta_r\zeta - 3\omega_1\zeta)} \left\{ \zeta_r \left(3 - \frac{14}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \log \left(1 - \frac{2\zeta_r\zeta}{3\omega_1\zeta} \right) - \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \left(\frac{5\zeta_r^2 - 3\zeta\zeta_{rr}}{2\zeta_r\zeta - 3\omega_1\zeta} \right) \zeta \right\} \right] \quad (3.44)$$

が得られる。ここで、 ζ 、 ζ_r および ζ_{rr} には、伝播直線が $\xi = 0$ を出発する時刻での値が採られることはいうまでもない。

以上が摂動法による σ の 1 次の項まで考慮した第 2 次近似解である。全く同様にして、第 3 次近似以上の解も順次求めることができる。しかし、洪水流のような変化の緩やかな流れでは、3.4(4) および 5.2 で述べるように第 2 次近似は微小な量であること、および kinematic wave 理論の適用性から $\sigma \ll 1$ を考えれば高次の近似解の影響は微弱であると考えられる。また、さきに述べたように (3.44) 式の適用範囲は、伝播直線上の $0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau_0)$ であって、これは (3.44) 式の誘導過程から明らかである。

(3) 逐次近似法による解

逐次近似法は、解を (3.32) および (3.33) 式のように展開せずに、第 1 次近似解を (3.19) 式の右辺に代入し、これと (3.18) 式を連立させて解く方法である。すなわち、逐次近似法による第 2 次近似解を η_2 および q_2 (摂動法のときの η_2 および q_2 とは異なる) と表わせば、(3.18) および (3.19) 式より次式が成立する。

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \frac{\partial q_2}{\partial \xi} = 0 \quad (3.45)$$

$$1 - \frac{1}{F_r^2} \frac{q_2}{\eta_2^{10/3}} = \sigma \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \quad (3.46)$$

(3.46) 式の右辺は、第 1 次近似解による補正項で、微小な量と考えられる。

さて、(3.46) 式より

$$q_2 = F_r \eta_2^{5/3} \sqrt{1 - 2e_1} \quad (3.47)$$

が得られる。ここに、

$$e_1 = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \quad (3.48)$$

である。(3.47) 式を (3.45) 式に代入すれば、

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} + \omega_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} = F_r \frac{\partial e_1}{\partial \xi} \frac{\eta_2^{5/3}}{\sqrt{1-2e_1}} \quad (3.49)$$

が得られる。ここに、

$$\omega_2 = \frac{5}{3} F_r \eta_2^{2/3} \sqrt{1-2e_1} = \frac{5}{3} \frac{q_2}{\eta_2} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \xi} = \frac{\sigma}{2} \left[\left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\eta_1} \right) \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial \xi^2} - \frac{4}{75} \frac{\omega_1^2}{\eta_1^2} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} \right)^2 \right] \quad (3.51)$$

である。(3.49) 式は、偏微分方程式の理論により、つぎの連立微分方程式と同値である。

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\xi}{\omega_2} = \frac{d\eta_2}{F_r \frac{\partial e_1}{\partial \xi} \frac{\eta_2^{5/3}}{\sqrt{1-2e_1}}} \quad (3.52)$$

すなわち

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \omega_2 \quad (3.53)$$

に沿って

$$\frac{d\eta_2}{d\xi} = \frac{3}{5(1-2e_1)} \frac{\partial e_1}{\partial \xi} \eta_2 \quad (3.54)$$

が成立する。(3.53) 式で表わされる伝播曲線（この場合には ω_2 は一般に伝播に伴って変化するから、伝播曲線は直線とはならない）を C_2 とするとき、(3.54) 式より第 2 次近似 η_2 は、つぎのように表わされる。

$$\eta_2 = C \exp \left[\int_{C_2} \frac{3}{5(1-2e_1)} \frac{\partial e_1}{\partial \xi} d\xi \right] \quad (3.55)$$

ただし、 C は境界条件（ $\xi = 0$ で $\eta_2 = \zeta$ ）より定められる定数である。積分の経路である伝播曲線 C_2 は、(3.53) および (3.50) 式から明らかなように η_2 の関数である。つまり、(3.55) 式の右辺には implicit に η_2 が含まれており、このままでは積分が行われないので、つぎの仮定を設けることにする。すなわち、 $d\xi/d\tau = \omega_1$ （第 1 次近似）で表わされる伝播直線を C_1 とするとき、 $\int_{C_2} d\xi \doteq \int_{C_1} d\xi$ と仮定する。さらに、 $1/(1-2e_1) \doteq (1+2e_1)$ と近似して、(3.55) 式に (3.48), (3.51), (3.29) および (3.30) 式を代入し、 C_1 上では η_1 および ω_1 が一定であることを考慮して、(3.55) 式の右辺を計算すれば、つぎの結果が得られる（境界条件は前記のとおり）。

$$\eta_2(\xi, \tau) = \zeta \exp[\sigma r_1 + \sigma^2 r_2] \quad (3.56)$$

ここに,

$$r_1 = \frac{3}{10} \left[\left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \frac{(5\zeta_\tau^2 - 3\zeta\zeta_{\tau\tau})(\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)\xi}{\omega_1(2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)^2} \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{8}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \frac{\zeta_\tau^2\xi}{\omega_1(2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)} \right] \quad (3.57)$$

$$r_2 = \frac{3}{10} \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \zeta_\tau \xi \left[\left(1 - \frac{8}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \frac{\zeta_\tau^2(\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)}{\omega_1^2(2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)} \right. \\ \left. - \frac{(5\zeta_\tau^2 - 3\zeta\zeta_{\tau\tau})(4\zeta_\tau^2\xi^2 - 18\omega_1\zeta\zeta_\tau\xi + 27\omega_1^2\zeta^2)}{3\omega_1^2(2\zeta_\tau\xi - 3\omega_1\zeta)^3} \right] \quad (3.58)$$

であり, また $\tau_0 = \tau - \xi/\omega_1$ である。 ζ , ζ_τ および $\zeta_{\tau\tau}$ には, 伝播直線が $\xi = 0$ を出発する時刻 τ_0 での値が採られていることは, 摂動法の場合と同じである。

(3.56) 式はさらにつぎのように近似される。 $r_1 \approx \xi[O(\zeta_\tau) + O(\zeta_{\tau\tau})]$ であり, また $r_2 \approx r_1 \times O(\zeta_\tau)$ である。したがって, 水深の変化が緩やかなときには, $O(\zeta_\tau) < 1$ であるから, $r_2 < r_1$ である。さらに, はじめに仮定したように $\sigma \ll 1$ であるから, 結局 (3.56) 式中の r_2 の項は, r_1 の項に比べて無視しうる程度と考えられる。以上から, (3.56) 式はつぎのように近似される。

$$\eta_2 = \zeta e^{\sigma r_1} \quad (3.59)$$

また, 上記の η_2 から (3.50) および (3.53) 式により伝播曲線 C_2 が求められる (ただし, (3.55) 式の右辺の積分に際しての近似から明らかなように, ここで求められる伝播曲線 C_2 もまた近似的なものである)。以後 (3.59) 式を逐次近似法の第 2 次近似解とする。なお, (3.59) 式の適用範囲は, 伝播直線上の $0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau_0)$ であって, これは摂動法による第 2 次近似解の場合と同様である。

3.4 摂動解と逐次近似解の比較および検討

(1) 摂動解と逐次近似解の比較

前節で導かれた摂動法による第 2 次近似解 (摂動解) (3.44) 式と, 逐次近似法によるそれ (逐次近似解) (3.59) 式とは, みかけ上かなり異っているが, $O(\zeta_\tau)$, $O(\zeta_{\tau\tau})$ および ξ がともに 1 に比べて十分小さいとき, 両者はそれぞれつぎのように近似され, 互いに大差のないことが示される。

まず, 逐次近似解 (3.59) 式において, $\xi \ll 1$ とすれば, $\sigma r_1 \ll 1$ であるから, (3.59) 式は $\eta_2 \approx \zeta(1$

+ σr_1) と近似できる。さらに、 $2\zeta_\tau \xi / 3\omega_1 \zeta (2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta) \doteq (-2\zeta_\tau \xi / 9\omega_1 \zeta^2)(1 + 2\zeta_\tau \xi / 3\omega_1 \zeta)$ とすれば、結局 (3.59) 式は

$$\begin{aligned} \eta \doteq \zeta \left[1 + \sigma \frac{9\zeta}{10(2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta)} \left\{ - \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \left(\frac{5\zeta_\tau^2 - 3\zeta \zeta_{\tau\tau}}{2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta} \right) \xi \right. \right. \\ \left. \left. - \zeta_\tau \left(3 - \frac{14}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \frac{2\zeta_\tau \xi}{3\omega_1 \zeta} + r_1 \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.60)$$

と変形される。ここに、

$$r_1 \doteq - \frac{\zeta_\tau \xi}{9\omega_1^2 \zeta^2} \left\{ - \left(15 - \frac{12}{5} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) (\omega_1 \zeta \zeta_{\tau\tau} - \zeta_\tau^2 \xi) - \left(3 - \frac{12}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \zeta \zeta_{\tau\tau} \xi \right\} \quad (3.61)$$

である。 r_1 は、 ξ 、 ζ_τ および $\zeta_{\tau\tau}$ が 1 に比べて小さいとき、

$$r_1 \doteq O(\zeta_\tau) O(\zeta_\tau) + O(\zeta_{\tau\tau}) \quad (3.62)$$

の程度である。

一方、摂動解 (3.44) 式において、 $\xi \ll 1$ のとき、 $\log(1 - 2\zeta_\tau \xi / 3\omega_1 \zeta) \doteq -2\zeta_\tau \xi / 3\omega_1 \zeta$ と近似すれば、(3.44) 式はつきのように変形される。

$$\begin{aligned} \eta \doteq \zeta \left[1 + \sigma \frac{9\zeta}{10(2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta)} \left\{ - \left(1 - \frac{4}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \left(\frac{5\zeta_\tau^2 - 3\zeta \zeta_{\tau\tau}}{2\zeta_\tau \xi - 3\omega_1 \zeta} \right) \xi \right. \right. \\ \left. \left. - \zeta_\tau \left(3 - \frac{14}{25} \frac{\omega_1^2}{\zeta} \right) \frac{2\zeta_\tau \xi}{3\omega_1 \zeta} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

(3.60) および (3.63) 式を比較すれば明らかなように、摂動解と逐次近似解との差は、 ξ 、 ζ_τ および $\zeta_{\tau\tau}$ が 1 に比べて十分小さいとき、 r_1 の程度と評価され、これは $O(\zeta_\tau)$ 、 $O(\zeta_{\tau\tau}) \ll 1$ のとき無視する程度と考えられる。すなわち、摂動解および逐次近似解は、上の仮定が満たされる範囲では、はじめに述べたように、大差はないと結論される。

なお、(3.60) および (3.63) 式のような近似式は、もとの微分方程式である (3.54) および (3.38) 式を、 ξ 、 ζ_τ および $\zeta_{\tau\tau}$ がともに 1 より十分小さいとして近似した式からも導けるが、重複した誘導になるので省略する。

(2)次元表示

摂動解 (3.44) 式および逐次近似解 (3.59) 式の次元をもとへ戻せば、それぞれつぎのようである。いずれにおいても、第 2 次近似まで含めた結果を $h(x, t)$ と表わし、また上流端の水深ハイドログラフは $f(t)$ であるとする。

摂動解 (3.44) 式：

$$h(x, t) = f \cdot \left[1 + \frac{9f^2}{10s_0(2\dot{f}x - 3w_1f)} \left\{ \dot{f} \left(3 - \frac{14}{25} \frac{w_1^2}{gf} \right) \log \left(1 - \frac{2\dot{f}x}{3w_1f} \right) - \left(1 - \frac{4}{25} \frac{w_1^2}{gf} \right) (5\dot{f}^2 - 3f\ddot{f}) \frac{x}{2\dot{f}x - 3w_1f} \right\} \right] \quad (3.64)$$

ここに、 f 、 $\dot{f} = df/dt$ および $\ddot{f} = d^2f/dt^2$ には、伝播直線が上流端を出発する時刻 $t_0 = t - x/w_1$ での値が採られる。また、伝播速度 w_1 は、

$$w_1 = \frac{5}{3} \frac{1}{n} s_0^{1/2} f^{2/3} \quad (3.65)$$

であり、波形の伝播は

$$\frac{dx}{dt} = w_1 \quad (3.66)$$

で表わされる。

逐次近似解 (3.59) 式：

$$h(x, t) = f \exp \left[\frac{3}{10s_0} \left\{ \left(1 - \frac{4}{25} \frac{w_1^2}{gf} \right) \frac{(5\dot{f} - 3f\ddot{f})(\dot{f}x - 3w_1f)}{w_1(2\dot{f}x - 3w_1f)} x - \left(1 - \frac{8}{25} \frac{w_1^2}{gf} \right) \frac{\dot{f}^2 x}{w_1(2\dot{f}x - 3w_1f)} \right\} \right] \quad (3.67)$$

ここに、 f 、 \dot{f} 、 \ddot{f} は摂動解の場合と同様であり、また波形の伝播は

$$\frac{dx}{dt} = w_2 = \frac{5}{3} \frac{1}{n} s_0^{1/2} h^{2/3}(x, t) \quad (3.68)$$

で近似される。(3.64) および (3.67) 式の適用範囲は、前節で述べたとおり、第1次近似解の伝播直線が kinematic shock の軌跡と交わるまでに限られる。その限界の距離 x_s は、 $\xi_0(\tau_0)$ を次元化した量で、3.1で述べた手順によって求められる。

(3)従来の結果との比較

従来導かれている摂動法および逐次近似法の第2次近似は、洪水のピークだけが対象とされているので、ここでの比較もピークについてのみに限られる。ピークでは $\dot{f} = 0$ であるから、この場合には摂動解および逐次近似解は、それぞれつぎのように表わされる。

摂動解 (3.64) 式から,

$$h_p(x, t) = f_p \left[1 + \frac{27}{250} \left(\frac{1}{F_{rp}^2} - \frac{4}{9} \right) \frac{\ddot{f}_p}{g f_p s_0} x \right] \quad (3.69)$$

である。ここに、添字 p はピークに関する量であることを意味し、また F_{rp} は,

$$F_{rp}^2 = \frac{v_p^2}{g f_p} = \left(\frac{1}{n} s_0^{1/2} f_p^{2/3} \right)^2 / g f_p \quad (3.70)$$

で定義されるピークでの水深と同じ水深をもつ等流の Froude 数である。

逐次近似解 (3.67) 式から,

$$h_p(x, t) = f_p \exp \left[\frac{27}{250} \left(\frac{1}{F_{rp}^2} - \frac{4}{9} \right) \frac{\ddot{f}_p}{g f_p s_0} x \right] \quad (3.71)$$

である。ピークでは、 $\ddot{f} < 0$ であるから、 $F_{rp} < 3/2$ である限り、(3.69) および (3.71) 式はピークの減衰を表わす ($F_{rp} > 3/2$ のときの挙動は、2.6ですでに述べたとおりである)。(3.69) および (3.71) 式は、それぞれ高橋³¹⁾ および林³¹⁾ がピークの減衰に関して導いた結果と同じである。ただし、(3.69) および (3.71) 式の適用範囲が、上流端で水深が f_p のときに出た伝播直線が、kinematic shock の軌跡と交わるまで ($x = x_s$ とする) に限られることは、いままで述べてきたとおりである。

(4) 水深のピークの減衰

上記の適用限界 $x = x_s$ までに、(3.69) および (3.71) 式によってどの程度のピークの減衰が生ずるかを求める。簡単のため、 $f(t)$ の関数形を $t < T_i$ までは一定、その後 $t = T_p$ で $f_p = f(T_p)$ に達するものとし、 T_p から出た伝播直線が、kinematic shock の軌跡と交わるときのもう一方の伝播直線が、上流端を出発する時刻を T_0 とし、 $T_0 < T_i$ としておく (図3.7)。このとき、(3.10) 式より

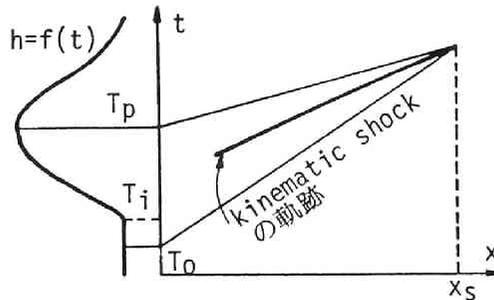


図3.7 ピークの伝播と kinematic shock

$$T_p - T_0 = x_s \left(\frac{1}{w_0} - \frac{1}{w_p} \right) \quad (3.72)$$

が成立する。ここに、 w_0 および w_p は、それぞれ T_0 および T_p から出る kinematic wave の伝播速度である。つぎに、(3.13) 式 (この場合 $q_*(T) = (1/n)s_0^{1/2}f(T)^{5/3} = (3/5)wf(l)^{2/3}$ である) および (3.72) 式から、

$$\frac{q_*(T_p) - q_*(T_0)}{2}(T_p - T_0) = \frac{1}{5}x_s \left\{ 2f(T_p) + f(T_0) - \frac{3q_*(T_0)}{q_*(T_p)}f(T_p) \right\} \quad (3.73)$$

が、 T_i から T_p までの f の変化を直線的と仮定することにより、近似的に導かれる。いま、 $q_*(T_p) \gg q_*(T_0)$ とすれば、(3.73) 式より

$$O(x_s) = w_p(T_p - T_i) \quad (3.74)$$

が得られる。一方、 $O(\ddot{f}_p) = \ddot{f}_p/(T_p - T_i)^2$ であるから、これより (3.69) 式の右辺の括弧内の第 2 項あるいは (3.71) 式の右辺の指数は、 $x = x_s$ のとき、次式の程度と評価される。

$$\frac{27}{250} \left(\frac{1}{F_{r_p}^2} - \frac{4}{9} \right) \frac{\ddot{f}_p}{gf_p s_0} x \Big|_{x=x_s} = O\left(\frac{\ddot{f}_p}{gf_p s_0} x_s \right) = O\left(\frac{w_p}{gs_0(T_p - T_i)} \right) \quad (3.75)$$

kinematic wave 理論の適用性から考えて、上流端の水深の上昇率は (2.22) 式の第 2 式の K より、十分小さくなければならない。すなわち

$$\frac{f(T_p) - f(T_i)}{T_p - T_i} \ll O(\lambda h_0) = O\left(\frac{gs_0 h_0}{v_0} \right) \quad (3.76)$$

である (v_0 は、水深が $f(T_i)$ のときの等流の流速である)。以上より、

$$O\left(\frac{\ddot{f}_p}{gf_p s_0} x_s \right) \ll O\left(\frac{w_p}{w_0} \frac{f(T_0)}{f(T_p) - f(T_0)} \right) \approx O\left[\left(\frac{f(T_0)}{f(T_p)} \right)^{1/3} \right] \quad (3.77)$$

が導かれる。 $f(T_0) < f(T_p)$ であるから、(3.77) 式より結局、

$$O\left(\frac{\ddot{f}_p}{gf_p s_0} x_s \right) \ll 1 \quad (3.78)$$

が得られる。すなわち、摂動解 (3.69) 式および逐次近似解 (3.71) 式のいずれにおいても、ピークは kinematic shock に巻き込まれるまでには、それ程減衰しないといえる。

(5) 無次元のパラメータ σ

林および高橋の理論を、3.3の方法に照らして比較するとつぎのようである。林の理論では、無次元のパラメータ σ として、 $\sigma_H = \sqrt{-\ddot{f}_p/g}/s_0$ が採られているのに対し、高橋の理論では上流端の水深のハイドログラフとして図3.8のような 2 種類が想定され、無次元パラメータとして $\sigma_T = (f_p -$

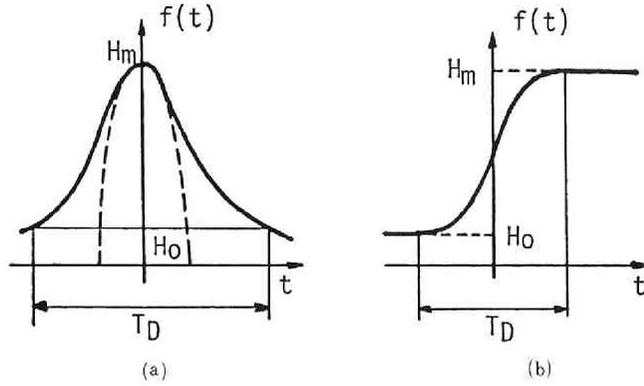


図3.8 上流端のハイドログラフ

$f_0/s_0\sqrt{gf_p}T_D$ が採られている。いま、とくに図4.8(a)のような hump 状のハイドログラフを考えると、ピークにおいてこれに接する放物線を $f_1(t)$ とすると、

$$f_1(t) = f_p + \frac{1}{2}\ddot{f}_p t^2 \quad (3.79)$$

である（原点はハイドログラフのピークに採られている）。この放物線が t 軸と交わる点を t_0 とすれば、 $t_0 = \sqrt{-2f_p/\ddot{f}_p}$ である。ここで、(3.17) 式の時間スケール T_* として、 $T_* = t_0/\sqrt{2} =$

$\sqrt{-f_p/\ddot{f}_p}$ をとると、林のパラメータ σ_H は、

$$\sigma_H = \frac{\sqrt{-\ddot{f}_p/g}}{s_0} = \frac{f_p}{\sqrt{gf_p}T_*s_0} \quad (3.80)$$

である。(2.16) 式と比較すれば明らかに、 σ_H では、水深方向の長さのスケールとして f_p 、時間スケールとして $t_0/\sqrt{2}$ および速度のスケールとして $\sqrt{gf_p}$ がとられていることが分る。一方 σ_T では、水深方向の長さのスケールとして $(f_p - f_0)$ 、時間スケールとして T_D および速度のスケールとして $\sqrt{gf_p}$ がとられている。

以上のことから、 σ_H と σ_T の差は、基礎式を無次元化するときの長さ、時間および速度のスケールの採り方の差と考えることができる。いずれも水深方向のスケールと、 x 方向のスケール（速度スケールと時間スケールの積）との比を、底こう配 s_0 で除した量であるという意義においては変りないといえる。また、第2次近似解を求める方法は、摂動法（高橋）および逐次近似法（林）とそれぞれ異っているが、いずれの方法によっても、両者は波形の全体を通じて大差のない結果をもたらすことは、3.4(1)で述べたとおりである。

3.5 拡散項を含む第2次近似

(1)基礎式

前節までに詳述したように、摂動法および逐次近似法による kinematic wave の第2次近似においては、その適用範囲が、伝播直線が kinematic shock に巻き込まれるまでに限られている。したがって、これらの方法では kinematic shock の発生に伴って生ずる不連続な解を連続な解に置き換える方法や、さらに kinematic shock の位置をあらかじめ知っておかなければならないという3.2で述べた kinematic wave 理論のもつ計算上の問題点はそのまま残されている。

kinematic wave の第2次近似のもう一つの考え方である基礎式に拡散項を含める方法においては、拡散項の導入により、水深の減衰が表わされるだけでなく、kinematic shock での不連続性が緩和され連続な水面が得られることが予想され、したがって上のような計算上の困難さも回避できると考えられる。

このような第2次近似の方法については、いくつかの研究が行われている⁸⁾が、洪水の波形全体を対象にする代表的な方法が速水の理論⁶⁾である。これは従来、擬似定流として分類されている方法で、その基礎式はつぎのようにして導かれる。すなわち、(2.2)式において、第1次近似では左辺の諸量がすべて右辺に比べて小さいとして無視されたのであるが、速水の理論においては洪水時の水理諸量のうち、もっとも大きな影響をもつ水面こう配の項が実測値より取り入れられ、(2.2)式はつぎのように近似されている。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = s_0 - s_f \quad (3.81)$$

ここで、抵抗則として Manning 公式を適用すると、(3.81)式は

$$q = \frac{1}{n} s_0^{1/2} h^{5/3} \left(1 - \frac{1}{s_0} \frac{\partial h}{\partial x}\right)^{1/2} \quad (3.82)$$

となる。連続式(3.1)式と(3.81)式(あるいは(3.82)式)によって、拡散項を含む kinematic wave 理論の第2次近似が構成される。すなわち、(3.1)式に(3.82)式を代入すれば、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{q}{2s_0 \left(1 - \frac{1}{s_0} \frac{\partial h}{\partial x}\right)} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3.83)$$

が導かれる。ここに、 $w = (5/3)q/h$ で表わされる kinematic wave の伝播速度である。右辺の $\partial^2 h / \partial x^2$ の項は、水深 h を“拡散”させる作用を有しており、この項の存在により、洪水の水深の減衰が表わされるとともに、kinematic shock での不連続性が緩和される。(3.83)式は通常さらにつぎのように近似される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (3.84)$$

ここに,

$$\mu = \frac{q}{2s_0} \quad (3.85)$$

である。(3.1) および (3.81) 式 (または (3.82) 式), あるいは (3.84) 式で示される拡散項を含む第2次近似の基礎式はいずれにせよ非線型方程式であり, 解析的に解くことはできない。したがって, 解を得るには一般に数値的な方法によらなければならないが, これについては4.2で述べることにし, 本節では (3.84) 式を線型化した場合の解を求め, 拡散項を含む kinematic wave 理論の特徴をまとめるとともに, 前節までの摂動法および逐次近似法との関連について, 二, 三触れることにする。

(2)線型化

2.4と同様の線型化を (3.84) 式について行う。すなわち, 水深 h_0 , 流速 v_0 の定常等流状態を考え, これに微小な擾乱が加えられたとして, $h = h_0 + \eta$, $v = v_0 + u$ と置けば, (3.84) 式はつぎのように線型化される。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{5}{3} v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (3.86)_1$$

または

$$-gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2\lambda \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{5}{3} v_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.86)_2$$

ここに,

$$\mu_0 = v_0 h_0 / 2s_0 \quad (3.87)$$

であり, また $\lambda = gs_0/v_0$ で (2.21) 式で定義されたとおりである。いうまでもなく, (3.86) 式は, (2.28) 式において (3.81) 式に対応するように, (2.28) 式の左辺の第1項および第2項, すなわち $\partial u / \partial t$ および $v_0 \partial u / \partial x$ を省略した式と, (2.27) 式とから v_0 を消去した式と同一である。つまり, (2.29) 式から上に省略された項の影響を示す $\partial^2 \eta / \partial t^2$, $2v_0 \partial^2 \eta / \partial t \partial x$ および $v_0^2 \partial^2 \eta / \partial x^2$ を消去すれば, (3.86) 式の第2式が得られる。

さて, 2.4と同じように, (2.30) 式の初期および境界条件のもとでの (3.86) 式の解を求める。(3.86) 式の第2式を2.4と同様に Laplace 変換した後, 下流側へ伝わる解を求めると, (2.38) および (2.34) 式に代って, この場合にはつぎの結果が得られる。

$$\bar{\eta}(x, t) = \bar{f}(s) e^{r_2 x / \sqrt{gh_0}} \quad (3.88)$$

$$r_2 = \frac{5}{3} \lambda F_r - \sqrt{2\lambda s + (25/9)\lambda^2 F_r^2} \quad (3.89)$$

ここに、 $F_r = v_0/\sqrt{gh_0}$ 、 $\bar{\eta} = \int_0^\infty \eta(x, t)e^{-st}dt$ であり、また $f(s)$ は上流端の境界条件である水深ハイドログラフ $f(t)$ の Laplace 変換である。(3.88) 式を逆変換すれば、この場合の解 η がつぎのように求められる。

$$\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{\frac{w_0 x}{2\mu_0}} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{\mu_0 \tau^3}} f(t - \tau) e^{-\frac{w_0^2}{4\mu_0} \tau - \frac{x^2}{4\mu_0 \tau}} d\tau \quad (3.90)$$

ここに、 $w_0 = (5/3)v_0$ であり、(3.86)₁ 式で示される kinematic wave の伝播速度である。(3.90) 式に、 $\tau = x^2/4\mu_0\kappa^2$ の変数変換を行えば、

$$\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{w_0 x}{2\mu_0}} \int_{x^2/2\mu_0 t}^\infty f\left(t - \frac{x^2}{4\mu_0 \kappa^2}\right) e^{-\kappa^2 - (w_0 x/2\mu_0)^2/4\kappa^2} d\kappa \quad (3.91)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2/2\mu_0 t}^\infty f\left(t - \frac{x^2}{4\mu_0 \kappa^2}\right) e^{-\kappa^2 - w_0 x/4\mu_0 \kappa^2} d\kappa \quad (3.92)$$

となり、速水と一致した結果が得られる。(3.86) 式は線型化されており、したがって kinematic wave の伝播速度は一定であるから、kinematic shock は発生しない。つまり、(3.92) 式では、kinematic wave の伝播速度の違いによる波形の急峻化 (kinematic wave の非線型性) は示されず、拡散項による波形の平滑化だけが表われている。

(3) 水深のピークの伝播

2.4 と同様に、 $t \gg 1/\lambda$ のとき、擾乱の主要部の伝播はつぎのように導かれる。まず、(3.88) 式の逆変換を、

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{t-i\infty}^{t+i\infty} f(s) e^{t m r_2 + s} ds \quad (3.93)$$

と表わす。ここに、 $m = x/t\sqrt{gh_0}$ である。2.4 と同様に鞍部点法を適用することにし、(3.93) 式の指数部の鞍部点 s_s を求めると、 $d(m r_2 + s)/ds = 0$ より、次式が得られる。

$$s_s = \left(m^2 - \frac{25}{9} F_r^2\right) \lambda / 2 \quad (3.94)$$

また、鞍部点において、 $d^2(m r_2 + s)/ds^2|_{s=s_s} = 1/m^2 \lambda$ であるから、 $t \gg 1/\lambda$ のとき (3.93) 式はつぎのように近似される。

$$\eta \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} m f(s_s) \sqrt{\frac{\lambda}{t}} e^{(m r_2 + s)|_{s=s_s} t} \quad (3.95)$$

x を固定したときの η の極大値は、(3.95) 式の指数部より $d(mr_2 + s)|_{s=s_s}/dm = 0$ のとき生ずる。すなわち、 $r_2|_{s=s_s} = 0$ と (3.89) および (3.94) 式より $s_s = 0$ 、つまり $m = (5/3)F_r$ のとき (3.95) 式は極大となることが分る。 $s_s = 0$ のとき、 $(mr_2 + s)|_{s=s_s} = 0$ であり、また $\bar{f}(s_s)|_{s_s=0} = \int_0^\infty f(t)dt$ であるから、結局 (3.95) 式で示される η の極大値 η_{\max} 、つまり擾乱の主要部は、

$$\eta_{\max} \doteq \frac{5}{3}F_r \left(\frac{\lambda}{2\pi t} \right)^{1/2} \int_0^\infty f(t)dt \quad (3.96)$$

という漸近解で表わされる。(2.47) 式と比較すれば明らかなように、(3.96) 式では、(2.47) 式の $1 - (4/9)F_r^2$ の項が 1 で近似されており、この差が、(2.28) 式から $\partial u/\partial t$ および $v_0 \partial u/\partial x$ の項を省略したことの影響とみることが出来る。 $\eta_{\max} \propto t^{-1/2}$ になることは、(3.86) 式という拡散の式の解として当然の結果である。もちろん、線型化されているので、前に述べたように波形の急峻化は (3.96) 式に含まれていない。また、(3.96) 式の η_{\max} は $m = (5/3)F_r$ 、すなわち $x = (5/3)v_0 t = w_0 t$ で生ずるから、擾乱の主要部は、2.4の結果と同様に kinematic wave の速度で伝播することが分る。

(4)水深のピークの伝播に及ぼす拡散項の影響

上流端の境界条件 $f(t)$ に、特殊な場合として δ 関数を考えたとき、(3.92) 式はつぎのように表わされる。

$$\eta \approx \frac{Cx}{\sqrt{\pi\mu_0 t^3}} e^{-|x-w_0 t|/4\mu_0 t} \quad (3.97)$$

ここに、 C は次元をそろえるための定数である。右辺の関数を φ_c とおけば、

$$\frac{\partial \varphi_c}{\partial t} = \frac{Cx}{4\sqrt{\pi\mu_0^3 t^3}} (-w_0^2 t^2 - 6\mu_0 t + x^2) e^{-|x-w_0 t|/4\mu_0 t} \quad (3.98)$$

であるから、 φ_c の最大値は、

$$t = -\frac{3\mu_0}{w_0^2} + \sqrt{\frac{9\mu_0^2}{w_0^4} + \frac{x^2}{w_0^2}} \quad (3.99)$$

のときに現われる。すなわち、(3.97) 式のピークの出現時刻は (3.99) 式で与えられる。(3.99) 式より、流下距離が小さい ($w_0 x/\mu_0 \ll 1$) のとき、 $t > x/w_0$ であるから、拡散 (μ_0) の影響によりピークは kinematic wave より速く伝播することが分る。一方、流下距離が大きい ($w_0 x/\mu_0 \gg 1$) のときには、 $t \approx x/w_0$ と近似できるから、ピークは kinematic wave と同じ速さで伝播する。このとき、 $w_0 x/\mu_0 \gg 1$ は、 t を用いれば、 $t \gg \mu_0/w_0^2 \approx 1/\lambda F_r$ とできるから、前項で述べた $t \gg 1/\lambda$ のとき擾乱の主要部が kinematic wave の速度で伝播するという結果は、ここでも裏づけられたといえる。

(5) 摂動解および逐次近似解との比較

(3.96) 式は、誘導過程から明らかなように、時間が十分に経過したときの解であり、このときには、3.1で述べた第1次近似では kinematic shock がすでに現われているものとみられる。また、(3.97) 式は境界条件が δ 関数の場合の解であって、このときには第1次近似の kinematic shock は原点 $x = 0$ から生ずるものと考えられる。つまり、(3.96) および (3.97) 式はいずれにせよ kinematic shock が現われているときの解であり、したがって kinematic shock の発生までしか適用性のない3.3の摂動解および逐次近似解との比較はできない。むしろ、拡散項の導入により、第1次近似の kinematic shock で不連続な解が、(3.96) あるいは (3.97) 式のような連続な解に置き換わるとみることができる。

流下時間および流下距離が比較的短い場合には、(3.1) および (3.81) 式よりなる系に、摂動法あるいは逐次近似法と同様の取扱いが可能である。それらは3.3と全く同じように進められるので省略するが、ピークに限ってその結果を示すとつぎのようになる。

$$\text{摂動法: } h_p(x, t) = f_p \left[1 + \frac{27}{250} \frac{1}{F_{rp}^2} \frac{\ddot{f}_p}{g f_p s_0} x \right] \quad (3.100)$$

$$\text{逐次近似法: } h_p(x, t) = f_p \exp \left[\frac{27}{250} \frac{1}{F_{rp}^2} \frac{\ddot{f}_p}{g f_p s_0} x \right] \quad (3.101)$$

記号は (3.69) あるいは (3.71) 式と同様である。(3.100) および (3.101) 式では、(3.69) および (3.71) 式における $(1/F_{rp}^2 - 4/9)$ が $1/F_{rp}^2$ に代っている。これは、(2.47) 式と (3.96) 式とを比較したときと同様であって、(3.81) 式で省略されている $(1/g)\partial v/\partial t$ および $(v/g)\partial v/\partial x$ の影響が上述のような差をもたらすといえる。(3.100) および (3.101) 式は、(3.69) および (3.71) 式と同様に、第1次近似においてピークが kinematic shock に巻き込まれるまでにしか適用できないから、この節のねらいである拡散項の導入による kinematic shock の回避を満たすものではない。

摂動解 (3.64) あるいは逐次近似解 (3.67) 式と、(3.92) 式を直接的に比較することはできない。第5章で述べる数値計算の例によれば、波先の伝播やピークの減衰に関して、(3.64) あるいは (3.67) 式と (3.92) 式とが、ほとんど同じ結果をもたらす場合もあるが、境界条件の時間的変化が急な場合のように、(3.92) 式の方が (3.64) あるいは (3.67) 式より妥当と思われる結果をもたらすこともある。

(3.92) および (3.96) 式はともに線型の場合の解である。したがって、前に述べたように kinematic wave の伝播速度の違いによる波形の急峻化はもともと考えられていない。さらに、第1次近似において kinematic shock が現われる場合、上流端の境界条件 $f(t)$ が微小な intumescence でない限り、kinematic shock を挟む上・下流側の水深の差はかなり大きく、そのときには線型化の仮定そのものが満たされない。このことから、第1次近似で kinematic shock が現われるとき、そこでは線型解である (3.92) および (3.96) 式は適用できないといえる。つまり、(3.92) および (3.96) 式

は拡散項の導入により kinematic shock のような変化の急な部分でも連続な解を与えるものの、kinematic shock が現われた場合には実用的な点からみればそれほど広い適用性を有しているとは考えられない。拡散項を含む第 2 次近似で洪水を実際に解析するには、結局多くの場合 (3.1) および (3.81) 式よりなる系、あるいは (3.84) 式をそのまま数値的に解析しなければならないということができよう。

3.6 結 語

本章では、kinematic wave 理論について詳述した。洪水の数値的な解析への適用を念頭に置いてはいるものの、理論的な取扱いに終始した。また理論的な取扱いを容易にし、見通しのよい結果を得るために、水路は幅が十分に大きく単位幅での取扱いが可能である場合に限定せざるを得なかった。しかし、これにより水路形状に関する複雑な条件が単純化され、kinematic wave 理論のもつ基本的な特徴が明確にされたと考えられる。この章を要約すればつぎのようである。

(1) kinematic wave の第 1 次近似による流れの計算法を、kinematic shock の発生前と後に分けて示した。kinematic wave の第 1 次近似では波形の変形は示されるが減衰は示されず、また上流端の境界条件（水深あるいは流量）が時間的に増加するとき伝播直線が最終的に交差して kinematic shock が不可避的に発生することを明らかにした。つぎに、kinematic shock が一たび発生すればその軌跡を予め求めておかなければならず、その方法として図 3.3 のような手順を考えた。さらに kinematic shock は単斜上昇波で置き換えられうるが、その方法は機械的な計算に適していないことを述べた。

(2) kinematic wave 理論の第 1 次近似のもつ問題点（波形の減衰と kinematic shock の発生）に対処するための第 2 次近似として、第 1 次近似の解をもとにして摂動法あるいは逐次近似法によって第 2 次近似を求める方法と、洪水流では水面こう配の影響が大きいとし、これにより拡散項が導入される方法とがあることを示した。

(3) 水深方向の長さのスケールと流れ方向の長さのスケールの比を底こう配で除した無次元量を用いて、波形全体を対象とした摂動法および逐次近似法による第 2 次近似から、波形の減衰を表わす解を導いた。さらに、摂動法による解と逐次近似法による解は、流れの変化が緩やかな場合互いに大差がなく、またこれらの結果はピークの減衰に関しては従来の結果と一致することを示した。さらに、ピークが kinematic shock に巻き込まれるまでのピークの減衰はそれほど大きくないことなどが得られたが、また同時にこれらの解の適用範囲は kinematic shock までに限られることも明らかにされ、摂動法や逐次近似法では kinematic shock の問題は克服できないことが知られた。

(4) 拡散項を含む第 2 次近似では、拡散項の導入により波形の減衰が表わされるとともに、kinematic shock での不連続性が緩和されることを述べた。線型化された場合の解析的な解により、拡散項の効果が確かめられたが、線型化されたために kinematic wave の非線型性による波形の急峻化は当然表わされなかった。また、拡散項を含む第 2 次近似を実際の洪水に適用するには、数値的な計算法によらなければならないことを示した。

参考文献

- 1) 山口昌哉, 野木達夫: 数値解析の基礎—偏微分方程式の初期値問題, 共立出版, 1969
- 2) Lighthill, M. J. and G. B. Whitham : On the kinematic waves, Part I , Proc. Roy. Soc. London, A, Vol. 229, 1955
- 3) 林泰造: Mathematical theory and experiment of flood waves, 土木学会論文集, 18号, 1954
- 4) 田中清: On the quasi-steady flow in open channel, Technology of Osaka Univ., Vol. 2, No. 44, 1952
- 5) 高橋保: 一様水路の不定流, 京都大学防災研究所年報 B-12, 1969
- 6) 速水頌一郎: On the propagation of flood waves, Bulletin of Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., No. 1, 1951
- 7) 岩佐義朗, 井上和也: 洪水流の数値シミュレーションに関する一考察, 第18回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会, 1974
- 8) Gilcrest, B. R. : Flood routing, Chap. 10, "Engineering Hydraulics", edited by H. Rouse, John Wiley & Sons, 1950

第4章 一次元流れの数値計算法

4.1 概 説

前章までに述べた一次元開水路流れの kinematic wave 理論あるいは dynamic wave 理論のいずれにおいても、解析的な手法による解は線型化された特殊な場合にしか求められず、解を得るには一般には数値計算の手法によらなければならない。一次元の非定常流の数値計算法として一般的な方法は、 $x-t$ 平面に予め設定されている格子点において解を時間的に順次求めてゆく差分法であり、本章においてもこの方法を採用することにする。

さて、非定常流のこのような数値計算においては、つぎの諸点についての考慮が必要とされる。^{1,2)}

- (i) 適切性：基礎方程式がある初期値のもとで一意的な解を有し、しかも初期値のわずかな変化に対して解はわずかしか変化しないこと。本研究で取扱う問題は双曲型で記述されるので、この条件はつねに満たされている³⁾と考えてよい。
- (ii) 一致性：数値計算にあたっては、基礎方程式は何らかの方法で離散化（差分化）される。その結果の差分方程式が、差分の大きさを0に近づけたときに、もとの微分方程式に一致すること。差分方程式に Taylor 展開を導入することによって検討される。
- (iii) 収束性：差分方程式の厳密解が、差分の大きさを0にしたときに、もとの微分方程式の解に一致すること。
- (iv) 安定性：数値解に含まれる丸めの誤差の累積が、全計算時間の範囲で時間的な離散化の大きさ（時間間隔 Δt ）を小さくしても、増大しないこと。

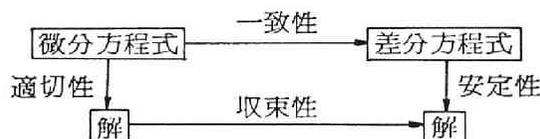


図4.1 微分方程式と差分方程式

これらの4つの条件の相互関係は図4.1に示されるとおりであり、(i)、(ii)および(iv)が満たされれば、(iii)は保証される（Laxの同等定理^{1,4)}）。実際の数値計算において、最も注意しなければならないのは、時間間隔 Δt の大きさを直接制限することになる安定性の問題である。このためのいくつかの必要条件は後に示されるが、実際には計算を実施しながら、試行錯誤的な検討を加えなければならない場合が多い。

差分法による非定常流の数値計算では、与えられた境界条件と、何らかの方法によって定められた初期条件のもとに、時間を追って順次流れの挙動が解析される。その場合の計算法は、数値計算の立場からつぎの2つに大別される。すなわち、一つは前回の計算結果からつぎの時間での未知量が陽に解かれた形となっている explicit 法の差分法であり、もう一つは未知量が陽に解かれていないで、多

くの場合未知量に関する連立一次方程式に帰着される implicit 法の差分法である。explicit 法の特徴としては、解法が比較的容易であり、したがって計算のプログラムも簡単となる反面、安定性に関して implicit 法より厳しい条件が加わることとされている。implicit 法は、explicit 法と全く逆の特徴もっている。これらのうち、いずれを採るかは一概に決めることはできず、対象とする流れの性質や解析の目的などに照らして検討されなければならない。しかし、本研究で扱う流れの場合には、いずれも後述する C. F. L. (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件が、計算の安定性からだけでなく、水理学的な観点からも考慮されるべきであるから、implicit 法を採っても、時間間隔 Δt を大きくとれるという特質が十分に活かされないおそれがある。また、計算の実行という面からみれば、最近の計算機の一層の高速化により、時間間隔 Δt が小さくても（その分計算の繰り返し回数が増えても）、計算処理が十分可能となっているので、プログラムが implicit 法より比較的容易に組める explicit 法の方が、適用しやすくなっていることも考慮に入れるべきであろう。本研究では、以上のことを考え、すべて explicit な差分法を適用することにする。

以下の本章においては、主として洪水流の解析に適用することを念頭において、まず kinematic wave 理論に基づく数値計算法について考察をすすめ、ついで dynamic wave 理論による数値計算法を保存則系の形で取扱ひ、保存則系に対する代表的な差分法である Lax-Wendroff 法と、第 2 章で展開した特性曲線による表示を用いて特性曲線の方角に応じて差分のとり方を変える特性曲線法との、二つの差分式を導くとともに、両者の比較・検討を行う。さらに、実際の計算において最も問題となる安定性について検討し、安定性の必要条件を導くとともに、流れそのものが不安定な場合についても若干の考察を行う。最後に、特性曲線法による差分法を用いて数値計算するための具体的な方法を、境界条件、初期条件および分・合流部の取扱ひも含めて詳述し、さらに境界での水量の連続性について触れる。

本章では、dynamic wave 理論による数値計算法に重点が置かれている。その理由として、実際の水路や河道の非定常流を kinematic wave 理論によって数値計算するとき、

- (i) 必要とされる諸係数（後述する w や μ ）に関して十分な資料が得られない、
- (ii) kinematic wave 理論が基本的に上流から下流へ伝わる影響だけを表わして、下流から上流へ伝わる影響を表現できないため、下流端や分・合流点を水理学的に正しく取扱えない、
- (iii) 計算機の高速化により kinematic wave 理論による数値計算法が計算上特別の利点を有しなくなった、

ことなどが挙げられる。kinematic wave 理論による数値計算法は周知のように、流出解析⁵⁾において威力を発揮しており、本章で述べるような拡散項を含む kinematic wave 理論の数値計算法も流出解析に適用性があると考えられる。

dynamic wave 理論による数値計算法では、特性曲線法を中心に研究をすすめることにする。それは、1.6で述べたように、特性曲線が dynamic wave による影響の伝播という流れのもつ水理学的な特徴を最もよく表現していて、数値計算にあたって境界条件の取扱ひなどにおいて水理学的にみて

最も適切な方法を与えるからである。

なお、実際の数値計算への適用例は、次章で述べることにする。

4.2 kinematic wave 理論による数値計算法

kinematic wave 理論の基礎式は、幅が十分に広く単位幅での取扱いが可能な場合、(3.1)および(3.2)式で表わされる。それらを再記すれば、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (4.1)$$

$$h = h(q) \quad (4.2)$$

である。ただし、 $h(q)$ は第3章では $F(q)$ と表わされていた関数で、単位幅流量 q と水深 h の関係を表わしている。単位幅でなく全断面を扱う場合は、(4.1)および(4.2)式に代って、次式が用いられる。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

$$A = A(Q) \quad (4.4)$$

あるいは、(4.3)および(4.4)式をまとめて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x} \right) A = 0, \quad w = \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{A'(Q)} \quad (4.5)$$

が用いられる。

(4.1)および(4.2)式を用いた kinematic wave 理論の取扱いは第3章で詳述したとおりであり、その第1次近似は、kinematic shock が現われるまでは(3.8)および(3.9)式、kinematic shock が現われた後は(3.8)、(3.10)および(3.13)式によって構成される。ただし、(4.3)および(4.4)式を用いた場合には、第1次近似においても、上のような一般的な表示はできないので、数値的な方法によらなければならない。

第2次近似には、すでに述べたように摂動法あるいは逐次近似法によって解く方法と、拡散項を導入する方法とがあるが、摂動法あるいは逐次近似法は第1次近似で生ずる kinematic shock での特別な取扱いを除去しうるものではなかった。拡散項を導入する方法は、速水の理論に代表されるとおりで、基礎式に含まれる拡散項によって kinematic shock による不連続が緩和され連続な水面形が得られることが期待され、水理学的にみて適切なばかりでなく、数値計算上も好ましいといえる。したがって、本節では、kinematic wave 理論の第1次近似と拡散項を含む第2次近似の数値計算法について考察する。

(1) 第1次近似の差分式

第3章で述べたような伝播曲線 $dx/dt = w (= dQ/dA)$ に沿って解を求める方法の数値的な取扱い、流出解析における kinematic wave 法と同様に進められる⁵⁾ので省略し、 $x-t$ 平面上に設定された格子点について解を求める差分法を考える (図4.2)

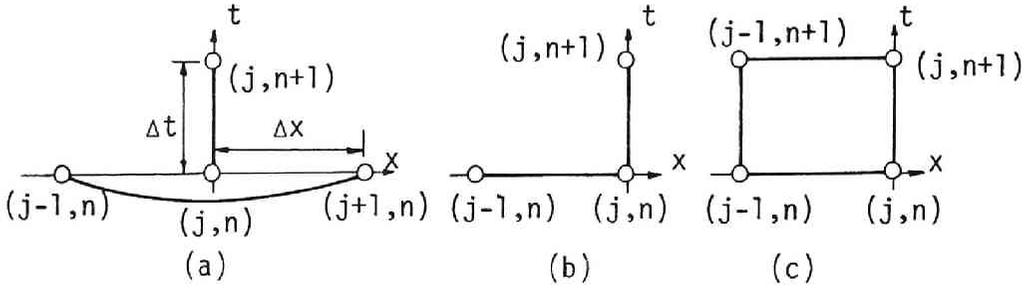


図4.2 kinematic wave の差分 scheme

(i) x に関して中央差分, t に関して前方差分をとる: このとき(4.3)式はつぎの差分式に改められる。

$$\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (4.6)$$

ここに、添字 j および n は、 $x = j\Delta x$, $t = n\Delta t$ における値であることを示す (Δx および Δt : それぞれ x および t の差分の大きさ)。 $A_j^{n+1} = A_j^n + (\partial A / \partial t)_j^n \Delta t + O(\Delta t^2)$, $Q_{j+1}^n = Q_j^n + (\partial Q / \partial x)_j^n \Delta x + O(\Delta x^2)$, $Q_{j-1}^n = Q_j^n - (\partial Q / \partial x)_j^n \Delta x + O(\Delta x^2)$ として(4.6)式に代入すれば、

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right)_j^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^2) = 0 \quad (4.7)$$

であるから、(4.6)式の正確度³⁾は1であり、一致性の条件を満たしている。(4.4)および(4.6)式を連立させれば、所要の解が求められる (以下、(ii)および(iii)についても同様)。ただし、(4.6)式の差分式は、後に示すように、実は不安定な差分式である。

(ii) x に関して後方差分, t に関して前方差分をとる: このとき(4.3)式はつぎの差分式に改められる。

$$\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (4.8)$$

(4.8)式は上と同様の検討により正確度が1であり、一致性の条件を満たしていることが分る。(4.8)式は、第1次近似の伝播曲線 (特性曲線) による表示である(4.5)式において、洪水の伝播速度 $w = dQ/dA$ がつねに正であること、すなわち kinematic wave の軌跡としての特性曲線がつねに下流向きであることを考慮したもので、一種の特性曲線法といえる。

(iii) Box scheme : 図4.2 (c) のような格子について差分化を行う方法で、以下のように表わされる。

$$\frac{A_j^{n+1} + A_{j-1}^{n+1} - A_j^n - A_{j-1}^n}{2\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j-1}^n + Q_j^{n+1} - Q_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (4.9)$$

(4.9)式に、 $A_j^{n+1} = A_{j-1/2}^{n+1/2} + (\partial A / \partial t)_{j-1/2}^{n+1/2}(\Delta t/2) + (\partial A / \partial x)_{j-1/2}^{n+1/2}(\Delta x/2) + \dots$ などを代入すれば、(4.9)式の正確度は2であることが確かめられ、一致性の条件が満たされていることが分る。この差分式は implicit な差分法の一つで、最も直観的な方法であり、また(4.8)式より精度も高いが、実際の計算では数値解に鋸歯状の変動が発生することがしばしばあり、必ずしも好ましいとはいえない。

以上の計算法はいずれも解が kinematic shock に巻き込まれるまで適用される。つまり、 $x-t$ 平面上に kinematic shock が生じていても、shock 以外では上の計算法がいずれもそのまま適用されるのであるが、そのためには shock の $x-t$ 平面における位置 (軌跡) を予め知っておかなければならない。基礎式として、(4.1)および(4.2)式が適用されるような単位幅での取扱いが可能な場合には、shock に対して(3.13)式のように定式化でき、shock の位置はたとえば図3.3の方法によって求めることができるが、ただこの場合においてさえ、 $x-t$ 平面上に設定された格子点のもとで、機械的な(4.6)~(4.9)式の差分式を時間 t について順次適用してゆくような意味で一計算によって、kinematic shock の位置を求めることは不可能である。まして、基礎式に、より一般的な(4.3)および(4.4)式が適用される場合には、なおさら shock の位置を機械的に求めることはできない。これらのことから、前章で述べたような kinematic shock が現われる場合、kinematic wave 理論の第1次近似は差分法によって機械的に解くことはできないといえ、(4.6)~(4.9)式の適用範囲は結局 kinematic shock が現われるまでといえる。

(2) 第2次近似の差分式

第1次近似では、洪水の変形は表わされるが、減衰は表現できていない。また、kinematic shock の取扱いは上述のように機械的な計算では困難である。3.5で述べたように、kinematic wave 理論の第2次近似では、拡散の効果により洪水の減衰および kinematic shock の平滑化が表現されている。したがって、たとえ第1次近似で kinematic shock が発生しても、第2次近似では shock においても連続な解が期待されるから、shock と shock 以外とで差分式を変更せずに、機械的な計算が可能であると考えられる。以下においては、拡散項を含む第2次近似の差分式を導くことにするが、第2次近似において基礎式が定式化ができるのは、前章で述べたように単位幅の取扱いが可能な場合だけであるので、ここでもそのような取扱いに限ることにする。つまり、基礎式は(4.1)式の右辺に拡散項 $\mu \partial^2 h / \partial x^2$ をつけ加えた式である。ここに、 $\mu = q / 2s_0$ である ((3.84)および(3.85)式参照)。

さて、先の (i)~(iii) に相当するこの場合の差分式を表わせば、つぎのようである。

$$(i) \quad \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + w_j^n \frac{h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} = \mu_j^n \frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.10)$$

$$(ii) \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} + w_{j-1/2}^n \frac{h_j^n - h_{j-1}^n}{\Delta x} = \mu_j^n \frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.11)$$

$$(iii) \frac{h_j^{n+1} + h_{j-1}^{n+1} - h_j^n - h_{j-1}^n}{2\Delta t} + w_{j-1/2}^{n+1/2} \frac{h_j^n - h_{j-1}^n + h_{j+1}^n - h_{j-1}^n}{2\Delta x} = \mu_j^n \frac{h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.12)$$

ただし、 w および μ は、 $w = dq/dh$ ((4.2)式) および $\mu = q/2s$ ((3.85)式) から求められる。(4.10)~(4.12)式の左辺には、shock の発生機構である波形の急峻化が含まれており、また一方右辺の拡散項によって shock による不連続性が緩和されるとみられる。

(3) 安定性の検討

差分式の安定性の定義は、4.1で述べたとおりである。このような安定性の検討は、現在までのところ線型化された初期値問題についての考察が中心であって、ここでもそのような取扱いに限らざるを得ないが、これより安定性のためのいくつかの必要条件が導かれる。

まず、(4.6)~(4.12)式を線型化すれば、 w および μ は定数とみなすことができるから、いまこれらを単に w および μ と表わすことにして、一例として(4.10)式を示すとつぎのようである。

$$h_j^{n+1} = h_j^n - \frac{w\Delta t}{2\Delta x}(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \mu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(h_{j+1}^n - 2h_j^n + h_{j-1}^n) \quad (4.13)$$

ここで、 $h^n = \bar{h}^n e^{ikx}$ とおいて、(4.13)式に代入すれば、 $\bar{h}_j^{n+1} = \nu \bar{h}_j^n$ によって定義される増幅因子 ν は、つぎのように求められる。

$$\nu = 1 - \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos x\Delta x) - i \frac{w\Delta t}{\Delta x} \sin x\Delta x \quad (4.14)$$

ここに、 x は擾乱の波数であり、 i は虚数単位である。

$$\nu_r = \text{Re}(\nu) = 1 - \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos x\Delta x), \quad \nu_i = \text{Im}(\nu) = -\frac{w\Delta t}{\Delta x} \sin x\Delta x \quad (4.15)$$

とおくと、

$$\frac{|\nu_r - (1 - 2\mu\Delta t/\Delta x^2)|^2}{(2\mu\Delta t/\Delta x^2)^2} + \frac{\nu_i^2}{(w\Delta t/\Delta x)^2} = 1 \quad (4.16)$$

が得られるから、 ν は図4.3に例示される楕円で表わされる (図は、 $w\Delta t/\Delta x = 0.2$, $\mu\Delta t/\Delta x^2 = 0.15$ の場合)。 $\Delta x = r\Delta t$ (r : 定数) として、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき、 $|\nu| \leq 1 + O(\Delta t)$ であることが、安定性のための von Neumann の必要・十分条件である¹¹⁾ から、これより安定性の必要条件として、 $-1 \leq 1 - 4\mu\Delta t/\Delta x^2$, $w^2\Delta t/2\mu \leq 1$ および $w\Delta t/\Delta x \leq 1$, すなわち、

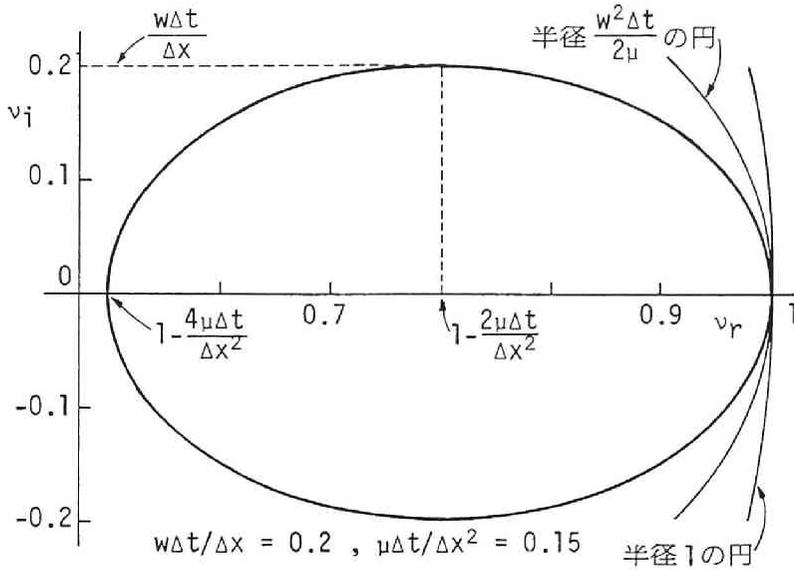


図4.3 (4.14)式の増幅因子 ν

$$\frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \Delta t \leq \frac{2\mu}{w^2} \quad \text{および} \quad \frac{w\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.17)$$

が得られる。(4.17)式の第1式は、熱伝導に関する explicit な差分式の安定条件⁶⁾と同じであり、(4.13)式の拡散項についての差分式からみて当然の結果であろう。また、この関係と(4.17)式の第2式とから、(4.17)式の第3式 $w\Delta t/\Delta x \leq 1$ が導かれるが、これは kinematic wave に関する Courant-Friedrichs-Lewyの条件^{1,6)} (C. F. L. 条件) ということができる。つまり、 $\Delta x/\Delta t$ がこの場合の特性曲線 (伝播曲線) のこう配 w より大きくなければならないこと、すなわち数値的な解の依存域が理論的な解の依存域より大きくなければならないことを意味している。(4.17)式の第2式より明らかのように、 $\mu = 0$ としている(4.6)式は先述のように不安定な差分式であることが分る。

(4.8)式に拡散項をつけ加えた差分式(4.11)式の場合、同様の方法によって、増幅因子 ν は、

$$\nu = 1 - \left(\frac{w\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \right) (1 - \cos \kappa \Delta x) - i \frac{w\Delta t}{\Delta x} \sin \kappa \Delta x \quad (4.18)$$

のように得られ、図4.4のような楕円で示される ($w\Delta t/\Delta x$ および $\mu\Delta t/\Delta x^2$ は図4.3と同じ)。したがって、von Neumannの条件より、先と同様に必要条件として次式が導かれる。

$$\frac{w\Delta t}{\Delta x} + \frac{2\mu\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1 \quad (4.19)$$

これは、(4.17)式の第1式とC.F.L.条件 ((4.17)式の第3式) とを組み合わせる条件とみなすことが

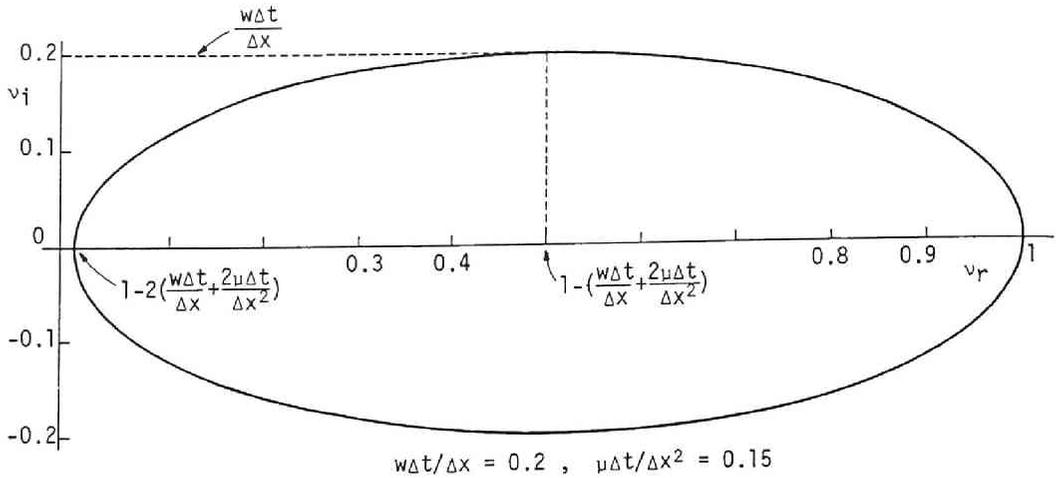


図4.4 (4.18)式の増幅因子 ν

できる。

(4.12)式の差分式の場合も同様にして、増幅因子がつきのように導かれる。

$$\nu = \frac{(1 + e^{-ix\Delta x}) - (1 - e^{ix\Delta x})w\Delta t/\Delta x}{(1 + e^{-ix\Delta x}) + (1 - e^{ix\Delta x})w\Delta t/\Delta x} + \frac{4\mu\Delta t}{\Delta x^2} \frac{\cos x\Delta x - 1}{(1 + e^{-ix\Delta x}) + (1 - e^{ix\Delta x})w\Delta t/\Delta x} \quad (4.20)$$

$x\Delta x$ に従って ν がどのように変化するかを示すには数値計算によらなければならないが⁵、 $x\Delta x$ の特別な値に対する ν の値より、上と同様に安定性の必要条件が導かれる。すなわち、(4.20)式において、 $x\Delta x = 0$ のときには $\nu = 1$ であるが⁶、 $x\Delta x = \pi$ のときには $\nu = -1 - 4\mu/w\Delta x$ であるから、(4.12)式の差分式は $\mu = 0$ でない限り、不安定な差分式であることが知られる。しかし、この場合 $\mu\partial^2 h/\partial x^2$ の差分式を

$$\mu\partial^2 h/\partial x^2 \approx \mu_{j-1}^2 (h_{j-2}^2 - 2h_{j-1}^2 + h_j^2)/\Delta x^2 \quad (4.21)$$

としていれば、 $x\Delta x = \pi$ のとき $\nu = -1 + 4\mu/w\Delta x$ が得られ、 $\nu \leq 1$ より $\Delta x \geq 2\mu/w$ が安定性の必要条件となる。

以上の検討から、特性曲線の考え方をとり入れた(4.11)式が、kinematic wave 法による差分式として比較的広い適用範囲を有し、また安定性についても許容度が大きいとみることができる。差分式の構成は、上記以外にもきわめて多様に考えられるが、それに伴って上に例を示したように、安定性の条件が変化するため、この点についての十分な注意が必要といえることができる。

4.3 dynamic wave 理論による数値計算法

dynamic wave 理論による数値解析は、エネルギー解析法によるとき、(1.1)および(1.3)式の組合せ、あるいは特性曲線による表示である(1.49)式と(1.51)または(1.53)式との組合せを用いて行われ

る。そのための差分法として、多くの方法が導かれており、開水路の一次元非定常流の計算に適用されるものとして、leap-frog 法⁹⁾、Lax-Wendroff 法¹¹⁾、box型差分法 (Ameinの4点法⁷⁾) および特性曲線法⁸⁾などが挙げられよう。

これらの方法は、 $x-t$ 平面において解の求められる点の配置によりつぎの2つに大別される。その1つは、 $x-t$ 平面にあらかじめ設定された格子点において解を求めてゆく方法であり、通常の差分法と同様の方法である。もう1つの方法は、 $x-t$ 平面を特性曲線によって網状に覆い、特性曲線の交点において解を求めてゆく方法である。この方法は電子計算機があまり発達していなかった1960年代に専ら用いられていた。しかし、解の求められる点が必要とする点とは必ずしも一致しないから、ある断面におけるハイドログラフを求めたり、ある時刻での水面形を求めようとするとき、複雑な内挿法が必要とされ機械的な計算にとって重大な欠点となることがある。

さて、実際の河川の洪水追跡を dynamic wave 理論によって行うとき、つぎの点に注意しなければならない。

- (i) 河川の断面は一般に一様でない。また断面特性 (水位—断面積, 水位—径深の関係など) も、必ずしも等間隔に測量されているものでないので、差分式の Δx を計算区間全体にわたって一定とできない。
- (ii) 合流点における背水の効果を無視しえない河川が多い。
- (iii) 境界条件として観測値が与えられることが多い。これを数値計算法に組み込む方法は、水理学的にみて適切なものでなければならない。
- (iv) 初期値としては、不等流計算の結果が与えられることが多いので、定常流として取扱われる不等流の計算法と、非定常流の計算法とは整合したものでなければならない。

これらの点を考慮してさきに挙げたいいくつかの計算法を検討すればつぎのようである。

Lax-Wendroff 法 (通常 2 step Lax-Wendroff 法がとられる) は、後述するように精度は他の方法に比べて高いが、計算断面間の中間の断面についての計算が必要とされるため、河道の資料が相当そろっていないと上、基本的に 3 断面にわたる差分法であって、2 断面にわたる差分法であることが多い不等流 (定常流) の計算法と整合しないので、実際の河川への適用では取扱いにくい方法である。

leap-frog法は、従属変数である断面積 (あるいは水位) および流量 (あるいは平均流速) が、時間的にも空間的にも交互に求められる点に特徴があり、一般に広く適用されている方法である。しかし、一次元の非定常流の場合には、境界条件としてたとえば上流端で水位が与えられるか流量が与えられるかによって、差分式を組み換えなければならなくなる⁹⁾ことがあるので、一次元流れに適用するにはこの点においてやや柔軟性に欠けるといえよう。ところが、この方法は、第2編で述べるように二次元流れに対しては、境界条件の与えられ方による差分式の組み換えが部分的でよい上、記憶容量が少なくてすみ、さらに計算時間も他の方法に比べて短縮される利点を有しているため、広く適用されている方法である。

box型の差分式による方法は implicit 型の一つである。この方法は、与えるべき境界条件の個数が、流れが常流・射流のいずれであっても、上流端で2個でもよく、上・下流端で1個ずつでもよく（この場合には、たとえば Dronker¹⁰⁾の解法にみられるように計算法は著しく複雑になる）、また下流端で2個でもよいというように、流れのもつ水理学的性質に反したあいまいさを有している。

特性曲線法は、 $x-t$ 平面を特性曲線によって網状に覆う特性曲線網法を採れば先述したような欠点を生ずるので、 $x-t$ 平面に固定された格子点で解を求める固定格子点法が導かれている^{10,11)}。特性曲線法は、第1章で述べたように、dynamic wave によって伝えられる影響を表わす(1.53)式（あるいは(1.51)式）を用いるもので、流れのもつ影響の伝播という水理学的な特性を最もよく反映する方法であろう。

第1章で述べたように、一次元流れの基礎式は双曲型の保存則系で表わされる。したがって、以下においては保存則系に対する高精度の代表的な explicit 法である Lax-Wendroff 法と、双曲型の特徴を活かして流れの影響の伝播を表わしている特性曲線による表示を用いた固定格子点に関する特性曲線法を導き、両者の関係について考察する。leap-frog 法は上記のように二次元流れに対してよく用いられるので、第2編において取扱うことにし、また implicit 法である box 型の差分法に関しては境界条件の計算における問題点について、この章の最後で触れることにする。

(1) Lax-Wendroff 法¹¹⁾

用いる基礎式を再記すれば、つぎのようである。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = q \quad (4.22)$$

あるいは、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} = q' \quad (4.23)$$

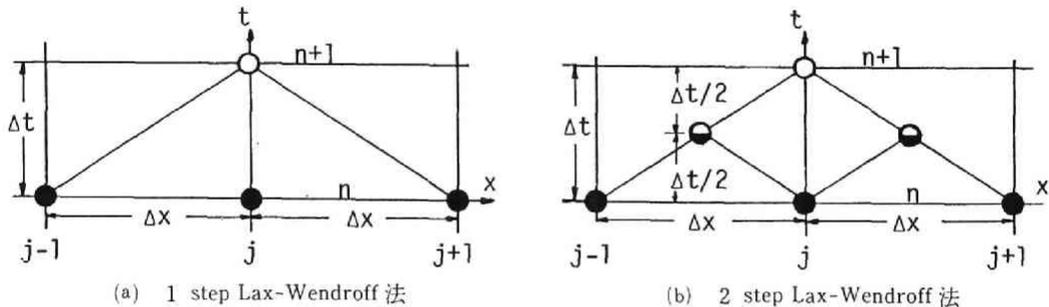


図4.5 Lax-Wendroff 法の差分 scheme

Lax-Wendroff 法は、(4.22)式のような保存則系に対して一般的に導かれた explicit 型の方法で、つぎの2つがある（図4.5参照）。

(i) 1 step Lax-Wendroff 法 (図4.5(a))

$$\begin{aligned}
 U_j^{n+1} = & U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \left[\tilde{A}_{j+1/2}^n(\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n) - \tilde{A}_{j-1/2}^n(\mathbf{F}_j^n - \mathbf{F}_{j-1}^n) \right] \\
 & + \frac{1}{4}(\mathbf{q}_{j-1}^n + 2\mathbf{q}_j^n + \mathbf{q}_{j+1}^n)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

ここに、 $\mathbf{F}_j^n = \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, x)$ などである。この方法では行列 \tilde{A} の値が必要とされるが、通常これが現われないつぎの 2 step Lax-Wendroff 法がよく使われる。

(ii) 2 step Lax-wendroff 法 (図4.5(b))

$$\text{1st step: } U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{j+1}^n + U_j^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n) + \frac{\Delta t}{4}(\mathbf{q}_j^n + \mathbf{q}_{j+1}^n) \tag{4.25}$$

$$\text{2nd step: } U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{j-1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{q}_{j-1/2}^{n+1/2} + \mathbf{q}_{j+1/2}^{n+1/2}) \tag{4.26}$$

(4.25)式の打ち切り誤差は、 $x = j\Delta x$, $t = n\Delta t$ を中心とする Taylor 展開により

$$\frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)_j^n \Delta t^2 - \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} \right)_j^n \Delta x^2 \right] + O(\Delta t^3) \tag{4.27}$$

であることが導かれる。ただし、 $\Delta x = \tau \Delta t$ (τ : 定数), すなわち Δt も Δx も同程度の微小量とされている。したがって、(4.25)式の正確度は 1 であり、 $O(\Delta t^3)$ の打ち切り誤差のあることがわかる。しかし、 $O(\Delta t^3)$ の誤差は(4.26)式において相殺されるので、結局 Lax-Wendroff の差分法の正確度は 2 であることが結論される。

この方法による一次元非定常流の計算法は、具体的にはつぎのようである。

- ① $t = n\Delta t$ における U_j^n ($j = 1, 2, \dots$) は初期条件あるいは前回の計算結果から既知である。
- ② 1 step Lax-Wendroff 法の場合、 U_j^n の値から \mathbf{F}_j^n , $\tilde{A}_{j+1/2}^n$ および \mathbf{q}_j^n などを求めておけば、(4.24)式より、 U_j^{n+1} が直ちに計算される。
- ③ 2 step Lax-Wendroff 法の場合、まず(4.25)式を用いて U_j^n , \mathbf{F}_j^n および \mathbf{q}_j^n の値から、 $U_{j+1/2}^{n+1/2}$ を求め、ついで $\mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1/2}$ などを計算した後、(4.26)式より未知数 U_j^{n+1} を求める。
- ④ ②あるいは③を、所要の計算時間の範囲で繰返す。

2 step Lax-Wendroff 法は一次元流れの解析法として広く使用されており、精度は 5.3 で例が示されるとおり高いが、先に挙げた実際の河川へ適用するときの注意点と照らし合せると、つぎのような適用のしにくさを有している。

- ① $\tilde{A}_{j+1/2}$, $F_{j+1/2}$ および $q_{j+1/2}$ など、本来の計算断面でない中間の断面について水理量を計算する必要があるため、河道が一様でないときには、中間の断面について相当資料が補充されなければならない。
- ② 境界点や分・合流点では、この計算法を適用することはできない。
- ③ 断面間の距離 (Δx) が一定でないので、一様水路でないときには何らかの方法で断面資料を補充し、一定の Δx がとれるようにしなければならない。
- ④ 初期条件は通常不等流として与えられることが多く、それは標準逐次計算法などによって計算されるが、その計算法は2断面間の差分であって、3断面にわたる差分である Lax-Wendroff 法と整合しない。

(2) 特性曲線法^{12,13)}

ここで考察する差分法は、 $x-t$ 平面に設定された固定格子点に関する explicit な方法で、特性曲線の方向に応じて x 方向の差分のとり方を変える Courant-Isaacson-Rees の方法¹⁴⁾ を一次元非定常流に適用したものである。以下においてはこの方法を特性曲線法とよぶことにする。

用いる基礎式を再掲するとつぎのようである。

$$\mu \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - q \right) = 0 \quad (4.28)$$

ここに、

$$\mu = \left[a_{21} : \left(\frac{dx}{dt} - a_{11} \right) \right] \quad (4.29)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2} \right)^2 + a_{12}a_{21}} = \bar{v} \pm \bar{c} \quad (4.30)$$

Stoker¹⁵⁾ は従属変数を平均流速と波速 (\bar{v} と \bar{c} に相当) に変換しているが、水路が一様でないとき、この変換は $(\partial A / \partial x)_{h:const}$ を陽に含むことになり、必ずしも便利ではないので、(4.28)式をそのまま差分化することにする。

まず、(4.28)式を成分ごとに表わせばつぎのようである。

ξ_+ : $\frac{dx}{dt} = \bar{v} + \bar{c}$ に沿って成立する微分方程式

$$a_{21} \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} - q_1 \right) + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} + \bar{c} \right) \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - q_2 \right) = 0 \quad (4.31)$$

ξ_- : $\frac{dx}{dt} = \bar{v} - \bar{c}$ に沿って成立する微分方程式

$$a_{21} \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} - q_1 \right) + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} - \bar{c} \right) \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x} - q_2 \right) = 0 \quad (4.32)$$

いま、 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0$ 、すなわち(4.30)式の2本の特性曲線の方向は互いに異符号の場合（このことは流れを常流と仮定することになる）を考えることにし、正号の特性曲線を上記のように ζ_+ 、負号の特性曲線を ζ_- で表わす。(4.28)式（あるいは(4.31)および(4.32)式）の差分化にあたって、図4.6を参照し、 ζ_+ に沿う関係では、

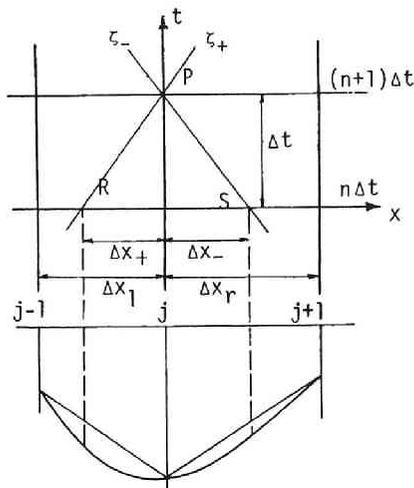


図4.6 特性曲線法の差分 scheme

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^n - f_R^n}{\Delta x_+}, \quad f \approx \frac{f_j^{n+1} + f_R^n}{2} \quad (4.33)$$

とし、また ζ_- に沿う関係でも同様に、

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_S^n - f_j^n}{\Delta x_-}, \quad f \approx \frac{f_j^{n+1} + f_S^n}{2} \quad (4.34)$$

とする。ここに、 f は(4.28)式の U 、 F および q のいずれかを表わす。ここで、(4.33)および(4.34)式の第2式中の、 f_R および f_S を評価するのに、図4.6に示されるように、 f が $(j-1)\Delta x$ と $j\Delta x$ および $j\Delta x$ と $(j+1)\Delta x$ の間でそれぞれ直線的に変化するとみられる場合を考えると、 f_R および f_S はそれぞれつぎのように求められる。

$$f_R = -(f_j^n - f_{j-1}^n) \frac{\Delta x_+}{\Delta x_l} + f_j^n \quad (4.35)$$

$$f_S = -(f_j^n - f_{j+1}^n) \frac{\Delta x_-}{\Delta x_r} + f_j^n \quad (4.36)$$

これらを、(4.33)および(4.34)式の第2式に代入すると、

$$\xi_+ \text{ に沿って, } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\Delta x_i} \quad (4.37)$$

$$\xi_- \text{ に沿って, } \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\Delta x_r} \quad (4.38)$$

が得られる。さらに、(4.33)式の第3式において $f \approx (f_j^n + f_{j-1}^n)/2$ 、(4.34)式の第3式において $f \approx (f_j^n + f_{j+1}^n)/2$ と近似すれば、(4.28)式を成分ごとに表わした(4.31)および(4.32)式はつぎのように差分化される。

ξ_+ : $dx/dt = \bar{v} + \bar{c}$ に沿う関係

$$\begin{aligned} (a_{21})_j^n & \left(\frac{U_{1j}^{n+1} - U_{1j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{1j}^n - F_{1j-1}^n}{\Delta x_i} - \frac{q_{1j}^n + q_{1j-1}^n}{2} \right) \\ & + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} + \bar{c} \right)_j \left(\frac{U_{2j}^{n+1} - U_{2j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{2j}^n - F_{2j-1}^n}{\Delta x_i} - \frac{q_{2j}^n + q_{2j-1}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

ξ_- : $dx/dt = \bar{v} - \bar{c}$ に沿う関係

$$\begin{aligned} (a_{21})_j^n & \left(\frac{U_{1j}^{n+1} - U_{1j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{1j+1}^n - F_{1j}^n}{\Delta x_r} - \frac{q_{1j+1}^n + q_{1j}^n}{2} \right) \\ & + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} - \bar{c} \right)_j \left(\frac{U_{2j}^{n+1} - U_{2j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{2j+1}^n - F_{2j}^n}{\Delta x_r} - \frac{q_{2j+1}^n + q_{2j}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

(4.39)および(4.40)式の差分式の特徴は、特性曲線の方向そのものは差分式に陽に含まれないことおよび未知数 U_{1j}^{n+1} 、 U_{2j}^{n+1} について explicit に解かれることにある。

$\Delta x_r = \Delta x_i = \Delta x$ であるとき、(4.39)および(4.40)式を未知数について解き、まとめると次式が得られる。

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2\bar{c}} (\bar{A} - \bar{v}E) \right]_j^n (F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \\ &+ \frac{\Delta t}{4} (q_{j+1}^n + 2q_j^n + q_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{2\bar{c}} (\bar{A} - \bar{v}E) \right]_j^n (q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.41)$$

ここに、 E は単位行列である。

これらの差分式のより具体的な表現や解法については4.5で述べることにする。

(3) Lax-Wendroff 法と特性曲線法の関係

保存則系に対する代表的差分法である Lax-Wendroff 法と、(2)において導かれた特性曲線法の相違

は、 \bar{A} を定数行列と仮定すると明らかにすることができる。このときの Lax-Wendroff 法は、比較の簡単のため非斉次項 q を 0 とすれば、(4.24)式よりつぎのように表わされる。

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{j+1}^n - F_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\bar{A}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2(F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \quad (4.42)$$

したがって、(4.41)式との差 ε は、

$$\varepsilon = \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\left(\frac{1}{c} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\bar{A} - \frac{\bar{v}}{c}E\right](F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \quad (4.43)$$

である。(4.42)式の正確度は先に述べたように 2 である。 ε は明らかに 2 次の項であるから、(4.42)式に 2 次の差を有する(4.41)式の正確度は 1 である。すなわち、Lax-Wendroff 法が 2 次の近似であるのに対し、ここで導いた特性曲線法は 1 次の近似である。 ε の大きさは、 $(F_{j+1}^n - 2F_j^n + F_{j-1}^n) \approx (\partial^2 F / \partial x^2) \Delta x^2$ に比例するから、(4.41)式と(4.42)式の差は F の変化率が急変する部分で大きくなるものと予想される。

上述の差は、 \bar{A} が定数行列のとき、(4.35)および(4.36)式の近似式の精度の差にもとづいていることが明らかにされる。すなわち、(4.35)および(4.36)式において、 f_R および f_S の近似値として、それぞれ $(j-1, n)$ 点と (j, n) 点および (j, n) 点と $(j+1, n)$ 点の間で 1 次の (線型の) 内挿法がとられている (図4.6参照) が、いまこの近似の精度をあげ、上記 3 点間の 2 次の内挿値をとることにしよう。まず、内挿のための近似式として次式が得られる。

$$f \approx \frac{1}{2\Delta x^2}(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)x^2 + \frac{1}{2\Delta x}(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n)x + f_j^n \quad (4.44)$$

図5.6の R における f の値は、(4.44)式において $x = -\Delta x$ 、 $= -(\bar{v} + \bar{c})\Delta t$ として求められるから、(4.37)式に代ってこの場合 ξ_+ に沿ってつぎの差分式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_j^n - f_R}{\Delta x_+} \approx -\frac{(\bar{v} + \bar{c})\Delta t}{2\Delta x^2}(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (4.45)$$

同様に、 S についても $x = \Delta x$ 、 $= -(\bar{v} - \bar{c})\Delta t$ を(4.44)式に代入すれば、(4.38)式に代って ξ_- に沿って次式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_S - f_j^n}{\Delta x_-} \approx -\frac{(\bar{v} - \bar{c})\Delta t}{2\Delta x^2}(f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) + \frac{f_{j+1}^n - f_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (4.46)$$

(4.39)および(4.40)式中の x 方向の差分を、(4.45)および(4.46)式で置き換えて、これを未知数について解くと(4.42)式と全く同一の結果が得られる。

以上のことから、ここで導かれた特性曲線法は Lax-Wendroff 法に比べて正確度が 1 次劣り、そし

てこの差は \tilde{A} が定数行列であるとき、図4.6の R および S での値を近似するのに1次の内挿法を用いるか2次の内挿法を用いるかだけの差であることが分る。また、先に述べたように、 F の変化率が $(j-1, n)$, (j, n) , $(j+1, n)$ の3点で大きく変化しないとき、すなわち F が直線的な変化を示す部分では特性曲線法と Lax-Wendroff 法の差はそれほど大きくはないと考えることができる。

4.4 dynamic wave 理論による数値計算法の安定性

4.2と同様に、線型化された初期値問題の、しかも簡単のため十分に幅が広く単位幅での取扱いが可能な場合について、Lax-Wendroff 法および特性曲線法の安定性を考えることにする。このとき、流れの基礎式は(2.27)および(2.28)式で表わされ、これらを(4.22)および(4.23)式の記号にあてはめるとつぎのようである。

$$U = \begin{bmatrix} \eta \\ u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} v_0 \eta + h_0 u \\ g \eta + v_0 u \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} v_0 & h_0 \\ g & v_0 \end{bmatrix}, \quad q' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4}{3} \frac{g s_0}{h_0} \eta & -\frac{2g s_0}{v_0} u \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

ここに、 h_0 および v_0 は定常等流状態を表わし、 η および u はそれからの変動量である。また、行列 \tilde{A} には定常等流であることを示す添字0が附されている。いま、 \tilde{B}_0 を

$$\tilde{B}_0 = 2\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{3} \frac{v_0}{h_0} & -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \frac{g s_0}{v_0} \quad (4.48)$$

のように定義すれば、線型化された場合の基礎式を(4.23)式の形にまとめた関係は、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}_0 \frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{B}_0 U \quad (4.49)$$

で表わされる。以下では、(4.49)式を用いて Lax-Wendroff 法および特性曲線法の安定性を検討する。

(1) Lax-Wendroff 法の安定性

線型化された系においては、 \tilde{A}_0 は定数行列であるから、1 step Lax-Wendroff 法も2 step Lax-Wendroff 法も全く変りはなく、(4.49)式を適用した場合の(4.24)式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = & U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \tilde{A}_0 (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \tilde{A}_0 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \\ & + \frac{1}{4} \tilde{B}_0 (U_{j+1}^n + 2U_j^n + U_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.50)$$

4.2(3)の検討と同様に、 $U = \tilde{U} e^{ik\Delta x}$ (x : 波数) と置いて、(4.50)式に代入すると、 $\tilde{U}^{n+1}(x) = G\tilde{U}^n(x)$

で定義される増幅行列 G は、つぎのように求められる。

$$G(x\Delta x) = E - i\frac{\Delta t}{\Delta x}\tilde{A}_0 \sin x\Delta x - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (1 - \cos x\Delta x)\tilde{A}_0^2 + \frac{\Delta t}{2}(1 + \cos x\Delta x)\tilde{B}_0 \quad (4.51)$$

ここに、 E は単位行列である。 G の固有値を ν とするとき、 $\Delta x = r\Delta t$ (r : 定数) として、 $\Delta t \rightarrow 0$ のとき $|\nu| \leq 1 + O(\Delta t)$ であることが、安定性のための von Neumann の条件である¹⁾。 G の固有値をすべての x に対して一般的に求めることはできないから、安定性の検討には対象とする流れごとに (4.51) 式の固有値を数値計算によって求めなければならない。いま一例として、 $C_r \equiv v_0\Delta t/\Delta x = 0.2$ 、 $F_r \equiv v_0/\sqrt{gh_0} = 0.5$ とし、 $V_a \equiv \lambda\Delta t = 0.1$ および $V_a = 0$ (摩擦項が無いとしたとき) の 2 通りの場合について、 G の固有値 ν を求めた結果が図 4.7 である ($\nu_r = \text{Re}(\nu)$ 、 $\nu_i = \text{Im}(\nu)$)。また、 x が特別な値をとるとき、すなわち $x\Delta x = 0$ および $x\Delta x = \pi$ のとき、(4.51) 式の固有値はつぎのように求められる。

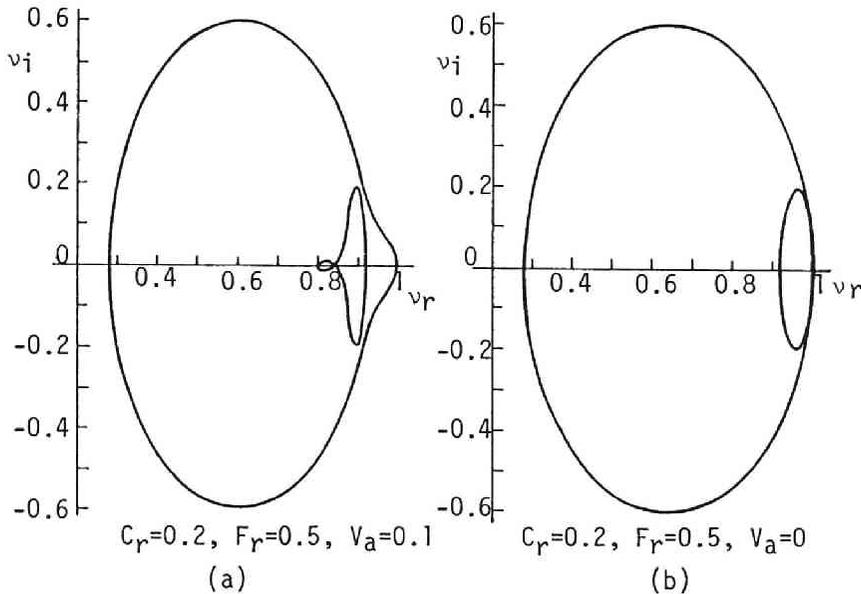


図4.7 Lax-Wendroff 法の増幅行列の固有値

$$(i) \quad x\Delta x = 0 \text{ のとき, } \nu = \begin{cases} 1 \\ 1 - 2V_a = 1 - 2\lambda\Delta t \end{cases} \quad (4.52)$$

$$(ii) \quad x\Delta x = \pi \text{ のとき, } \nu = 1 - 2C_r^2(1 \pm 1/F_r)^2 = 1 - 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 (v_0 \pm \sqrt{gh_0})^2 \quad (4.53)$$

(4.52) および (4.53) 式と von Neumann の条件より、安定性の必要条件として、次式が得られる。

$$\lambda\Delta t < 1 \quad \text{または} \quad \Delta t \leq v_0/gS_0 \quad (4.54)$$

および、

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{|v_0 \pm \sqrt{gh_0}|} \quad (4.55)$$

(4.55)式は、 $\Delta x/\Delta t$ がdynamic waveの伝播速度 $v_0 \pm \sqrt{gh_0}$ より大きくなければならないこと、すなわち計算上の解の依存域が理論上のそれより大きくなければならないことを示すもので、dynamic wave理論を適用する場合のCourant-Friedrichs-Lewyの条件(C.F.L.条件)である^{1,6)}。一方、(4.54)式は摩擦項に起因する安定条件であり、Vasilievが(4.49)式をより単純にした場合について求めた結果²⁾と一致している(後述の4.4(3))。この条件は、時間間隔 Δt がdynamic waveの減衰に関する時間スケール((2.26)式) $1/\lambda = v_0/gS_0$ より小さくなければならぬことを意味しており、こう配の急な(s_0 の大きい)河川などに対しては(4.55)式より厳しい条件になることがある。これを避けるには、4.4(3)で述べるように時間 $(n+1)\Delta t$ の摩擦項も考慮すればよいとされる。

(2) 特性曲線法の安定性

(4.49)式を用いた場合の特性曲線法(4.41)式はつぎのようである。

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = & U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \bar{A}_0(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2c_0} (\bar{A}_0 - v_0 E) \right] \bar{A}_0(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \\ & + \frac{\Delta t}{4} \bar{B}_0(U_{j+1}^n + 2U_j^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{2c_0} (\bar{A}_0 - v_0 E) \right] \bar{B}_0(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (4.56)$$

ここに、 $c_0 = \sqrt{gh_0}$ である。(4.56)式より、増幅行列 G は、

$$\begin{aligned} G(\kappa\Delta x) = & E - i \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A}_0 \sin \kappa\Delta x - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{c_0} (\bar{A}_0 - v_0 E) \right] \bar{A}_0 (1 - \cos \kappa\Delta x) \\ & + \frac{\Delta t}{2} \bar{B}_0 (1 + \cos \kappa\Delta x) - i \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{c_0} (\bar{A}_0 - v_0 E) \right] \bar{B}_0 \sin \kappa\Delta x \end{aligned} \quad (4.57)$$

と求められる。図4.8はLax-Wendroff法の場合と同様に、 $C_r = 0.2$ 、 $F_r = 0.5$ とし、 $V_a = 0.1$ および $V_a = 0$ (摩擦項を考慮しない)の2通りの場合について、 G の固有値を求めた一例である。また、 $\kappa\Delta x = 0$ および $\kappa\Delta x = \pi$ のとき、固有値 ν はつぎのように求められる。

(i) $\kappa\Delta x = 0$ のとき

$$\nu = \begin{cases} 1 \\ 1 - 2V_a = 1 - 2\lambda\Delta t \end{cases} \quad (4.58)$$

(ii) $\kappa\Delta x = \pi$ のとき

$$\nu = 1 - 2C_r \left(\frac{1}{F_r} \pm 1 \right) = 1 - 2(c_0 \pm v_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.59)$$

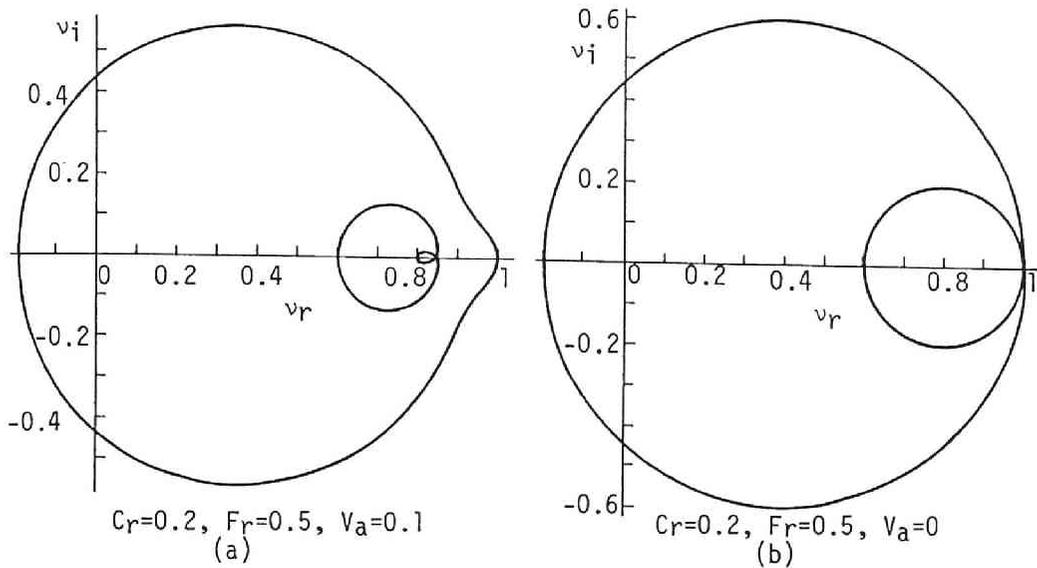


図4.8 特性曲線法の増幅行列の固有値

以上より、安定性の必要条件として、(4.54)および(4.55)式が再び導かれるほか、(4.59)式より(4.41)式の特性曲線法ではさらに、 $F_r \leq 1$ つまり流れが射流でないことが計算の安定性の条件として必要なことが分る。

(3)Vasiliev の安定条件

(4.52)あるいは(4.58)式より導かれる Vasiliev の条件(4.54)式は、つぎのような簡単な場合を考えることによって容易に導くことができる。すなわち、(4.47)および(4.49)式で運動方程式の非定常項と摩擦項のみを考えると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\lambda u \quad (4.60)$$

が得られる。(4.60)式に対して、つぎのような差分式、

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -2\lambda u^n \quad \text{あるいは} \quad u^{n+1} = (1 - 2\lambda \Delta t) u^n \quad (4.61)$$

を考えると、この差分式の増幅因子 ν は、 $\nu = 1 - 2\lambda \Delta t$ であり、これより(4.54)式の安定条件が導かれる。

しかし、いま(4.61)式の差分式に代って、

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = -\lambda(u^{n+1}+u^n) \quad \text{あるいは} \quad u^{n+1} = \frac{1-\lambda\Delta t}{1+\lambda\Delta t} u^n \quad (4.62)$$

とすれば、このときの増幅因子 $\nu = (1-\lambda\Delta t)/(1+\lambda\Delta t)$ は、 $\Delta t > 0$ に対して $|\nu| < 1$ であるから、つねに安定条件を満たすことが分る。この結果を(4.50)あるいは(4.56)式にあてはめると、前述のように摩擦項の u に関する成分を、時間 $n\Delta t$ での u^n と時間 $(n+1)\Delta t$ での u^{n+1} との平均値で評価すれば、Vasiliev の条件を考えなくてもよいということになる。さらにもとに戻っていえば、Lax-Wendroff 法の(4.24)式あるいは(4.25)および(4.26)式や、特性曲線法の(4.41)式において摩擦項 (q 中に含まれる) の u に関する成分に、 $n\Delta t$ での u と $(n+1)\Delta t$ での u の平均値を用いることが、Vasiliev の条件を避けるために望ましいということが出来る。特性曲線法に関するその具体的な表示および計算法は4.5で考察する。

(4) 射流の計算

特性曲線法(4.41)式の安定条件として、 $F_r \leq 1$ 、つまり流れが射流でないことが(4.59)式より導かれた。すなわち、(4.41)式は常流および $F_r = 1$ の流れにしか適用されない。これは(4.41)式の誘導にあたって、 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq 0$ ((4.47)式の \bar{A}_0 を用いていえば、 $v_0^2 - gh_0 \leq 0$) と仮定して、(4.31)および(4.32)式の差分化を行ったからである。

流れが射流の場合、すなわち $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$ ($v_0^2 - gh_0 > 0$) の場合、 $dx/dt = \xi$ は正であり、したがって図4.6においてこの特性曲線が x 軸と交わる点 S は、 $j \sim (j+1)$ 間ではなく、 $(j-1) \sim j$ 間に存在するから、この場合(4.36)式に代って、

$$f_s = -(f_j^n - f_{j-1}^n) \frac{\Delta x}{\Delta x_r} + f_j^n \quad (4.63) \quad \dots$$

とすれば、射流のときの特性曲線の方向を考慮した差分式とすることが出来る。(4.63)式を用いれば、 ξ に沿う関係は(4.40)式に代って

$$\begin{aligned} & (a_{21})_j^n \left(\frac{U_{1j}^{n+1} - U_{1j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{1j}^n - F_{1j-1}^n}{\Delta x} - \frac{q_{1j}^n + q_{1j-1}^n}{2} \right) \\ & + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2} - \bar{c} \right)_j \left(\frac{U_{2j}^{n+1} - U_{2j}^n}{\Delta t} + \frac{F_{2j}^n - F_{2j-1}^n}{\Delta x} - \frac{q_{2j}^n + q_{2j-1}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

が得られる。ただし、 $\Delta x_r = \Delta x$ とされている。(4.39)および(4.64)式を、未知数 U_{1j}^{n+1} および U_{2j}^{n+1} について解いてまとめると、射流の場合の特性曲線法として次式が導かれる。

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_j^n - F_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (q_{j-1}^n + q_j^n) \quad (4.65)$$

(4.65)式の安定条件はこれまでと同様の方法によって求められる。(4.47)および(4.48)式を(4.65)式に適用すれば

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{A}_0(U_j^n - U_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} \tilde{B}_0(U_{j-1}^n + U_j^n) \quad (4.66)$$

である。したがって増幅行列はつぎのようである。

$$G(\kappa \Delta x) = E - \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{A}_0(1 - e^{-i\kappa \Delta x}) + \frac{\Delta t}{2} \tilde{B}_0(1 + e^{-i\kappa \Delta x}) \quad (4.67)$$

特別な κ に対する G の固有値 ν を求めると、つぎのようである。

(i) $\kappa \Delta x = 0$ のとき

$$\nu = \begin{cases} 1 \\ 1 - 2V_a = 1 - 2\lambda \Delta t \end{cases} \quad (4.68)$$

(ii) $\kappa \Delta x = \pi$ のとき

$$\nu = 1 - 2C_r(1 \pm 1/F_r) = 1 - 2(v_0 \pm c_0) \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.69)$$

ただし、先と同様に $C_r = v_0 \Delta t / \Delta x$, $F_r = v_0 / c_0$, $V_a = \lambda \Delta t$ である。これらから(4.66)式の安定性の必要条件として、(4.54)および(4.55)式が再び導かれるとともに、さらに(4.69)式より $F_r \geq 1$, すなわち流れが常流でないことも必要なことが知られる。

流れが射流の場合、とくに $F_r > 3/2$ であれば流れそのものが不安定になることが第2章で詳しく導かれている。このような流れそのものの安定性と計算の安定性との関連¹⁶⁾はつぎのように考えられる。いま、(4.49)式に擾乱 $U = \tilde{U} e^{i\kappa x + \omega t}$ (κ : 擾乱の波数, ω : 擾乱の角振動数) に代入すると次式が得られる。

$$\det |\omega E + i\kappa \tilde{A}_0 - \tilde{B}_0| = 0 \quad (4.70)$$

(4.70)式を展開すれば、いうまでもなく(2.60)式が得られ、これを ω について解けば(2.62)式が得られる(第2章では(4.49)式から u を消去した式より(2.60)式が得られている)。(2.59)式で述べたように、(4.70)式を満たす ω の実数部が正 ($\text{Re}(\omega) > 0$) であれば、擾乱が発達するとして(4.49)式の U が不安定になる条件、すなわちこの場合 $F_r \equiv v_0 / \sqrt{gh_0} > 3/2$ のとき不安定であるという条件が得られている。

つぎに、(4.66)式に同様の擾乱 $U = \tilde{U} e^{i\kappa x + \omega \Delta t}$ を考えると次式が得られる。

$$\det|G - e^{\omega_s \Delta t} E| = 0 \quad (4.71)$$

ここに、 G は(4.66)式の増幅行列で、(4.67)式によって与えられる。(4.67)および(4.71)式より、 $\kappa \Delta x$ および $\omega_s \Delta t$ が十分小さいとき、(4.71)式は(4.70)式に帰着するから、このときには ω_s は ω に等しくなることが得られ、また G の固有値を ν とすれば一般に $\omega_s = (1/\Delta t) \log \nu$ であることが導かれる。 $\text{Re}(\omega_s) = (1/\Delta t) \log |\nu|$ であるから、擾乱が発達しないための $\text{Re}(\omega_s) \leq 0$ という条件は、 $|\nu| \leq 1$ という条件と同値である。しかし、 $\kappa \Delta x$ および $\omega_s \Delta t$ がともに十分小さいとき、 ω_s が ω に等しくなること、および $F_r > 3/2$ のとき $\text{Re}(\omega) > 0$ であることを考えると、 $F_r > 3/2$ で差分格子が十分小さいとき $\text{Re}(\omega_s) > 0$ (すなわち $|\nu| > 1$) であると考えられる。図4.9(a)および(b)は、 $F_r > 3/2$ のときの(4.66)式の安定性をみる一例として、 $F_r = 4$ 、 $C_r \equiv v_0 \Delta t / \Delta x = 0.3$ のもとで $V_a \equiv \lambda \Delta t$ が小さいときに、(4.67)式(射流の特性曲線法)の G の2つの固有値を求め、これを ω_s / λ に変換してその実数部を、 $v_0 \kappa / \lambda$ が $2\pi C_r / V_a$ に比べ十分小さい範囲に限って示したものである。ここに、 $2\pi C_r / V_a$ は、 G の固有値が $\kappa \Delta x = (V_a / C_r) \kappa v_0 / \lambda$ に関して 2π を周期とする周期関数であることから得られる ω_s / λ の周期である。図には、(4.70)式から求められる $\text{Re}(\omega / \lambda)$ (流れそのものの擾乱の増幅率)とともに、増幅行列 G に(4.51)式(Lax-Wendroff法)および(4.57)式(常流の特性曲線法)をそれぞれ適用したときの同様の結果も示されている。 G に(4.51)あるいは(4.57)式のいずれを用いた場合にも、 $\kappa \Delta x$ および $\omega_s \Delta t$ が十分小さいとき、(4.71)式は(4.70)式に帰着することは(4.67)式を用いた場合と同様であり、これは図においても $\kappa v_0 / \lambda$ が比較的小さい範囲で $\text{Re}(\omega_s / \lambda) = \text{Re}(\omega / \lambda)$ であることから確かめられる。

図4.9(2)より、 G が常流の特性曲線法の(4.57)式の場合 $v_0 \kappa / \lambda$ がある程度以上になれば $\text{Re}(\omega_s / \lambda)$ は急速に大きくなり、計算上の不安定が現われると考えられるとともに、このときの $\text{Re}(\omega_s / \lambda)$ が $\text{Re}(\omega / \lambda)$ と全く異なることから、この計算上の不安定は流れの不安定とは無関係なものであると予想される。これは常流の特性曲線法では、流れが射流でないことが計算の安定の必要条件であったことの当然の帰結であろう。また、図4.9(a)および(b)より、同じ V_a に対し Lax-Wendroff 法では、他の2つの方法に比べ $\text{Re}(\omega_s / \lambda) \doteq \text{Re}(\omega / \lambda)$ となる範囲が広いことが見られる。これは特性曲線法の正確度が1であるのに対し、Lax-Wendroff法の正確度が2であることから、Lax-Wendroff法がより広い範囲の波数にわたって(4.70)式を表現していることを意味している。さらに、図4.9(a)より、 $\kappa v_0 / \lambda$ が小さいとき、いずれの G を用いても $\text{Re}(\omega_s / \lambda) > 0$ であり、さらに $\text{Re}(\omega_s / \lambda) \doteq \text{Re}(\omega / \lambda)$ とみられるから、擾乱は計算上も発達し、しかもその度合は流れそのものの不安定の度合と同じ程度であることが分る。つまり、この計算上の不安定は流れの不安定の反映とみることができる。しかし、波数が大きくなるに従い $\text{Re}(\omega_s / \lambda)$ は負になるから、計算上の不安定は波数によって異なり、波数の全域にわたって $\text{Re}(\omega / \lambda) > 0$ である流れの不安定とは、この点において差があるといえる。

以上をまとめると、流れが射流の場合、Lax-Wendroff法あるいは射流の特性曲線法を用いなければ

ばならないといえるが、その場合ある波数の範囲においては $\text{Re}(\omega_\Delta/\lambda) > 0$ であり、計算は流れと同程度の不安定を示すことが考えられる。一方、ある波数の範囲では擾乱は計算上減衰することが予想されるので、結局計算では与える波数が最も問題であるということができよう。

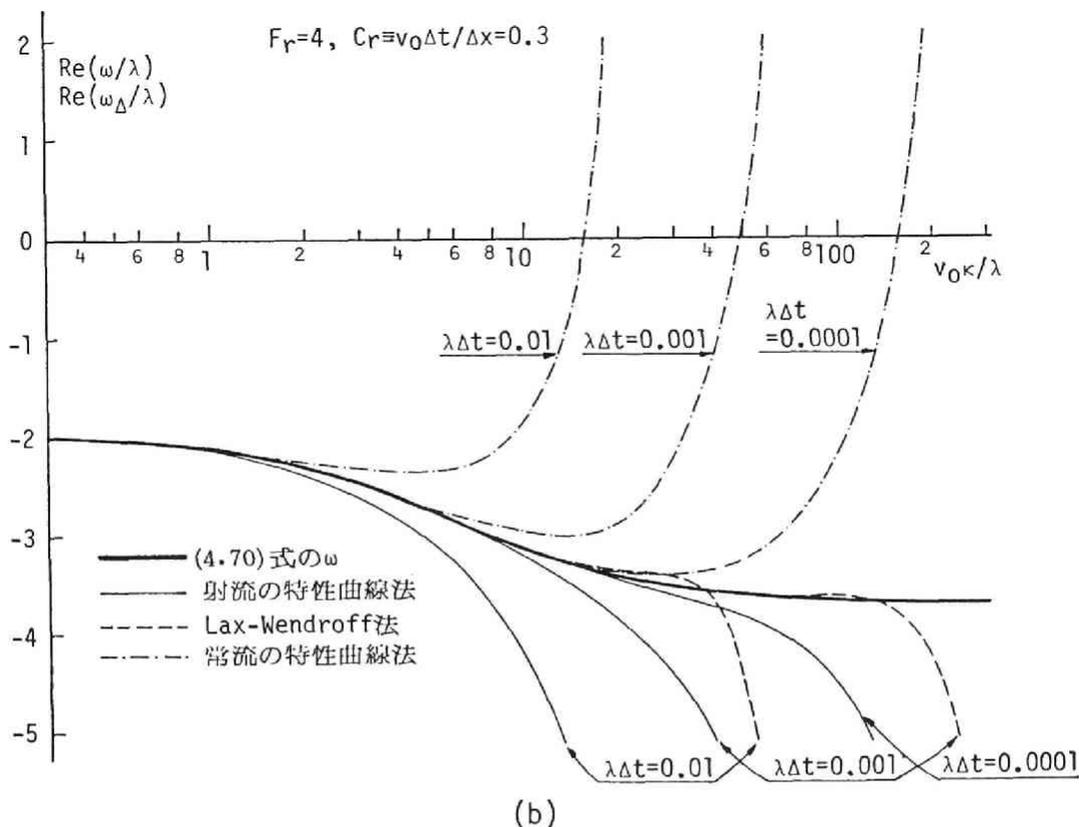
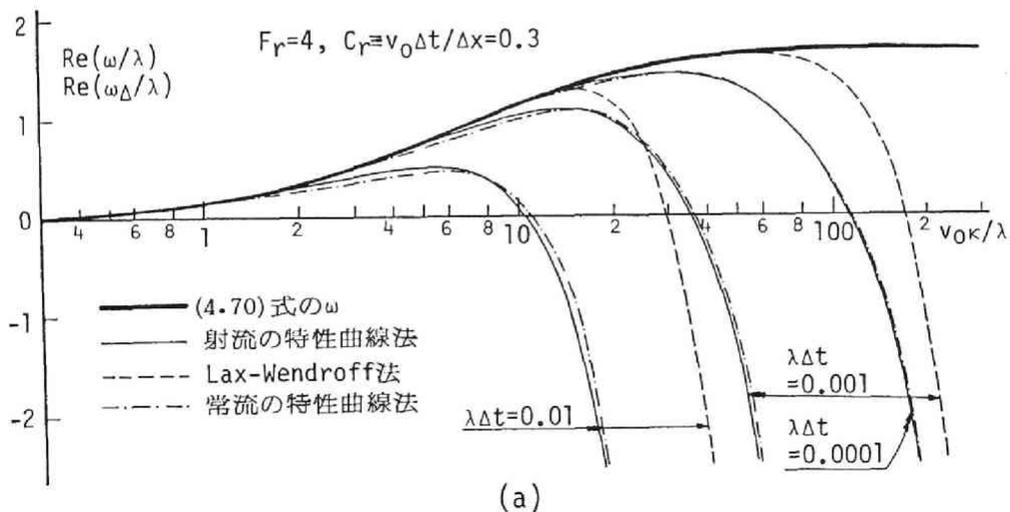


図4.9 $F_r > 3/2$ の場合の擾乱の増幅率

4.5 特性曲線法による計算手順

4.3において非定常流の基礎式を一般的に双曲型の保存則系で表わして、差分法としてLax-Wendroff法および特性曲線法をとり上げた。特性曲線法は第1章でも述べたように、境界条件の取扱いに水理学的に明瞭な解釈が得られる点に大きい特徴がある。本節では、流れを常流として、この特性曲線法によって河道や水路の一次元の非定常流を数値解析する計算手順について具体的に考察することにする。

(1) 基礎式

非定常流の解析法としてエネルギー解析法および運動量解析法のいずれを用いても、すでに示したように基礎式にはみかけ上大差がないので、本節ではエネルギー解析法による場合を中心に考察をすすめる。その基礎式は(1.1)および(1.3)式であるが、それらを保存則系にまとめた後、特性曲線による表示に改めた(1.49)～(1.51)式を再掲すれば、つぎのようである。

特性曲線 ξ_{\pm} ,

$$\xi_{\pm} \equiv \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\pm} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v \pm c \quad (4.72)$$

に沿って成立する微分方程式は

$$\frac{\lambda \cos \theta}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \pm c \right) \left(\frac{\beta}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + s_f \right) = 0 \quad (4.73)$$

ここに、 $H = \alpha v^2 / 2g + z + \lambda h \cos \theta$: 全水頭、 $c = \sqrt{\left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v \right)^2 + \frac{\lambda g A \cos \theta}{\beta B}}$: 波速である((1.26)式および(1.50)式、ただし(1.50)式では c は c_e と表わされている)。流れを常流としているので、第1章で述べたように、(4.73)式の正号の関係は上流から下流へ流下して伝えられる影響を表わし、また負号の関係は下流から上流へ遡上して伝えられる影響を表わしている。

(4.73)式を(4.31)および(4.32)式にあてはめ、(4.39)および(4.40)に相当する差分式に書き改めるとつぎのようである。ただし、河川では通常下流から上流に順に断面番号がつけられることが多いことを考え、図4.10のように断面番号 j は x が減少する向きにとられている。

$\xi_{\pm} : \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v + c$ に伴う関係

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda \cos \theta}{B} \right)_j \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n - q_j^n}{\Delta x_j} \right) \\ & + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c \right)_j \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{f_j}^n + s_{f_{j+1}}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.74)$$

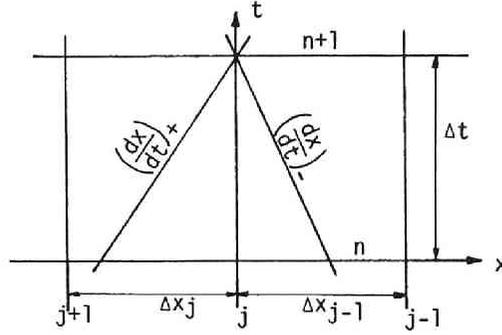


図4.10 河川における特性曲線法

$\zeta_- : \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v - c$ に伴う関係

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j-1}^n - Q_j^n}{\Delta x_{j-1}} - q_{j-1}^n \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c \right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{j-1}^n - H_j^n}{\Delta x_{j-1}} + \frac{s_{j-1}^n + s_j^n}{2} \right) = 0 \quad (4.75)$$

ここに、 q_j は断面 j と $(j + 1)$ の間にある x の単位長さあたりの横流入流量である。すなわち、断面 j と $(j + 1)$ の間に Q_i の横流入流量があるとすれば、 $Q_i = q_j \Delta x_j$ である。(4.74) および (4.75) 式はそれぞれ、上流から下流へ伝わる影響および逆に下流から上流に伝わる影響を差分式によって表現したものである。この2式が特性曲線法による計算のための基礎式であり、explicit法であるので未知数は A_j^{n+1} および v_j^{n+1} の2個である。

4.4(3)で述べた摩擦項にもとづく不安定 (Vasiliev の不安定) を避けるために、 $(n+1)\Delta t$ での摩擦項も考慮し、しかも explicit 法を保つ計算法として、(4.74) および (4.75) 式の s_j^n を s_j^{n+1} に置き換える (s_{j+1}^n および s_{j-1}^n はそのまま) 方法が考えられる。すなわち、(4.74) および (4.75) 式に代ってこの場合の計算の基礎式はつぎのようである。

$\zeta_+ : \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v + c$ に沿う関係

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - q_j^n \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c \right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_j^{n+1} + s_{j+1}^n}{2} \right) = 0 \quad (4.76)$$

$\zeta_- : \frac{dx}{dt} = \frac{\alpha + \beta}{2\beta} v - c$ に沿う関係

$$\left(\frac{\lambda \cos \theta}{B}\right)_j \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j-1}^n - Q_j^n}{\Delta x_{j-1}} - q_{j-1}^n\right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c\right)_j \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_{j-1}^n - H_j^n}{\Delta x_{j-1}} + \frac{s_{rj-1}^n + s_{fj}^{n+1}}{2}\right) = 0 \quad (4.77)$$

$s_{fj}^{n+1} = n_j^2 v_j^{n+1} |v_j^{n+1}| / (R_j^{n+1})^{4/3}$ である（ただし、 n_j は断面 j でのManningの粗度係数）が⁸、このままでは計算が煩雑であるので、実際の計算ではこれをさらにつきのように近似する。

$$s_{fj}^{n+1} = n_j^2 |v_j^n| v_j^{n+1} / (R_j^{n+1})^{4/3} \quad (4.78)$$

ここで、

$$p_j^{n+1} = \left(\frac{\beta}{g \Delta t} + \frac{n_j^2 |v_j^n|}{2(R_j^{n+1})^{4/3}}\right) \quad (4.79)$$

とおけば、(4.76)および(4.77)式の未知数は A_j^{n+1} および $p_j^{n+1} v_j^{n+1}$ である。 A_j^{n+1} が知られば、断面特性より R_j^{n+1} が求められるので、このときには p_j^{n+1} は既知と考えることができる。

(2) 計算法

(4.74)および(4.75)式を用いた場合（計算法A）あるいは(4.76)および(4.77)式を用いた場合（計算法B）のそれぞれについて、計算の手順を計算断面（格子点）ごとに具体的に述べることにする。

(i) 中間点（計算断面が、境界条件の課せられている上・下流端のいずれでもなく、また分・合流点のいずれでもない断面）

計算法A

- ① (4.74)および(4.75)式より、未知数 v_j^{n+1} および A_j^{n+1} を連立的に求める。
- ② v_j^{n+1} および A_j^{n+1} より他の水理諸量を求める（以下同様）

計算法B

- ① (4.76)および(4.77)式より、 A_j^{n+1} および $p_j^{n+1} v_j^{n+1}$ を連立的に求める。
- ② A_j^{n+1} と断面特性から、水位 Z_j^{n+1} を求める。
- ③ R_j^{n+1} を計算する。
- ④ p_j^{n+1} を計算する。
- ⑤ ①および④の結果より v_j^{n+1} を求める。
- ⑥ 他の水理諸量を求める。

(ii) 境界点

特性曲線法によれば、境界点において水理的にみて適切な計算法が得られる。流れを常流とすれ

ば、上流端においては下流から上流へ伝わる影響を示す(4.75)あるいは(4.77)式と、1つの境界条件から解が求められ、また下流端においては上流から下流へ伝わる影響を示す(4.74)あるいは(4.76)式と、1つの境界条件から解が求められる。また同時に、流れを常流とすれば、境界において課せられる条件は上・下流端のいずれにおいても1個に限られる。

境界点における条件には種々のものが考えられるが、洪水流のような場合、上流端においては水位ハイドログラフあるいは流量ハイドログラフ、下流端には水位ハイドログラフあるいは水位一流量曲線が境界条件として与えられることが多いであろう。以下においては、それぞれの場合の計算法を述べる。なお、境界点においてしばしば用いられる box 型の差分法を用いたときの問題点については、4.5(3)で検討する。

a) 上流端の境界条件が水位ハイドログラフの場合

計算法 A

- ① 水位ハイドログラフより、 $(n+1)\Delta t$ での水位 Z_n^{n+1} を求める。
- ② 上流端の断面特性より、 A_n^{n+1} を求める。
- ③ (4.75)式より、 v_n^{n+1} を求める。

計算法 B

- ① 水位ハイドログラフより、 $(n+1)\Delta t$ での水位 Z_n^{n+1} を求める。
- ② 上流端の断面特性より A_n^{n+1} および R_n^{n+1} を求める。
- ③ p_n^{n+1} を計算する。
- ④ (4.77)式より、 $p_n^{n+1}v_n^{n+1}$ を計算した後、 v_n^{n+1} を求める。

b) 上流端の境界条件が流量ハイドログラフの場合

計算法 A および B のいずれも、計算の手順には変わりなく、つぎの収束計算が用いられる。

- ① 上流端の水位 Z_n^{n+1} を仮定する。
- ② 上記a)の②～③ (計算法 A) あるいは②～④ (計算法 B) によって、上流端の流量 Q_n^{n+1} を求める。
- ③ 流量ハイドログラフから求められる $(n+1)\Delta t$ での流量と、②の流量との差の絶対値が、許容値以下になるまで①～②を繰り返す。

上流端においては、(4.73)式あるいは(1.53)式の負号の関係より、 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2\beta}v+c\right)\approx v+c>0$ である限り (つまり、流れが逆流の射流でない限り)、(1.53)式中の dA と dQ の関係は図4.11のようである。したがって、上記①で水位を増加させれば、②で計算される流量も増加することを考慮して、上の収束計算を行えばよい。

c) 下流端の境界条件が水位ハイドログラフの場合

計算法 A

- ① 水位ハイドログラフより、 $(n+1)\Delta t$ での水位 Z_n^{n+1} を求める。
- ② 下流端の断面特性より、 A_n^{n+1} を求める。

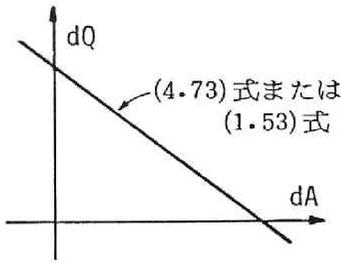


図4.11 上流端での dA と dQ

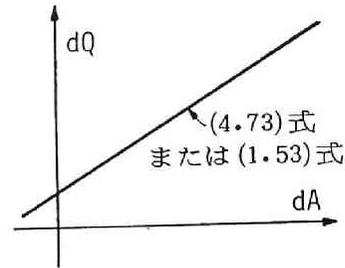


図4.12 下流端での dA と dQ

- ③ (4.74)式より v_i^{n+1} を求める。

計算法B

- ① 水位ハイドログラフより、 $(n+1)\Delta t$ での水位 Z_i^{n+1} を求める。
- ② 下流端の断面特性より A_i^{n+1} および R_i^{n+1} を求める。
- ③ p_i^{n+1} を計算する。
- ④ (4.76)式より、 $p_i^{n+1}v_i^{n+1}$ を計算した後、 v_i^{n+1} を求める。

つまり、上記a)とは、(4.75)あるいは(4.77)式の代わりに、それぞれ(4.74)あるいは(4.76)式を用いる点だけが異なる。

d)下流端の境界条件が水位一流量曲線の場合

計算法AおよびBのいずれにおいても、つぎの収束計算がとられる。

- ① 下流端の水位 Z_i^{n+1} を仮定する。
- ② 水位一流量曲線より、 Z_i^{n+1} に対する流量を求める。
- ③ 上記c)の②～③ (計算法A) あるいは②～④ (計算法B) によって、流量 Q_i^{n+1} を求める。
- ④ 上の②と③の流量の差の絶対値が、許容値以下になるまで、①～③を繰り返す。

下流端においては、(4.73)あるいは(1.53)式の正号の関係より、 $(c - \frac{\alpha + \beta}{2\beta}v) \approx c - v > 0$ である限り (つまり、流れが順流の常流である限り)、(1.53)式中の dA と dQ は図4.12のようである。したがって、上記①で水位を増加させれば、③で計算される流量は減少することを考慮して、上の収束計算を行えばよい。

以上のように、ここでの特性曲線法による手順では、与えられる境界条件の種類が変れば、その境界点の計算法だけを境界条件に応じて変更すればよく、Dronker¹⁰⁾の方法のように中間点の計算法までを含めて変更しなければならないという必要がない点に特徴がある。

(iii) 分・合流点

例として合流点を考える。合流点の取扱いとして、合流点に仮想的な瀬割堤を考える方法¹⁷⁾や合流流量を横流入流量として扱う方法¹⁸⁾などが提案されている。合流点においてどのような計算法を採る

かはそれぞれの場合に応じて検討されるべきであろうが、最も簡単なものは、たとえば図4.13のような合流点において断面番号を図のようにつけるとき、a)合流点における水位は、合流点を構成するどの断面においても等しい、すなわち、 $Z_1 = Z_3 = Z_5$ 、およびb)合流点において流量の連続性が成立する、すなわち、 $Q_1 + Q_3 = Q_5$ 、とする方法であろう。このときa)およびb)の3式と、断面1～2および3～4間で成立する(4.74)式あるいは(4.76)式、断面5～6間で成立する(4.75)式あるいは(4.77)式の計6個の式より、断面1、3および5における水位と流量がつぎの収束計算によって求められる。

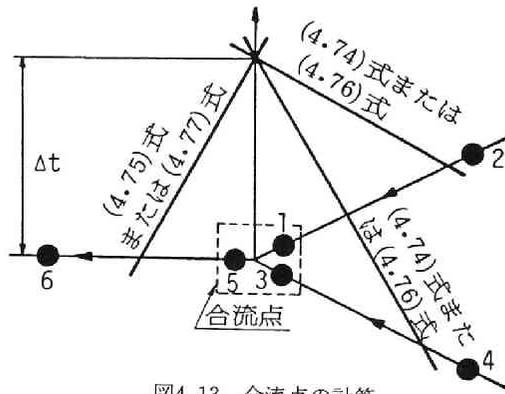


図4.13 合流点の計算

- ① 合流点の水位 $Z_1^{n+1} = Z_3^{n+1} = Z_5^{n+1}$ を仮定する。
- ② 断面1～2および断面3～4の間では、下流端で水位が与えられたときの計算法(ii)-c)により、 Q_1^{n+1} および Q_3^{n+1} を求める。
- ③ 断面5～6では上流端で水位が与えられたときの計算法(ii)-a)により、 Q_5^{n+1} を求める。
- ④ $Q_1^{n+1} + Q_3^{n+1}$ と Q_5^{n+1} の差の絶対値が、許容値以下になるまで①～③を繰り返す。先と同様に、①で仮定される水位を増加させれば、②で計算される流量はいずれも減少し、③で計算される流量は増加することを考慮して収束計算を行えばよい。

(iv) 初期条件

初期条件にはふつう定常状態の解すなわち不等流計算の結果が与えられる。その計算法としてはつぎの標準逐次計算法が一般的であろう。

$$Q_{j+1} = Q_j - q_j \Delta x_j \quad (4.80)$$

$$H_{j+1} = H_j + (s_{j+1} - s_j) \Delta x_j / 2 \quad (4.81)$$

(4.80)および(4.81)式は、(4.74)および(4.75)式(あるいは(4.76)および(4.77)式、以下同様)において、すべての j について $A_j^{n+1} = A_j^n$ および $v_j^{n+1} = v_j^n$ とすれば導かれる関係でもある。すなわち、上の標準逐次計算法は定常状態を考えたときの(4.74)および(4.75)式を自動的に満たしている。

逆にいえば(4.74)および(4.75)式の計算式は定常状態の計算法に非定常成分の計算法が重ねられたものとみなされ、初期値を与える不等流の計算法と非定常流の計算法との整合がとれているといえることができる。

(v) 計算法の構成

以上によって構成された非定常流の計算法を、ブロック図にまとめると図4.14のようである。

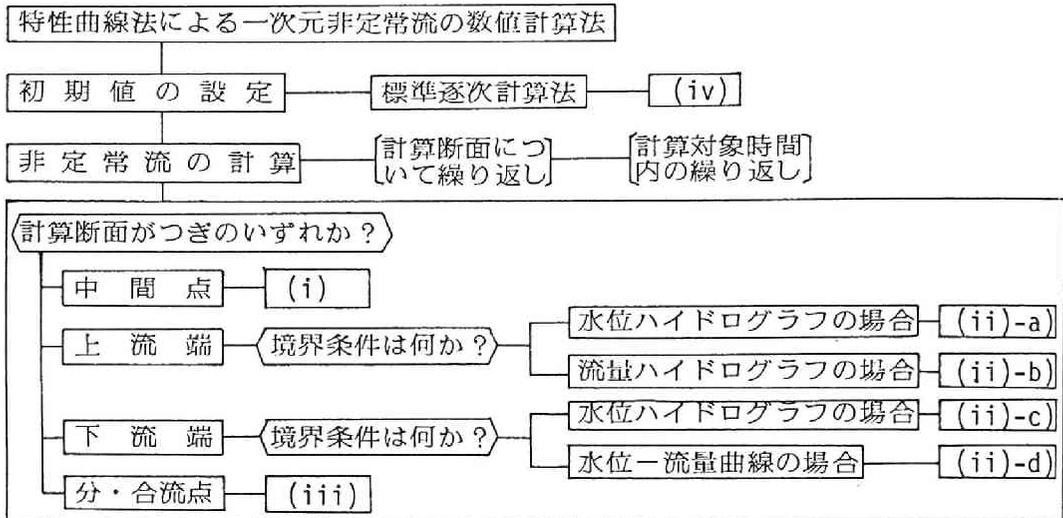


図4.14 特性曲線法による数値計算法

実際の計算ではこの図から計算に応じた選択が行われる。もちろん、非定常流の計算では、計算断面および計算対象時間についての繰り返しが行われる。

(3) 境界点における box 型差分法の問題点¹⁹⁾

4.5(2-ii)では特性曲線法による境界点の計算法を述べたが、境界点でのもう一つの計算法に box 型差分法による方法がある。すなわち、たとえば上流端 (断面番号 $j = J$ とする) において、連続式 (1.1) 式を

$$\frac{A_j^{n+1} + A_j^{n+1} - A_j^n - A_{j-1}^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j-1}^n + Q_j^{n+1} - Q_j^n - Q_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad (4.82)$$

と差分化し (ただし、横流入流量はないとしている)、これと 1 個の境界条件とから未知数 A_j^{n+1} および Q_j^{n+1} を求める方法である。しかし、この方法は境界点において連続式のみが考慮され、(1.3)式のエネルギー式が無視されている点に問題があるだけでなく、以下のように連続式も厳密には満たされていないという問題がある。

簡単のため単位幅での取扱いが可能な場合を考えることにすれば、基礎式は(2.27)および(2.28)である。いま第 2 章と同様に定常等流状態 ($v = v_0$, $h = h_0$, $s_0 = s_j$) を想定し、これに上流端 $x = 0$ において $h = h_0 + mt (t > 0)$ の擾乱が加った場合を考える。このときの解は(2.39)式より

$$h = \begin{cases} h_0 + m \left(t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right) \exp \left(-\frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}} \frac{1 - (2/3)F_r}{1 + F_r} \right) + 0 \left(t - \frac{x}{v_0 + \sqrt{gh_0}} \right)^2 \\ \quad ; x < (v_0 + \sqrt{gh_0})t \\ h_0 ; x \geq (v_0 + \sqrt{gh_0})t \end{cases} \quad (4.83)$$

である。ここに、 $F_r = v_0/\sqrt{gh_0}$ 、 $\lambda = gs_0/v_0$ である。この結果を用いれば、(2.27)および(2.28)式から流速はつぎのように求められる。

$$v = \begin{cases} v_0 + a_1 t' + a_2(1 - e^{-2\lambda t'}) & ; t' = t - x/(v_0 + \sqrt{gh_0}) > 0 \\ v_0 & ; x \geq (v_0 + \sqrt{gh_0})t \end{cases} \quad (4.84)$$

ここに、

$$a_1 = \frac{m v_0(3 - F_r + 2F_r^2) e^{-\frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}} \frac{1 - (2/3)F_r}{1 + F_r}}}{6F_r h_0}, \quad a_2 = \frac{m v_0(3 + F_r - 2F_r^2) e^{-\frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}} \frac{1 - (2/3)F_r}{1 + F_r}}}{12F_r h_0} \quad (4.85)$$

である。ただし、(4.84)式では t' の高次の項は無視されている。(4.84)式より上流端における流速は、 $t' \ll 1/\lambda$ のとき、すなわち $\lambda(t - x/(v_0 + \sqrt{gh_0})) \ll 1$ のとき、

$$v|_{x=0} = v_0 + \sqrt{g/h_0} m t' \quad (4.86)$$

と近似される。

以上が擾乱の初期において成立する解析的な解である。つぎにこれに対応する差分式による解を求める。擾乱の初期に限られているので、差分法による解も図4.15のように上流端でしかも $t = 0 \sim \Delta t$ ($n = 0 \sim 1$, 計算の1ステップ)の間で求めることにする。A点($x = 0$, $t = 0$)およびB点($x = \Delta x$, $t = 0$)では、初期条件より $h_A = h_B = h_0$ 、 $v_A = v_B = v_0$ 、 $s_{fA} = s_{fB} = s_0$ であり、またD点($x = 0$, $t = \Delta t$)では $h_D = h_0 + m \Delta t$ である。なお、計算の安定条件より $\Delta t/\Delta x < 1/(v_0 + \sqrt{gh_0})$ としておく。

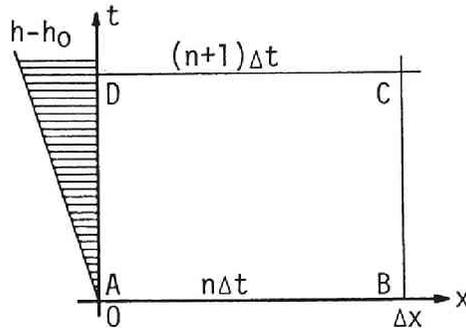


図4.15 上流端の水深変化

上流端における特性曲線法の差分式は、この場合(4.75)式に(2.27)および(2.28)式をあてはめた次式である。

$$\left(\frac{h_b - h_A}{\Delta t} + \frac{q_B - q_A}{\Delta x}\right) - \sqrt{gh_0} \left(\frac{1}{g} \frac{v_b - v_A}{\Delta t} + \frac{H_B - H_A}{\Delta x} - \frac{s_{fA} + s_{fB}}{2}\right) = 0 \quad (4.87)$$

ここに、 $q = vh$ で単位幅流量であり、また H は全水頭である。 $t = 0$ では定常等流状態を仮定しているから、 $q_A = q_B = v_0 h_0$ 、 $H_B - H_A = s_0 \Delta x = (s_{fA} + s_{fB}) \Delta x / 2$ であり、また境界条件より $h_b = h_0 + m \Delta t$ であるから、(4.87)式より

$$v_b = v_0 + \sqrt{g/h_0} m \Delta t \quad (4.88)$$

が求められる。すなわち、特性曲線法によれば、解析解(4.86)式と一致する数値解が得られることが知られる ($t' = \Delta t$)。一方、(4.82)式の box 型差分法はこの場合つぎのように表わされる。

$$\frac{h_b + h_c - h_A - h_B}{\Delta t} + \frac{q_B + q_c - q_A - q_D}{\Delta x} = 0 \quad (4.89)$$

(4.89)式より v_b を求めるには、 C 点 ($x = \Delta x$, $t = \Delta t$) の解を知らなければならない。これらを explicit 法で求めるとするとその結果は初期値と同じであって、 $h_c = h_0$ 、 $v_c = v_0$ である。したがって、(4.89)式より

$$q_D = q_0 + m \Delta x, \quad v_D = (q_0 + m \Delta x) / (h_0 + m \Delta t) \approx v_0 + m(\Delta x - v_0 \Delta t) / h_0 \quad (4.90)$$

が得られる ($q_0 = v_0 h_0$)。安定条件より、 $(\Delta x - v_0 \Delta t) / h_0 > \sqrt{g/h_0} \Delta t$ であるから、結局 box 型差分法によれば上流端において、解析解(4.86)式より過大な流速が計算されることが分る。

このような差の生じた理由はつぎのように考えられる。まず x があまり大きくない区間に限ることとし、 $\frac{\lambda x}{\sqrt{gh_0}} \frac{1 - (2/3)F_r}{1 + F_r} \ll 1$ としておく。(4.83)式で表わされる水面形は図4.16のようであり、 $t = 0 \sim \Delta t$ の間に $0 \sim x$ の区間に貯留された水量の増加分 $\Delta V(x)$ (図の斜線の部分) は、

$$\Delta V(x) = \int_0^x (h - h_0) dx = \begin{cases} mx(\Delta t - x/2(v_0 + \sqrt{gh_0})) & ; x < (v_0 + \sqrt{gh_0})t \\ m\Delta t^2(v_0 + \sqrt{gh_0})/2 & ; x \geq (v_0 + \sqrt{gh_0})t \end{cases} \quad (4.91)$$

である。つまり、 $\Delta V(x)$ は、 $t = \Delta t$ での擾乱の水面形が直線であるとし、かつその先端が $(v_0 + \sqrt{gh_0})\Delta t$ だけ進んだときの貯留量で表わされる。また、 $0 \sim \Delta t$ の間に、ある断面を流下する水量 (q_0 による分を除く) $\Delta Q(x)$ は、

$$\Delta Q(x) = \int_0^{\Delta t} (q - q_0) dt = \begin{cases} m(v_0 + \sqrt{gh_0})(\Delta t - x/(v_0 + \sqrt{gh_0}))^2 & ; x < (v_0 + \sqrt{gh_0})t \\ 0 & ; x \geq (v_0 + \sqrt{gh_0})t \end{cases} \quad (4.92)$$

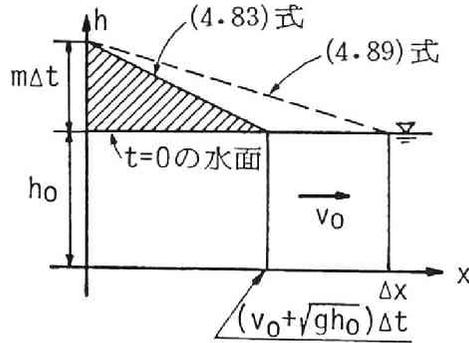


図4.16 $t = \Delta t$ における水面

である。(4.91)および(4.92)式より、 $\Delta V(x) = \Delta Q(0) - \Delta Q(x)$ が導かれるから、積分した連続式が満たされていることが確認される。ところが、(4.89)式は、連続式を図4.15の四辺形ABCDの周に沿う積分に改め、かつ各辺での積分を台形公式で近似した関係に他ならないから、このことは $t = \Delta t$ での擾乱の水面形を図4.16の破線で近似することに相当しており、 $0 \sim \Delta t$ 間の貯留量の増加を(4.91)式より過大に見積ることになる。すなわち、box型差分法では上流端において連続式が理論的に厳密な意味で満足されていないといえ、その結果上流端の流量および流速が解析解よりも大きく計算される。

4.6 結 語

本章においては、開水路の一次元流れを数値計算する方法についての研究成果を具体的に述べた。それらを要約すれば以下のようなものである。

- (1) 非定常流の数値計算で問題となる適切性、一致性、収束性および安定性について簡単に触れるとともに、explicit法およびimplicit法による計算法の特徴について考察し、本研究では、C.F.L.条件が水理学的な観点からも考慮されるべきことやプログラム作製が容易であることからexplicit法を用いることを述べた。
- (2) kinematic waveの第1次近似による数値計算式をいくつか導き、kinematic waveの伝播を考慮して上流側差分を採った(4.8)式が安定性の面からみて好ましい差分式であることを明らかにした。
- (3) kinematic shockが現われた場合にも機械的な計算が可能な拡散項を含むkinematic waveの第2次近似による差分式を、単純化された水路の条件のもとで導き、差分式に応じて、種々の安定性の必要条件、すなわちkinematic waveに関するC.F.L.条件やこれと拡散の安定条件とを組合せた条件を得た。
- (4) dynamic wave理論による数値計算式を、保存則系の代表的な差分法であるLax-Wendroff法および第1章の特性曲線による表示を用いた特性曲線法によって導くとともに、両者の比較を行い、特性曲線法では1次の内挿法が用いられるのに対し、Lax-Wendroff法ではそれが2次であるという関

係を明らかにした。

(5) Lax-Wendroff 法および特性曲線法の安定性を検討し、前者についてはC.F.L.条件および Vasiliev の安定条件を導き、後者についてはさらに流れが射流でないという条件が加わることを示した。また、Vasiliev の安定条件は、摩擦項に含まれる流速を、時間 $n\Delta t$ での流速と $(n+1)\Delta t$ での流速の平均で評価すれば、避けられることを示した。

(6) 流れが射流の場合の特性曲線法を、この場合には dynamic wave がいずれも下流向きであることを考慮して導くとともに、流れの安定性と計算の安定性との関連について若干の考察を行い、計算においては擾乱の波数によって安定性が異なることを示した。

(7) エネルギー解析法を適用した常流の特性曲線法によって、河川の洪水などを数値計算するための方法を、中間点、境界点、分・合流点について詳しく述べるとともに、初期条件の設定方法より、この特性曲線法が定常流に対する標準逐次計算法を非定常流に拡張したものであることを示した。また、計算法の構成を図4.14のようにまとめ、プログラムの作製を容易にした。

(8) 境界点における計算に特性曲線法を用いれば、計算上の水量の連続性が保たれるのに対し、慣用される box 型の差分法ではこれが乱されることを、簡単な条件のもとに示した。

本章においては、明らかに dynamic wave 法に重点が置かれている。それは、kinematic wave 法がその理論上の制約から一次元流れの実用的な数値計算にそれほど広い適用性を有していないためである。また、dynamic wave 法のうちでは特性曲線法を中心にしたのは、再三述べているように、この方法が dynamic wave による影響の伝播という水理学的特徴を表現しているからであり、具体的な計算法においても境界条件や分・合流点の取扱いに水理学的にみて適切な方法を与えるからである。

参考文献

- 1) Richtmyer, R. D. and K. W. Morton : *Difference methods for initial-value problems*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1967
- 2) 伊藤剛編：数値解析の応用と基礎，アテネ出版，1971
- 3) 山口昌哉，野木達夫：数値解析の基礎——偏微分方程式の初期値問題——，共立出版，1969
- 4) 矢嶋信男，野木達夫：発展方程式の数値解析，岩波書店，1977
- 5) 土木学会編，土木工学における数値解析，流体解析編，サイエンス社，1974
- 6) 土木学会編，水理公式集，1985
- 7) Amein, M. and C. S. Fang : *Implicit flood routing in natural channel*, Proc. ASCE, Vol. 96, HY12, 1970
- 8) Liggett, J. A. and D. A. Woolhiser : *Difference solution of the shallow-water equation*, Proc. ASCE, Vol. 93, EM2, 1967
- 9) Dronker, J. J. : *Tidal computation for river, coastal area and seas*, Proc. ASCE, Vol. 95, HY1, 1969

- 10) Lister, M. : Mathematical method for digital computers, edited by A. Ralston and H. S. Wilf, Sect. 15, John Wiley&Sons, 1967
- 11) Zovne, J. J. : The numerical solution of transient supercritical flow by the method of characteristics with a technique for simulating bore propagation, ERC-0370, School of civil engg., Georgia Institute of technology, Atlanta, Georgia, 1970
- 12) 岩佐義朗, 井上和也, 片山猛: 開水路流れの数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第19号B-2, 1976
- 13) 岩佐義朗, 井上和也, 伊丹文雄: 非定常流の数値計算法に関する一考察, 第28回土木学会年次学術講演会講演概要, II-177, 1973
- 14) Courant, R., E. Isaacson and M. Rees : On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite difference, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol.5, 1952
- 15) Stoker, J. J. : Water waves, Interscience Pub., 1957
- 16) 岩佐義朗, 井上和也, 片山猛: 開水路非定常流のシミュレーションについて (第5報), 第30回土木学会年次学術講演会講演概要, II-191, 1975
- 17) 伊藤剛: 非定常運動の境界条件について, 第18回水理講演会講演集, 1974
- 18) 神田徹, 北田隆久: 不定流の数値計算法に関するcritical review, 建設工学研究所報告 No.17, 1975
- 19) 岩佐義朗, 井上和也, 栗林東一: 洪水流の数値シミュレーションについて (第3報), 第29回土木学会年次学術講演会講演概要, II-165, 1974

第5章 一次元非定常流への応用

この章においては、第4章で展開された数値計算法を種々の非定常流に適用した結果について考察をすすめる。

一次元の非定常流の数値計算法は、前章で述べたように kinematic wave 理論による方法 (kinematic wave 法) と dynamic wave 理論による方法 (dynamic wave 法) の2つに大別される。kinematic wave は、第3章で述べたように非定常流の理論的解析において重要な役割を果し、また現象の時間スケールが dynamic wave の減衰の時間スケールより大きい場合の洪水流の近似として有効であるので、これまでその理論的な面や数値解析法について詳しく考察してきた。

ところが、kinematic wave 法を通常の水路や一般の河道の流れに適用しようとするとき、つぎのような問題が生ずる。すなわち、kinematic wave の伝播速度を示す w や拡散を表わす μ を未知数である水深 (あるいは流量や断面積) の関数としてどのように表現するかという問題である。換言すれば、まず必要とされるのは断面積と流量を一意的に結びつける関係であって、通常の河道においてはこの関係は、経験的に得られる水位一流量曲線に基づいている。しかし、普通得られている水位一流量曲線と、(3.3) 式のような等流状態あるいはそれからの補正を考えた (3.81) 式との関係は必ずしも明確ではなく、水位一流量曲線が流れの解析の基礎式の一つであるエネルギー式をどの程度近似しているかが明確でないことが問題の一つとして挙げられる。

つぎに、このような水位一流量曲線を用いて kinematic wave 法を適用するにしても、河道に沿う各断面において水位一流量曲線の水深方向の微係数 (伝播速度 w に対応) および水面こう配の影響を考慮した水位一流量曲線の縦断方向の微係数 (拡散係数 μ に対応) が必要とされるが、通常このような微係数が求められるほど水位一流量曲線は精度よくなく、また密には求められていないという第二の問題がある。第3章および第4章では、 w および μ を (3.4) および (3.85) 式で与えて理論的な解析を行ったが、一般の河道においては上記のように、 w および μ をどのように与えるかが kinematic wave 法を適用する場合の問題点とされる。このような事情が、kinematic wave 法が、理論的な面における重要性にもかかわらず、一般の水路や河道における非定常流の有効な数値計算法となりえず、あまり適用されてこなかったことの大きい理由の基本となるであろう (それ以外にも4.1で述べたような理由が挙げられる)。

dynamic wave 法では、Lax-Wendroff 法、leap-frog 法、box 型差分法および特性曲線法などの種々の数値計算法が考えられるが、4.3で述べた理由により、これらのうち水路が一樣でない場合の流れや種々の境界条件に対し水理学的にみて広い適用性を有しているのは、4.3(2) および4.5で展開した特性曲線法である。

以上のことを考え、この章においては、微小擾乱および水深変化の大きい流れを単位幅の流れとして計算する場合 (5.1 および 5.2) においてのみ、kinematic wave 法および dynamic wave 法の2つを

適用して相互に比較することにする。また、5.3では、実際の一様な水路を用いた非定常流の水利実験において、dynamic wave 法の Lax-Wendroff 法と特性曲線法とを比較し、5.4以後の節では一様でない通常の河道における洪水を対象として、4.3(1)で述べた理由により Lax-Wendroff 法は適用せず、特性曲線法だけを用いることにする。

A. 応用に当たっての基本的事項の研究

5.1 微小擾乱の計算

非定常流の基本的な性質をみるために、しばしば微小擾乱の追跡が行われる。ここでも同様に、水路が十分に長いとして、上流端に図5.1のような2種類の水深変化の小さい擾乱を与えた場合の計算を行う¹⁾。水路幅は十分に広く、単位幅での取扱いが可能と考える。また水路の条件として Manning の粗度係数は $n = 0.025$ 、水路こう配は $s_0 = 0.002$ とする。

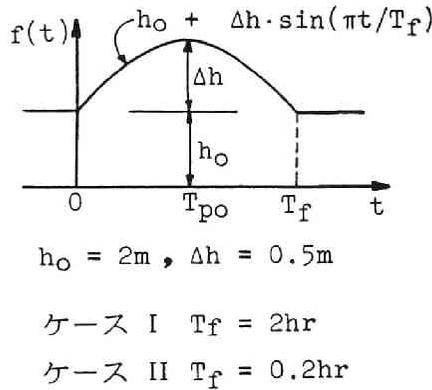


図5.1 微小擾乱

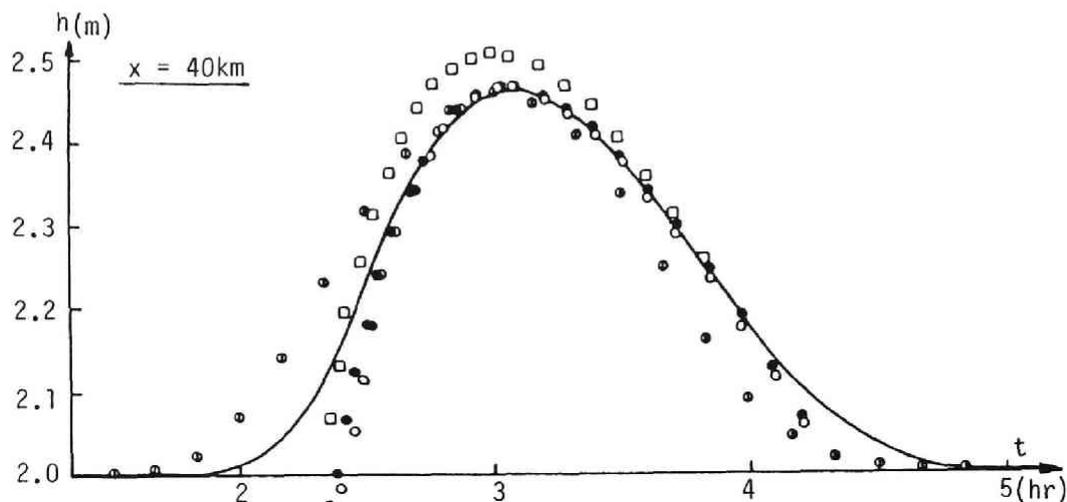
上流端の水位が図5.1のように表わされると、kinematic shock の現われるのは微小擾乱の波先であって、その距離は (3.23) および (3.31) 式の次元をもとへ戻した次式より求められる。

$$w_1 = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot n} s_0^{1/2} f^{2/3} \text{ のとき, } x_s = \frac{3w_1 f}{2(df/dt)} \quad (5.1)$$

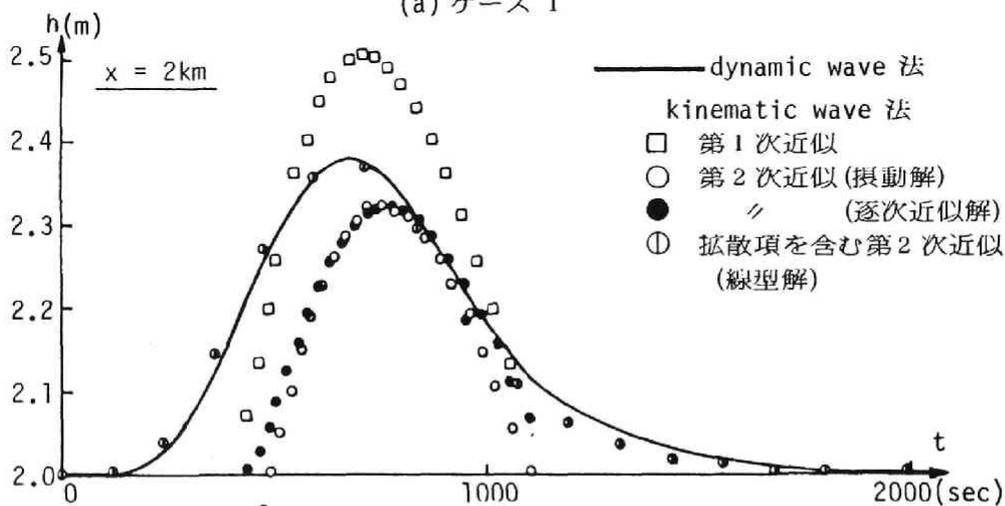
ここに、 $f(t)$: 上流端の水深である。(5.1) 式より、 x_s の最小値 (最初に shock が発生する位置) は、ケース I ($T_f = 2$ 時間) では、 $x_{s \min} = 65\text{km}$ 、ケース II ($T_f = 0.2$ 時間) では、 $x_{s \min} = 6.5\text{km}$ である。本節では kinematic shock が現われるまでを対象とし、次節の水深変化の大きい流れにおいて kinematic shock が発生した後の取扱いに触れることにする。

計算は、kinematic wave 法の第1次近似、摂動法および逐次近似法による第2次近似、拡散項を含む第2次近似ならびに dynamic wave 法の特性曲線法および Lax-Wendroff 法によって行い、得られた結果の比較・検討をすすめる。ただし、拡散項を含む第2次近似では、線型化された場合の解析解

(3.92) 式を単位図法²⁾によって計算する。ここに、 $v_p = s_0^{1/2}(h_0 + \Delta h)^{2/3}/n$ とすると、 $w_0 = (5/3)v_p$ 、 $\mu_0 = (h_0 + \Delta h)v_p/2s_0$ としている。つまり、微小擾乱の波頂における伝播速度および拡散係数を採っている。また、dynamic wave 法では、上流端において図5.1の水深を与え（Lax-Wendroff 法では上流端で特性曲線法を用いている）、一方下流端では水路を十分に長いとしているので、条件を課していない。なお、dynamic wave 法の計算では $\Delta x = 400\text{m}$ 、 $\Delta t = 20$ 秒としている。



(a) ケース I



(b) ケース II

図5.2 微小擾乱の計算結果

図5.2(a)および(b)は、それぞれケース I およびケース II についての結果の一例である。図に実線で示されている dynamic wave 法とは、特性曲線法による結果であるが、Lax-Wendroff 法の結果もこれとほとんど同じであって、図にその差を表わすことはできない。dynamic wave 法では流れの基礎式（この場合 (2.1) および (2.3) 式）のすべての項が省略されずに計算されており、また5.3で

述べる水理実験における非定常流でも dynamic wave 法によって実験値がほぼ再現されているので、本節においても dynamic wave 法による結果を基準にして考えることにする。

図5.2より、kinematic wave 法の第1次近似は、理論上明らかに、波頂の減衰を表わせないため、図のように減衰が生ずる場合には、不十分な結果しか与えないことが分る。摂動法および逐次近似法による第2次近似は((3.44)式および(3.59)式)は、3.4(1)で予想されたように、とくに波頂付近で互いに大きい差異はない。これらの結果から、ケースⅠでは波頂の減衰を極めて良好に表現しているのに対し、ケースⅡでは、dynamic wave 法による結果とかなりの差を生じていることが分る。これは、kinematic wave 法の適用性を表わす(2.16)あるいは(3.20)式のパラメータ σ が、ケースⅠでは $T_* = 2$ 時間、 $h_* = 2$ mとして $\sigma = 0.0313$ であるのに対し、ケースⅡでは $T_* = 0.2$ 時間、 $h_* = 2$ mとすれば $\sigma = 0.313$ であることによる差、つまりケースⅡはケースⅠに比べ流れの変化が急激であり、そのため kinematic wave 法が適用されにくいことによる差と考えられる。

波頂の減衰を除いた波形の変形に関しては、とくに波形の立ち上りの部分において、kinematic wave 法の結果は dynamic wave 法の結果とかなり異なり、過度な減衰を示している。これは、擾乱の波先は dynamic wave として伝わるという2.4(1)の解析的な結果を反映しているからであろう。

拡散項を含む第2次近似(3.92)式は、ケースⅠおよびⅡのいずれに対しても、波頂付近の減衰をかなり良好に表現していることが分る。とくに、ケースⅡでは摂動法や逐次近似法による第2次近似が波頂の減衰を表わしていないのに対し、拡散項を含む第2次近似が線型解であるにもかかわらず、波頂付近で dynamic wave 法の結果とよく一致している点が注目される。これは、線型解で用いられた伝播速度 w_0 や拡散係数 μ_0 が波頂において評価されていることによるのももちろんであるが、それ以外にも拡散項を含む第2次近似の適用性の広さを示すものであろう。しかし、 w_0 や μ_0 の値はそれらが最大となる波頂での値であるため、水深の上昇期や下降期において伝播が速く現われている。これは、伝播速度などを一定とする線型解の限界であろう。また、拡散項を含む第2次近似を dynamic wave 法に比べると、近似系であることはいうまでもなく、時間が十分に経過すれば dynamic wave 法との間に差を生ずるようになる(後述の図5.5)。

図5.3は、距離 x とその点における水深の極大値 h_p の関係を、極大値の減衰 $h_m - h_p$ (h_m :上流端の水深の極大値)で表わしたものである。ケースⅠについては、減衰が図5.2(a)よりかなり拡大されて示されているため、図5.2(a)では見い出せなかった kinematic wave 法の結果と dynamic wave 法の結果の差が示されているが、いずれにしてもその差はわずかであるから、kinematic wave 法の摂動法、逐次近似法および拡散項を含む第2次近似と、dynamic wave 法は波頂の減衰についてはほぼ同じ結果を与えるといえる。一方、ケースⅡについては、図5.2(b)より予想されるとおり、摂動法および逐次近似法による減衰は、拡散項を含む第2次近似や dynamic wave 法の結果よりかなり大きく現われており、このような変化の急な流れに対しては kinematic wave 法の摂動法や逐次近似法は適用がむずかしいと考えることができる。また、先と同様に拡散項を含む第2次近似が、図5.3(b)の程度の流下距離の間では有用なことが知られる。

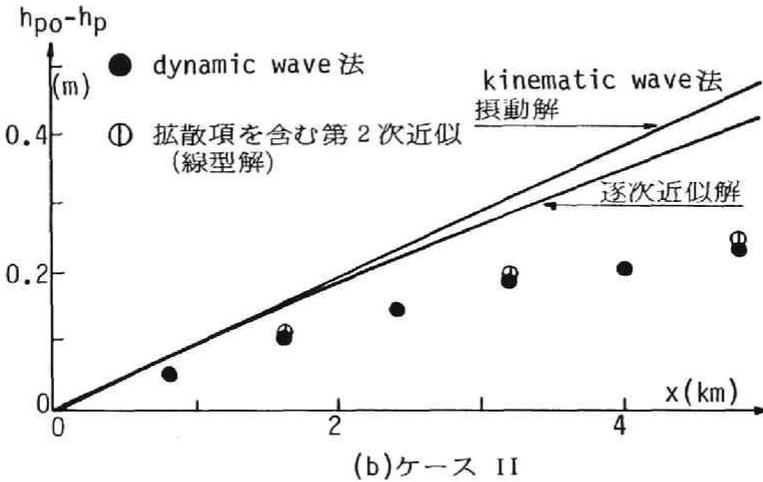
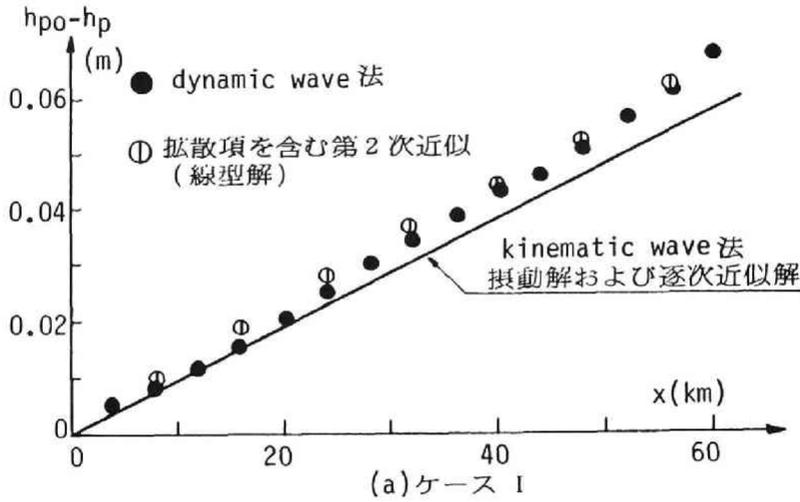


図5.3 波頂の減衰

図5.4は、距離 x の点において水深の極大値が現われる時刻 T_p と x との関係を示したもので (T_p は上流端での T_p)、波頂の伝播を表わしている。図には摂動法および逐次近似法による伝播直線あるいは曲線（それぞれ (3.41) および (3.53) 式）が示されており、また拡散項を含む第2次近似において上流端の水深の変化を δ 関数としたときの波頂の伝播を表わす (3.99) 式も、ケースIIの微小擾乱について示されている（ケースIの微小擾乱については、(3.99) 式による結果と、(3.41) あるいは (3.53) 式による結果とはほとんど一致するため、表示されていない。またケースIIでは、(3.99) 式の w_0 および μ_0 を、波頂において評価した場合と、図5.1の $h_0 = 2$ m の基底の流れについて評価した場合の2通りの結果が示されている）。この図より、ケースIにおいては波頂の伝播は、波頂の減衰と同様に、いずれの計算法によってもほぼ同じ結果が得られることが分る。一方、ケースIIでは摂動法および逐次近似法による波頂の伝播は、拡散項を含む第2次近似やdynamic wave法による波頂の

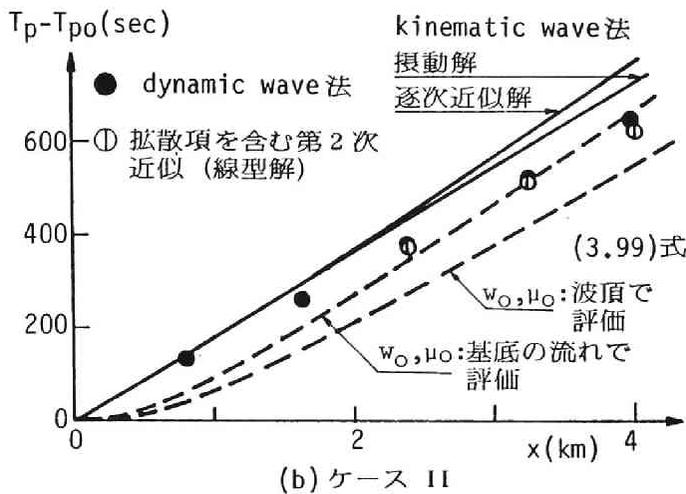
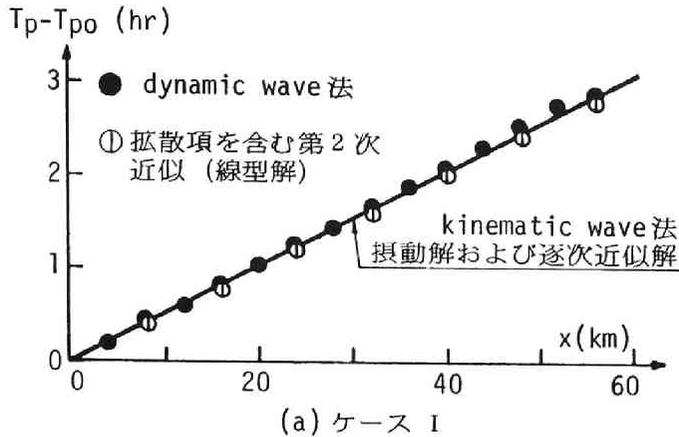
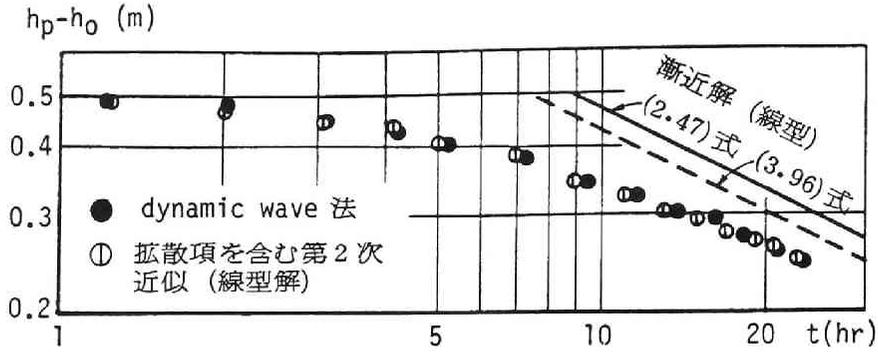


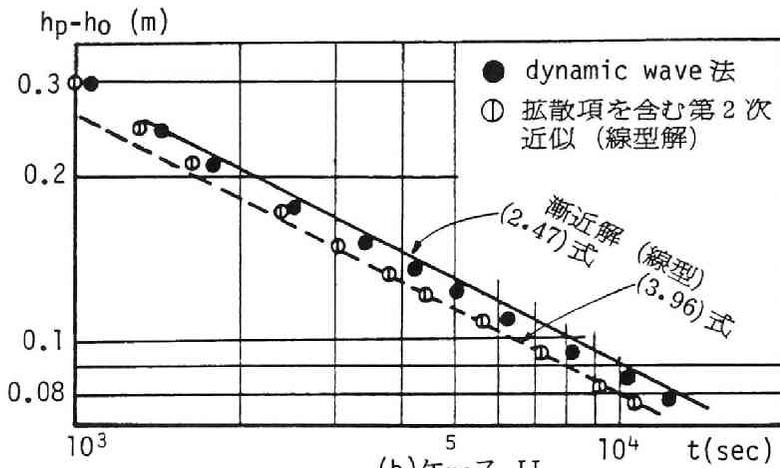
図5.4 波頂の伝播

伝播よりやや遅れること、つまりケースIIのような変化の急な流れでは波頂の伝播は(3.41)あるいは(3.53)式で表わされる kinematic wave 法の結果よりも速くなることが分る。拡散項を含む第2次近似の結果と dynamic wave 法の結果がほぼ一致していることや、それらの結果が x の小さい部分を除いて拡散を考えた(3.99)式に漸近していることを考えると、波頂の伝播が(3.41)あるいは(3.53)式の kinematic wave 法よりも速くなっているのは、拡散の影響とみられ、ケースIIのような流れでは拡散が無視できないといえる。

図5.5は、微小擾乱の追跡を長時間にわたって行った数値実験での波頂の減衰を示したものである。先に述べたように kinematic shock が最初に発生するのは、ケースIでは $x_s=65\text{km}$ の地点であり、そのときの時刻 t_s は(3.10)式より $t_s=3.82$ 時間である。同様に、ケースIIでは、 $x_s=6.5\text{km}$ 、 $t_s=0.382$ 時間 $=1.37 \times 10^3$ 秒である。kinematic shock が発生すれば、摂動法や逐次近似法は適用できなくなるが、本節では kinematic shock 以後の取扱いには触れないでいるので、図5.5には kinematic



(a) ケース I



(b) ケース II

図5.5 長時間追跡したときの波頂の減衰

shockの有無にかかわらず適用できる拡散項を含む第2次近似とdynamic wave法による結果だけが比較されている。また、図には、拡散項を含む第2次近似において線型の場合の時間が十分経過したときの漸近解(3.96)式およびdynamic wave法における同様の結果である(2.47)式も示されている。ケースIの計算範囲では、拡散項を含む第2次近似とdynamic waveの結果はほとんど一致しており、また減衰が緩やかであって線型の場合の漸近解には未だ近づいていないことが分る。一方、ケースIIでは、拡散項を含む第2次近似の結果は(3.96)式に、dynamic wave法による結果は(2.47)式にそれぞれ近づいている。したがって図5.5(b)の程度の時間まで追跡を進めれば、拡散項を含む第2次近似とdynamic wave法との間に差がみられることが知られる。この場合(ケースII)、計算結果が線型の場合の漸近解に近づくのは、微小擾乱の減衰が大きいため線型化の仮定が満たされやすくなったからであろう。図5.5(a)においてもさらに計算を続けていけば、計算結果はそれぞれ(3.96)あるいは(2.47)式に近づくものと思われる。

以上、ここでの微小擾乱の計算結果をまとめればつぎのようである。

流れの変化が緩やかで、(2.16)あるいは(3.20)式で定義される σ が1に比べて十分小さいとき、とくに波頂に関しては波頂が kinematic shock に巻き込まれるまでは、kinematic wave 法の摂動法や逐次近似法が有効に適用されるが、波先においてあるいは σ が大きいとき、過度な減衰が現われ kinematic wave としての扱いができないといえる。

また、拡散項を含む第2次近似は、伝播速度および拡散係数を適切に選べば微小擾乱に対しては線型解でもかなり良好な結果を与えるが、流下距離が大きくなれば、dynamic wave 法の結果と若干の差を示し、これは3.5(3)で述べたように拡散項を含む第2次近似において省略された項の影響とみることができるといえる。

5.2 水深変化の大きい流れの計算

この節では、前節と同じ水路を想定し、その上流端に水深の変化がかなり大きい図5.6のような洪水を与えた場合の計算法とその結果³⁾について考察する。計算法には前節と同じ方法をすべて適用した。ただし、拡散項を含む第2次近似では、前節と同様に波頂における伝播速度 w および拡散係数 μ を用いた線型解の他、4.2(2)で述べた(4.11)式を用いて、数値計算により w および μ が水深によって変化するとした非線型解も求めた。この計算および dynamic wave 法の計算では $\Delta x = 2000\text{m}$ 、 $\Delta t = 60\text{秒}$ としている。なお、水路は十分に長いとしているので、下流端に境界条件は課していない。

図5.6のような上流端の水深変化の場合、図3.3で示した方法により、kinematic shock の $x-t$ 平面上における軌跡 $x_s \sim t_s$ 、ならびに x_s における kinematic shock で交差する2つの kinematic wave が上流端を出発する時刻 T_1 および T_2 を求めた結果が図5.7である。この図より、kinematic shock が最初に現われるのは $x_s \approx 90\text{km}$ の地点で、時刻は $t_s \approx 6.3\text{時間}$ であり、また、この最初の kinematic shock を構成する kinematic wave は、 $T_1 = T_2 \approx 2\text{時間}$ であるから、図5.6の S 点から出る kinematic wave 上で発生することが知られる。

図5.8は、kinematic shock が発生するまでの $x = 40\text{km}$ および 72km における水深の時間的变化を示したものである。図に実線で示されている dynamic wave 法とは、特性曲線法による結果であるが、

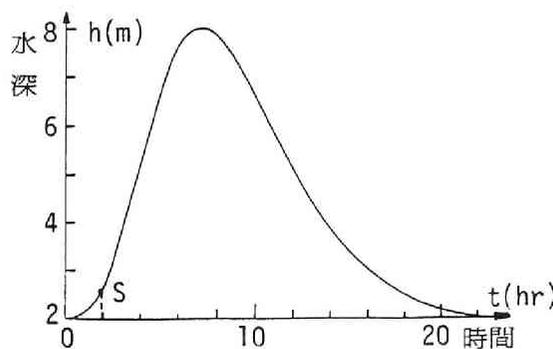


図5.6 水深変化の大きい流れ

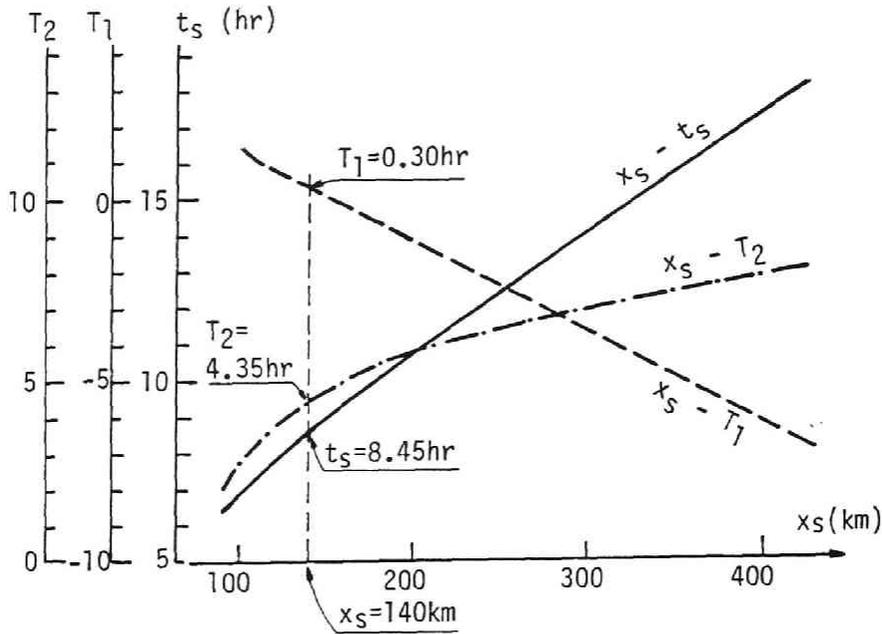


図5.7 kinematic shock の軌跡および伝播直線の組

5.1と同様に Lax-Wendroff 法の結果もこれとほとんど同じである。ここでも、先と同様に dynamic wave 法による結果を基準にして考察をすすめる。

図5.8の dynamic wave 法の結果より、ここで考えた水深変化が大きい流れの場合、波頂の減衰はきわめてわずかであることが知られる。この場合の (2.16) 式のパラメータ σ は、図5.6より $T_* = 24$ 時間、 $h_* = 8$ m とすると $\sigma = 5.23 \times 10^{-3}$ であるから、5.1で述べたケース I の微小擾乱よりさらに変化の緩やかな流れとみられる。つまり、減衰のない kinematic wave の第1次近似が適用しやすい流れであって、それが dynamic wave 法の結果においても波頂の減衰が微小であることに現われている。それはまた、図5.8の水深の hidrograph の全体を通じて dynamic wave 法の結果と kinematic wave 法の第1次近似が互いにほとんど一致していることの原因であると思われる。このことからまた当然の結果として、摂動法や逐次近似法の第2次近似による第1次近似の補正もわずかであることや、また同時に摂動法と逐次近似法の差もわずかであることが知られるが、それらは図5.8において確かめることができるとおりである。もちろん、第2次近似のわずかな補正により、波頂のわずかな減衰が示されており、第1次近似の波頂が減衰しないという問題が第2次近似によれば克服されることも図5.8より知ることができる。

先の微小擾乱の結果と合せて考えると、無次元のパラメータ σ が小さいほど、kinematic wave 法の第1次近似の適用性が高く、dynamic wave 法の結果とよく一致し、第2次近似による補正もわずかであること（これは、2.2および3.3で予想されたとおりである）や、 σ がやや大きくなれば5.1のケース I の微小擾乱についてみたように、波頂の減衰が顕著になりはじめ、これを表わせない

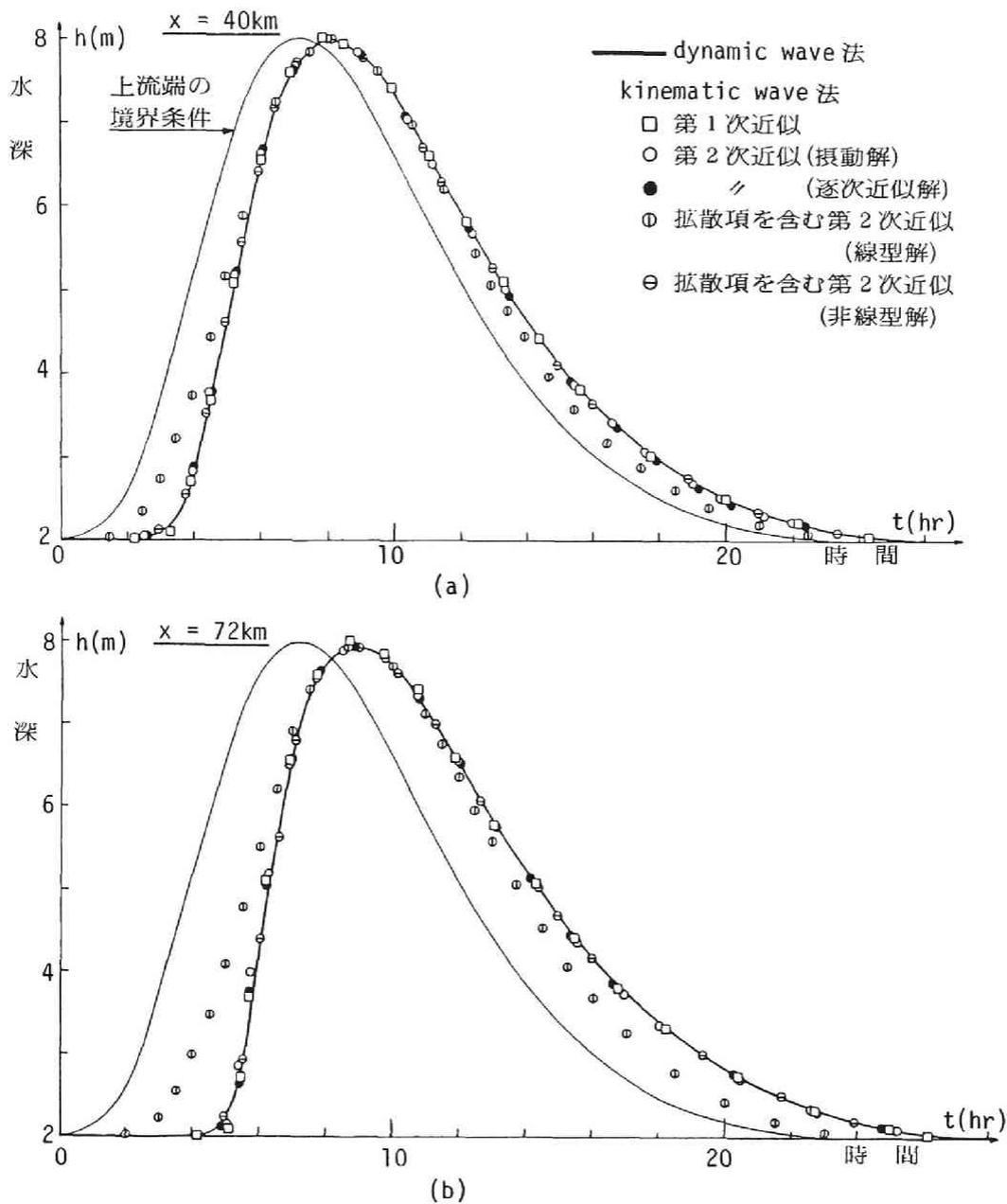


図5.8 水深変化の大きい流れの計算結果

kinematic wave の第 1 次近似では不十分であるが、波頂附近に限れば第 2 次近似が十分適用できること、および σ がさらに大きくなればケース II の微小擾乱のように第 2 次近似を用いると波先や波頂において過大な減衰が示されることが結論として得られる。

拡散項を含む第 2 次近似のうち、 w および μ に波頂での値を用いた線型解では、波頂の近くでは dynamic wave 法の結果がよく表現されているが、水深の上昇期の前半や下降期の後半においては伝

播が速くなっていることや拡散の効果が dynamic wave 法の結果と比べ大きくなっていることがみられる。これは、dynamic wave 法では波形を拡散させる効果と同時に kinematic shock を発生させるような波形の急峻化の効果も含まれているのに対し、線型解では波形を平滑化させる拡散のみが考えられており、しかも w および μ がそれらが最大となる波頂において評価されていることによるものであって、線型解の限界を意味するものであろう。 w および μ が水深によって変化するとした拡散項を含む第2次近似の非線型解では、拡散による波形の平滑化と伝播速度の非線型性による急峻化が同時に考えられているので、上記のような線型解の問題点は生じず、図5.8にみられるように dynamic wave 法とよく一致した結果が得られている。5.1では微小擾乱に対して、拡散項を含む第2次近似の線型解がかなり広い適用性を有することが見い出されたが、本節のように上流端の水深の変化が大きい場合には、拡散項を含む第2次近似を非線型的に（ただし数値的に）取扱えば有用なことが知られる。

図5.9は kinematic shock が発生した後の例として、 $x = 140\text{km}$ における水深のハイドログラフを示したものである。図5.7より、この地点を kinematic shock が通過するのは $t = 8.45$ 時間と読み取られる。kinematic shock の近くを除けば、計算結果の特徴は図5.8に関して述べたことと同様であるので省略する。kinematic shock が通過する時刻では、図5.9にみられるように、kinematic wave の第1次近似ならびに第2次近似の摂動法および逐次近似法の解は、第3章で述べたとおり不連続である。dynamic wave 法の結果や拡散項を含む第2次近似の非線型解も、kinematic shock が通過する時刻では、dynamic wave 法や非線型解に含まれるいくつかの拡散の効果により不連続になるには至って

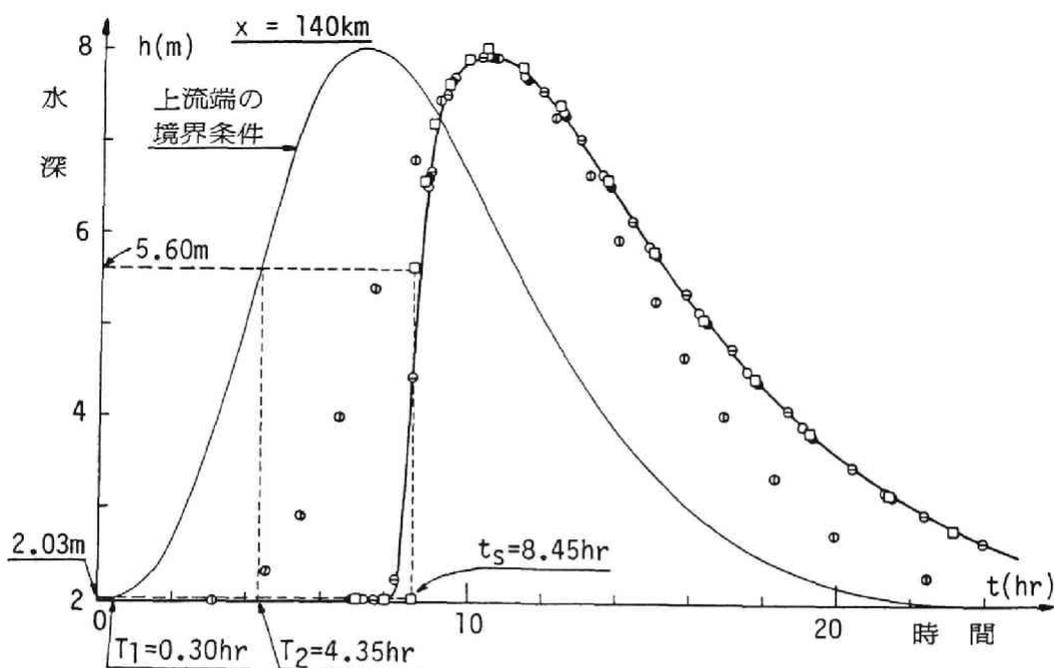


図5.9 kinematic shock 発生後の計算結果（記号は図5.8と同じ）

ないものの、水深の変化率がきわめて大きく現われており、kinematic shock を反映したハイドログラフを示している。拡散項を含む第2次近似の線型解は、先に述べたように伝播速度の非線型性による急峻化が含まれていないため、平滑化だけが進む結果となっており、kinematic shock が発生した場合には不適當なことが分る。

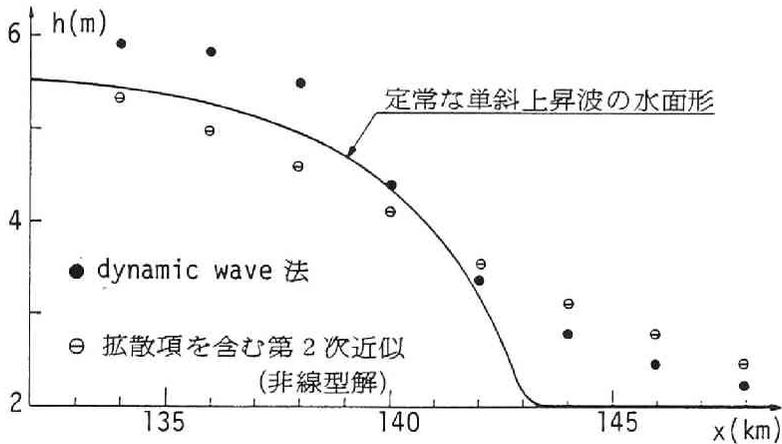


図5.10 kinematic shock の内部の水面形

図5.7より、 $x = 140\text{km}$ における kinematic shock を構成する2つの kinematic wave が上流端を出発した時刻 T_1 および T_2 は、それぞれ $T_1 = 0.3$ 時間および $T_2 = 4.35$ 時間と求められる。また、与えられた上流端の水深のハイドログラフより、これらの時間における水深はそれぞれ、 $t = T_1$ のとき $h_1 = 2.03\text{m}$ および $t = T_2$ のとき $h_2 = 5.60\text{m}$ と求められる。すなわち、 $x = 140\text{km}$ における kinematic shock を構成する上流側および下流側の水深は、それぞれ $h_2 = 5.60\text{m}$ および $h_1 = 2.03\text{m}$ である。図5.10は、拡散項を含む第2次近似の非線型解および dynamic wave 法の結果より kinematic shock の内部の水面形を求め、これらと2.5で述べた定常な単斜上昇波（上流側および下流側の水深をそれぞれ h_2 および h_1 とする）の水面形を(2.51)式を数値積分して求めた結果とを比較したものである。この図より、拡散項を含む第2次近似の非線型解では、波形が全体にわたって拡散され過ぎであることがみられる。図5.9のハイドログラフをみれば、kinematic shock が通過するときには、これを反映して拡散項を含む第2次近似の非線型解で水深の変化が著しく大きく現われているが、さらに詳細に shock の内部をみれば、この方法は shock において過大な拡散のある（平滑化の強すぎる）解を与えることが知られる。

定常な単斜上昇波の水面形は、dynamic wave 法の結果と比べて波先（下流側）において水面こう配が急であり、また上流側においては逆に緩くなっている。波先で水面こう配が急になっているのは、このときの h_1 および h_2 に対して(2.49)式の q_b より求められる $h_c (= \sqrt[3]{q^2/g})$ が、 $h_c = 1.996\text{m}$ であり、下流側の水深 $h_1 (= 2.03\text{m})$ にはほぼ等しく、2.5で分類した(ii)の場合 ($h = h_c$) に相当するとみられ、水面形が図2.6の状態に近づいているからであろう。図5.10をみれば、このような場合には

dynamic wave 法では波先において拡散の効果が強く現われるようである。これらから、2.5あるいは3.1で述べたような、kinematic wave 法において kinematic shock という不連続な解を定常な単斜上昇波で置き換えることは、この場合には問題があることが知られる。これはおそらく、図5.9のような kinematic shock の場合、図5.7にみられるように T_1 および T_2 (shock を構成する2つの kinematic shock が上流端を出発する時刻) が kinematic shock の流下とともに変化しており、したがってそれに伴って kinematic shock の上流側および下流側の水深が時間的にかなり急に変化すること、すなわち単斜上昇波が定常状態に達する以前にその上流側や下流側の水深が変化するために、2.5の単斜上昇波の取扱いで前提とした並進座標系において定常であるという仮定が満たされていないことによると考えられる (kinematic shock の上流側および下流側の水深が時間的に変化しない場合には、dynamic wave 法の結果は相当時間が経てば kinematic shock において定常な単斜上昇波に近づくことが確かめられている⁵⁾)。上のような問題点を改めるには、単斜上昇波の時間的変化を並進座標系においても考えなければならない、それはつまり dynamic wave 法を適用しなければならないということになる。

以上の kinematic shock が発生した後の結果をまとめれば、拡散項を含む第2次近似の非線型解は、kinematic shock 以外では kinematic shock が発生するまでと同様に有用であるが、比較的限定された kinematic shock の内部においては過大に拡散のある解を与え適切ではなく、kinematic shock の時間的変化が大きいときには kinematic shock を定常な単斜上昇波で置き換えることは必ずしも妥当ではないこと、結局 kinematic shock をその内部にまでわたって詳しく知ろうとするときには dynamic wave 法によらなければならないことが結論として得られる。

5.3 実験水路における非定常流の計算

本節では、実験水路において発生させた非定常流の流下に関して、実験値と計算値を比較する⁶⁾。はじめに述べたように、この節では計算法として dynamic wave 法の特性格線法と Lax-Wendroff 法 (ただし、上流端では特性格線法) を適用する。

(1) 実験方法

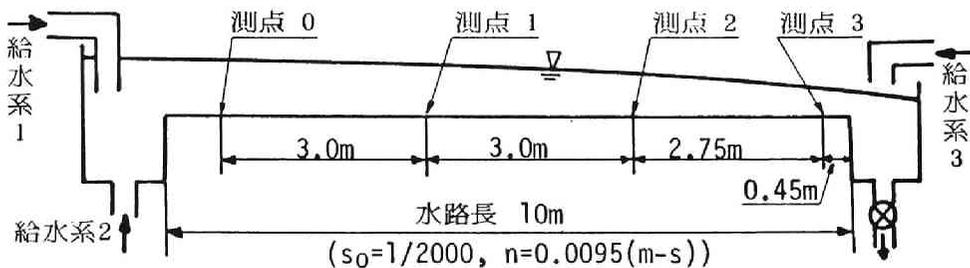


図5.11 実験装置

実験装置は図5.11に模式的に示されるように、長さ10m、幅25cm、深さ20cmの長方形断面の滑面一様水路からなり、上流端に2個、下流端に1個の計3個の給水系を有している。実験では、まず上流端の給水系1より一定の流量(0.92l/s)を給水し定常状態を得た後、給水系2あるいは3のバルブを適宜開閉して非定常な給水を行い、非定常流を発生させた。水位の測定は図5.11に示される4点(測点No.0~No.3)に容量式水位計を設定し、ペンレコーダに記録させた。水路内には周期の短かい波が発生することがあったが、記録からはそれらによる変動を除いて水位の変化を3秒ごとに読みとった。流量は、初期の定常状態のときを除いて測定されていない。

(2)実験値と計算値の比較

実験は下流端に堰上板を設けた場合と、下流端を段落ちにした場合とに分けられている。したがって、計算にあたっては、前者の場合測点3の水位記録を読みとりこれを下流端の境界条件とし、後者の場合には次式の段落ち部の水深と流量の関係を境界条件とする。

$$Q = CBh_a^{3/2} \tag{5.2}$$

ここに、 B ：水路幅、 h_a ：段落ちでの水深、 C ：流量係数で簡単のため、 $C=5.40$ ($m^{1/2}/s$)を採っている⁷⁾。上流端においては測点0の水位記録を境界条件として与え、また、初期条件には標準逐次計算法による不等流計算の結果を設定している。

図5.12(a)および(b)は、流れの時間的変化が緩やかな場合の結果の例で、図には実験値およびエネルギー解析法を用いた特性曲線法による結果が示されている($\Delta x=0.44m$ 、 $\Delta t=0.1$ 秒)。図5.12(a)(ケース1)は、上流端の給水がhump状に行われたもので、測定1および2に関してピーク値およびその伝播を含めハイドログラフ全体が計算によってよく再現されている。図5.12(b)(ケース2)は、下流端から給水したときの下流の水位の変化が上流側へ遡上する場合の結果で、実験値と計算値はよく適合しており、とくに上流へ伝播するに従い実験値にみられる水位の立ち上がり之急になる傾向が計算上もよく現われており、理論的な予測と一致している。Lax-Wendroff法による計算結果は特性曲線法の結果とほとんど一致し、その差は図5.12には図示しえない程度で、4.3(3)で述べたように変化の緩やかなとき両者の差はほとんどないとみなされる。

つぎに、 $x=0$ および L をそれぞれ計算区間の上流端および下流端とし、また Q および A をそれぞれ流量および断面積とするとき、

$$Q_{in} = \int_0^t Q(0, t') dt', \quad Q_{out} = \int_0^t Q(L, t') dt', \quad V(t) = \int_0^L A(x, t) dx \tag{5.3}$$

$$C_r = \frac{Q_{in} - Q_{out} + V(0) - V(t)}{Q_{out}} \tag{5.4}$$

で定義される C_r の時間的変化をケース1および2について示したのが表5.1(a)および(b)である。

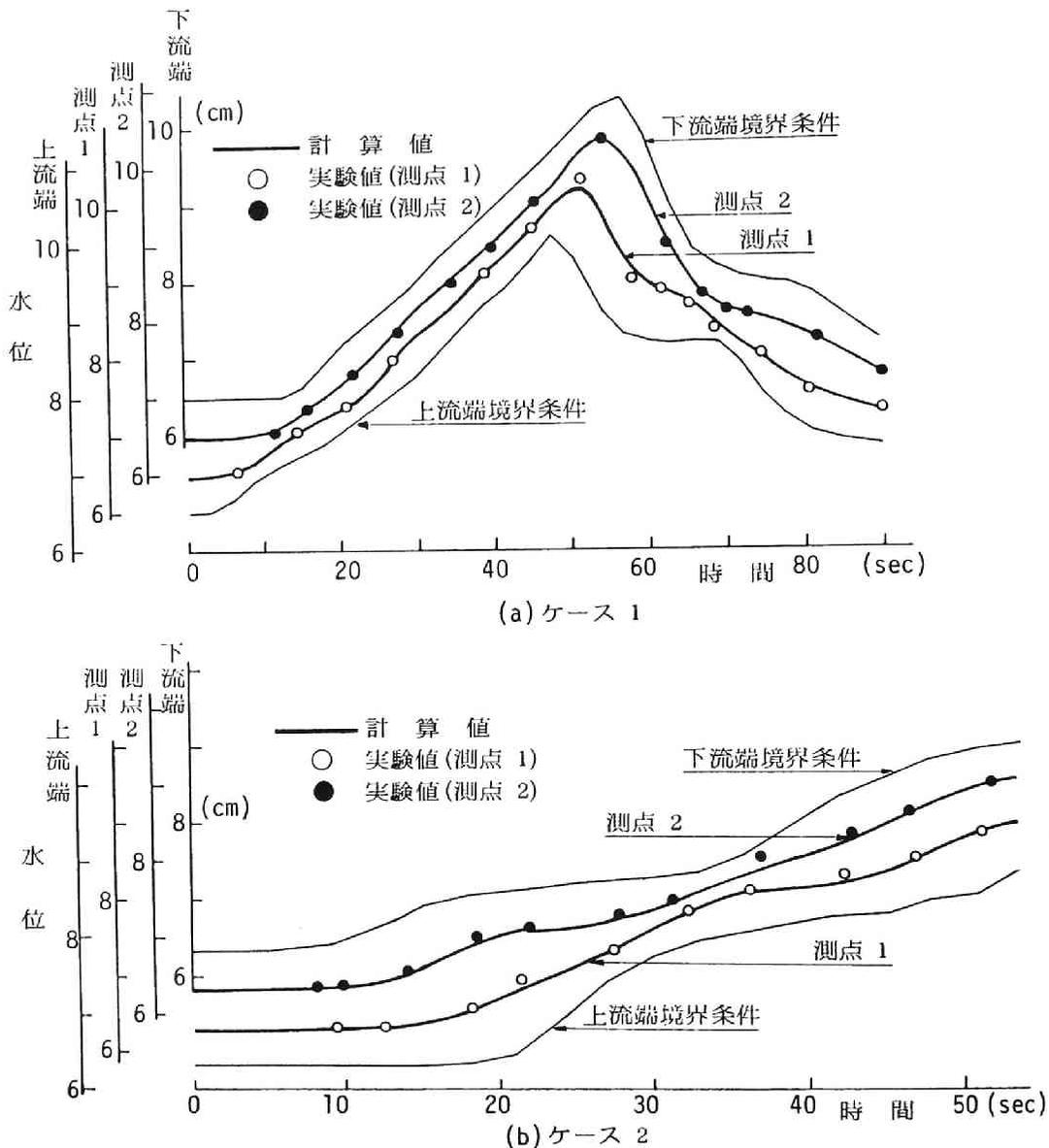


図5.12 変化の緩やかな流れの結果

C_r の定義より明らかなように $C_r(t) = 0$ ならば積分された連続式が計算上満たされていると判断できる。表から明らかなように、特性曲線法ではケース2の $t = 20 \sim 30$ 秒 (図5.12(b)を参照すればハイドログラフの立ち上りの時間) において積分された連続式がいくらか乱されるが、それ以外では C_r は全般に小さな値にとどまっており、とくに Lax-Wendroff 法の精度の高いことがうかがわれる。

図5.13(a)および(b)は流れの変化が急で段波が発生している場合である。図5.13(a) (ケース3) では下流端は段落ちであるが、図5.13(b) (ケース4) では堰上板が設けられているため、上流から

t (秒)		10	20	30	40	50	60	70	80	90
$C_r(\%)$	Lax-Wendroff法	-0.08	-0.04	-0.02	-0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	特性曲線法	-2.10	-1.29	-0.79	-0.35	0.16	0.32	0.23	0.18	0.14

(a) ケース 1

t (秒)		10	20	30	40	50	60
$C_r(\%)$	Lax-Wendroff法	-0.06	0.01	0.66	0.12	0.02	0.06
	特性曲線法	-0.81	-4.67	8.45	3.05	3.27	2.03

(b) ケース 2

表5.1 積分された連続式の計算誤差

伝播した段波が堰上板で反射され、再び上流へ伝わっている。計算は運動量解析法の特曲線法および Lax-Wendroff 法で行い、ケース 3 では $\Delta x=0.46\text{m}$ 、 $\Delta t=0.1\text{秒}$ 、ケース 4 では $\Delta x=0.44\text{m}$ 、 $\Delta t=0.1\text{秒}$ である。また、図5.14はケース 3 の $t=10\text{秒}$ における水面形を示したものである。これらの図からつぎの点が見出される。

- (i) Lax-Wendroff 法による計算では、段波の前後の水位や段波の通過する時刻など、実験値と一致した結果が得られ、段波の急激な変化がよくとらえられているといえる。
- (ii) 特性曲線法による計算結果では、全体としてみれば Lax-Wendroff 法と大差ないが、段波による急な変化はかなり拡散され滑らかな変化となる。
- (iii) その結果、水位の上昇は、実験値から分るように下流側ほど急で段波が発達しており、Lax-Wendroff 法ではこの傾向がよくとらえられているのに反し、特性曲線法では逆に下流側ほど水位の上昇が緩やかになっている (図5.13(b))。
- (iv) Lax-Wendroff 法による計算値は段波の後面でやや振動のある変化を示す。

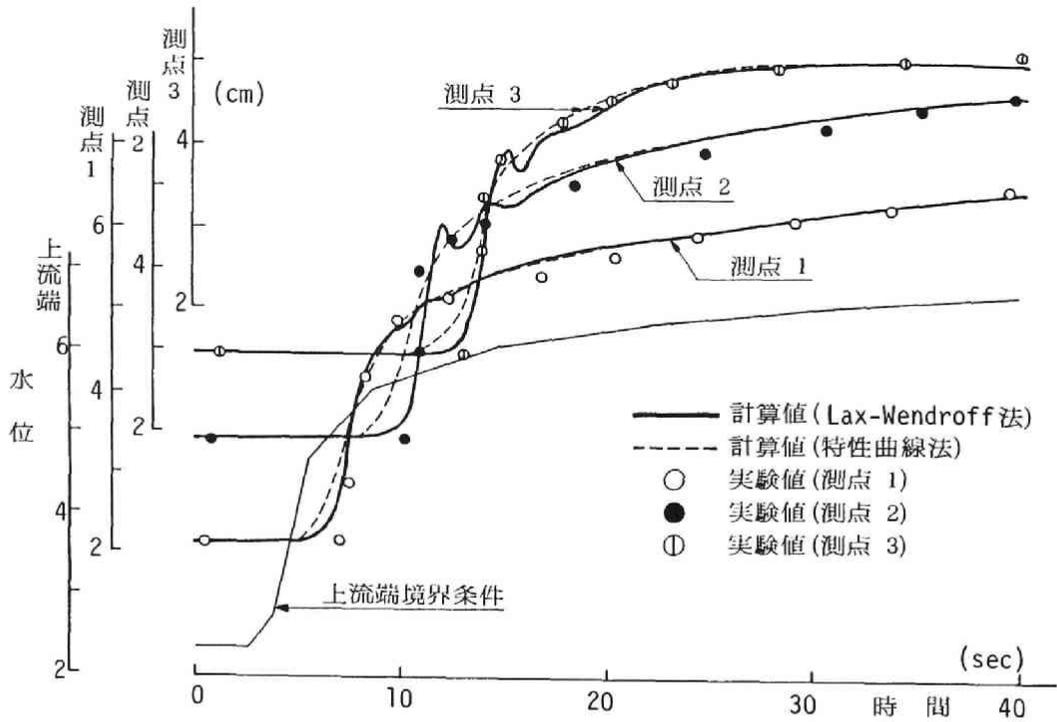
t (秒)		10	20	30	40
$C_r(\%)$	Lax-Wendroff法	-0.53	-0.32	0.10	0.13
	特性曲線法	-37.33	-7.76	-3.00	-1.79

(a) ケース 3

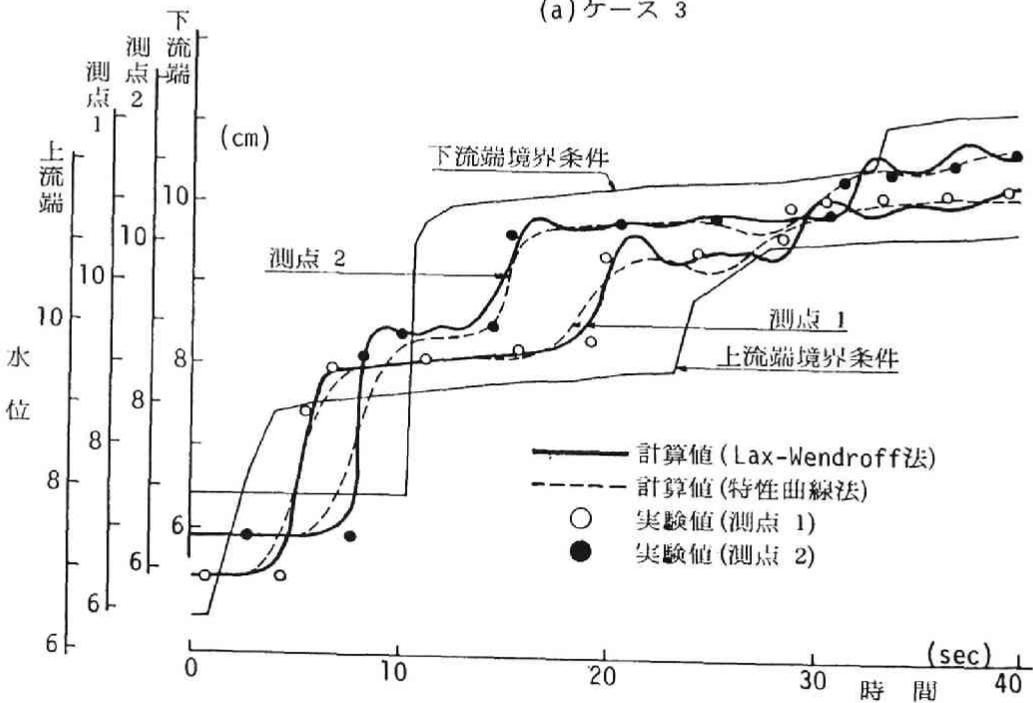
t (秒)		10	20	30	40
$C_r(\%)$	Lax-Wendroff法	0.08	-0.31	-0.17	-0.12
	特性曲線法	-13.66	-4.50	-2.27	-1.31

(b) ケース 4

表5.2 積分された連続式の計算誤差



(a) ケース 3



(b) ケース 4

図5.13 変化の急な流れの結果

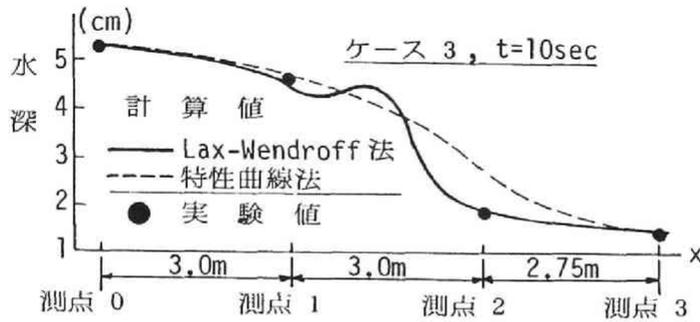


図5.14 水面形の比較（ケース3， $t=10$ 秒）

(iv)は空気流の衝撃波の計算に関して精度の高い差分式ほどこのような数値的な振動が避けられない⁸⁾とされていることに相当しよう。(ii)と(iii)は、特性曲線法とLax-Wendroff法の精度に関することである。表5.2(a)および(b)は先と同様に C_r を求めた結果であって、この表からもLax-Wendroff法の精度の高いことが知られ、また特性曲線法では段波のように変化の激しい流れの計算においては積分された連続式にかなりの誤差がみられ、4.3(3)で述べたことを裏づけている。

以上の水理実験による検討結果を要約すると、つぎのようである。

変化の緩やかな流れの場合、Lax-Wendroff法および特性曲線法のいずれも実験値とほぼ一致し、満足すべき結果を与える。

一方、変化の急な流れの場合、Lax-Wendroff法は精度が高く不連続的な水位の変化も計算されるが、特性曲線法は全体的にみればLax-Wendroff法と大差のない結果を与えるものの、急な変化は平滑化されすぎ、また連続式が乱されるという欠点を有する。

以上の3節の結果より、kinematic wave法とdynamic wave法を、非定常流の解析に適用するという実用的な面から比較すれば、つぎのようである。

kinematic wave法では、水深方向の長さのスケールと流れ方向の長さのスケールの比を底こう配で除したパラメータ σ により適用性がある。すなわち、 σ が 10^{-3} 程度であれば第1次近似で十分であり、 σ が 10^{-2} の程度であれば波頂の減衰を示す摂動法や逐次近似法による第2次近似が適用され、さらに σ が大きく 10^{-1} の程度であれば、このような第2次近似は過度な減衰を示すので適用できず、拡散項を含む第2次近似が有効である。しかし、これらの結果は伝播速度 w および拡散係数 μ が(3.4)および(3.85)式で与えられるような単純な場合より得られるものに過ぎず、kinematic wave法を実際に適用するには、つぎの問題点を考えなければならない。

(i) 理論的に、上流から下流へ伝わる影響だけを表現して、下流から上流へ伝わる影響を表現できないため、下流端からの影響を受ける流れや、分・合流点から背水の影響のある流れには適用できない。

(ii) kinematic waveの交差によってkinematic shockが発生した場合、kinematic waveの第1次近似

では機械的な計算が行えない。また、この場合には摂動法や逐次近似法による第2次近似は適用できない。上述した σ による適用性の変化は、もちろん kinematic shock が発生するまでについていえることである。

(iii) 実際の河川に適用しようとする場合、伝播速度 w に関して十分な資料が得られないという欠点がある。また、拡散項を含む第2次近似の場合には、拡散係数 μ について同様のことがいえる。

kinematic wave は、擾乱の主要部を伝えるなどの非定常流の理論において第2章で述べたような重要な意義を有しているが、以上の問題点により、kinematic wave 法は非定常流の解析の実用的な面においては、それほど適用性を持たないといえる。

dynamic wave 法では、kinematic wave への近似を行ったために生ずる kinematic wave 法の上記の問題点は現われないので、5.1から5.3に示したように kinematic wave 法より広い適用性を有している。

dynamic wave 法による計算法として、保存則系に対する高精度のexplicit型の差分法であるLax-Wendroff法と、特性曲線の方向に応じて空間的な差分のとり方を変え、かつexplicit型で表わされる特性曲線法とを適用して比較した結果は、4.3で予想されたように、流れの変化が緩やかな場合には両者の解はほとんど一致するのに対し、段波のように変化が急な流れの場合には特性曲線法では解が平滑化されすぎ、また連続式が乱されるとまとめられる。しかし、実際の河川における洪水のような流れでは、段波の発生は考えなくてよく、流れの変化は緩やかであるから、Lax-Wendroff法および特性曲線法のいずれもが適用可能といえ、さらに実際には断面資料や初期値との整合性に関して4.3(1)で述べた理由により、Lax-Wendroff法は一様水路以外ではあまり適用性がなく、断面が一様でなく不規則に変化する場合には、特性曲線法の方が広い適用性を有している。

B. 実際河川への適用

以下の各節では、断面が一様でない実際の河川における洪水をはじめとする非定常流の、比較的長い区間にわたる伝播や変形を数値計算によって検討する。これらの節では、下流端から伝わる影響や合流点からの背水の影響が無視できない流れが対象とされるので、dynamic wave 法を用いることにする。さらに、段波のような変化の急な流れは扱われないことや、断面が一様でないことを考えて、Lax-Wendroff 法は適用せず、特性曲線法だけを用いる。

以下においては洪水のように、不連続部がなく変化の緩やかな流れの一様でない水路における挙動が扱われるので、1.1で述べたことから、エネルギー解析法を適用することにする。

5.4 淀川中・下流部における洪水の追跡

本津川、宇治川（淀川本川）および桂川の三川合流部を含む淀川中・下流部においては、宇治川のこう配が他の二河川のこう配に比べてかなり緩いため、洪水時に合流点からの背水が宇治川の相当上流まで及ぶことが知られており、宇治川の上流にある天ヶ瀬ダムの放流操作は、合流点からの背水に

よる宇治川の水位上昇を考慮して行われなければならないので、きわめてむずかしい問題となっている⁹⁾。本節では、この淀川の三川合流部を含む区間の洪水追跡について水理学的指針を与えようとするものである。

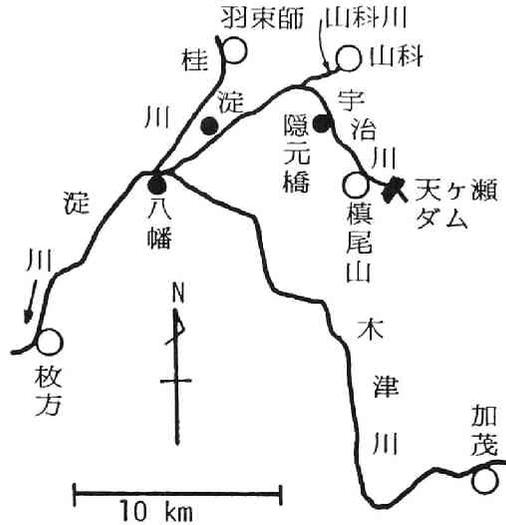


図5.15 淀川中・下流部

計算の対象とした区間は、図5.15に模式的に示されるとおりで、上流端は、木津川については加茂地点、宇治川については天ヶ瀬ダムの直下流の横尾山地点、山科川については山科地点および桂川については羽束師地点であり、下流端は淀川の枚方地点である。この計算区間の全長は約61kmで、この区間内に約2kmごとに計36断面の計算断面を設定した。計算区間内には3つの合流点が含まれているが、計算には4.5(2-iii)で述べた方法を適用した。断面特性および粗度係数は、すべて建設省の資料⁹⁾によった。

対象とした洪水は、1965年9月に台風24号によって発生した6524出水¹⁰⁾である。計算では、この出水に対して求められた流量あるいは水位ハイドログラフを境界条件として与えた。すなわち、横尾山地点では天ヶ瀬ダムの放流流量、山科地点では別に行われた流出解析による計算流量をそれぞれ与え、また枚方、加茂および羽束師の各地点では観測された水位をそれぞれ与えた⁹⁾。これらの境界条件は、後に計算結果とともに図5.16に示される。なお、計算の対象とした時間は、6524出水の最大値の発生時を含む9月17日15時から18日15時までの24時間である。

初期条件は、枚方地点での流量を仮定して同地点の観測水位を下流端水位として標準逐次計算法による不等流計算を行い、羽束師および加茂の両地点の計算水位が、それぞれの地点における観測水位の初期値に等しくなるまで枚方地点の流量の仮定を繰り返すという方法で各河川の流量を推定して求めた。

計算の時間間隔 Δt は、いくつかの試算の後 $\Delta t = 60$ 秒とした。この計算では、 $|(v+c)\Delta t/\Delta x|_{\max} < 0.6$ であって、安定性の必要条件であるC.F.L条件は満たされていた。

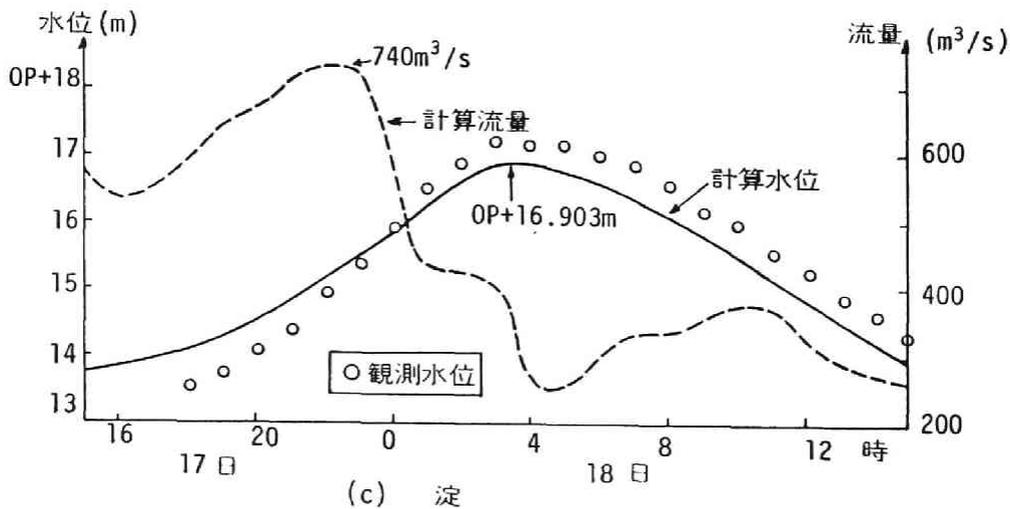
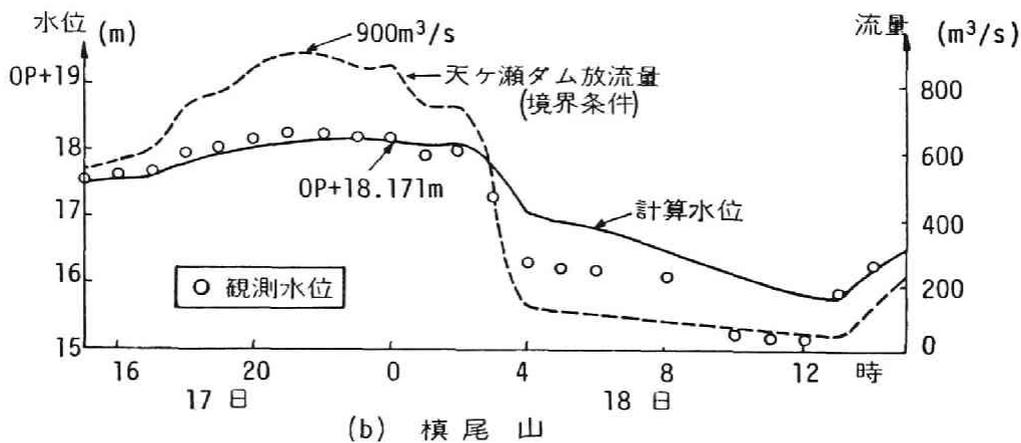
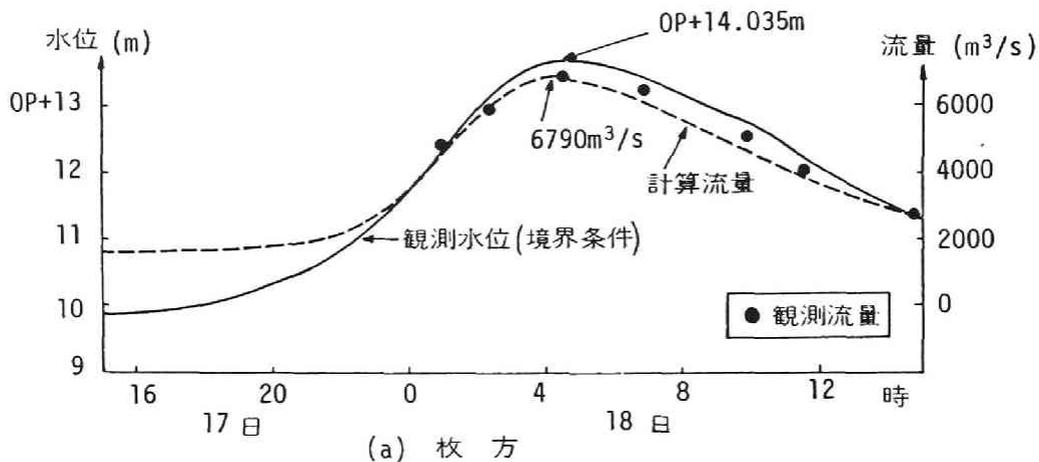


図5.16 6524出水の計算結果

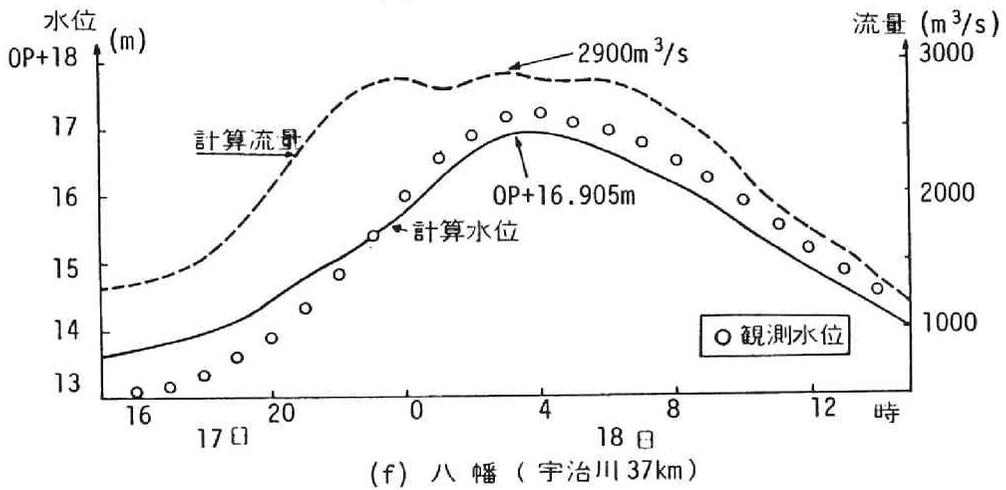
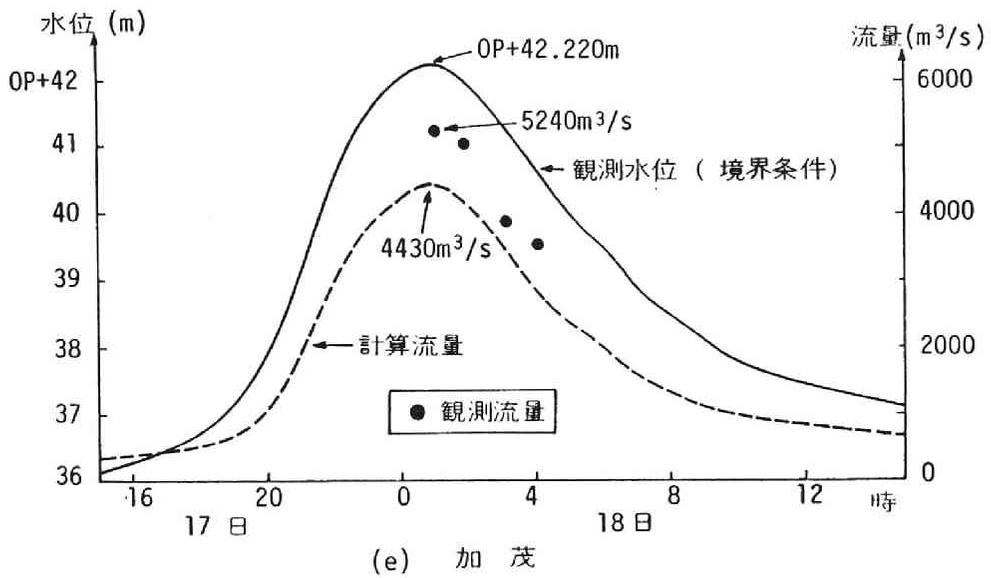
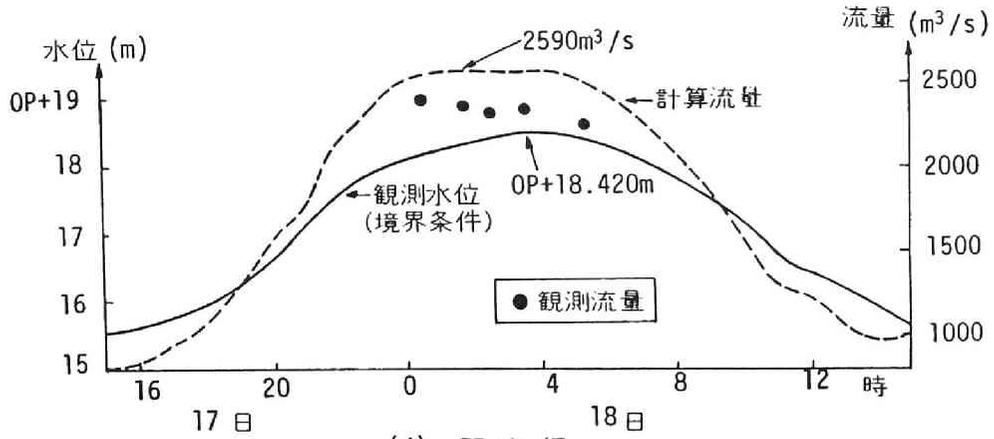


図5.16 6524出水の計算結果

図5.16(a)～(f)はいくつかの地点における計算結果^{3.6)}を示したものである。横尾山地点において流量が急減しているのはすぐ上流の天ヶ瀬ダムにおいて洪水調節が行われ、放流流量が減少した結果である。横尾山地点においてこのときの計算水位は観測水位よりかなり高くなっているが、断面資料によれば観測水位に対する断面積が極端に小さいことを考えると、この断面の資料に少し不備があると思われる。淀地点においては、流量は天ヶ瀬ダムの洪水調節の結果減少しているにもかかわらず、水位が高いままであることは、下流の合流点より木津川および桂川の背水の影響を顕著に受けている結果であり、計算結果もこれをよく再現している。これらの図から、宇治川および三川合流点より下流の本川については、計算結果は観測値と全体としてよく一致しており、また各種のピーク値およびその出現時刻についても、ほぼ満足すべき結果であるといえる。一方、桂川および木津川については、羽束師および加茂の両地点のハイドログラフにみられるように、流量の計算値は桂川では観測値より大きく、木津川では小さくなっている。つまり、木津川についていえば、観測された水位にしては小さい流量しか計算されないことになっている。木津川においては河道の弯曲があり、またかなりの大きさの死水域が発生するとされているが、これらは加茂地点における疏通能力を減少させる側に作用する要因と考えられるから、これらの影響を何らかの方法で計算に組み込んでも、加茂地点の流量はさらに小さく算出されよう。つまり、弯曲や死水域の存在は加茂地点における計算値と観測値の差を説明しうるものではないと考えられる。一方、桂川については死水域などの影響により計算値より小さい流量が観測されたのかも知れない。これらの両河川については断面資料や境界条件についてより詳しく検討することが、他の洪水についての計算とともに必要である。

5.5 上野遊水池の調節計算

木津川は、上流の上野市において柘植川および服部川と合流し、岩倉峡と呼ばれる狭窄部を通り、鳥ヶ原地点を経て名張川を合せ、八幡地点において淀川本川に合流している。岩倉峡のすぐ上流は上野市の市街地であり、その周辺に耕地や村落が開かれている。ここに集まる木津川、柘植川および服部川は岩倉峡においてせき上げられ、上野市に常襲的な浸水被害をもたらしているため、その浸水域の一部を遊水池化して流量調節を行い、上野市周辺の治水を図ろうとする上野遊水池計画が現在検討されている。図5.17はその平面的な配置を示したもので、木津川と服部川の合流点である岩倉地点のすぐ上流に、両河川を挟んで新居、小田、木興および長田の4遊水池が計画されている。本節ではこれらの遊水池による洪水の流量調節や遊水池の利用効率を、第4章で述べた数値計算法によって予測する¹¹⁾。

計算の対象としたのは、図5.17を参照して、下流端を鳥ヶ原地点、上流端を木津川については木興橋地点、服部川については伊賀上野橋地点とする区間である。対象洪水はこの区間で中規模の出水とされている5615型の洪水（1956年9月27日～28日に台風15号によって発生）で、上流端の境界条件として与えられた流量ハイドログラフならびに岩倉および鳥ヶ原両地点における残流域から流出する流量ハイドログラフは図5.18に示されるとおりである。下流端の境界条件には鳥ヶ原地点における水位

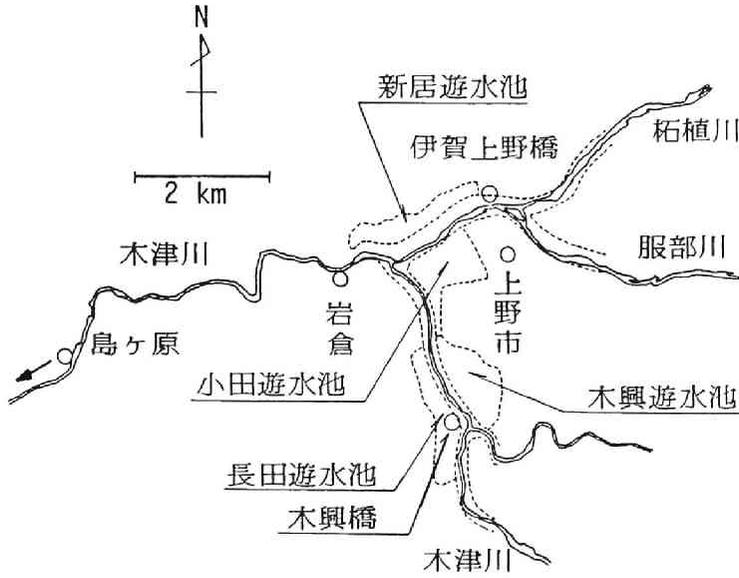


図5.17 上野遊水池計画

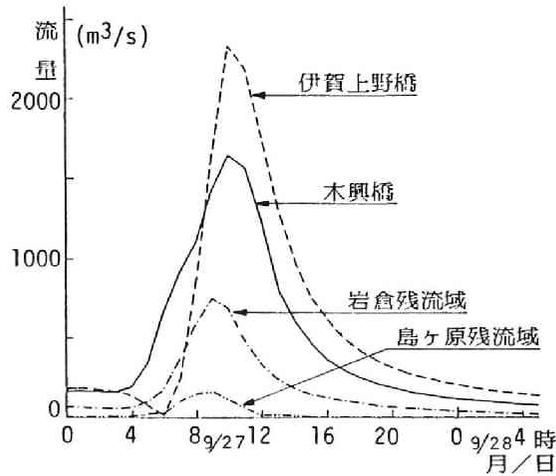


図5.18 5615型出水の流量ハイドログラフ (1956年9月)

一流量曲線を設定したが、これには現況のもの、岩倉峡の開削などの改修が加えられた場合のものとの2通りを与え、それぞれ河道の改修なし、および改修ありとして区別することにした(図5.19)。また、改修なしでは、遊水池が無いとした場合も想定し、調節前としての計算を行った。断面特性および粗度係数は、すべて建設省の資料¹¹⁾によった。

遊水池が含まれる河道の洪水の計算には、河道の流れに対しては特性曲線法を用いた。本節の計算では、岩倉峡というこう配のかなり急な ($s_0=1/100\sim 1/200$) 区間が含まれているので、摩擦項にもとづく不安定を避けるため4.5(2)で述べた計算法Bを適用した。遊水池の越流堤を越流する流量

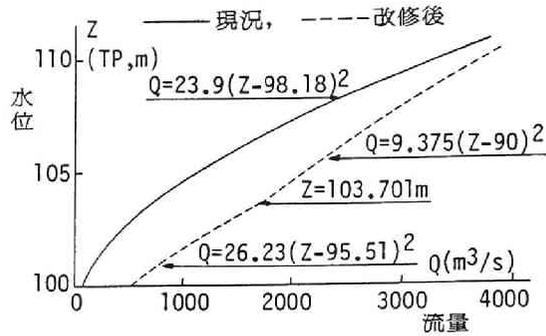


図5.19 烏ヶ原地点の水位—流量曲線

Q_e は、越流堤長が計算断面区間に比べて相当短いことおよび岩倉地点からのせき上げが著しく遊水池の越流堤前面では水面こう配がきわめてゆるやかになると予想されることから、ポイント・シンクとして扱えるものとし、長方形断面のせきに関するつぎの本間公式⁷⁾を用いて求めた。すなわち、図5.20を参照して、

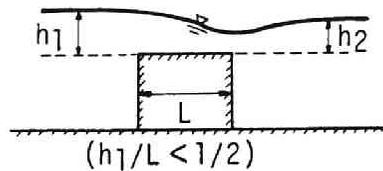


図5.20 越流公式の模式図

- (i) $h_2/h_1 \leq 2/3$ (完全越流) のとき

$$Q_e = \mu B_e h_1 \sqrt{2gh_1} \quad (5.5)$$

- (ii) $h_2/h_1 > 2/3$ (もぐり越流) のとき

$$Q_e = \mu' B_e h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (5.6)$$

である。ここに、 B_e ：越流堤長であり、また $\mu=0.35$ 、 $\mu'=0.91$ とされる。遊水池の水位は、遊水池の形状より決る湛水量—水位の関係を用いて、越流流量および遊水池へ直接流入する内水流量を積分して得られる湛水量から求められる。遊水池の諸元は、建設省の資料¹¹⁾によった。

図5.21は、遊水池が含まれる場合の洪水の数値計算のフロー・チャートである。ここに、IPT は湛水の計算を制御する変数で、IPT=0 なら湛水が始っていないことを示し、IPT=1 なら湛水が始まっていることを示す。また、 N_{\max} は計算の全ステップ数である。

初期値は、上流端（木興橋および伊賀上野橋の2地点）における初期流量と、烏ヶ原および岩倉の

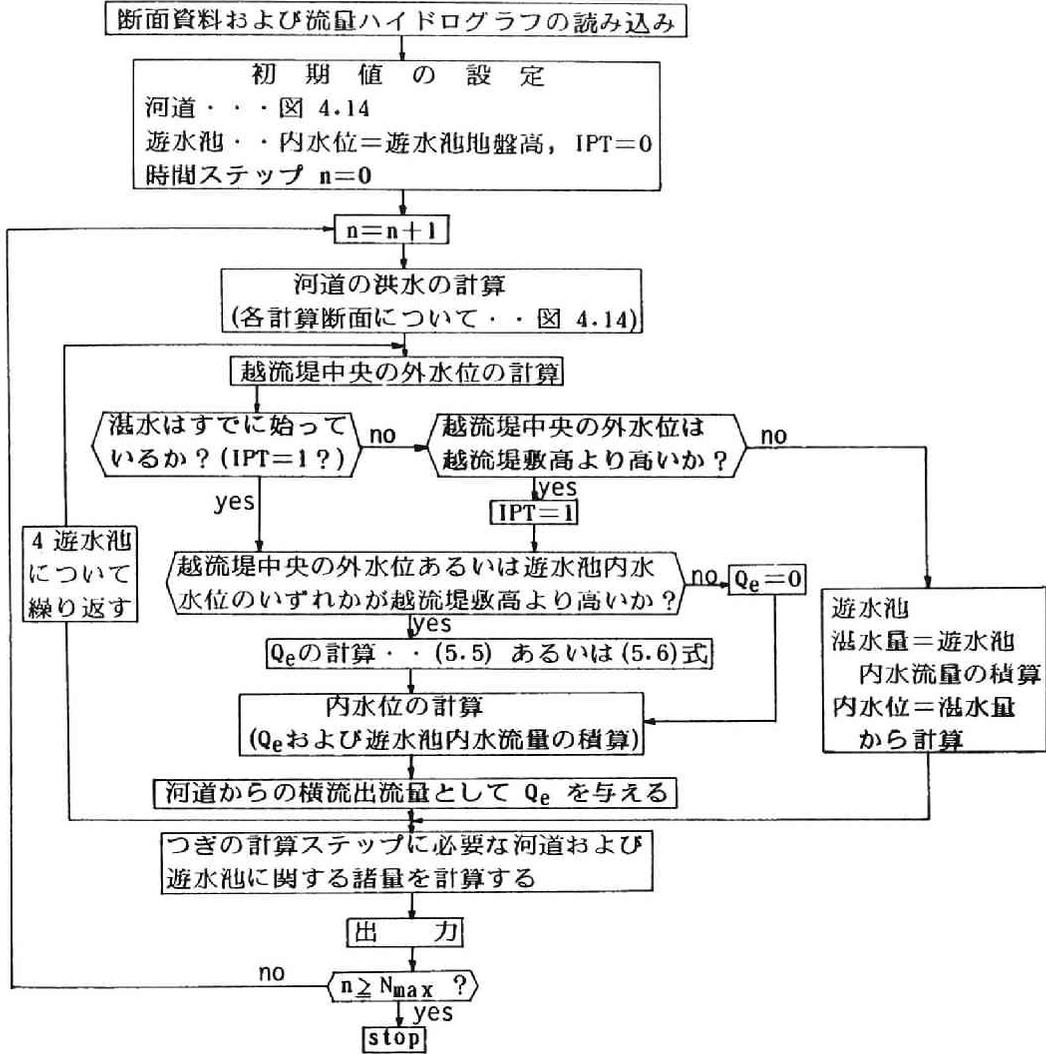
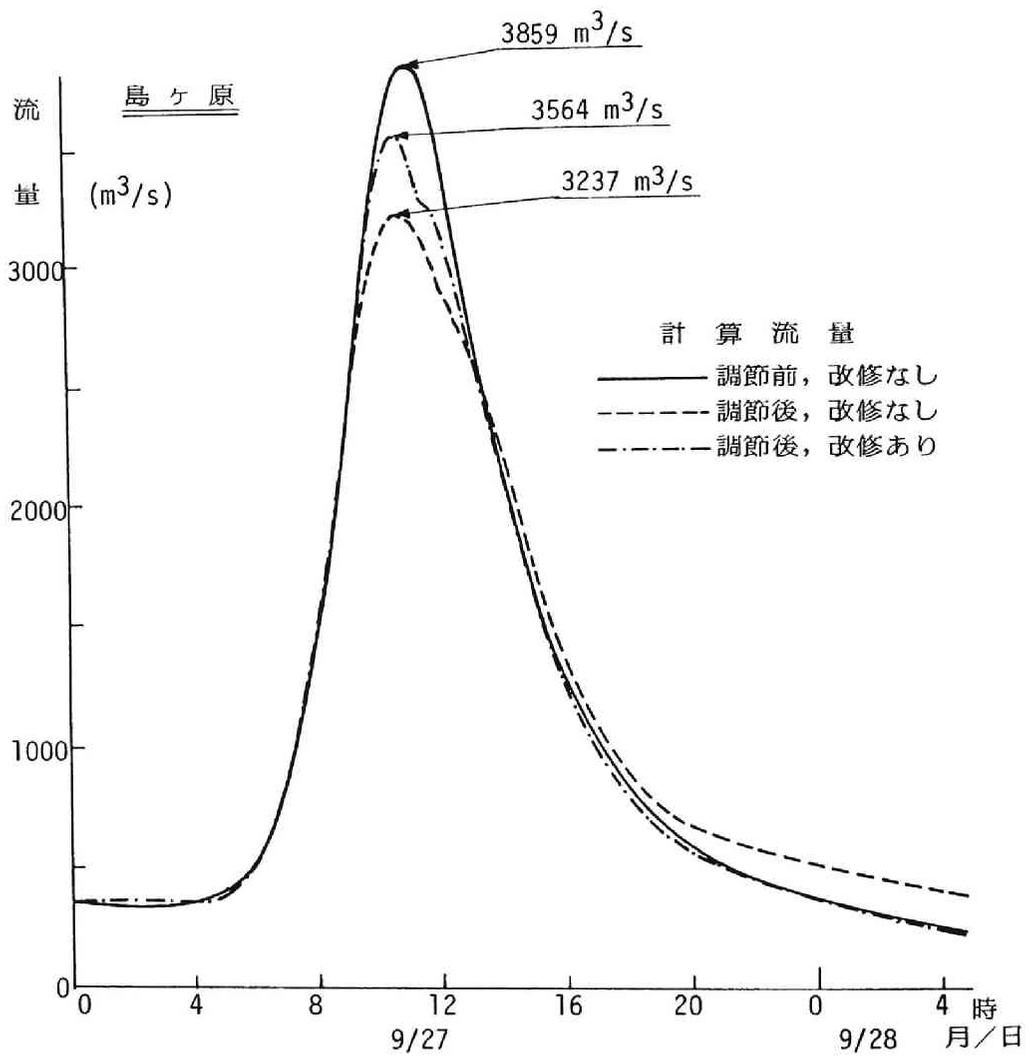


図5.21 遊水池による洪水調節機能の計算のフロー・チャート

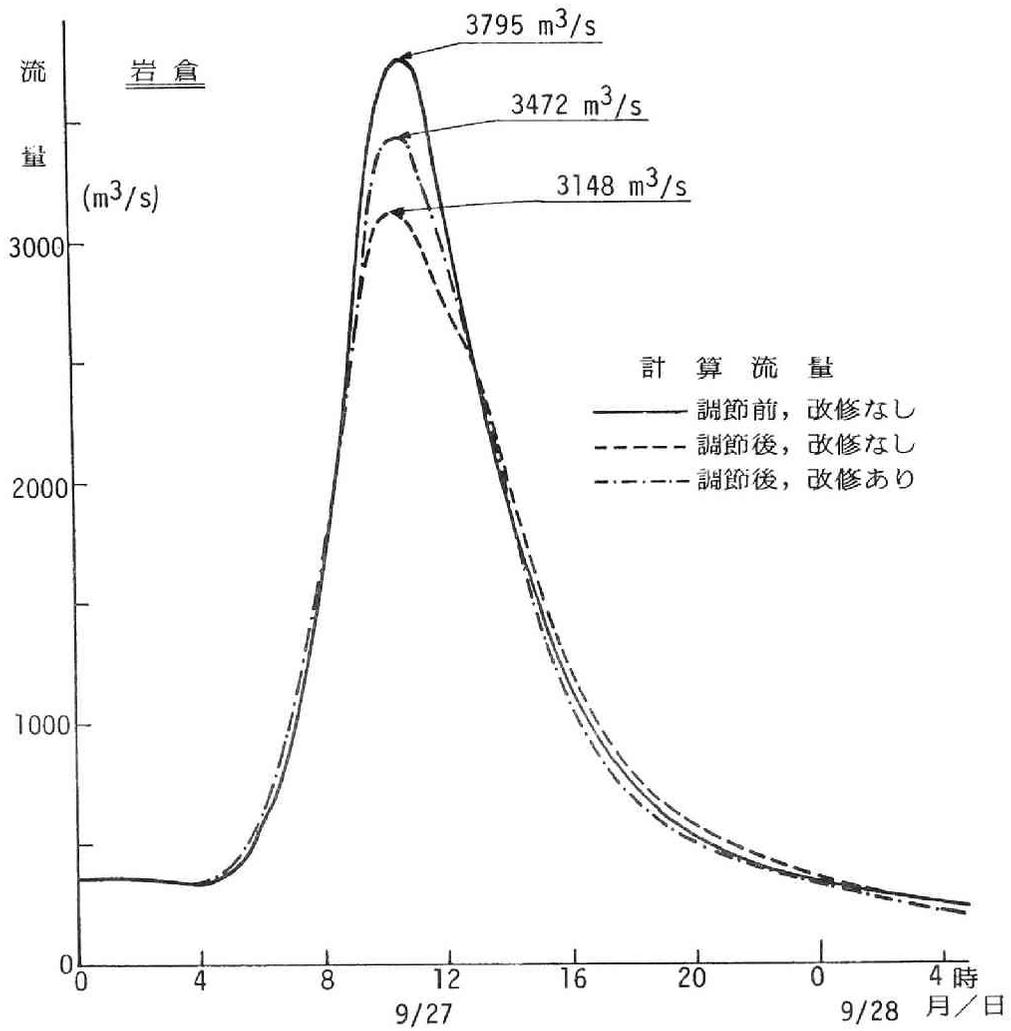
両地点における残流域からの初期流量との和を、鳥ヶ原地点における初期流量として、不等流計算によって設定した。また、非定常流の計算では $\Delta t = 10$ 秒とした。計算結果によれば、 $|(v+c)\Delta t/\Delta x|_{\max} < 0.4$ で、安定性の必要条件である C.F.L. 条件は満たされていた。

図5.22(a)および(b)は、計算結果より鳥ヶ原および岩倉の両地点における流量ハイドログラフをまとめたものである。ここで、調節前あるいは調節後とは先述のように遊水池による調節が行われなかったとした場合と、調節を行った場合という意味である。図より、岩倉峡の河道改修がなかった場合、遊水池による調節の結果、流量の最大値は鳥ヶ原地点で $622\text{m}^3/\text{s}$ 、岩倉地点で $647\text{m}^3/\text{s}$ 低減するが、一方河道改修が行われた場合には、流量の最大値の低減は鳥ヶ原地点で $295\text{m}^3/\text{s}$ 、岩倉地点で $323\text{m}^3/\text{s}$ にとどまることが知られる。河道改修では岩倉峡の河床掘削が想定されており、そのため改



(a) 鳥ヶ原地点の流量

図5.22 調節計算の結果



(b) 岩倉地点の流量

図5.22 調節計算の結果

修があった場合には河床が低下し、それに伴って水位が全体に低くなる結果、遊水池への越流が改修がなかった場合ほど効果的に行われないことが、上記の差をもたらしている。

図5.23および5.24は、遊水池の湛水量、水位（遊水池の内水位）および越流流量の変化を、湛水容

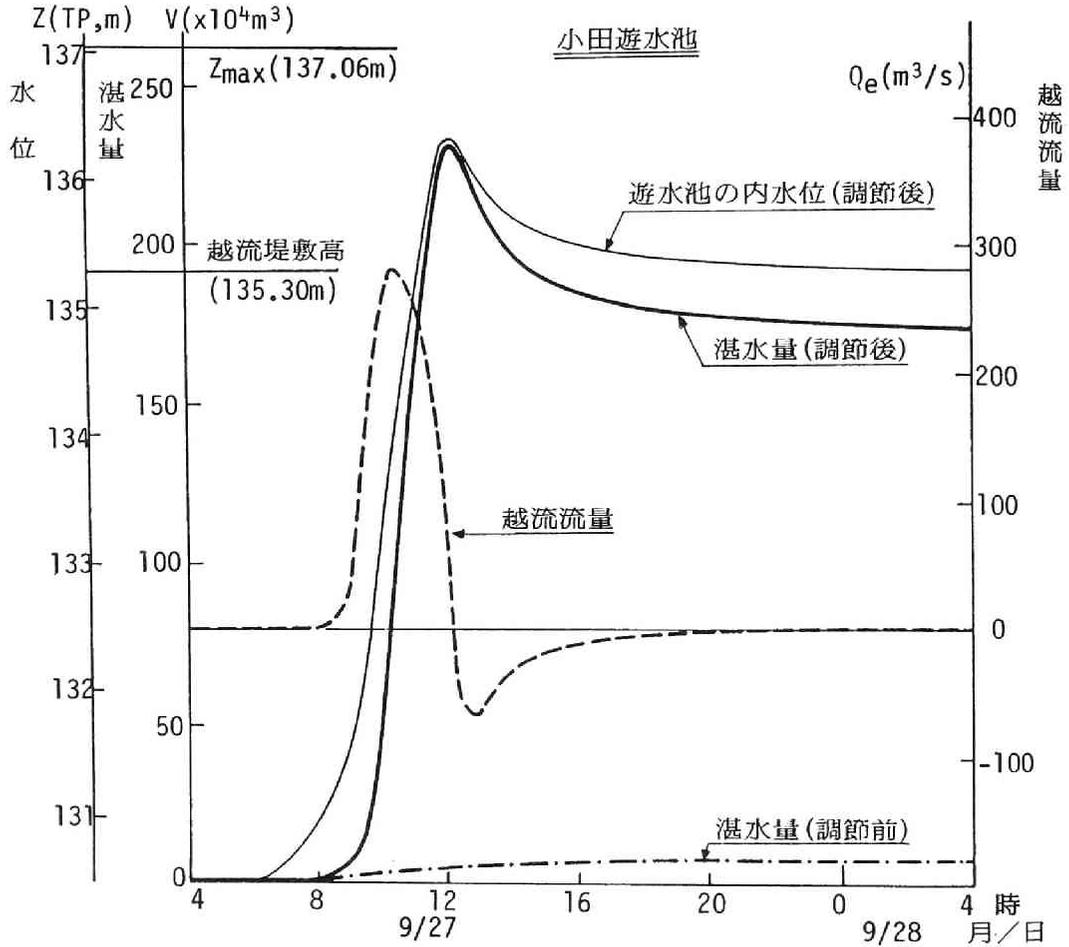


図5.23 遊水池の挙動（河道改修なし）

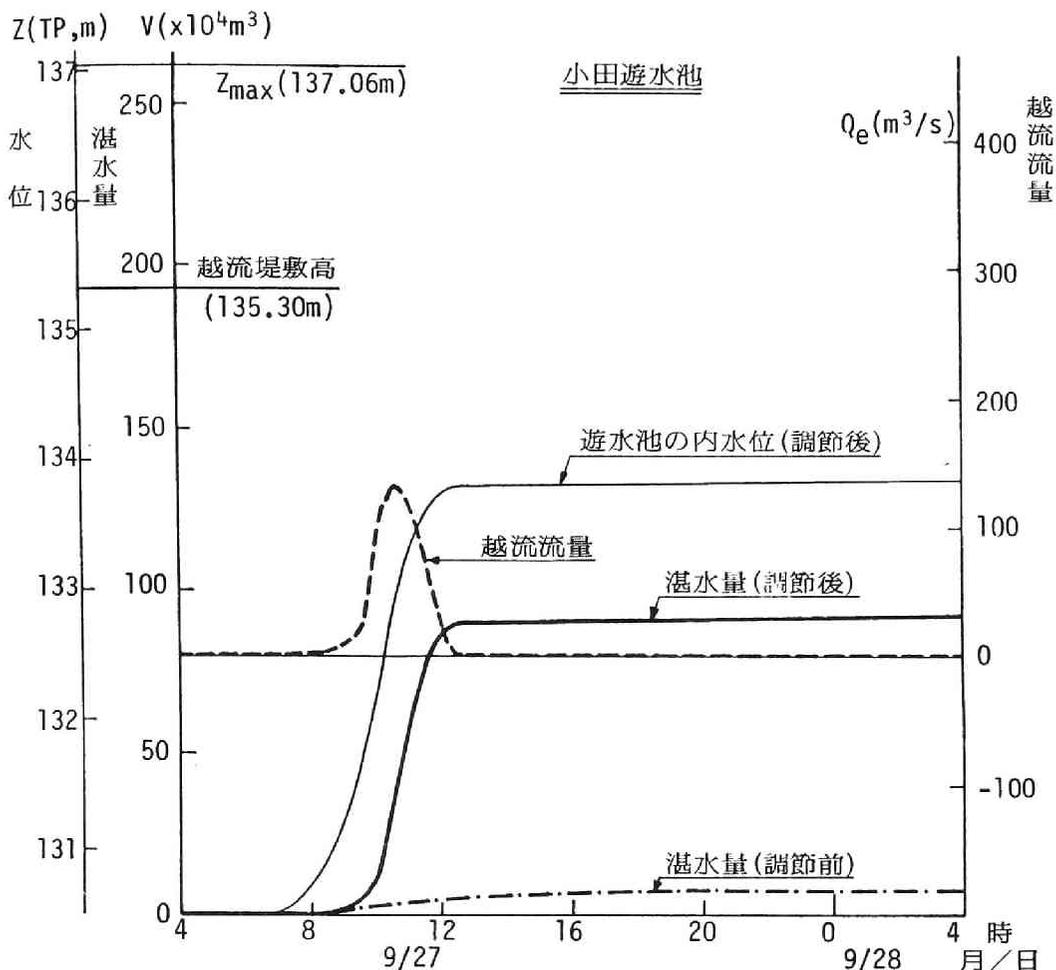


図5.24 遊水池の挙動（河道改修あり）

量が一番大きい小田遊水池を例にとり、河道改修なしおよび河道改修ありの場合の別に分けて示したものである。ただし、越流が始まる前に内水位が増加しているのは遊水池内水流量によるものである。また調節前の湛水量はこの内水流量だけによるもので、この計算の場合にはあまり大きくないので、それによる内水位は略されている。また、図中の Z_{max} とは遊水池の内水位の許容最大値で、囲繞堤の天端高から余裕を差し引いた高さである。図5.23（改修なし）では、この遊水池の内水位はTP 136m以上に達し、また減水期には越流堤を通して遊水池より河道に流出する逆越流が生じており、遊水池は効率的に機能しているとみられる。一方、図5.24（改修あり）では、越流流量は最大でも $100m^3/s$ 程度にとどまり、内水位も越流堤敷高（この場合TP 135.3m）にも達せず、したがって逆越流による排水も行われていない。つまり、遊水池の湛水容量がほとんど活用されないという結果であり、上述した鳥ヶ原および岩倉の両地点での流量の低減がさほどでもないことの原因がここに現

われているとみることができる。

各遊水池について、ここで計算された最大湛水量と可能最大湛水量 (Z_{max} に対応する湛水量) をまとめると表5.3のようである。河道改修が行われなかった場合には、どの遊水池も利用率が70～85%に達し、湛水容量は有効に利用されているのに対し、同じ越流堤敷高を用いた改修後の結果では、利用率は30～45%に低下し、とくに長田遊水池を除く可能最大湛水量の大きい遊水池では、その1/3しか有効に利用されていないことが分る。

遊 水 池		新 居	小 田	木 興	長 田
①可能最大湛水量 (10 ⁴ m ³)		218.4	272.5	254.4	189.6
②最大湛水量 (10 ⁴ m ³)	改修なし	159.4	231.9	178.1	139.7
	改修あり	68.2	92.3	76.4	86.7
余裕量 (①-②, 10 ⁴ m ³)	改修なし	59.0	40.6	76.3	49.9
	改修あり	150.2	180.2	178.0	102.9
利用率 (②/①, %)	改修なし	73.0	85.1	70.0	73.7
	改修あり	31.2	33.9	30.0	45.7

表5.3 最大湛水量と可能最大湛水量

ここで示したような方法により、非定常流を対象とした遊水池の調節機能の検討が可能であるといえるから、さらに多くの出水について同様の考察が必要であり、また調節機能に最も支配的な越流堤敷高についても詳細な検討が必要である。

5.6 瀬田川における遡上波の計算

琵琶湖から流出する瀬田川の流量は周知のように南郷洗堰によって人工的に制御されている。ここで問題とするのは、洗堰のゲート操作によってそれより上流に生ずる水位および流量の変化の伝播（これを遡上波^{*}と呼ぶことにする）の解析¹²⁾で、とくに洗堰の閉鎖時に発生する水位上昇がどのような大きさと速さで上流へ伝わるかの解析である。この問題は、洪水時に洗堰の下流に位置する天ヶ瀬ダム貯水池への流入量を制限するため、洗堰においてとくに急速なゲートの閉鎖が行われた場合に、相当大きい水位上昇を伴う遡上波が発生し、瀬田川の沿岸の一部に浸水被害のおそれと予想されるところから生じたものである。

このような遡上波では横断方向の変化は小さく縦断方向の一次元的な取扱いで十分とみなされるから、その解析には第4章の数値計算法が適用される。ただ、これまで扱ってきた事例の多くが、上流端に流入した洪水などの下流への伝播を取扱っていたのに対し、ここでは下流端に生じた水位および流量の変化の上流への伝播を対象とする点に特徴がある。本節では、現地において種々の観測が実施された遡上波について解析した結果および洗堰のゲートを全閉にする時間を種々に変化させたときに発生する遡上波の予測について考察する。

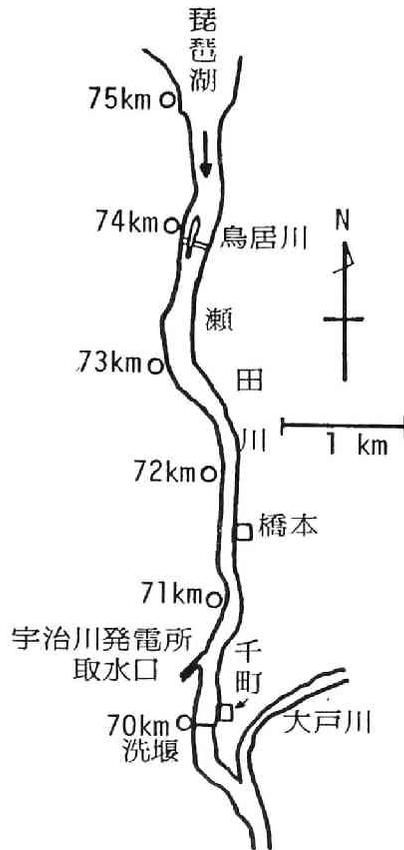


図5.25 瀬田川の概況

(1) 遡上波の追跡計算

計算の対象区間は、図5.25に概況が示される瀬田川のうち、洗堰のすぐ上流の千町量水標地点から、4 km上流の鳥居川量水標地点までである。この区間に、約200 mごとに計21個の計算断面を設定した。境界条件には遡上波の発生時に上流端および下流端において観測された水位ハイドログラフを与えた。

図5.26は1979年5月23日の10時から13時の間にわたって行われたゲート閉鎖に伴う遡上波を解析した結果で、計算区間のほぼ中間にある橋本量水標地点での水位および流量の観測値と計算値が比較されている。ただし、流量の観測値には、浮子測法による値と、橋本地点に固定されている超音波流量計による値の2つが示されており、また計算値には河道の粗度係数を $n = 0.025$ 、 0.028 および 0.030 の3通に変化させた結果が示されている。図5.26より、水位に関しては全体に計算値の方が観測値より大きいのが、しかしその差は高々5 cmであって、このような計算の結果としては十分満足すべきであるといえる。また、粗度係数を変化させても水位の計算値はほとんど変化しないことも分る。一方、流量に関しては、計算値は粗度係数によってかなり変化しており、浮子測法による観測値（図中の●印）は、 $n = 0.025$ とした計算値と $n = 0.028$ とした計算値の中間にある。超音波流量計による観測

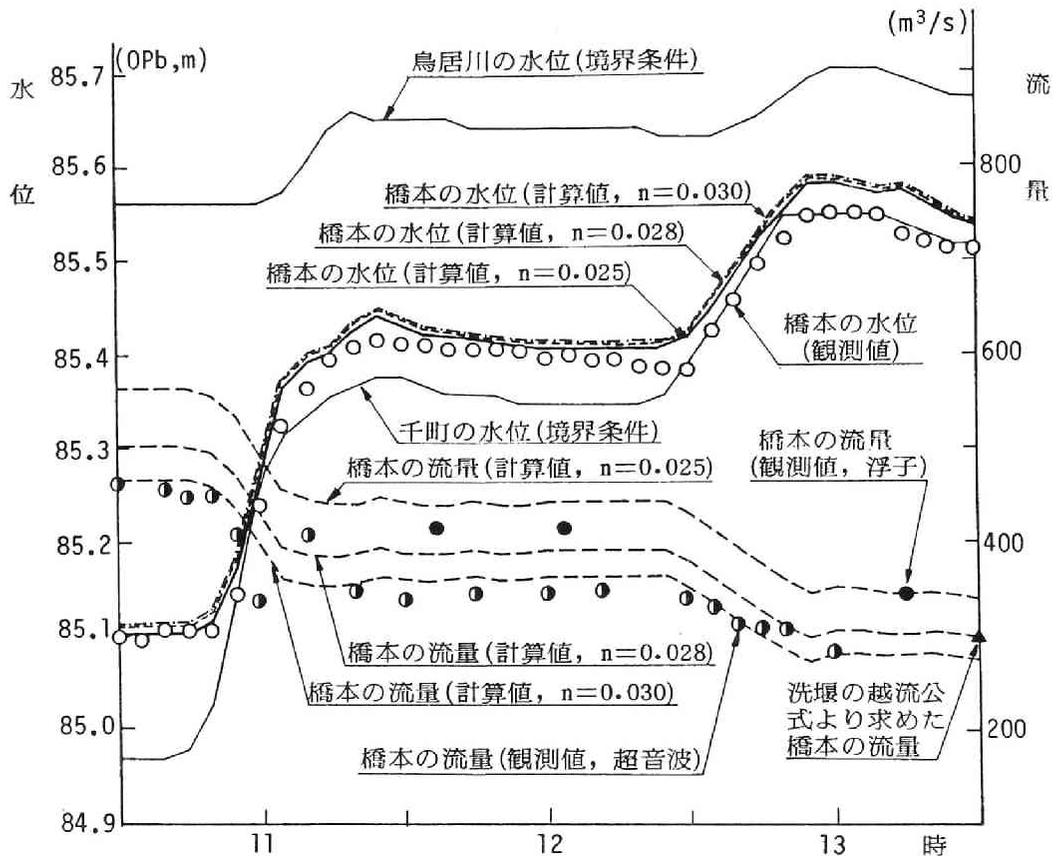


図5.26 遡上波の計算結果
(1979年5月23日)

値(図中●印)は、浮子測法による値より約20%小さく、 $n = 0.030$ とした計算値に近くなっている。超音波流量計による観測流量は、浮子測法による観測流量よりつねに20%程度小さくなるのが過去の経験より知られており、さらに浮子測法による流量の方が正しいという印象が持たれているようであるが、ここでこれ以上検討することはできない。図5.26の13時30分頃の千町地点の水位から、洗堰の流量を別に求められている洗堰の越流流量公式より求め、これに関西電力宇治川発電所取水流量(図5.25参照)を加えると、 $301.3\text{m}^3/\text{s}$ である。このとき、流れが定常に達しているとするれば、この流量は橋本地点の流量に等しく(図5.26中の▲印)、 $n = 0.028$ とした計算値($300\text{m}^3/\text{s}$)に近い値となる。

*) 現場においては段波と称されているが、これは水理学的な意味での段波ではなく連続な水面形を有しているので、ここでは段波とはいわず、遡上波と呼ぶことにする。

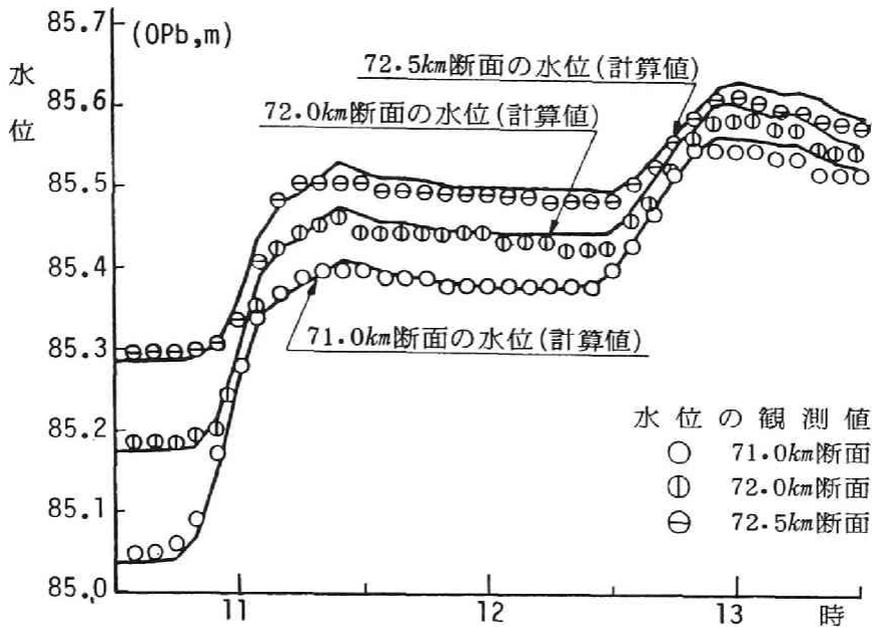


図5.27 遡上波の伝播

図5.27は、橋本地点以外の71.0km、72.0kmおよび72.5kmの地点（図5.25）において、図5.26と同じ遡上波について観測された水位と計算値（ただし、 $n = 0.025$ とする）とを比較したもので、両者の適合は橋本地点でのそれ以上に良好である。

これらの結果を要約すれば、水位に関しては遡上波は計算によりほぼ再現できるといえ、また流量に関しては観測値に適合する計算値は粗度係数を変化させることにより得ることができるが、流量の観測値のばらつきよりみて、いずれの計算（つまり粗度係数）が適切であるかは判断できず、むしろ流量の観測誤差や粗度係数の不確定さを考えれば、計算結果は妥当とみるべきであるといえよう。

(2) 遡上波の予測

計算の対象区間は、千町量水標地点（洗堰の直上流、70.4km地点）から76.5km地点までである。図5.25より明らかに、75.0km地点より上流では断面は急に大きくなり、琵琶湖南湖の区域に入ると考えられる。この区間に(1)と同様に約200mごとに計33個の計算断面を設定した。

ここでの予測計算では、洪水後の放流時に相当する琵琶湖の水位が1m（OPb 86.614m）で、緊急時の放流操作として900 m^3/s の放流が行われているときに、これをある時間内で全閉にするという場合を想定する。したがって、初期条件としては、流量が900 m^3/s のときに上流端の水位が上記の琵琶湖の水位に等しくなるような不等流の計算結果を与える。また、境界条件は、上流端では琵琶湖の水位が時間的に変化しないとして一定値を与え、下流端では洗堰の全閉に伴って時間的に減少する流量を与える。すなわち、洗堰を急速に全閉にして、900 m^3/s の流量を0 m^3/s にする速さとしてつぎの3通りの場合を想定する。

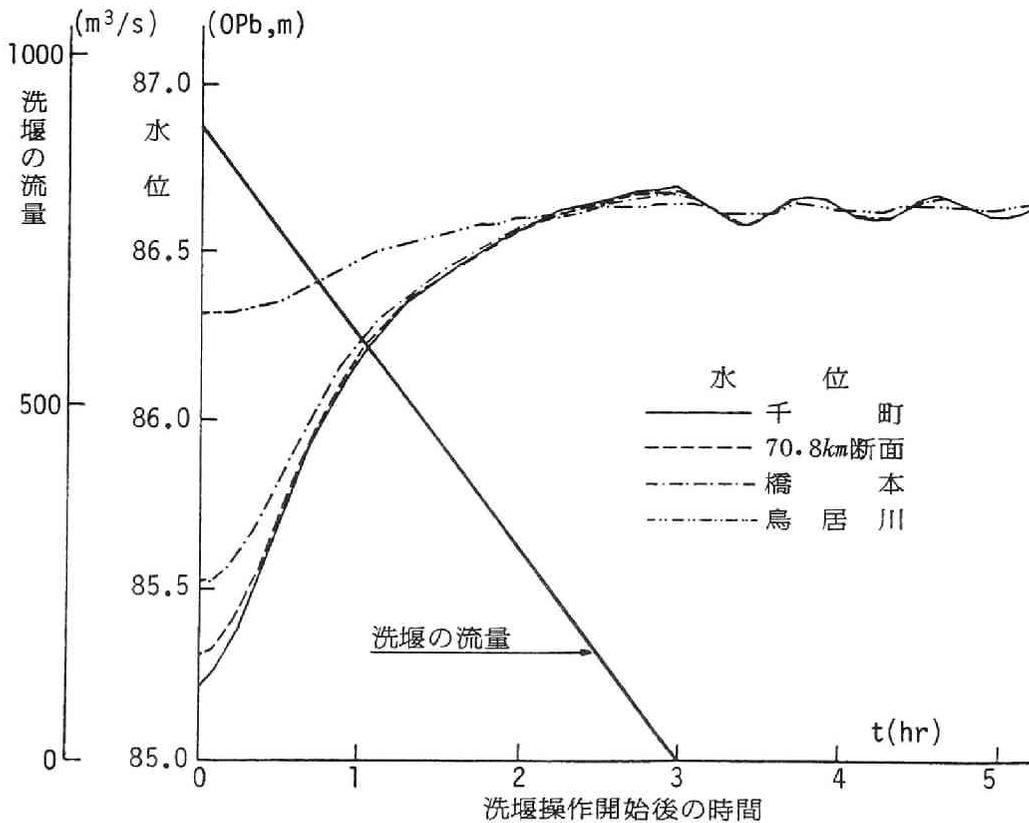
(i) $dQ/dt = -25\text{m}^3/\text{s}/5\text{分}$ すなわち3時間で全閉

(ii) $dQ/dt = -75\text{m}^3/\text{s}/5\text{分}$ すなわち1時間で全閉

(iii) $dQ/dt = -150\text{m}^3/\text{s}/5\text{分}$ すなわち30分で全閉

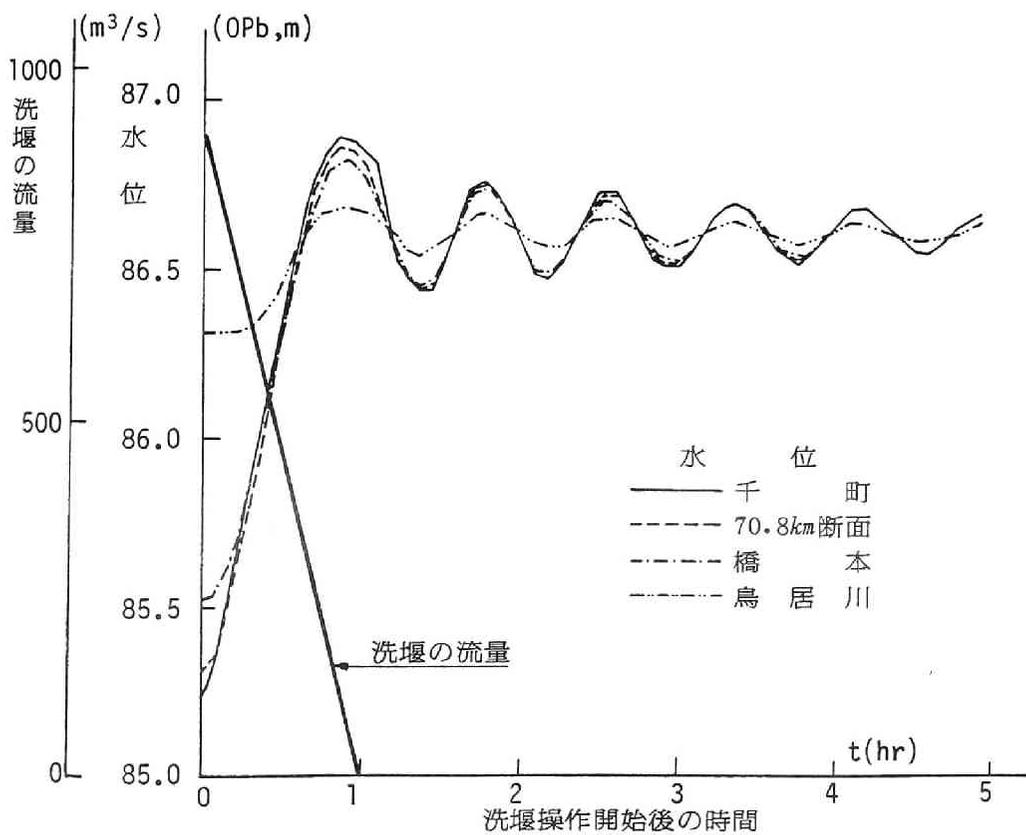
(i)は、現在の洗堰の操作規程で、流量の変化は5分間に $25\text{m}^3/\text{s}$ 以下とするとされている速さをとったものである。しかし、この場合には全閉までに3時間を要し、この間の洗堰操作中に流出する水量は $4.86 \times 10^6 \text{m}^3$ にも達し、これは下流の天ヶ瀬ダム貯水池の有効貯水容量の約1/4にも匹敵する。(ii)および(iii)は、緊急の場合に(i)より速く全閉にする操作として想定されたものである。このような操作により、流量が時間に比例して(つまり直線的に)減少してゆくとし、これを下流端の境界条件とする。

図5.28(a), (b)および(c)はそれぞれ(i), (ii)および(iii)の場合についての計算結果を示したもので、境界条件である下流端の千町地点の流量ならびに70.8km, 橋本および鳥居川の各地点における水位の時間的変化が表わされている。各地点における水位の変化は、いずれの遡上波についても約45分の周期で振動しながら、次第に減衰し、この場合の琵琶湖の水位である OPb 86.614m に収束している。



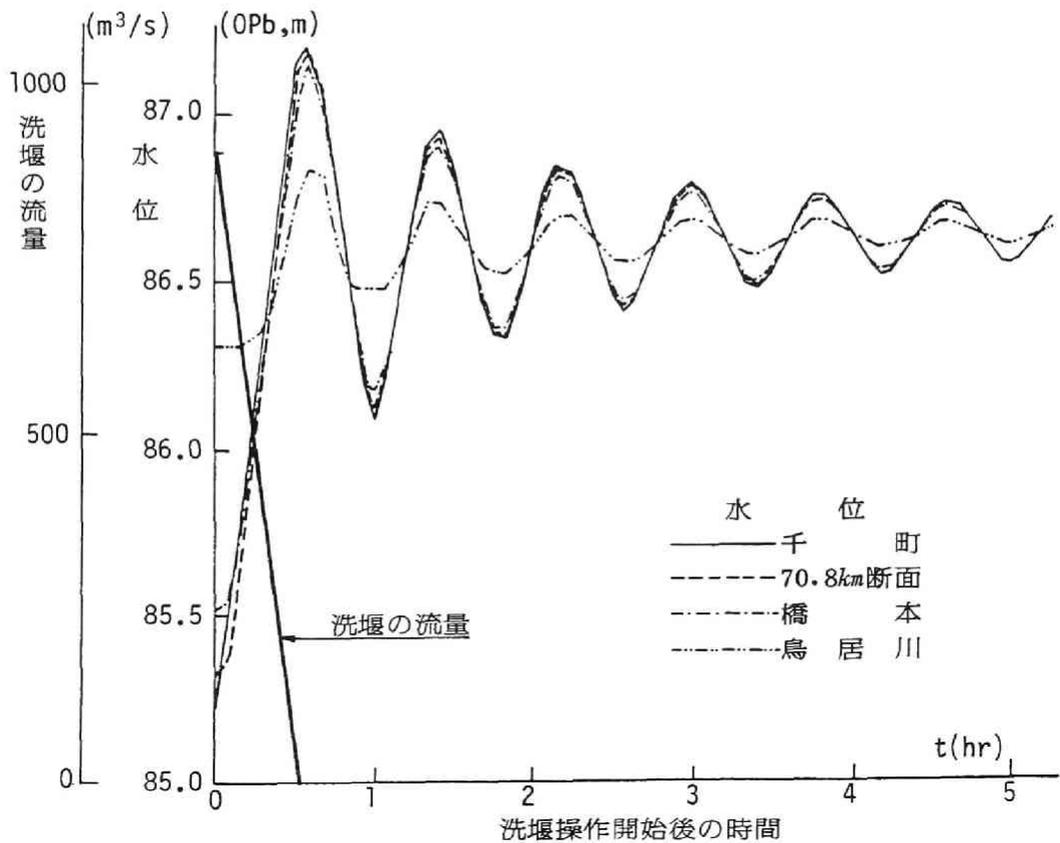
(a) 3時間で全閉

図5.28 洗堰を急閉したときの遡上波



(b) 1時間で全開

図5.28 洗堰を急閉したときの遡上波



(e) 30分で全開

図5.28 洗堰を急閉したときの遡上波

つまり、瀬田川の水位が琵琶湖と同じ水位に達し、水平な水面が現われるということが出来る。これは洗堰の全閉の結果として当然予想されることである。図にみられる水位の変化は、その振幅が下流ほど大きく、また各点において位相の違いがみられないことから、このときの遡上波は、下流端の千町地点を腹、上流端の琵琶湖（76.5km地点）を節とし、この区間を1/4波長とする振動であると考えられる。

(i), (ii)および(iii)の場合の遡上波について、水位の最大値をまとめるとつぎのようである。最大値は洗堰全閉後の最初の振動で発生している。(i)の場合には下流側地点ほど最大値が大きくなっている。(ii)の場合には閉鎖が緩やかであるので、水位変化の大きい遡上波は発生せず、下流端の千町地点の水位の最大値は約 OPb 86.68cmで、このときの琵琶湖の水位より7 cm程度上昇するに過ぎないが、(ii)および(iii)ではそれぞれ29cmおよび60cmも高くなっており、洗堰を全閉する速さが大きくなるに従い、水位の変化が相当大きい遡上波が発生することが予想される。

5.7 洪水の遡上追跡

これまで述べてきた非定常流の計算では、境界条件を与え、初期状態を設定した後、ハイドログラフの時間的および距離的な（上流から下流、あるいは下流から上流への）変化を求めてきた。ここで取扱うのはこれらとは異なり、下流に現われた水位および流量ハイドログラフが上流のどのようなハイドログラフによってもたらされるかを計算するものである¹³⁾。このような遡上追跡が適用される水理学上の問題としてつぎのものが挙げられる。

(i)ダムの放流操作：ダムより下流のある地点で望ましい形の水位および流量ハイドログラフを得るには、上流のダムの放流操作をどのように行えばよいか、すなわちダムから放流される流量ハイドログラフをいかにすればよいかを求める問題である。とくに、ダムより下流の懸案地点が他の河川から背水の影響を受けている場合が対象になる。

(ii)貯水池への流入流量の算定：貯水池においては、水面は水平であるとして、流出流量と水位の変化より、連続式と貯水池の水位－貯水量の関係を用いて流入流量が求められることが多い。しかし、洪水期のように水面こう配が無視しえない場合には、この方法はしばしば大きい誤差をもたらす。貯水池においては、下流端（多くはダムサイト）で水位および流量ハイドログラフが観測されているから、これから流入流量を求める問題である（ただし、一次元解析法が適用されるとしておく）。

(1) 計算法の構成

この問題は通常の洪水追跡と比べ、

- (i)下流端で流量および水位のハイドログラフが既知である、
- (ii)上流端のハイドログラフは未知である、

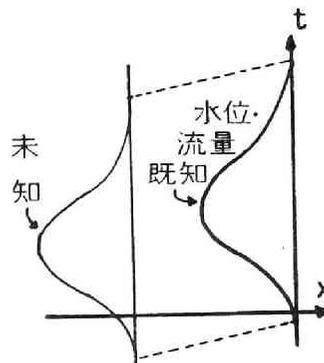


図5.29 遡上追跡

という2点において異なっている（図5.29）。このような問題を解く手法の一つとして、上流端のハイドログラフを適宜仮定して通常の追跡計算を行い、下流端の水位あるいは流量ハイドログラフに一致するまで、試行錯誤的に計算を繰り返す方法が考えられるが、労力が大きく有効な方法とはいえない。ここで考えるのは、この問題が独立変数の x と t を入れ換えれば、“初期値問題”に他ならない

ことに注目して、4.3および4.5で述べた特性曲線法の考え方をそのまま適用しようとするものである。すなわち、遡上追跡のための計算式は図5.30を参照して、4.5の特性曲線法の考え方に従えばつぎのように導かれる。

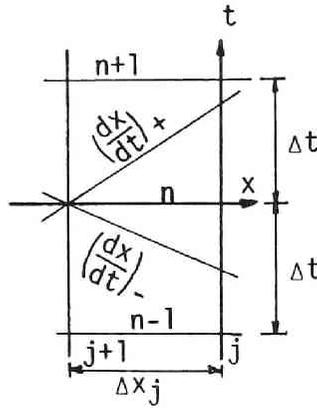


図5.30 遡上追跡の差分 scheme

$(dx/dt)_+$ に沿う関係：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda \cos \theta}{B} \right)_j^n \left(\frac{A_j^{n+1} - A_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - q_j^n \right) \\ & + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v + c \right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{j+1}^n + s_{j+1}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$(dx/dt)_-$ に沿う関係：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda \cos \theta}{B} \right)_j^n \left(\frac{A_j^n - A_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{Q_j^n - Q_{j+1}^n}{\Delta x_j} - q_j^n \right) \\ & + \left(\frac{\alpha - \beta}{2\beta} v - c \right)_j^n \left(\frac{\beta}{g} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{H_j^n - H_{j+1}^n}{\Delta x_j} + \frac{s_{j+1}^n + s_{j+1}^n}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

ここに、非齊次項は不等流計算との整合を考慮して上式のようにとられている。つまり、定常状態で $A_j^{n+1} = A_j^n = A_j^{n-1}$ および $v_j^{n+1} = v_j^n = v_j^{n-1}$ のとき、(5.7) および (5.8) 式は不等流の標準逐次計算法 (4.80) および (4.81) 式に帰着されるように、非齊次項がとられている。

(5.7) および (5.8) 式において、添字 j に関する量はすべて既知であり、両式より未知数 Q_{j+1}^n および $(H_{j+1}^n - s_{j+1}^n \Delta x_j / 2)$ が連立的に解かれ、これより標準逐次計算法と同様の収束計算によって $(j+1)$ 断面での水位および流量をはじめその他の水理量が求められる。境界条件としては、 $t = 0$ および $t = N\Delta t$ (N : t 方向の計算格子の総数) では定常状態であるとして、不等流の関係 ((4.80) および (4.81) 式) が成立するとするのが自然であろう。初期条件はいうまでもなく、下

流端における水位および流量ハイドログラフである。区間内に分・合流点が含まれる場合には、分・合流支川のハイドログラフが条件として必要とされるが、種々の場合が考えられ、4.5(2-iii)で述べたような一般的な取り扱いはずかしいので、本節では分・合流点はないものとしておく。なお、(5.7) および (5.8) 式の安定性の必要条件は、この場合のC.F.L.条件である次式で与えられる。

$$\Delta t > \Delta x_j / |(dx/dt)_j| \quad (5.9)$$

(2) 淀川における洪水の遡上追跡

追跡計算の対象にしたのは、5.4で述べた淀川中・下流部の洪水で、6524出水である。遡上追跡の区間として図5.15の淀地点から横尾山地点の間の淀川本川（宇治川）沿いをとる（ただし、山科川の合流は考えない）。5.4の計算（流下追跡と呼ぶことにする）結果より淀地点における水位および流量

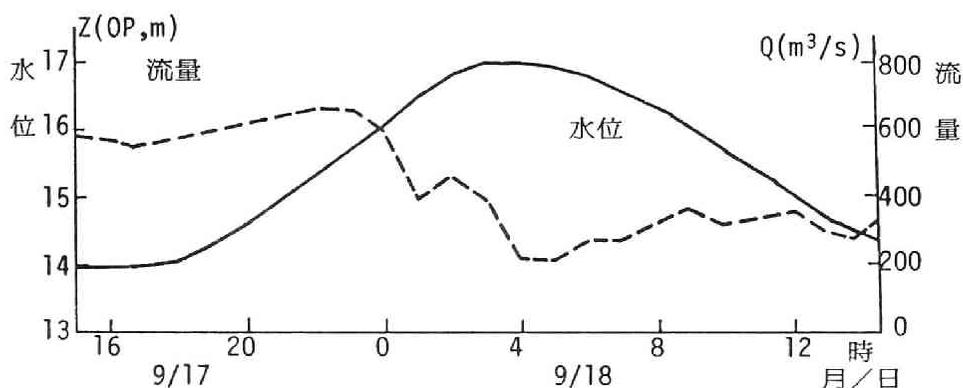


図5.31 流下追跡による淀地点の水位および流量ハイドログラフ（6524出水）

ハイドログラフを求め（図5.31）、これを新たに下流端条件として遡上追跡を行い、これを流下計算の結果と比較することにした（遡上追跡の断面数は9、 $\Delta x_{\max}=2.4\text{km}$ 、 $\Delta t=900\text{秒}$ ）。計算結果を、隠元橋地点（図5.15参照）および横尾山地点について示したのが、図5.32(a)および(b)である。図において、流下追跡より求められた水位および流量はそれぞれ実線および破線で示されている。遡上追跡の結果は、ハイドログラフがやや平滑化される傾向がうかがえるものの、ピーク値およびピークの出現時刻においては流下追跡の結果とほぼ一致しており、ここでの遡上追跡によって上流のハイドログラフが十分な精度で再現されたとみることができる。

遡上追跡を用いれば、たとえば淀地点において望ましい形の水位ハイドログラフを想定したとき、まずこれを境界条件として木津川および桂川を含めた通常の流下追跡を行って淀地点の流量ハイドログラフを求め、ついで淀地点の水位および流量を横尾山まで遡上追跡すれば、結局淀地点において想定された水位ハイドログラフを実現させるための横尾山の流量、つまりその直上流の天ヶ瀬ダムからの放流流量が求められるといえる。つまり、この方法によって先述したように、下流に他河川からの

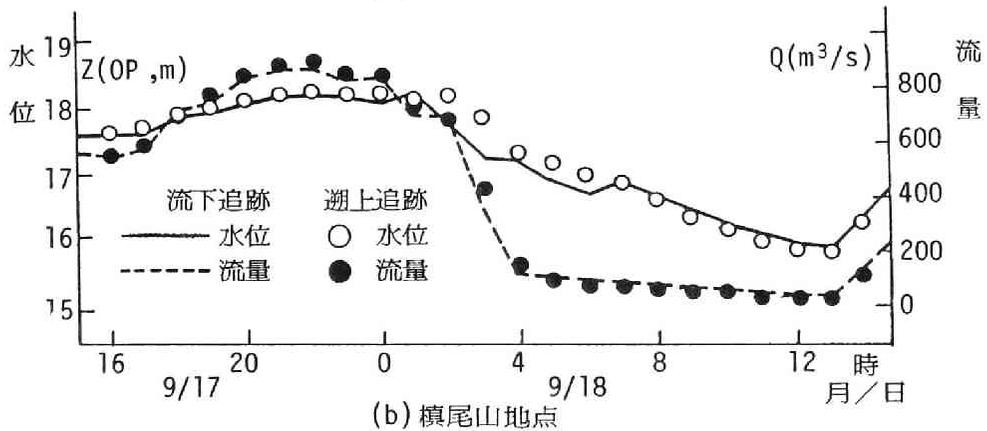
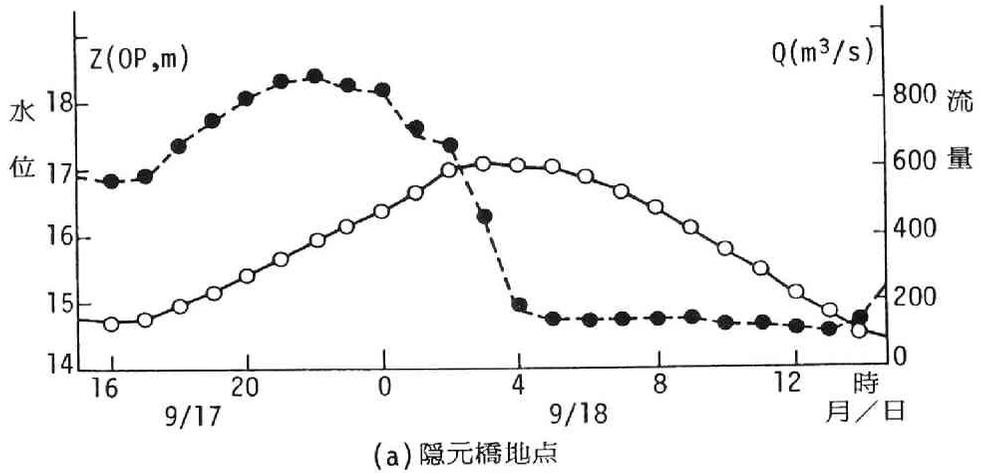


図5.32 遡上追跡の結果

背水の影響を受ける懸案地点を有するダムからの放流操作について一つの水理学的な指針を与えることができよう。

5.8 結 語

本章においては、一次元の非定常流の数値計算法を、仮想的な水路における微小擾乱や水深変化の大きい流れ、実験水路における非定常流および実際の河川における洪水や遡上波などの追跡に適用し、応用にあたっての基本的事項の解明およびその実際河川への適用法について考察をすすめた。結果を要約すれば以下のようなものである。

(1)まず、はじめの2節においては、前章までに述べてきた kinematic wave 法および dynamic wave 法の両方を適用した。これらの節で想定した仮想的な水路では、kinematic wave 法で必要とされる伝播速度および拡散係数が (3.4) および (3.85) で与えられる。

流下距離が小さく kinematic shock が現われるまでの結果から、

(i)無次元のパラメータ σ が 10^{-3} の程度であれば kinematic wave 法の第 1 次近似で十分である、
(ii) σ がこれより大きく 10^{-2} の程度になれば波頂の減衰を示す摂動法や逐次近似法による kinematic wave 法の第 2 次近似が有効である、
(iii) σ が 10^{-1} の程度になれば、上のような第 2 次近似では過剰な減衰が示され十分な結果が得られない、
(iv) 拡散項を含む第 2 次近似は σ の広い範囲にわたる良好な適用性がみられる、
(v) とくに σ が小さいときには線型解で波頂の減衰が十分示される、
ことなどが知らされた。

(2) 流下距離が大きく kinematic shock が現われる場合の結果から、
(i) 摂動法や逐次近似法による第 2 次近似では計算が不可能になるので適用性がない、
(ii) kinematic wave 法の第 1 次近似では不連続な解として扱われる kinematic shock が、dynamic wave 法では非常に急な変化を示す解として得られる、
(iii) 拡散項を含む第 2 次近似では kinematic shock の内部で拡散が大きく現われる、
ことなどが知られた。

(3) 3 節以降では、dynamic wave 法を適用して種々の非定常流の解析を行った。実際の水路や河川では、kinematic wave 法は、その前提となる水位と流量の関係が明確でないことや背水の影響が表わされないことにより、適用できなかった。

実験水路における非定常流の計算では、特性曲線法に比較して Lax-Wendroff 法の精度が高いことや特性曲線法では急激な変化が平滑化されすぎることなどが知られた。しかし、実際の河川の洪水などが扱われた 4 節以降では、Lax-Wendroff 法は 4.3(1) で述べた理由によりきわめて適用しにくいことや、段波のような変化の急な流れは現われないことを考慮して特性曲線法だけを用いることにした。特性曲線法を用いたこれらの非定常流の解析を通して、この方法が河川の洪水をはじめ水工学上の種々の問題に有効に適用することができ、またその結果この方法を用いることによって種々の問題に対する水理学的な検討が可能であることが知られた。

前章までで kinematic wave 法を詳述してきたにもかかわらず、実際の水路や河川の非定常流にはほとんど適用できない結果となった。その第一の理由として、kinematic wave の伝播速度および拡散係数に関して経験的な要素が大きく、それらを定めるための資料が一般には十分に得られないことが挙げられる。それ以外にも、4 節以降の実際の河川に関する実例で扱ったような背水の影響が強く現われる流れ、すなわち下流の影響が上流へ伝わる流れでは、kinematic wave 法は適用できないという理論的な面の制約が強いことも一因となっている。さらにつけ加えれば、理論的取扱いでは kinematic wave 法より複雑にみえる dynamic wave 法が、実際の問題に適用するにあたっては、さほど困難ではなく、むしろ容易であり、また計算時間などの計算上の制約もほとんど生じないことも理由として挙げられよう。

参考文献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也: 洪水流の数値シミュレーションに関する一考察, 第18回水理講演会講演集, 土木学会水理委員会, 1974
- 2) 速水頌一郎: 洪水流の理論について, 水工学の最近の進歩, 土木学会編, 1953
- 3) Iwasa, Y. and K. Inoue: Numerical simulation of floods by means of various methods, Proc. international symposium on unsteady flow in open channel, Newcastle-and-Tynny, England, 1976
- 4) 岩佐義朗, 井上和也, 長尾貞夫: 洪水流の数値シミュレーションについて(第2報), 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-2, 1974
- 5) 岩佐義朗, 井上和也, 片山 猛: 開水路非定常流のシミュレーションについて(第5報), 第30回土木学会年次学術講演会講演概要, II-191, 1975
- 6) 岩佐義朗, 井上和也, 片山 猛: 開水路非定常流の数値計算法について, 京都大学防災研究所年報, 第19号B-2, 1976
- 7) 土木学会編, 水理公式集, 1985年版
- 8) Richtmyer, R. D. and K. W. Morton: Difference methods for initial-value problems, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1967
- 9) 建設省近畿地方建設局淀川ダム統合管理事務所: 淀川中・下流部不定流計算検討業務報告書, 1977
- 10) 建設省近畿地方建設局: 6524出水の解析, 1967
- 11) 岩佐義朗, 井上和也: 上野遊水池計画に於ける最適調節に関する研究(継続), 建設省近畿地方建設局木津川上流工事事務所, 防災研究協会, 1979
- 12) 岩佐義朗, 井上和也: 瀬田川洗堰操作に伴う水理現象に関する研究, 建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所, 水資源開発公団琵琶湖開発事業建設部, 防災研究協会, 1980
- 13) 岩佐義朗, 井上和也, 宮井 宏: 不定流の数値計算法の洪水問題への適用, 第22回水理講演会論文集, 1978

第2編 二次元平面流れの数値計算法とその応用

第2編においては、二次元平面流れの数値計算法とその水工学への応用について考察する。第1編で述べた一次元流れの問題は、これまでの水工学における主要な課題であり、伝統的に重点的な研究が行われてきた。しかし、近年大規模な水域における二次元あるいは三次元の拡がりや有する流れやそれに伴う輸送現象が、水質や環境の保全あるいは防災などの観点から重視されるようになってきている。すなわち、それらの例を具体的に挙げればつぎのようである。

(i)貯水池における冷水・濁水問題および近年とくに問題化している富栄養化などを考えるための流れと輸送の解析。

(ii)湖沼における静振や内部静振および水平環流や鉛直環流などの流れの二次元および三次元的構造やさらにそれによる物質の滞留特性の解析。これらは、もちろん湖沼の水質や環境の保全に密接に関連した問題である。

(iii)沿岸海域における、埋立てや温排水放出などに伴う流況の変化の予測。

(iv)氾濫原における洪水氾濫水の挙動の解析。これは氾濫の予知や避難計画の策定に対する基礎的な情報を与えるだけでなく、氾濫防止のための水工事業の効果と影響の予測にも応用される。

ここに例示したような流れは、従来的一次元解析法だけでは十分に対処しえないものであって、二次元あるいは三次元空間において解析されなければならない。しかし、従来では次元数の増加による取扱いの困難さのために、このような二次元あるいは三次元の拡がりや有する大規模な水域における流れの解は、解析的には求めることはできなかった。与えられた初期および境界条件のもとで、個々の水域において解が具体的に求められるようになったのは、解析手段である数値計算法が電子計算機を用いて実用的に実施できるようになってからである。

水工学が対象としなければならない水域は、ますます多様化しているから、上に例を示したような大規模な水域における二次元あるいは三次元の拡がりや有する流れの解析は、今後重要性を一層増すものと考えられ、またこれにしたがって、解析のための手段である数値計算法もより広い範囲で適用されるものと考えられる。

本編においては、このような大規模な水域における流れの解析のうち、序論でも述べたように、最も基本的な二次元平面流れの数値計算法を取扱う。すなわち、浅水湖における湖流と物質の拡散と滞留、および氾濫原における洪水氾濫水の挙動を採り上げ、具体的な適用例を通じて二次元平面流れの解析について考察する。また、流れの水理学的な意義を反映している特性曲線理論を、二次元平面流れの数値計算法に応用する方法について考察を進める。

第1章 浅水湖における流動と拡散

1.1 概説

上に述べたように、二次元平面流れにおいて、与えられた初期条件および境界条件のもとでの具体的な解を求めるには、一般には数値計算法によらざるをえない。本章では、浅水湖における湖流と物質の拡散を解析するための数値計算法を導くとともに、琵琶湖南湖を対象として恒流、環流および静振といった空間的スケールが比較的大きい湖流の特性および近年水資源開発の進展とともに問題化しつつある物質の滞留・拡散の特性について数値計算の結果¹⁾より考察する。

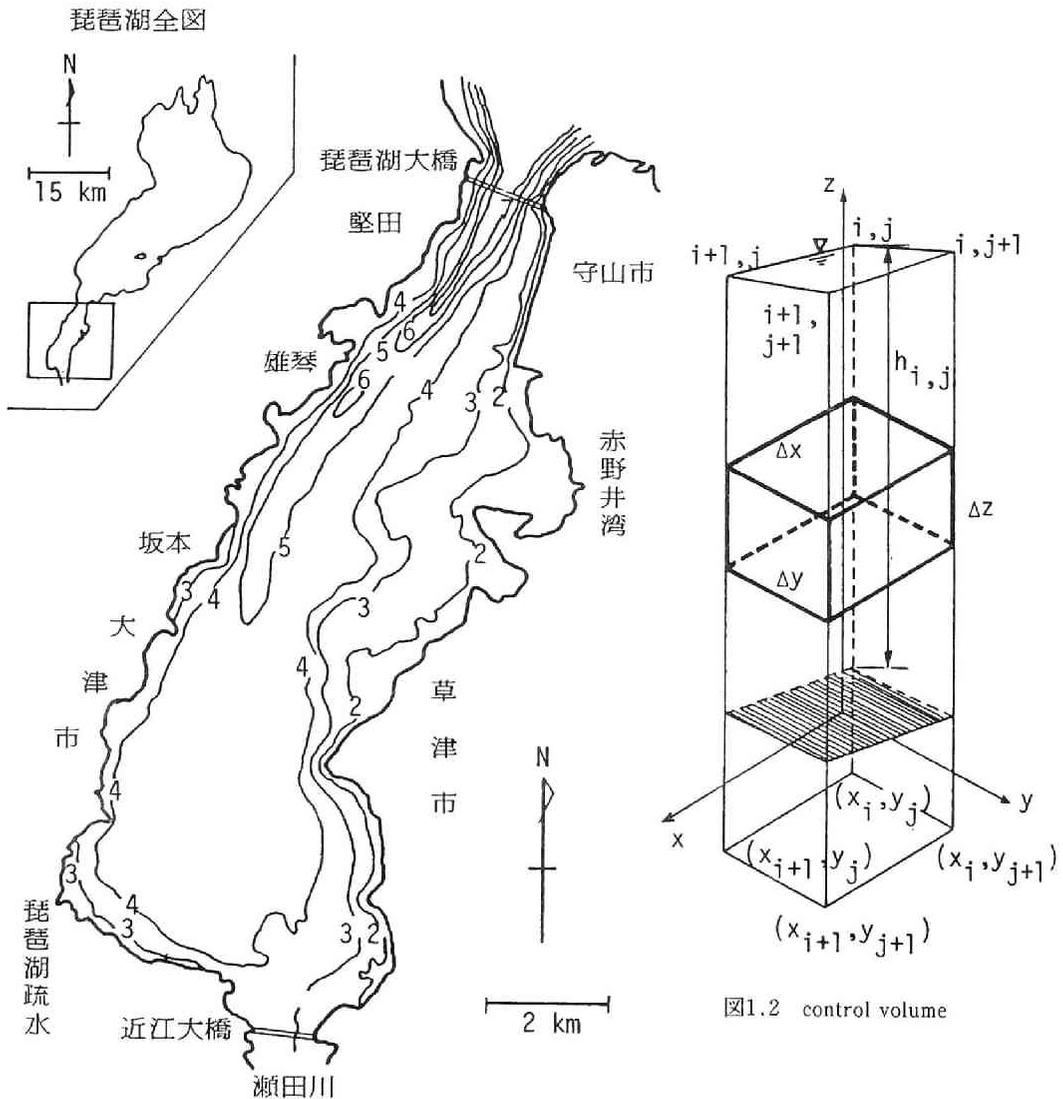


図1.1 琵琶湖南湖の概況および等深図(単位：m)

まず、本章において、二次元平面流れによる数値計算法を適用する琵琶湖南湖の特徴を概述する。周知のように、琵琶湖南湖の北端は北湖に接しており、また南端は琵琶湖疏水とともに琵琶湖の流出口となっている瀬田川につながっている（図1.1）。南湖として琵琶湖大橋と近江大橋の間を対象とするとき、その湖面積および貯水量は、鳥居川量水標の0水位（TP 84.371m = OPb 85.614m）に対して、それぞれ57.9km²および2.12×10⁸m³で、平均水深は3.66mである。北湖と比較すると、湖面積は約1/12、貯水量は1/130に相当している。南湖の長軸はほぼNNE方向で、その長さは13.5km、平均幅は4.3kmである。南湖の湖底は湖盆形状をなしており、堅田湖峡（琵琶湖大橋地点）より坂本沖までの間で水深は約8mから4mと次第に浅くなっているが、最深部は西岸に偏っており、そのため湖岸傾斜は東岸で遠浅であるのに対し、西岸では急斜面となっている。なお、本章の解析は、矢橋沖の埋立てが完成する前に行われているので、矢橋人工島は考えられていない。

湖沼のような閉鎖性水域において流体運動を生ぜしめる外力としては、風や気圧の変化、密度の非一様性および河川の流入・流出など種々のものが挙げられる²⁾が、ここで対象とする南湖についていえば、上記のような地形的特徴から、まず北湖から南湖を通過して瀬田川へ流出する恒流的な成分が考えられ、これに風による影響が重なりと予想される。気圧の変化は南湖の大きさからみて考慮しなくてよいであろう。河川からの流入流量は平水時にはほとんどなく、その影響は無視しうると考えられる。また、観測によれば、琵琶湖大橋の近くでは、北湖の内部静振の南湖への浸入や、南・北湖間の密度流による交流が認められている³⁾が、これらの現象は比較的局所的なものとみられる上、その発生頻度も少ないとみなされるので、密度の非一様性を考慮しなければならないような湖流は、本章では考えないことにする。

以後の解析では、二次元平面流れに、

(i)密度は一定である（とくに成層は発達していない）、

(ii)圧力分布は静水圧分布で表わされる、

(iii)流速や濃度などの水理量の水深方向の変化は小さい、

という仮定をおき、水深方向について平均された水理量を対象とする、いわゆる二次元一層モデルを適用し、これを差分法によって解くことにする。しかし、南湖のような浅い湖でも、風によって生ずる吹送流では表層と底層とで流速にかなりの差を生ずることがある^{4,5)}ようなので、一層モデルを用いている以後の計算結果にはかなり制約があることに注意を要する。

1.2 基礎式とその差分化

(1)基礎式

流体運動に関する三次元的な基礎式はつぎのとおりである。

$$\text{連続式: } \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{運動方程式：} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

(1.2) 式において、せん断応力 τ_{ij} に Newton 流体に関する表示を用いれば、(1.2) 式は Navier-Stokes の式になるが、ここで取扱う流れはすべて乱流であるので、(1.1) および (1.2) 式はある時間スケールについての平均化がすでに行われた結果の式とする。

(2) 二次元一層モデル

二次元一層モデルの基礎式は、座標系を水平面内の東向きに x 軸、北向きに y 軸、鉛直上向きに z 軸をとり、図1.2に示される control volume について (1.1) および (1.2) 式を積分することによって得られる。まず、(1.2) 式の z 軸についての式において、鉛直方向の加速度が重力の加速度に比べて十分小さいと仮定し、また自由表面では一定の大気圧に等しいとすると、先の仮定(ii)のように静水圧分布式

$$p = \rho g(H - z) \quad (1.3)$$

が得られる。ここに、 H は、第1編とは異なり、基準面（この章では鳥居川量水標0点、すなわち TP 84.371m の面をとる）から水面までの高さ、つまり水位である。つぎに、(1.1) および (1.2) 式の x 軸と y 軸に関する式を図1.2の control volume で積分し、その後 $x_{i+1} \rightarrow x_i$ ($\Delta x \rightarrow 0$)、 $y_{i+1} \rightarrow y_i$ ($\Delta y \rightarrow 0$) とすれば次式が得られる。

連続式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

x 方向の運動量方程式：

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uM + \frac{\partial}{\partial y} vM = -gh \frac{\partial H}{\partial x} + fN + \frac{1}{\rho} \{ \tau_x(s) - \tau_x(b) \} \quad (1.5)$$

y 方向の運動量方程式：

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uN + \frac{\partial}{\partial y} vN = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - fM + \frac{1}{\rho} \{ \tau_y(s) - \tau_y(b) \} \quad (1.6)$$

ここに、記号は図1.3に示されるとおりで、 h ：水面から湖底までの深さ（水深）、 M および N ：それぞれ x および y 方向の流量フラックスで、 $M = uh$ および $N = vh$ 、 u および v ：それぞれ x および y 方向の水深方向に平均された流速、 f ：Coriolis の因子で $f = 2\omega \sin \varphi$ (ω ：地球の自転の角速度で $\omega = 7.27 \times 10^{-5}/s$ であり、また、 φ ：緯度で南湖では $\varphi \approx 35.08^\circ$ であるので、 $f = 8.36 \times 10^{-5}/s$)、 $\tau_x(s)$ および $\tau_y(s)$ ：水表面に作用する x および y 方向のせん断応力、 $\tau_x(b)$ および $\tau_y(b)$ ：湖底において作用する x および y 方向のせん断応力である。(1.5) および (1.6) 式の誘導にあたっては、 x 方向および y 方向の局所的な流速と平均流速 u および v との差をそれぞれ u' および v' とす

るとき、先の仮定(iii)により $\int_{h-h}^h u'u'dz$, $\int_{h-h}^h u'v'dz$ および $\int_{h-h}^h v'v'dz$ の項はすべて省略されている。

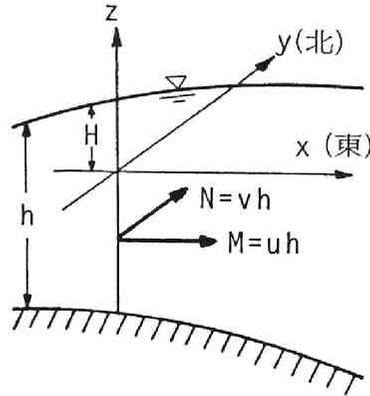


図1.3 二次元一層モデル

(3) 拡散に関する基礎式

ここで取扱う物質の移動は、 u および v による移流に拡散が重なったものに限ることとする。したがって、その基礎式は、拡散物質の濃度が水深方向にほぼ一様であるとして、湖流に関する基礎式と同様に、物質の保存則を表わす式を図1.2に示される control volume について積分し、その後 control volume の大きさを微小にして得られる次式が用いられる。

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uC + \frac{\partial}{\partial y} vC = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

ここに、 $C = \bar{c}h = \int_{h-h}^h cz dz$ (c : 拡散物質の濃度), \bar{c} : 水深方向に平均された濃度, K_x および K_y : x および y 方向の拡散係数である。(1.7) 式は、濃度分布が水深方向にほぼ一様であるとして導かれており、さらに拡散物質の湖底への沈降あるいは湖底からのまき上げは考慮されていないから、底泥のような沈降性の拡散物質に対しては(1.7)式はそのままでは適用されないことに注意しなければならない。

(4) 差分式

(1.4) ~ (1.6) 式および(1.7)式を解くには数値計算によらなければならない。その方法として、本章では序論で述べたように差分法を適用する。(1.4) ~ (1.6) 式で構成される系は保存則系であり、双曲型であるから、一次元流れの場合と同様に Lax-Wendroff 法や特性曲線法の適用が考えられる。このうち、二次元の特性曲線法に関しては第3章において考察する。Lax-Wendroff 法については、瀬戸内海の流況の解析に適用されている例⁶⁾もあるが、境界条件の組込みに一次元流れの場合以上の困難が予想されるので、本研究ではとり上げないことにし、この章においては、二次元一層モデルに対して広く用いられている multi-level の staggered scheme^{2,7)} (leap-frog 法の一つ) による

計算法を適用する。この方法は湖岸に垂直な流量フラックスが0であるという境界条件を容易に表わしうる計算法であり、また差分化そのものがかなり簡単である上、計算時間および必要とされる記憶容量の面でも比較的有利とみなされる計算法である。

まず湖流に関しては、移流が小さいとみなし、(1.5) および (1.6) 式 of の非線型項を省略した次式を用いる。

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -gh \frac{\partial H}{\partial x} + fN + \frac{1}{\rho} |\tau_x(s) - \tau_x(b)| \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - fM + \frac{1}{\rho} |\tau_y(s) - \tau_y(b)| \quad (1.9)$$

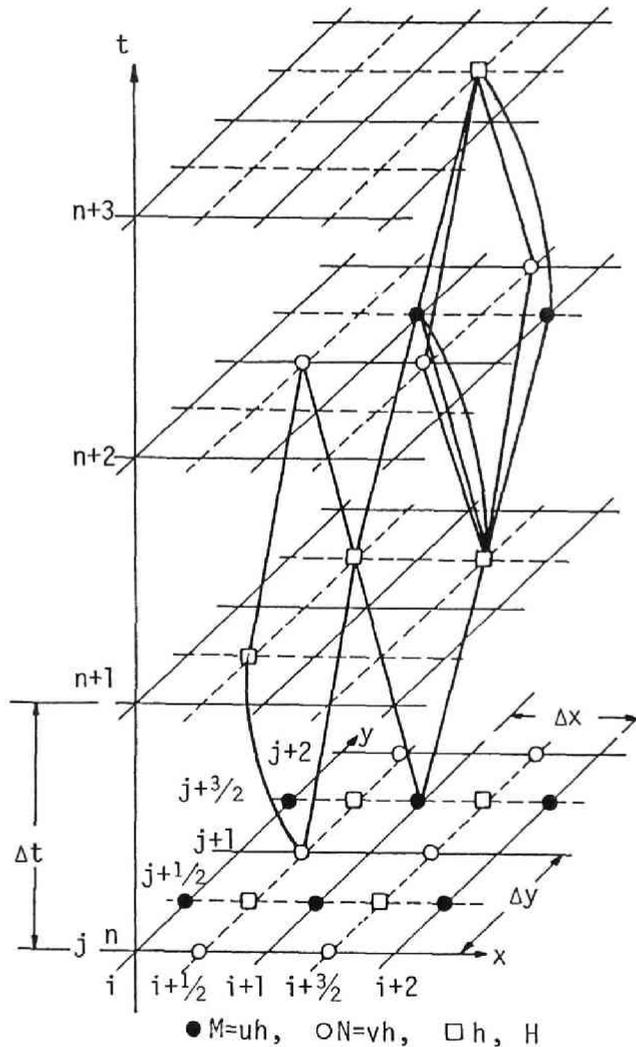


図1.4 湖流の差分格子

(1.8) および (1.9) および (1.4) 式を連立させて解くのに、求めるべき従属変数 M , N , h および H を図1.4のように千鳥状に配置すれば、計算のための差分式はつぎのように導かれる⁸⁾ (ただし、変数の右肩に時間ステップを表わす添字 n , 右下に $x-y$ 平面での位置を示す添字 i および j を附す)。

x 方向の運動量方程式 (1.8) 式：

$$\frac{M_{i,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^n}{2\Delta t} = -g \frac{(h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1})(H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2,j+1/2}^{n+1})}{2\Delta x} + f \frac{N_{i-1/2,j}^n + N_{i+1/2,j}^n + N_{i+1/2,j+1}^n + N_{i-1/2,j+1}^n}{4} + \frac{1}{\rho} \left[\bar{\tau}_x(s)_{i,j+1/2}^n - \bar{\tau}_x(b)_{i,j+1/2}^n \right] \quad (1.10)$$

y 方向の運動量方程式 (1.9) 式：

$$\frac{N_{i+1/2,j}^{n+2} - N_{i+1/2,j}^n}{2\Delta t} = -g \frac{(h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1})(H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2,j-1/2}^{n+1})}{2\Delta y} - f \frac{M_{i,j-1/2}^n + M_{i+1,j-1/2}^n + M_{i+1,j+1/2}^n + M_{i,j+1/2}^n}{4} + \frac{1}{\rho} \left[\bar{\tau}_y(s)_{i+1/2,j}^n - \bar{\tau}_y(b)_{i+1/2,j}^n \right] \quad (1.11)$$

連続式 (1.4) 式：

$$\frac{h_{i+1/2,j+1/2}^{n+3} - h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}}{2\Delta t} = - \frac{M_{i+1,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^{n+2}}{\Delta x} - \frac{N_{i+1/2,j+1}^{n+2} - N_{i+1/2,j}^{n+2}}{\Delta y} \quad (1.12)$$

ここに、 Δx および Δy : x および y 方向の差分格子の大きさ、 Δt : 時間の差分格子の大きさである。また、

$$\bar{\tau}_x(s)_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2} \left\{ \tau_x(s)_{i+1/2,j+1/2}^n + \tau_x(s)_{i-1/2,j+1/2}^n \right\} \quad (1.13)$$

$$\bar{\tau}_y(s)_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2} \left\{ \tau_y(s)_{i+1/2,j+1/2}^n + \tau_y(s)_{i+1/2,j-1/2}^n \right\} \quad (1.14)$$

であり ($\bar{\tau}_x(b)$, $\bar{\tau}_y(b)$ についても同様), またせん断応力 $\bar{\tau}_x(b)$ および $\bar{\tau}_y(b)$ の計算に必要なとされる流速 u および v は次式で計算される。

$$u_{i+1/2,j+1/2}^n = \left(M_{i+1,j+1/2}^n + M_{i,j+1/2}^n \right) / 2h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \quad (1.15)$$

$$v_{i+1/2,j+1/2}^n = \left(N_{i+1/2,j+1}^n + N_{i+1/2,j}^n \right) / 2h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} \quad (1.16)$$

(1.10) ~ (1.12) 式による数値計算はつぎの手順で行われる。

①初期値として、計算対象域内のすべての i および j について $n = 0$ のときの M および N , ならびに $n = 1$ のときの h が与えられているとする。

② M^n , N^n および h^{n+1} は初期値あるいは前回の計算結果から知られているから、まず (1.10) およ

び (1.11) 式から M^{n+2} および N^{n+2} をすべての i および j について求める。

③②の結果と (1.12) 式より h^{n+3} をすべての i および j について求める。

④以下②～③を所定の計算時間の範囲で繰り返す。

以上の計算過程から明らかなように、 M および N が求められる時間と h が求められる時間とは、時間の差分格子の大きさの 1 ステップ分 (Δt) だけずれているが、初期値を設定したときの時間の配置にならって、 M^n 、 N^n および h^{n+1} が同じ時刻での計算結果であるとみなすことにする。

拡散過程を表わす (1.7) 式に関しては、つぎの差分式を用いる (図1.5)。

$$\begin{aligned} \frac{C_{i+1/2,j+1/2}^{n+3} - C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}}{2\Delta t} &= -u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} \frac{C_{i+3/2,j+1/2}^{n+1} - C_{i-1/2,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x} \\ &\quad - v_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} \frac{C_{i+1/2,j+3/2}^{n+1} - C_{i+1/2,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} \\ &\quad + K_x \frac{C_{i+3/2,j+1/2}^{n+1} - 2C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + C_{i-1/2,j+1/2}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ &\quad + K_y \frac{C_{i+1/2,j+3/2}^{n+1} - 2C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} + C_{i+1/2,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (1.17) \end{aligned}$$

拡散過程の計算には、初期値あるいは前回の計算結果より C^{n+1} がすべての i および j について既知であるとして、これと流れの計算結果より求める u^{n+2} および v^{n+2} を用いて、 C^{n+3} が (1.17) 式より計算されるという手順がとられる。

(5)琵琶湖南湖への適用

計算にあたっては、瀬田川への流出口および堅田湖峡の幅を考慮南湖を図1.6のように一辺500m

* 移流項の差分化において、上流側の量が計算においても移流されるようにするには、 $\partial(uC)/\partial x + \partial(vC)/\partial y$ をつぎのように上流側差分によって表わせればよいとされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} uC + \frac{\partial}{\partial y} vC &\approx \frac{1}{\Delta x} \left(u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i-1/2+a,j+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i-1/2+b,j+1/2}^{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta y} \left(v_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i+1/2,j+1/2+c}^{n+1} - v_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i+1/2,j-1/2+d}^{n+1} \right) \end{aligned}$$

ここに、添字に現われている a 、 b 、 c および d には、上流側の量が移流されるように、すぐ前の流速が正であれば 0、負であれば 1 がとられる。すなわち、たとえば、

$$u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i-1/2+a,j+1/2}^{n+1} = \begin{cases} u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} & ; u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} > 0 \\ u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} C_{i+3/2,j+1/2}^{n+1} & ; u_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} < 0 \end{cases}$$

である。しかし、本章の計算では簡単のため、(1.17) 式の差分式を用いた。なお、(1.17) 式は、 $K_x = K_y = 0$ であれば第 1 編 (4.6) 式あるいは (4.10) 式で $\mu = 0$ とした式と同じ形式であるから、第 1 編 4.2(3) で述べたように不安定な差分式である。

の差分格子に分割する。ここで、B1、B2 および B3 は1.3で述べる流速計の設定点であり、また

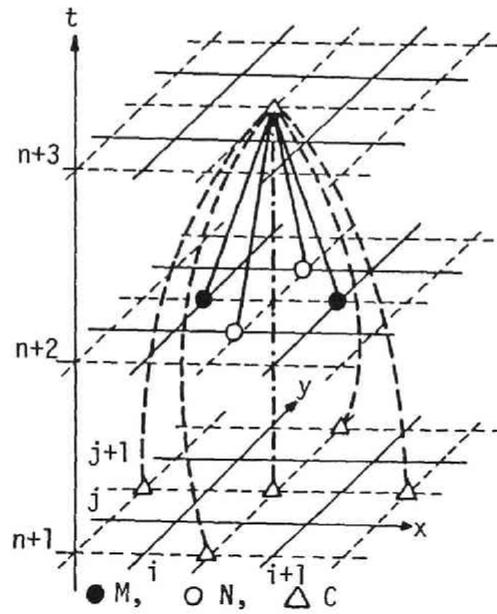


図1.5 拡散の差分格子

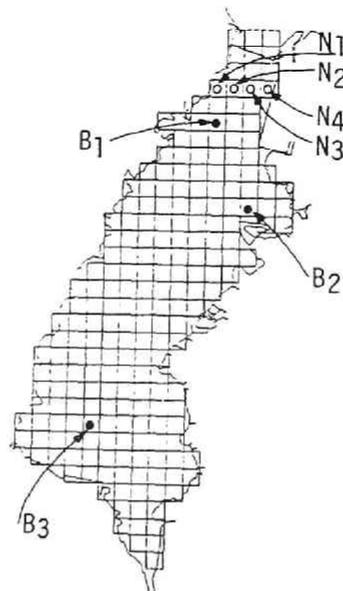


図1.6 南湖の格子分割
(一辺500m)

N1 ~ N4 は1.4の滞留・拡散の計算において拡散物質であるトレーサーを投入した点である。

(1.10)~(1.12)式で示される計算式の安定性の必要条件として、この場合のC.F.L.条件⁷⁾がある。

$$\Delta t < \min(\Delta x, \Delta y) / \sqrt{2gh_{\max}} \quad (1.18)$$

ただし、上式においては u および v は $\sqrt{gh_{\max}}$ に比べて十分小さいとされている。(1.18)式の水理的な意義は一次元流れの場合と同様である。いまの場合、 $\Delta x = \Delta y = 500\text{m}$ であり、また $h_{\max} \approx 8\text{m}$ であるから $\Delta t < 39$ 秒であるが、いくつかの試算の後 $\Delta t = 15$ 秒とした。

初期条件には、一次元流れの場合と同様に定常状態を想定するのが妥当であるが、定常な二次元流れの計算法が確立されていないので、つぎの方法をとることとする。つまり、出発値として適当な M 、 N および h を与え、境界条件を定常に保ったまま (1.10) ~ (1.12) 式による非定常な計算を行い、解が時間的に変化しなくなった状態を初期値とする方法である。

本研究において設定された境界は、図1.6より、南湖の北端（琵琶湖大橋の近く）、南端（近江大橋の南）および湖岸の3種類である。湖流に関する計算では、それぞれにつぎの境界条件を与える。

(i)北端：堅田地点の水位

(ii)南端：瀬田川の流量（洗堰からの放流流量に宇治川発電所の取水流量を加える）。

(iii)湖岸：計算の範囲内の水位の変化に対して汀線の移動はないとする。すなわち、湖岸に垂直な方向の流量フラックスを0とする。なお、琵琶湖疏水取水口においては、取水流量に相当する流量フラックスを与える。また流入河川の流量はすべて無視する。

水表面および湖底でのせん断応力には、従来よりよく使用されている次式^{2,9)}を用いることとする。

$$\tau_{x \text{ or } y}(s) = \gamma_a^2 \rho_a W_x \text{ or } W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (1.19)$$

$$\tau_{x \text{ or } y}(b) = \gamma_b^2 \rho_u \text{ or } v \sqrt{u^2 + v^2} - \beta \tau_{x \text{ or } y}(s) \quad (1.20)$$

ここに、 W_x および W_y ：風速の x および y 方向成分、 ρ_a ：空気の密度 ($\approx 1.2 \times 10^{-3} \text{ gm/cm}^3$)、 γ_a^2 、 γ_b^2 および β ：それぞれ係数で、その値として慣用されている値²⁾、すなわち、 $\gamma_a^2 = 1.3 \times 10^{-3}$ 、 $\gamma_b^2 = 2.6 \times 10^{-3}$ および $\beta = 1$ を採る。

拡散の計算で用いられた境界条件は、湖岸においては、流入・出する濃度フラックスがないとして、 $\partial C / \partial n = 0$ (n ：湖岸に立てられた法線)とする。このことから、湖岸に関しては鏡像の原理⁹⁾が導かれる。北端では北湖における濃度をつねに0とし、南端では $\partial^2 C / \partial n^2 = 0$ つまり濃度は直線的に変化するとする。北端における条件は、北湖に拡散した物質は南湖に再び戻ることはないとするもので問題は残されているが、これを改めるには結局琵琶湖全域を対象としなければならないので、南湖だけを取扱っている本研究では便宜的に上のように境界条件を設定する。後に示されるように、拡散の計算結果によれば、北湖へ拡散する量は0とみなしうるほどわずかとなっているので、上記の境界

条件で事実上差支えないようである。なお、疏水取水口では、取水による流出フラックスを考慮することにする。拡散係数には、南湖において種々の観測より推定された値の下限値である $K_x = K_y = 10^3 \text{cm}^2/\text{s}^{10)}$ を試算的に用いる。

拡散の計算においては、差分化の影響や流速分布の状況に応じて、計算の途中で $C < 0$ が現われることが知られている⁹⁾が、これは物理的に意味がないので、そのような場合には直ちに $C = 0$ とすることにする。さらに、拡散物質の総量が初期の総量に等しくなるように、計算ステップごとに補正⁹⁾を加えている。

1.3 湖流

1.2(5)で述べたように、本研究の計算では気象ならびに水理に関する基本的条件として、風（風向および風速）、瀬田川の流量および堅田地点の水位が考えられている。この節では、これらの条件の変化と湖流の特性を数値計算の結果より考察する。

(1) 静振

気象および水理条件を時間的に一定に保ったときの定常的な湖流を求めるために、まず出発値として南湖全域において $M = N = 0$ および水位はすべて堅田地点での水位に等しいとして、つぎに与えられた気象および水理条件のもとでの非定常な計算を (1.10) ~ (1.12) 式に従って進めた。平水時に近い水理条件として、瀬田川（宇治川発電所取水流量を含む）の流量が $80 \text{m}^3/\text{s}$ 、琵琶湖疏水の取水流量が $20 \text{m}^3/\text{s}$ 、堅田の水位が TP84.371m（鳥居川量水標での水位は 0.0m）のときで、風として西 2m/s が南湖全域に一様に吹くという条件のもとで上記の計算を行った結果より、琵琶湖大橋（北端）地点での流量（南湖への流入流量とよび、南流を正とする）と計算の経過時間との関係の一部を示したのが、図1.7である。

この図より、まず、流量の変動には4時間周期が卓越していることや、流量は平均的にみて南湖からの流出流量（瀬田川の流量と琵琶湖疏水の取水流量の和で、この場合 $100 \text{m}^3/\text{s}$ ）に次第に収束して

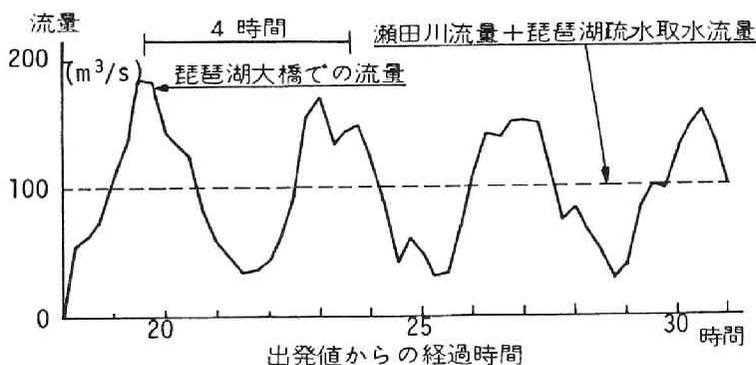


図1.7 琵琶湖大橋地点の流量

いること、および計算の開始から30時間（計算ステップ数にして30時間/ $2\Delta t = 3600$ ステップ）を経過してもなお定常状態に達していないことが特徴として指摘される。4時間の周期の変動は、従来より南湖において卓越して現われることが認められている静振⁷⁾に対応するもので、ここでの計算の妥当性を裏づける成果の一つであろう。第2の点は、平均水位が一定のとき流入流量と流出流量が平均的にみて釣合っている結果が得られており、計算上水量の連続性が満たされていることを意味している。第3の点は、静振の減衰が計算ではきわめて緩やかなことを示しているが、後述する観測結果からみれば静振は実際にはもう少し速く減衰するようであるから、この点は今回の計算の問題点である。湖底および水表面における摩擦係数の値のとり方および非線型項を省略したことが今後なお検討を要する課題であろう。

南湖の静振については、上記の4時間周期のもの他に、60～70分の周期の静振が、観測¹⁰⁾や今里らの計算²⁾によって認められている。しかし、今回の計算ではそのような周期の変動は現われていない。その理由の一つとして、ここでの計算では北端の水位（堅田地点の水位）は与えられた値に固定されているため、北端を節とする静振だけが計算されることが挙げられる。

(2)平均的な湖流

図1.8は上述のような計算結果から計算の開始より20時間～30時間にわたる計10時間の計算値を15分ごとにサンプリングしてその平均をとった湖流を、各風向ごとに示したものである（水理条件および風速は(1)と同じである）。

この図から、風向の変化により平均的な湖流の特徴は大きく異なることが分る。すなわち、風向が北西から東のときには、南下する流れは東岸に偏り、西岸には北上する流れが現われ、全体として時計回りの環流が見られるのに対し、風向が南東から西の場合には上と全く逆に南下する流れは西岸に偏るとともに東岸に北上する流れが発生し、反時計回りの環流となっている。また、このような特徴は、風向が南湖の長軸方向とほぼ一致する北東および南西のときに、最も典型的に現われている。琵琶湖の環流としては、北湖の北部に発生することがよく知られており、地衡流として取扱うことが可能とされている¹¹⁾が、図1.8にみられる環流は風向に応じてその向きが変化するように、風の影響が著しいことが明らかであり、風向と湖底地形によって支配される吹送流とみなされる。すなわち、Csanady¹²⁾は細長い湖の中央部における吹送流は、水深が比較的浅い部分では風と同じ向きに流れ、逆に水深が比較的深い部分では風とは逆の向きに流れることを近似的に導いているが、図1.8にみられる南湖の中央部における湖流の特徴は、比較的遠浅である東岸側に風向と同じ向きの湖流が発生し、水深の大きい西岸側ではその逆であるとまとめられるから、結局上記のCsanadyの考え方によって、風向の変化による南湖中央部の環流の変化が説明される。また、このような環流の向きの変化によって、北湖から瀬田川へ流出する恒流成分の大きい部分が、西岸側あるいは東岸側に偏ることになったものと考えられる。

図1.8は瀬田川の流量が平水時に近い $80\text{m}^3/\text{s}$ の場合の結果であるが、出水時で瀬田川の流量が大きくなった（たとえば $600\text{m}^3/\text{s}$ 程度）場合には、南下する恒流成分が相対的に大きくなり、環流は消滅

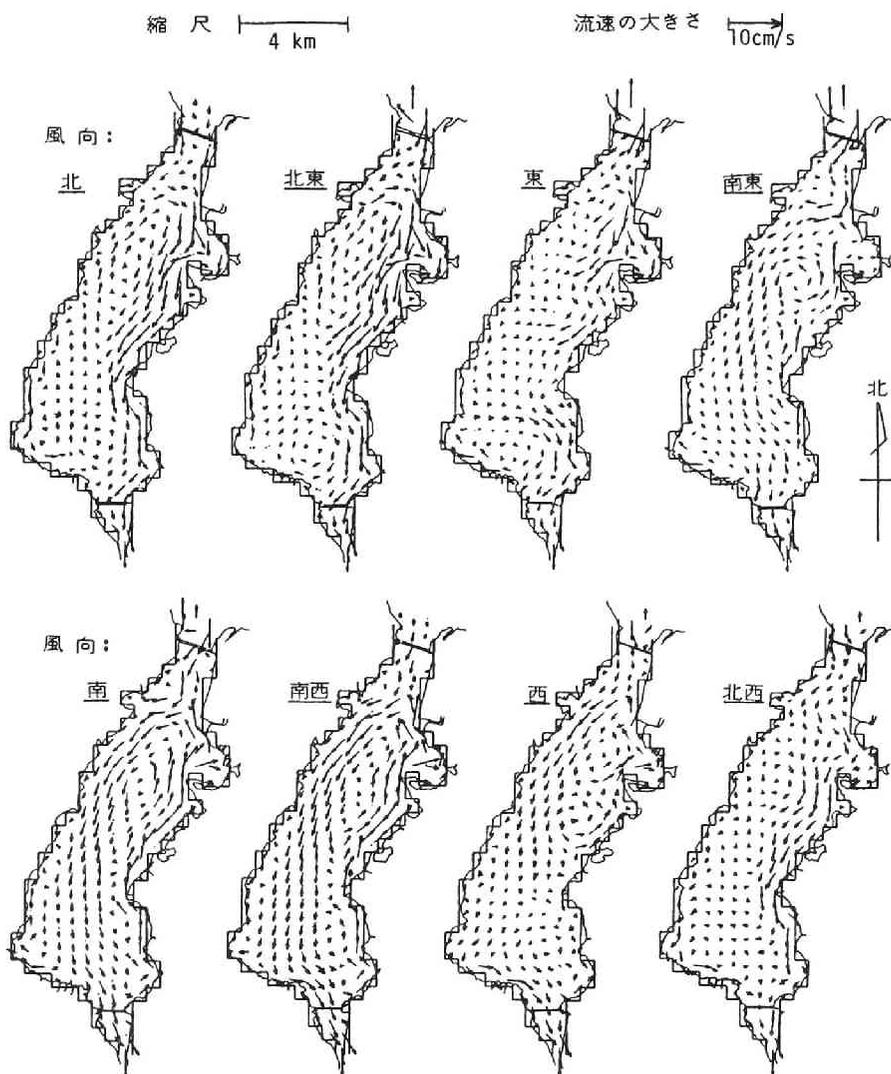


図1.8 平均的な湖流

(瀬田川流量：80 m^3/s ，疏水取水流量：20 m^3/s)
 (堅田の水位：TP 84.371m，風速：2 m/s)

することがある（図1.9，南湖における卓越風向である北東および西の場合のみを示す）。しかし，そのような場合でも風速が大きく（5 m/s 程度）なれば，風向によっては環流が再び現われることがある（図1.10）。

以上をまとめれば，南湖の平均的な湖流は，瀬田川の流量，風速および風向の影響を強く受け，とくに環流の形成ならびにその向きについては風の影響が著しいといえる。環流の存在は南湖内の物質の滞留に大きい効果を及ぼすと考えられ，それが風の影響を強く受けることま，南湖の水理を考えるうえでとくに注目すべき点であろう。

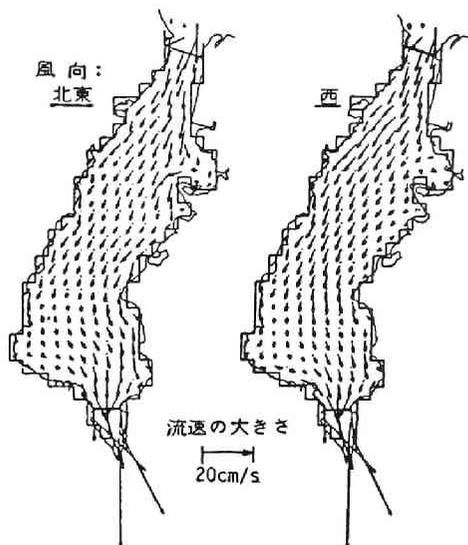


図1.9 出水時の湖流(1)
 (瀬田川流量: $580\text{m}^3/\text{s}$)
 (他は, 図1.8と同じ)

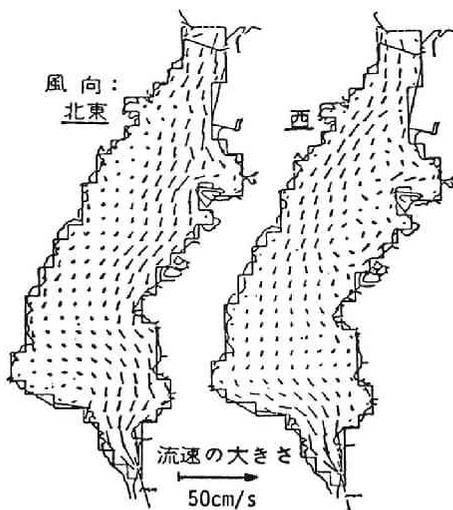


図1.10 出水時の湖流(2)
 (瀬田川流量: $690\text{m}^3/\text{s}$, 疏水取水流量: $22.9\text{m}^3/\text{s}$)
 (堅田の水位: TP 85.170m, 風速: $5\text{m}/\text{s}$)

図1.8において、琵琶湖大橋の断面では東岸側に南下する流れが現われることが多く、西岸側では逆に北上する流れが多くみられることが特徴として挙げられる。このような傾向は、琵琶湖大橋の橋脚に設置されている流速計による観測値にみられる傾向と定性的に一致するが、一方琵琶湖全域を対

象とした今里²⁾らの計算では上と逆の傾向が見い出されている。この付近の湖流は、南・北湖間の水の交換にとって重要な因子であるから、上述の相違については今後より詳細な研究が必要である。

南湖における湖流の平面的な分布の観測例として、南湖にほぼ一様に散布された漂流板を航空写真上で追跡して求められた結果¹³⁾の一例が図1.11である。この図にみられる環流は、図1.8の風向が南東～南西の場合と似た結果となっている。図1.11の観測が行われたときの瀬田川の流量は約700m³/sで、水理条件が図1.8とは全く異なるので直接的な比較研究はむずかしいが、図1.11の観測の前日には2～3m/sの南寄りの風が12時間にわたって続いており、その結果、図1.11のような環流が発生したものと図1.8および図1.10より推測することができよう。

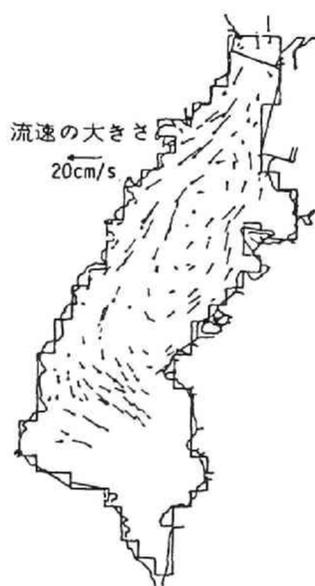


図1.11 漂流板の追跡より求められた湖流
(1976年9月17日午前9時～11時)

(3)非定常な条件下での湖流

以上の計算では、気象（風）および水理条件を定常としたいわば仮想的な状態が考えられており、実際の非定常な条件のもとでの湖流は検討されていなかった。このためつぎに、風および水理条件を観測値にしたがった時系列的に非定常な外的条件として与えた場合の数値計算を行い、湖流の観測値と比較する。

計算の対象としたのは、南湖内の数点において流速計が一時的に設置され、湖内の流速が観測された、1976年（昭和51年）11月10日1時から同年11月15日24時¹⁴⁾までである。気象および水理条件としてこの期間の堅田地点での風向、風速、堅田地点の水位および瀬田川の流量の観測値をそれぞれ与える（堅田地点の風が全湖に一様に吹くとしている）。

図1.12は、計算に用いた条件および琵琶湖大橋地点に設定されている流速計のうち東岸側上層の流速計による流速の観測値、ならびに琵琶湖大橋の断面での流量および三保ヶ崎での水位の計算値をすべてまとめて、上記の期間の一部について示したものである。琵琶湖大橋の断面の流量（流入流量）の計算値が11月11日の午後から4時間の周期で大きく変動しているのは、同日の午後から10 m/sに達する北風によって静振が発生したためと考えられる。琵琶湖大橋には当時7台の流速計が設置されており、そのうちのどの流速計が流入流量に最もよく対応するかには問題はあるが、大きい静振の発生しているときに流量の計算値と流速の観測値との変動の周期および位相がほぼ一致していることは注目すべきであろう。しかし、流速の観測値からみれば、静振が減衰しているとみられる11月13日にも、計算では相当の静振が発生していることは、(1)で述べた静振の減衰が計算上緩やかであることと考えると、ここでの計算方法がやや“揺れやすい”ことを示しているようであり、前述のように湖底および水表面における摩擦および非線型項の効果の検討がさらに必要であると思われる。

三保ヶ崎地点の水位は、堅田地点の水位と異なり、大きな変動を示しているが、これはこの地点が静振の腹にあたるためと考えられる。ただ、この地点の水位に関しては観測値が十分に得られていないため、計算値との比較は行えない。

図1.13は大きい静振の発生している11月12日14時から同18時までの湖流を30分ごとに示したもので、静振の位相に応じて特徴的な湖流が現われることが見られる。すなわち、流入流量が流出流量にほぼ等しい14時、16時および18時では、図1.8と同様な流況となっているのに対し、流入流量が大きい14時30分～15時30分では、強い南下する流れが東岸沿に発達しており、一方流入流量が負となる（北湖へ流入する）16時30分～17時30分では強い北上する流れが西岸沿に現われている。静振の位相に応じて南下する流れあるいは北上する流れが現われ、それらがそれぞれ東岸あるいは西岸に偏ることや、さらに大規模な静振の発生しているときの湖流は図1.8とは異なり風向に無関係な分布となることなどが、静振が発生したときの湖流の特徴としてまとめられる。

図1.14は、図1.6に示されるB1、B2およびB3の点に一時的に設置された流速計（ベルゲン流速計）による流速の観測値¹⁴⁾と同じ地点における流速の計算値とを、大きい静振が発生している11月12日を中心に、比較したものである。計算値の方が全体的にかなり滑らかな変化を示しているのに対し、観測値の方ではかなり高周波の変動までがとらえられている。この相違は、計算では風および水理条件が毎正時にしか（つまり1時間間隔にしか）与えられていないのに対し、実際にはこれらの条件にはもっと短い周期の変動が含まれているはずであることが一因となっているが、さらに計算では観測値にみられるほどの高周波成分まで再現することができないことを意味している。しかし、このような計算値と観測値の差は認められるものの、12日13時～13日0時のB1点の u や v およびB2点の v にみられる4時間の周期の変動は、上述の静振とともに生じたものとみられ、これが計算によってかなり正確にとらえられていることをみれば、この程度の周期を有する成分に関しては、観測値は計算値によって比較的良好に再現されるといえよう。なお、浜大津沖のB3点では、静振の発生時にもきわめて小さい流速しか認められず、とくに12日16時以降の u は計算値および観測値ともほぼ0に

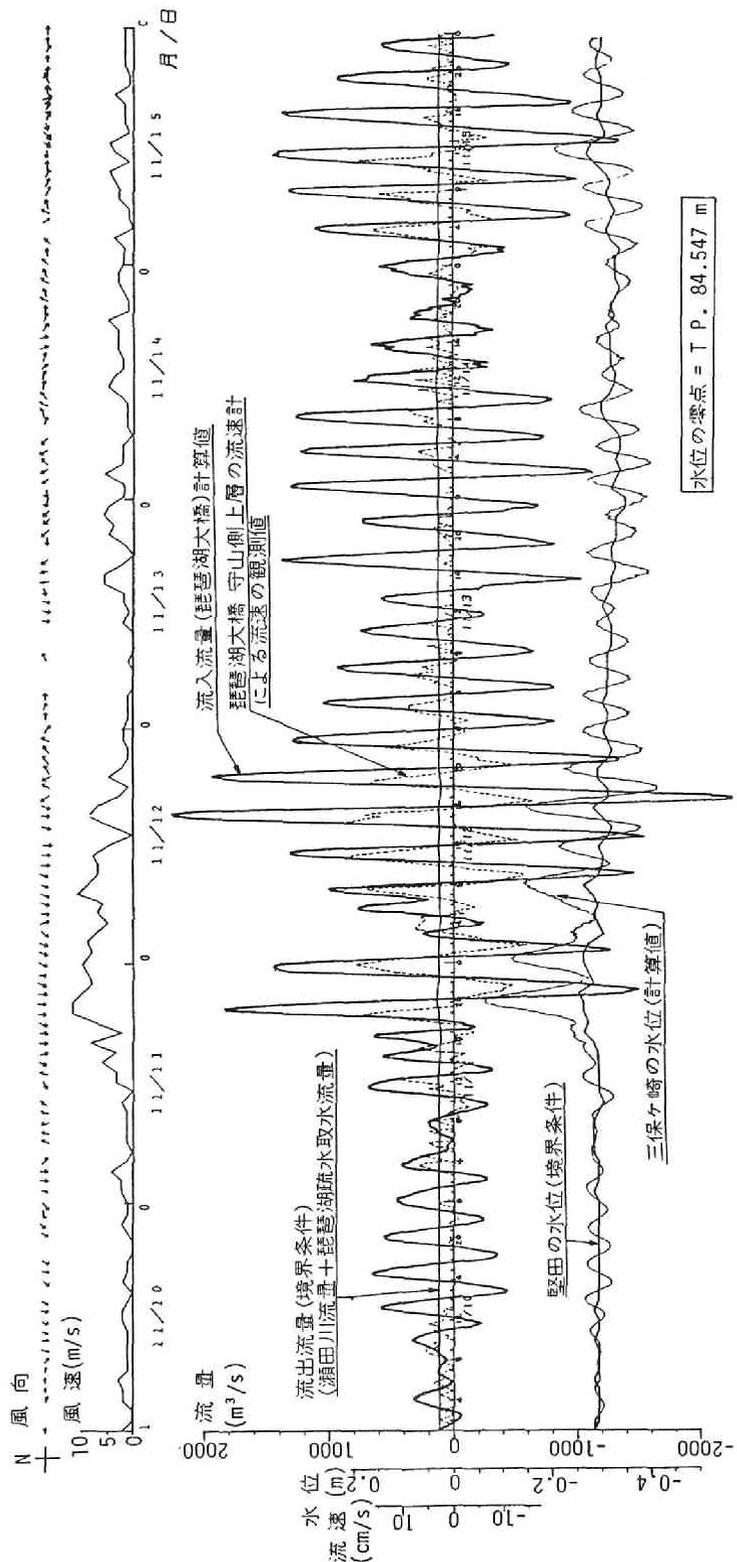


図1.12 非定常な条件下での計算結果
(1976年11月10日～11月15日)

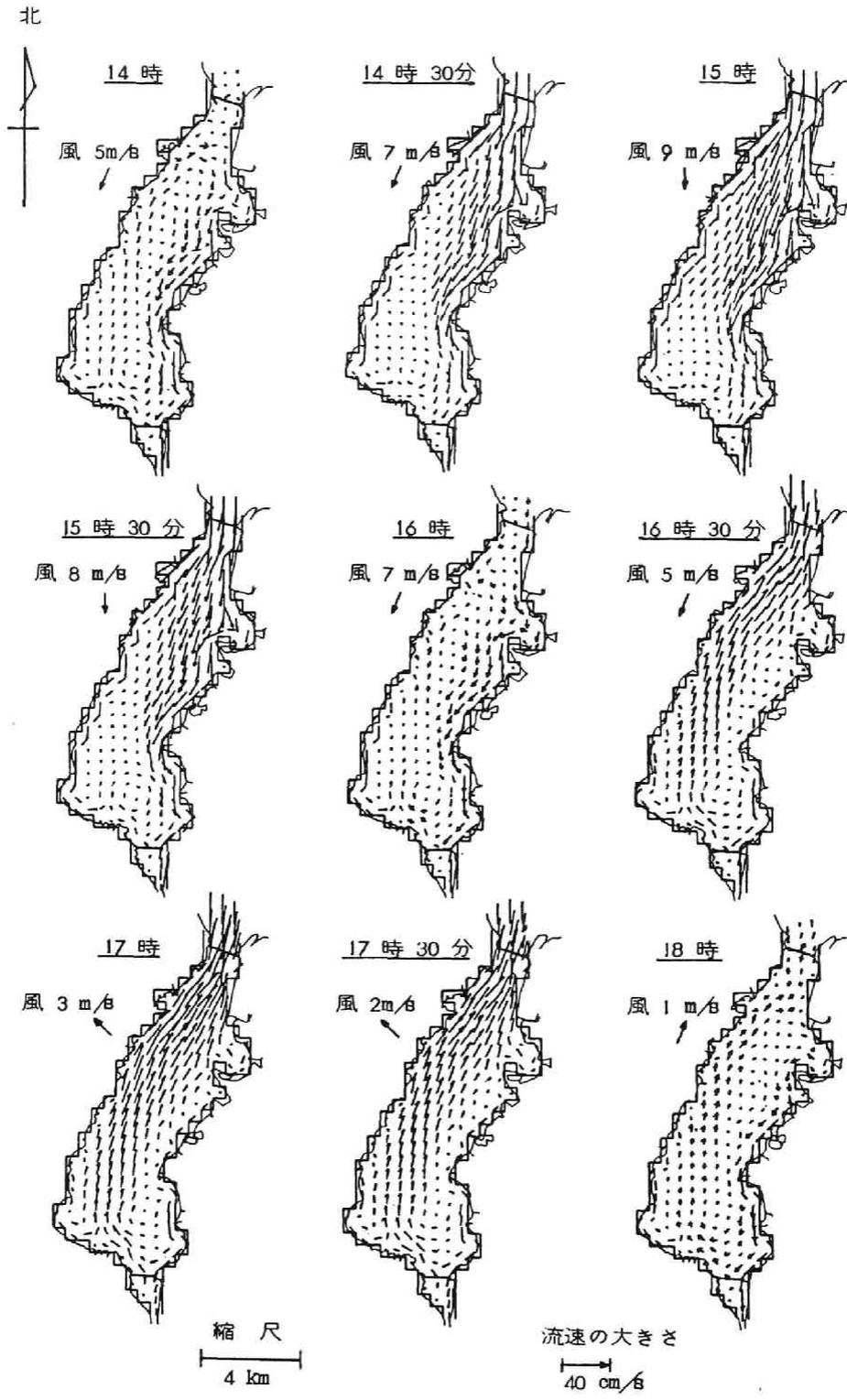


図1.13 静振発生時の湖流
(1976年11月12日)

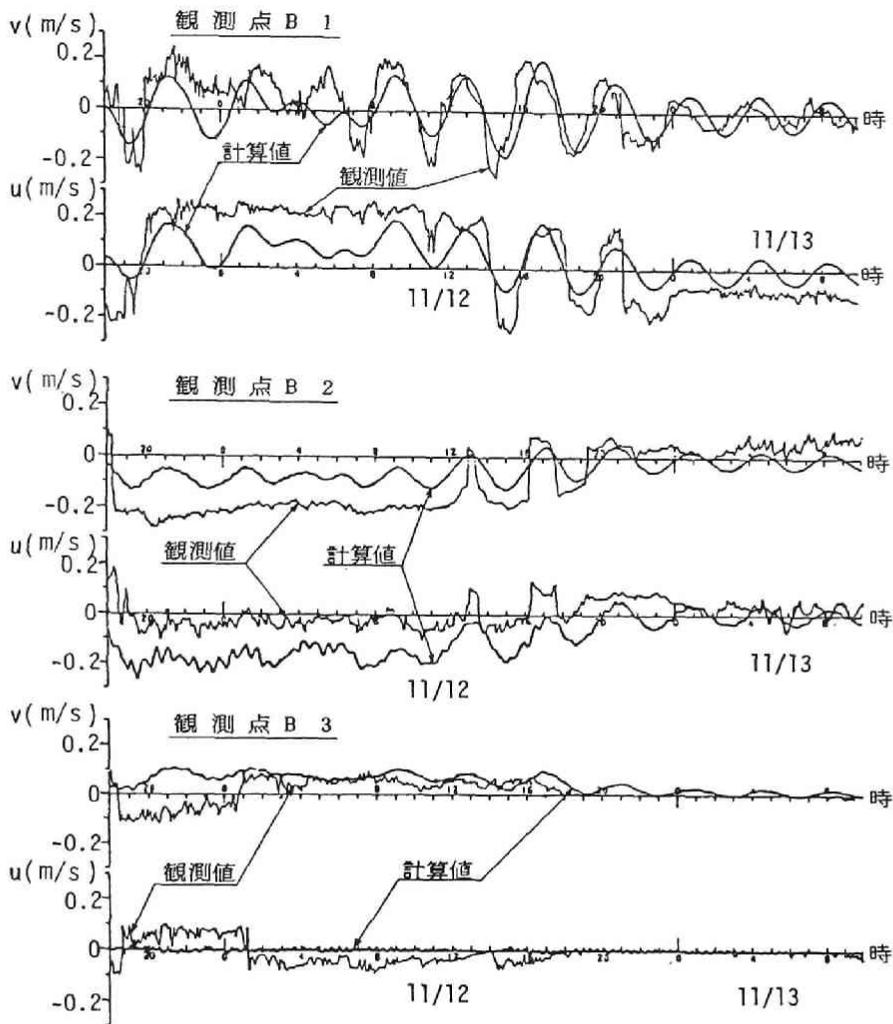


図1.14 ベルゲン流速計による観測値と計算値の比較
(1976年11月12日～13日)

なっている。これは、南湖の南岸が静振の腹に相当していることに加え、図1.8にもみられるように、この点が南下してきた流れが瀬田川へ流出する際の転向点にあたっているためと考えられる。

以上本節で述べてきたことから、計算値と観測値とは少なくとも定性的にかなり一致すると考えてよく、とくに南湖において卓越する4時間の周期の静振は計算によって明瞭に再現されており、この程度の時間スケールの現象は数値計算によって十分表現しうるといえることができる。

1.4 湖水の滞留と拡散

南湖における湖水の滞留と拡散の水理特性をみるため、図1.6に示されるN1～N4の点に拡散物

質としてのトレーサーを一様な濃度（1とする）で投入した場合を想定し、トレーサーの拡散の計算結果より、平面的な濃度分布の時間的变化、瀬田川、琵琶湖疏水および北湖へ流出する拡散物質のフラックスとその積算値および南湖内の滞留量の時間的变化を求めることにする。これは、北湖から流入した湖水が南湖内でどのように拡がり、瀬田川へ流出するか、すなわち北湖からの流入に対する南湖の応答をみるためのものである。

1.3で述べたように、湖流は瀬田川の流量、風速および風向に応じて複雑に変化するから、拡散の計算においても気象および水理条件をどのように設定するかが基本的な問題であるが、以下においては、流れの場は定常であるとし、図1.8のうち風向が南湖で比較的卓越している北東および西の場合の湖流を用いて予測計算を行う。

(1)濃度分布の変化

図1.15は風向が北東の場合について、トレーサー投入後の時間の経過に伴う濃度分布の変化を示したものである。図1.16は風向が西の場合の同様の結果である。

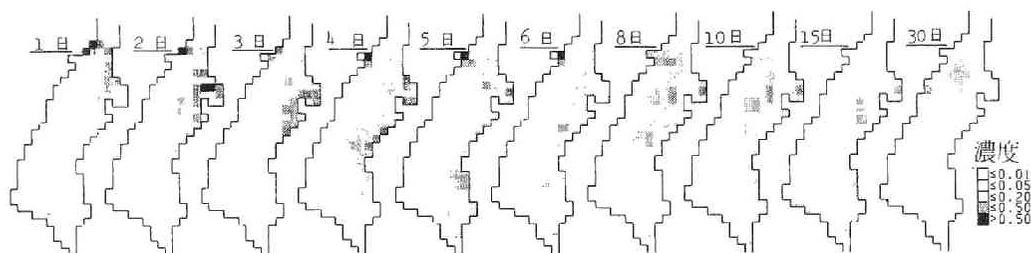


図1.15 濃度分布の時間的变化（風向：北東）

風向が北東の場合、湖流からも予想されるとおり、トレーサーは東岸に偏った強い南下流に伴われて流下しており、西岸の方にまでは達していないことや、時間が経過しても赤野井湾およびその沖で比較的高い濃度が続き、これが環流に捕捉された結果とみられることが特徴として挙げられよう。

風向が西の場合、南下する流れは西岸に偏ってはいるが、その強さは比較的小さいため、トレーサーは西岸に偏ることなく全域に拡がる傾向を示している。また、時間がかなり経過しても北端の近くで高い濃度を示す部分があることは環流による捕捉とみられる。

以上のように、トレーサーの分布には南下する流れによる移流と拡散の効果とが複合して現われ、風向が北東の場合のように南下する流れによる移流効果が比較的強いときと、風向が西の場合のように必ずしもそのようにはみなされなないときの両者があることが分る。さらに、これに環流による移流効果が重なり、図1.16では濃度の高い部分が環流に伴って移動している様子が数値計算の結果としてうかがえる。このように、南湖内でのトレーサーの分布は湖流の分布に応じて複雑な様相を呈しながら変化してゆくことが知られる。前述のように、湖流は風の影響を強く受けており、したがって、南湖における物質の拡散にも風が強く影響するということができよう。

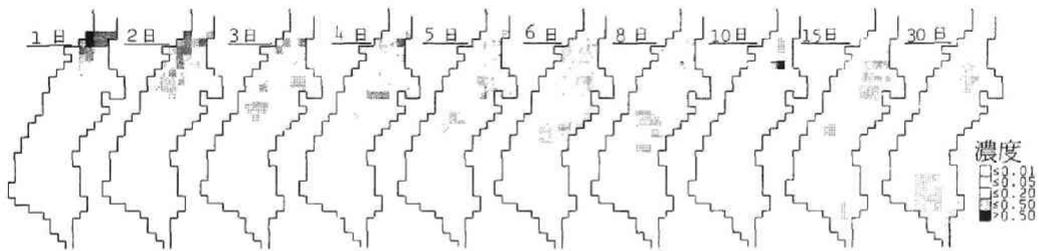


図1.16 濃度分布の時間的变化 (風向：西)

(2)滞留特性

図1.17(a)および(b)は、風向がそれぞれ北東および西の場合について、トレーサーの流出フラックスとその積算値および南湖内の滞留量の時間的变化を示したものである。いずれの図においても、上記の諸量は滞留量の初期値、つまり初期に投入されたトレーサーの総量で正規化されている。また、北湖への流出フラックスおよびその積算値は実際上0であったので省略されている。

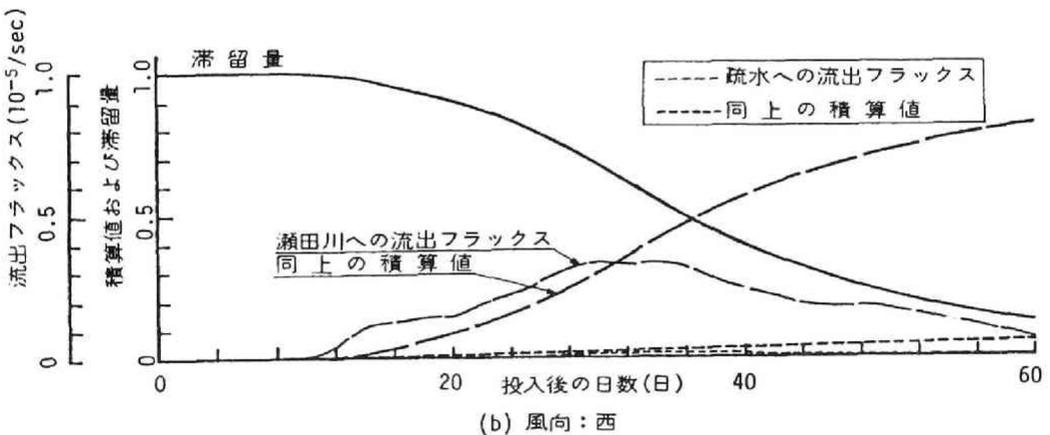
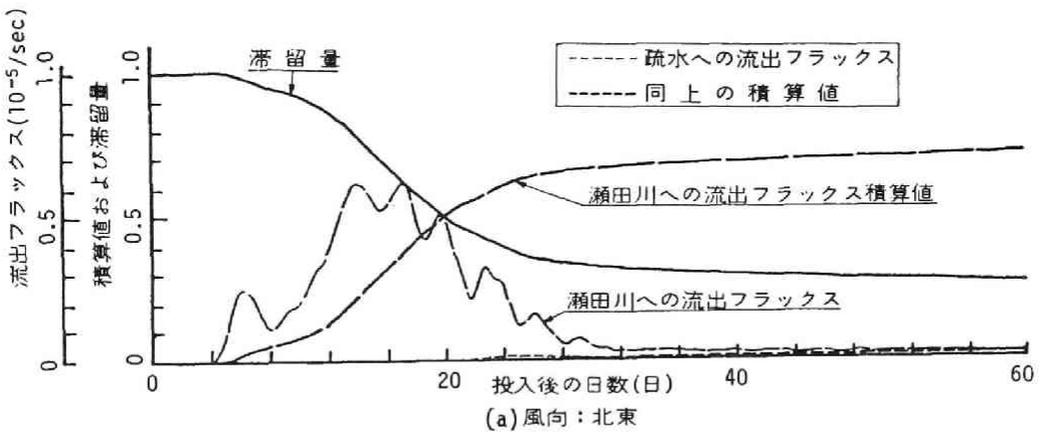


図1.17 滞留特性

この図より、まず風向が北東の場合には瀬田川への流出フラックスは投入後12~18日後*で最大値に達するが、その後の減少が速く、28日以降はほとんど0となっていることが見られる。つまり投入後30日程度以降では瀬田川への排出がほとんど行われず、その結果滞留量の減少もきわめて緩やかとなっている。図1.18(a)はこの場合の投入後50日目の濃度分布であるが、明らかに雄琴から堅田の沖合に高濃度の部分が残留しており、トレーサーが環流に捕捉されているとみなされる。

風向が西の場合、瀬田川への流出は風向が北東の場合ほど速くなく、投入後32日程度で最大値に達するが、その値も北東の場合ほど大きくない。しかし、その後も流出フラックスは急激に減少することはないので、滞留量は徐々にではあるが、北東の場合より速く減少している。図1.18(b)は、風向が西の場合の50日目の濃度分布を示したものであるが、図1.18(a)と比較すれば明らかなように、この場合にはトレーサーは南湖全域にかなり一様に分布しており、その結果瀬田川への排出が持続するものと考えられる。

図1.17は、南湖に拡散物質が投入されたときの南湖の応答を表わすと同時に、南湖における滞留特性（水そのものの滞留と考えることができる）を示すもので、それが上述したように、風向によってかなりの差異を示すことは、湖流の特性とともに南湖の水理を考えるときに重要な示唆を与えるものといえよう。

なお、いずれの場合も琵琶湖疏水への流出フラックスは瀬田川への流出フラックスに比べて相当小さく、滞留を考えるのにほとんど問題とならない程度となっている。

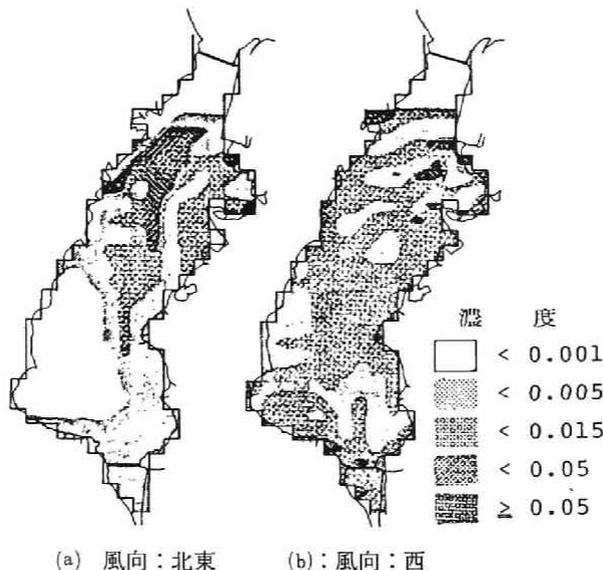


図1.18 50日目の濃度分布

*滞留の単純な時間スケールとして、南湖の貯水量をこの場合の流出流量で除した値、すなわち $2.18 \times 10^8 \text{ m}^3 / (100 \times 86400 \text{ m}^3/\text{日}) = 24.5 \text{ 日}$ が考えられる。

1.5 結語

本章では、浅水湖における湖流と拡散を二次元平面流れとして解析するときの二次元一層モデルの基礎式と数値計算のための計算式と方法について詳述するとともに、これを琵琶湖南湖に適用し、その水理学的な特性について考察した。

一次元流れの場合とは異なり、二次元一層モデルでは解析的に一般的な解を求めることはほとんどできない。つまり、個々の問題において解を求めるには数値計算の手法によらざるをえないといえる。本章では数値計算の方法として multi-level の staggered scheme を用いて差分式を構成した。琵琶湖南湖に適用した結果を要約すればつぎのようである。

(1)湖流については、南湖に卓越して現われる4時間周期の静振などの比較的長周期の変動に対しては計算値と観測値とは少なくとも定性的に一致するとみてよい結果が得られた。それらは以下のものである。

(i)湖内に卓越する4時間の周期の静振は計算によってよく再現されたが、その減衰は観測値より遅い。湖底および水面の摩擦および省略されている非線型項の効果がさらに検討されなければならないであろう。

(ii)南湖の湖流の分布は、風向と湖底地形によって特徴づけられる吹送流によって表わされる。風向に応じて時計回りあるいは反時計回りの環流が形成されるとともに、これに瀬田川の流量の影響が重なることが知られた。

(iii)南湖の北端の流量の計算値および南湖内の流速の計算値から、4時間程度以上の時間スケールの変動は計算によってよくとらえられることが分った。

(iv)南湖内の流速の計算値および観測値より、浜大津沖は静振の腹に相当し、静振が発生したときでも流速は小さい。

(2)拡散・滞留に関しては、観測値がほとんどないため、計算値との比較研究は行いえなかったが、風向が北東と西の場合の定常な湖流を用いた計算結果より、拡散物質の分布は風向によって顕著な差がみられ、環流の強弱による捕捉効果の違いが知られた。また、それに対応して南湖の応答を示す滞留特性も著しく異なることが知られた。これらの結果から、湖流および物質の拡散・滞留に対して、風が重要な因子であるということができよう。

以上の結果より、本章で展開された二次元一層モデルの数値計算法によって、浅水湖における静振などの比較的周期の長い運動に伴う湖流や、物質の拡散・滞留特性を解析することができるといえよう。

参考文献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 足立敏之: 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション, 京都大学防災研究所年報, 第21号B-2, 1978

- 2) 今里哲久, 金成誠一, 国司秀明: 琵琶湖の水の流動に関する数値実験的研究, 京都大学防災研究所年報, 第14号B, 1971
- 3) 村本嘉雄, 道上正規, 大西行雄, 大久保賢治: 琵琶湖南・北湖間の交流特性に関する研究, 京都大学防災研究所水質源研究センター研究報告, 第1号, 1981
- 4) 大久保賢治, 村本嘉雄, 久保田一: 琵琶湖南湖の湖流解析, 京都大学防災研究所年報, 第26号B-2, 1983
- 5) 富所五郎: 閉鎖水域における風成流の水理に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1984
- 6) 和田明, 角湯正剛: 瀬戸内海における流況の数値シミュレーション, 第22回海岸工学講演会論文集, 土木学会編, 1975
- 7) Masamori Miyazaki, Takeo Ueno and Sanae Unoki: Theoretical investigation to typhoon surge along the Japanese coast, The Oceanographical Magazine, Vol.13, 1962
- 8) 井上和也: 開水路流れの数値解析, 水工学シリーズ, 80-A-6, 土木学会水理委員会, 1980
- 9) 堀口孝男: 汚染物質拡散の数値解法について, 第16回海岸工学講演会講演集, 土木学会編, 1969
- 10) 建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所, 水資源開発公団琵琶湖開発事業建設部, 防災研究協会: 昭和52年度琵琶湖南湖の水理と数値予測に関する検討業務報告書, 1978
- 11) 岡本巖, 森川光郎: 密度分布より見た琵琶湖の湖流について, 陸水学誌, Vol.22, 1961
- 12) Csanady, G. T.: Hydrodynamics of large lakes, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol.7, 1975
- 13) 建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所, 水資源開発公団琵琶湖開発事業建設部: 昭和51年度琵琶湖南湖湖流航空写真撮影作業報告書, 1977
- 14) 建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所, 水資源開発公団琵琶湖開発事業建設部, 三洋水路測量株式会社: 琵琶湖南湖湖流定点観測作業報告書, 1977

第2章 氾濫原における洪水の挙動

2.1 概説

この章の研究においては、河川堤防の破堤に伴って堤内地に浸入する氾濫水、あるいはいわゆる氾濫原内の無堤部を浸入する洪水の挙動を、二次元平面流れとしてとらえ、前章で展開した二次元一層流れの数値計算モデルを用いて解析し、その結果について考察する。このような氾濫水の挙動の解析は、従来、内水による堤内地の湛水の解析におけるのと同様に、堤内地での水面は水平であると仮定して、堤内地の水位一湛水量曲線を用いる方法が採られることが多かったようである。しかし、この方法は湛水の初期や減水期において水面こう配が無視しえない場合に不適当であるだけでなく、周囲が堤防などで圍繞されているような水の運動に対して閉じられた領域にしか適用できないという致命的ともいえる問題点を残している。この方法においては明らかに対象領域全体についての水の連続式のみが考慮されているが、いま述べた問題点を改めるにはより細かな領域について連続式および運動方程式が適用されなければならないことはいうまでもない。このような方向の研究の一つとして、地形を考慮しながら対象領域を多数の要素に分割し、それぞれの要素の中では流れは一次的であるとして連続式および運動方程式を用いる解析法が、主として流出問題を取扱う分野で行われている。しかし、この方法は流出とは逆に水が浸入してくる氾濫水の解析法としてはいままでのところ用いられていないようである。

実際に洪水氾濫がおこる地形を考えると、対象領域が連続堤などにより堤内地と堤外地に明確に区別される場合と、有堤部と無堤部が混在し、このような区別ができない場合とがある。前者は比較的改修の進んだ河道部とその堤内地より構成される河川領域であり、氾濫が問題となるような場合には、河道の流れを洪水、堤内地に浸入した水を氾濫水として区別することが可能である。しかし、多くの河川で実際にみられるような有堤部と無堤部が混在する後者の場合では、水の動きからみれば堤内地および堤外地の区別は不可能であり、洪水と氾濫水を区別することもできない。したがって、本章においては用語が少し不統一になるが、とくに後者の場合を中心に取扱うことにし、対象領域全体を氾濫原と呼ぶことにする。その場合には河道は氾濫原内の比較的地盤の低い部分の水みちに相当する。

この研究においては、前述のように氾濫原における氾濫水の挙動に、1.1と同様の仮定を設け二次元一層モデルを適用して、数値計算を行うことにする^{1,2,3)}。まず、基礎式とその差分式について1.2と同様の展開を行うとともに、氾濫水の解析の場合に問題となる境界条件について、数値計算を複雑にしないという観点より、実用的な取扱い法について述べる。ついで、非線型項を省略した方法を由良川に適用した結果について述べ、本章の計算法が氾濫水の挙動に有効に適用されることを確かめ、さらに計算の安定上最も問題になる非線型項の取扱いについての詳細な考察を行う。最後に、連続堤によって堤内地と堤外地が区別される代表的な例として、淀川と旧巨椋池干拓地をとり上げ、堤内地の

氾濫水の挙動とともに河道の洪水の変形を検討し、また堤内地に存在する排水用の小河川を含めた仮想的な計算を行う。

2.2 基礎式と境界条件

(1)基礎式とその差分化

氾濫水の挙動を表わす三次元的な基礎式は (1.1) および (1.2) 式である。本章では二次元一層モデルを適用するから、そのための基礎式は、1.2(2)と同様にして導かれる。それらを再記すればつぎのようである。

連続式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

x 方向の運動量方程式：

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uM + \frac{\partial}{\partial y} vM = -gh \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x(b)}{\rho} \quad (2.2)$$

y 方向の運動量方程式：

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} uN + \frac{\partial}{\partial y} vN = -gh \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y(b)}{\rho} \quad (2.3)$$

ここに、記号は図1.3と同様である。上式においては、1,2とは異なり、わが国では氾濫原の拡がりはそのほど大きくないとして、Coriolis力は無視されている。また、風によって水表面に作用するせん断応力も考えないことにする。 $\tau_x(b)$ および $\tau_y(b)$ は底面において作用する x および y 方向のせん断応力であって、この場合にはManningの抵抗則を用いてつぎのように表すことにする。

$$\tau_x \text{ or } \tau_y(b)/\rho = gn^2 u \text{ or } v \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} \quad (2.4)$$

(2.1) ~ (2.3) 式を用いて氾濫水の挙動を数値計算する場合、まず問題になるのは、(2.2) および (2.3) 式の左辺第2, 3項 (移流項, 本章では非線型項と呼ぶ) の取扱いであり、非線型項の差分化の方法によっては計算上の不安定をしばしば招くことが知られている。2.1で述べたような氾濫原の場合、河道に相当する比較的地盤が低い部分に、地盤の高い部分が隣接することが多くなり、その場合には流速の場所的变化が大きく、非線型項の重要性が相対的に増加するので、この項を安定に計算することが必要とされる。しかし、非線型項の一般的な処理は、現在のところ未解明である¹⁾ので、本章では、氾濫水の流れにおいては破堤点の近くや上記のような地盤の高低差の著しい部分を除く大部分の領域で非線型項はそれほど大きくないとみなして、まずこの項を省略した場合の取扱いについて述べ、非線型項を含む計算は2.4以降で検討を加えることにする。

以上のように考えると、(2.2) および (2.3) 式から非線型項が省略され、これらは (1.8) および (1.9) 式と同様に書き換えられて、数値計算のための差分式が1.2と同様に導かれる。すなわち、

変数の平面的な配置を図2.1のようにとって、差分式を再び示せばつぎのようである。

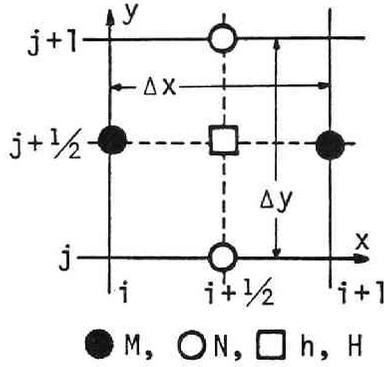


図2.1 変数の配置

x 方向の運動量方程式 (2.2) 式:

$$\frac{M_{i,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^n}{2\Delta t} = -g \frac{(h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1})(H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i-1/2,j+1/2}^{n+1})}{2\Delta x} - g n_{i,j+1/2}^2 \frac{(M_{i,j+1/2}^n + M_{i,j+1/2}^{n+2})\sqrt{(u_{i,j+1/2}^n)^2 + (v_{i,j+1/2}^n)^2}}{2[(h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1})/2]^{4/3}} \quad (2.5)$$

y 方向の運動量方程式 (2.3) 式:

$$\frac{N_{i+1/2,j}^{n+2} - N_{i+1/2,j}^n}{2\Delta t} = -g \frac{(h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1})(H_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - H_{i+1/2,j-1/2}^{n+1})}{2\Delta y} - g n_{i+1/2,j}^2 \frac{(N_{i+1/2,j}^n + N_{i+1/2,j}^{n+2})\sqrt{(u_{i+1/2,j}^n)^2 + (v_{i+1/2,j}^n)^2}}{2[(h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1})/2]^{4/3}} \quad (2.6)$$

連続式 (2.1) 式:

$$\frac{h_{i+1/2,j+1/2}^{n+2} - h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}}{2\Delta t} + \frac{M_{i+1,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^{n+2}}{\Delta x} + \frac{N_{i+1/2,j+1}^{n+2} - N_{i+1/2,j}^{n+2}}{\Delta y} = 0 \quad (2.7)$$

ここに、 Δx 、 Δy および Δt は、 x 、 y および t に関する差分格子の大きさであり、また、

$$u_{i,j+1/2}^n = 2M_{i,j+1/2}^n / (h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}) \quad (2.8)$$

$$v_{i,j+1/2}^n = (N_{i-1/2,j}^n + N_{i+1/2,j}^n + N_{i+1/2,j+1}^n + N_{i-1/2,j+1}^n) / 2(h_{i-1/2,j+1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}) \quad (2.9)$$

$$u_{i+1/2,j}^n = (M_{i,j-1/2}^n + M_{i+1,j-1/2}^n + M_{i+1,j+1/2}^n + M_{i,j+1/2}^n) / 2(h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}) \quad (2.10)$$

$$v_{i+1/2,j}^n = 2N_{i+1/2,j}^n / (h_{i+1/2,j-1/2}^{n+1} + h_{i+1/2,j+1/2}^{n+1}) \quad (2.11)$$

である。(2.5) および (2.6) 式においては、 M^{n+2} および N^{n+2} が未知量であり、また (2.7) 式においては h^{n+3} が未知量である。(2.5) および (2.6) 式の右辺の摩擦項にも未知量 M^{n+2} および N^{n+2} が含まれているのは、第1編4.4(3)で述べた摩擦項に基づく計算の不安定 (Vasiliev の不安定) を避けるためである。

(2.5) ~ (2.7) 式による計算は、つぎに述べる境界条件に関する判定を除けば、1.2と同様に進められる。すなわち、まず M^n 、 N^n および h^{n+1} が前回の計算結果あるいは初期値として既知であるとして、(2.5) および (2.6) 式より未知量 M^{n+2} および N^{n+2} が求められ、ついでこれらの値と (2.7) 式より h^{n+3} が計算される。

(2)地形を考慮した境界条件の設定

計算対象領域とその外側との境界、あるいは計算対象領域内に含まれる内部境界における計算はつぎのようにして行う。実際の計算においては、対象とする氾濫原を $\Delta x \times \Delta y$ の大きさの長方形の格子に分割するが、対象領域の境界に接する格子のさらに外側に同じ大きさの格子を考え、これを境界格子¹⁾と呼ぶことにする。境界格子においては、流量フラックス M および N ならびに水深はともにつねに0とされる。また、計算対象領域の内部の格子を一般格子¹⁾と呼ぶことにする。このように境界格子を考えたのは、境界に接する一般格子と、境界に接しない一般格子の計算をできるだけ一般的な計算法によって行うことを目的としたもので、計算のプログラムの簡略化に役立つものである。

(i)境界が山付堤などの山地である場合、これに直角な方向の流量フラックスを0とする。すなわち、ある一般格子 (i, j) (図2.1の $i\Delta x \sim (i+1)\Delta x$ および $j\Delta y \sim (j+1)\Delta y$ で囲まれた格子) の西側 (x の負の側) の格子が境界格子であれば $M_{i, j+1/2} = 0$ であるとし、また南側 (y の負の側) の格子が境界格子であれば $N_{i+1/2, j} = 0$ とする。

(ii)破堤点や河川の上・下流端あるいは排水機場など水の流入・出のある格子では、(i)の条件にかかわらず、与えられた、あるいは計算された流量に応じる流量フラックス M および / あるいは N を、流入・出の方向に分割して与える。また、河口などで水位が与えられている場合には境界格子において水位を規定する。これらの具体的な計算法は以下のようなものである。

- a) 流量ハイドログラフが与えられた場合：対象領域の上流端では洪水が流入するとして流量ハイドログラフが与えられることが多い。また、排水機場では定められた流量が対象領域から流出すると考えられる。このような場合には、これらの境界を構成する格子 (N_0 個とする) において、流入・出流量による水位の変化は、すべて等しいとするのが妥当であろう。この方法によれば、流入・出する流量 Q を N_0 等分して、これらの境界を構成する各格子に流入させるか、または各格子から流出させればよい。
- b) 水位—流量曲線が与えられた場合：対象領域の下流端では水位—流量曲線が課せられることが多い。この場合には、この境界を構成する格子の $(n+1)\Delta t$ での水位の平均値を求め、この水位と境界条件から求められる流量を $(n+2)\Delta t$ での流量と考え、これを上述のa)の場合と同様に各格子に分割すればよい。

c)水位ハイドログラフが与えられた場合：たとえば，対象領域の下流端が河口（海）である場合，この境界では一定，あるいは時間とともに変化する潮位が与えられよう。この場合には，この境界を構成する格子の外側の境界格子の水位が，境界条件として与えられた水位に等しいとする方法が考えられる。これは氾濫水の流出があっても境界の水位は変化しないとするものであるから，この方法を使うには，河口であればある程度海へ拡った部分を，この境界を構成する格子とする必要がある。

(iii)計算上の問題点として氾濫水の先端の問題がある。これを水理学的な立場から厳密に取扱うことはきわめてむずかしい問題であり，とくに摩擦の影響を考えに入れるとすれば，dam break waveの問題における Dressler⁵⁾の研究のような複雑な取扱いを，しかも二次元の場で行わなければならない。しかし一方，本研究では氾濫原における氾濫水の挙動を数値計算によって巨視的に追跡しようとしているから，氾濫水の全体の挙動に大きい影響をもつとは考えられない先端部の取扱いに複雑な方法を採用することは計算法全体からみれば，精粗のバランスを欠き，好ましい方法とはいえない。したがって，本章ではある微小な水深の基準値 ϵ （実際には $\epsilon=0.001\text{m}$ を採った）を想定し，つぎの方法でこの問題を処理することにした。

a)周辺の水位より地盤の高い格子では，前の時間ステップでその格子の水深が ϵ 以下になっていれば，流量フラックス（流入・流出とも）はないものとする。この方法によれば，氾濫水の先端が地盤の低い点から高い点へ慣性により浸入するという現象が生じないが，通常の氾濫水の計算ではこのことによる誤差はきわめて小さいと考えられる。

b)水深が ϵ 以下の格子から流出する流量フラックスが計算された場合には，この流量フラックスを0で置き換える。

c)計算された水深が負になった場合には，これを0で置き換える。

以上の方法によれば，水量の連続性が乱されるおそれがあるが，後述するいずれの計算例においても，対象領域内に流入した水量と流出した水量の差は，領域内に貯留された水量にほぼ等しく（最大で5%程度の差），計算上水量の連続性がおおむね満たされていると判断できる結果が得られた。

(iv)氾濫水の先端と並んで，もう一つの内部的な境界条件として，氾濫原内の各種の盛土構造物の取扱いがある。とくに，堤内地と堤外地が先述のように区別されない場合，河川堤防は氾濫原内に散在する盛土構造物とみなされるので，これによって氾濫水の浸入が遮られるかどうかをみる必要があるとされる。盛土の幅が， Δx および Δy に比べてかなり小さく，盛土が線状構造物とみなされる場合，盛土が含まれる一般格子の高さをたとえば盛土天端高に等しくとる方法は，盛土を過大に評価することになるとともに，線状構造物としての盛土を越流する流れが(2.5)式あるいは(2.6)式によっては計算できないという理由により適切な方法とはいえない。本章では線状構造物とみなされる盛土を一般格子の周囲に沿って配置し，つぎの計算法を適用する。

a)盛土を挟む一般格子の流れ，すなわち盛土を越流する流れには，第1編5.5で述べた本間公式⁶⁾(5.5)および(5.6)式を用いる。すなわち，たとえば格子点 (i, j) と $(i, j+1)$ の間に天端

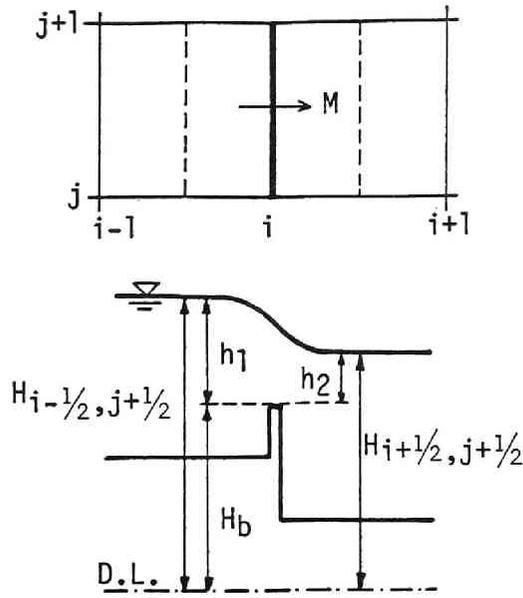


図2.2 盛土の取扱い

高 H_b の盛土があるとき、 $H_{i-1/2, j+1/2}^{n+1} > H_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}$ で、かつ $H_{i-1/2, j+1/2}^{n+1} > H_b$ であれば、 $h_1 = H_{i-1/2, j+1/2}^{n+1} - H_b$ 、 $h_2 = H_{i+1/2, j+1/2}^{n+1} - H_b$ 、として (図2.2)、

• $h_2/h_1 \leq 2/3$ (完全越流) のとき

$$M_{i, j+1/2}^{n+2} = \mu h_1 \sqrt{2gh_1} \quad (2.12)$$

• $h_2/h_1 > 2/3$ (もぐり越流) のとき

$$M_{i, j+1/2}^{n+2} = \mu' h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (2.13)$$

より $M_{i, j+1/2}^{n+2}$ が求められる (もちろん、このときには (2.5) 式は適用されない)。 $H_{i-1/2, j+1/2}^{n+1} < H_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}$ の場合には流れの向きが逆になるだけである。

全く同様にして、 (i, j) と $(i+1, j)$ の間に盛土がある場合にも、 $N_{i+1/2, j}^{n+2}$ が計算される (ただし、 μ および μ' には、第1編5.5と同じ値、すなわち0.35および0.91を用いる)。

b) 盛土の長さ方向の流れは無視する。2.5(2)で述べる氾濫原内の排水用の小河川の場合には長さ方向の流れは無視されないが、盛土では極端な場合を除いて上の仮定は妥当なものであろう。

(v) 盛土の場合と同様に、(2.5) あるいは (2.6) 式が適用できない内部的な境界として、流れが段落ちの状態になった場合がある。すなわち、地盤の高さの異なる2つの一般格子が隣接していて、しかも地盤の低い方の格子の水位が地盤の高い格子の地盤より低い場合 (図2.3)、段落ちが発生する。図2.3のように、格子点 (i, j) と $(i, j+1)$ の間が段落ちであるとき、これに直角方向の流れを (2.5) 式に代って次式で求める。

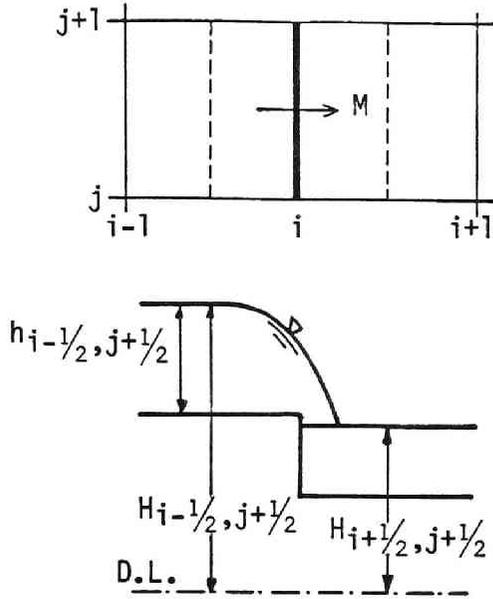


図2.3 段落ちの取扱い

$$M_{i,j+1/2}^{n+2} = C h_{i-1/2, j+1/2} \sqrt{g h_{i-1/2, j+1/2}} \quad (2.14)$$

ここに、 C は係数で、本章では簡単のため一定値 $C = (2/3)^{3/2} = 0.544$ を採った。格子点 (i, j) と $(i+1, j)$ の間が段落ちの場合にも同様にして $N_{i+1/2, j}^{n+2}$ が求められる。

2.3 二次元平面流れによる氾濫解析

本節においては、(2.5)～(2.7)式で構成される非線型項を省略した場合の数値計算法を、由良川の中流部³⁾(綾部市と福知山市の間)および同じ河川の中・下流部⁷⁾(綾部市から河口まで)に適用した例を挙げて、計算で必要とされる資料や条件について述べるとともに、計算結果について二、三の考察を行う。いずれの計算においても、対象領域を堤内地と堤外地に区別せずに氾濫原としてとらえ、河川堤防は盛土構造物が氾濫原に散在するとみなすことにする。

(1)由良川中流部への適用

(i)計算に必要な資料と条件

・対象領域：図2.4は対象領域の概況と地盤の高さの分布を示したものである。上流端は綾部堰の直上流であり、下流端は牧川との合流点より下流約1.2kmの断面(天津上地点)とする。下流端はかなり断面の狭い峡谷部につながっていて洪水の疏通能力が少ないため、対象領域は氾濫災害の常襲地であり、過去に幾度も大規模な湛水被害を受けている。このため現在、総合的な治水対策の検討が進められている箇所である。この対象領域の広さは37.5km²で、その内には綾部市および福知山市の主要部が含まれている。また、両市の間は主として水田や桑畑となっている。

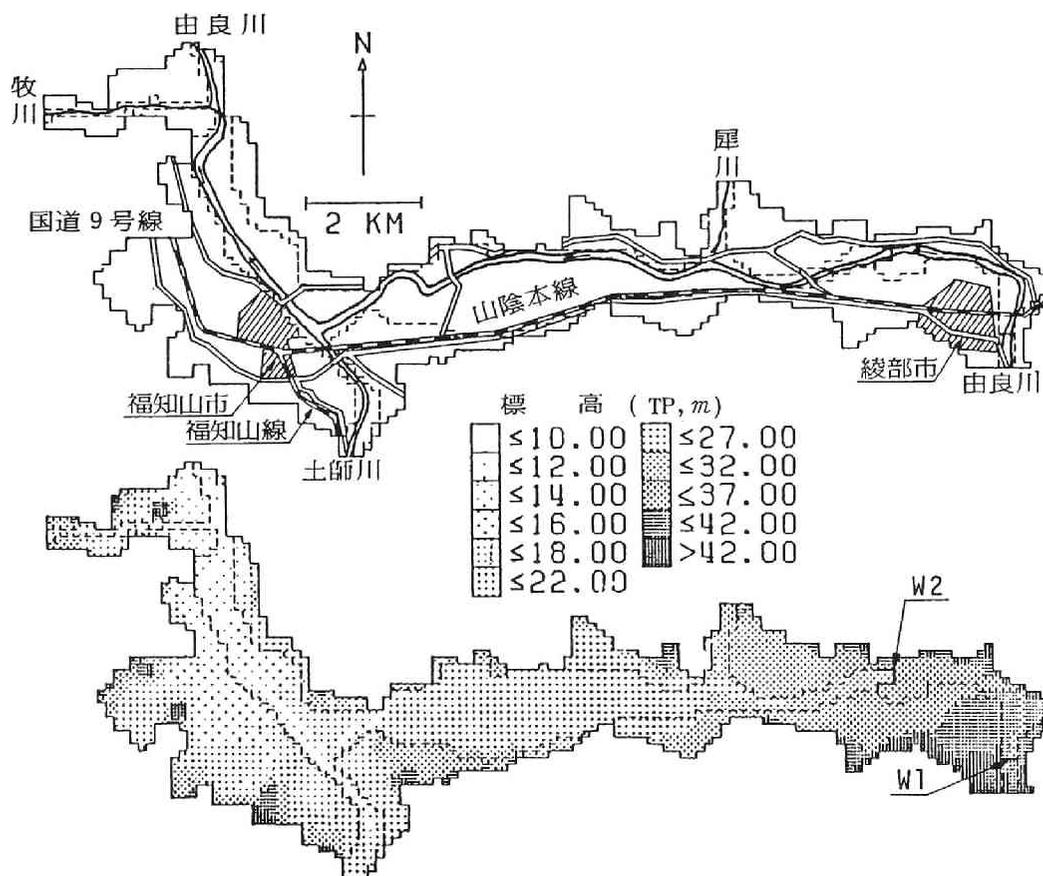


図2.4 由良川の中流部

・格子分割，地盤高：計算格子の大きさは，東西方向 (Δx) に142.5m，南北方向 (Δy) に116.25mである。したがって一般格子の数は約2300である（境界格子も含めると約2700）。地盤の高さの分布（図2.4(b)）において破線で示されているのは河川の堤防であるが，全部が完成しているのではなく，また一部には山付堤になっている部分もある。また，同図中の W1 および W2 は取水堰（綾部堰および栗村堰）である。本節の計算では堰の越流にも簡単のため (2.12) および (2.13) 式を適用している。

・対象洪水（上流端境界条件）：中規模の洪水である7220出水（1972年（昭和47年）9月に台風20号により発生）を用いる。由良川の上流端については観測された水位ハイドログラフから求められた流量ハイドログラフ⁸⁾，支川（犀川，土師川，牧川および宮川）の上流端については別の流出計算より求められた流量ハイドログラフ⁸⁾をそれぞれ与える（図2.5，ただし宮川の流量は，後述する(2)の計算で用いられる）。

・下流端境界条件：福知山地点（上記の下流端より4.6km上流）での水位—流量曲線と，7220出水についてピーク時のみの水位の観測記録のある天津上地点の水位の記録から推定されたつぎの水位—

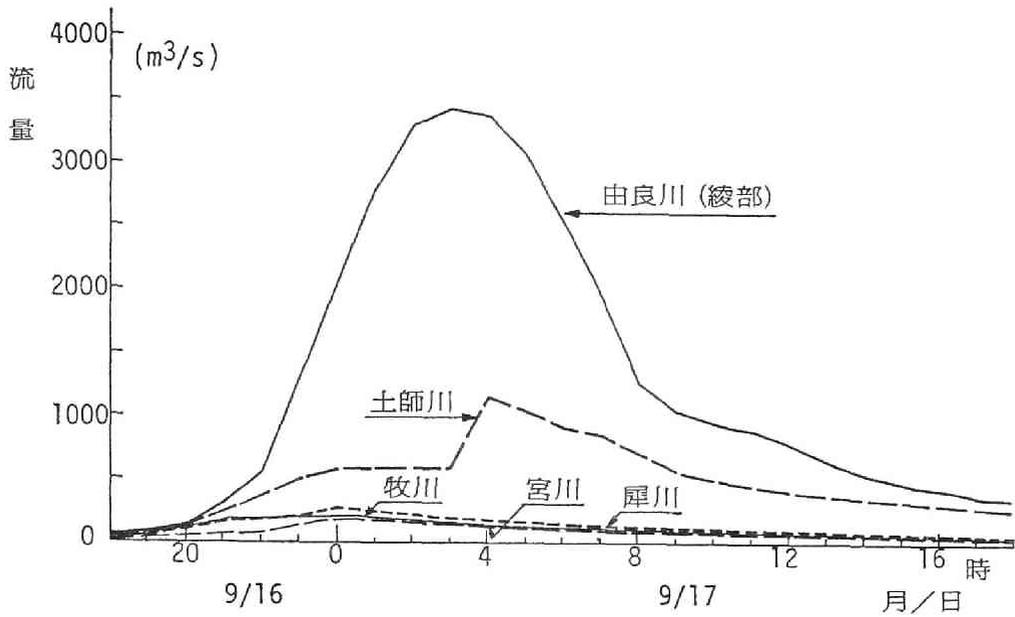


図2.5 7220出水の流量ハイドログラフ (1972年9月)

流量曲線を与える。

$$Q(\text{m}^3/\text{s}) = \begin{cases} 367.65H - 3522 & ; H \leq 12.3\text{m} \\ 473.65H - 4826 & ; H \leq 14.2 \\ 727.27H - 8427 & ; H \leq 15.3 \\ 850.0H - 10305 & ; H > 15.3 \end{cases} \quad (2.15)$$

ここに、 H は水位 (TP, m) である。

・粗度係数：氾濫原の粗度係数についての資料は皆無である。本節では、河道の粗度係数 $n = 0.035$ を対象領域の全域に適用することにする。

・堤防天端高：先述のように河川の堤防は氾濫原内の盛土とみなし、実測の堤防天端高を盛土の天端高として与える。ただし、鉄道や道路などの盛土は考慮していない。

・初期条件：計算の開始 (初期) を、出水の始まる1972年9月16日20時とし、このときの上流端流量を固定したまま、 $M = N = h = 0$ を出発値とする非定常な計算を、下流端から流出する流量が上流端に流入する流量の和 (本川と支川の和) に等しくなったとみなされるまで、(2.5) ~ (2.7) 式に従って進め、計算上実現された定常状態を初期条件とする。

・計算対象時間：上記の初期の状態から、出水が低減しきる9月17日19時までの計23時間をとる。

・計算時間間隔：(2.5) ~ (2.7) 式で示される二次元一層モデルの安定条件 (必要条件) は、基本的には一次元の場合と同様に進められるはずであるが、現在までのところあまり一般的には論じら

れていない。これは変数の数が増加して取扱いが複雑になるためではないと思われる。しかし、一次元流れの場合と同様のC.F.L. 条件 (1.18) 式、すなわち、

$$\Delta t < \min(\Delta x, \Delta y) / \sqrt{2gh_{\max}} \quad (2.16)$$

が得られることは水理学的な考察より明らかである。氾濫水の場合、流速 u および v が氾濫水の先端ではある程度の大きさを持つと考えられるので、その影響も考慮した次式が安定性の必要条件であろう (3.1, 図3.4参照)。

$$\Delta t < \min(\Delta x, \Delta y) / |(u \text{ or } v) \pm \sqrt{gh}| \quad (2.17)$$

ところが、いくつかの試算を行ってみたところ、(2.17) 式の制約よりさらに小さな Δt でなければ安定な解が得られないことが経験的に知られた。本項ではこれらを考慮して $\Delta t = 1.25$ 秒 ($\min(\Delta x, \Delta y) / \Delta t \approx 90$ m/s) を採ることとする。

(ii) 計算結果

図2.6は計算結果より流量フラックスおよび水深の分布を示し、それらの時間的変化をみたもので、その特徴をまとめるとつぎのようである。

初期 (9月16日20時, 図2.6(a)) では、本川および支川から流入する流量はいずれもまだそれほど大きくなっていないので、平水時に河道とみられる部分にのみ流れが現われており、氾濫は、地盤が相対的に低い犀川の本川との合流点より上流の左岸側および本川の下流端近くの右岸に少し生じているだけである。

計算開始後4時間 (17日0時, 図2.6(b)) では、本川の流量の増加により氾濫が生じている。すなわち、綾部市の北西部 (本川の左岸側)、犀川と本川に囲まれた部分、綾部市と福知山市の間の平水時には河道とみられない部分および下流端近くの牧川との合流点の近くで氾濫がみられる。とくに牧川との合流点では水深が相当大きくなっており、また流れの方向も部分的に上流向きが現われているように、下流端および牧川の合流点からの堰上げの影響が強いことがうかがわれる。

本川の流入流量が最大となる17日4時 (図2.6(c)) では、当然ながら河道とみられる部分の流量が増加するとともに、氾濫している部分も拡大している。河道とみられる部分での水深は下流に近づくにしたがって、5 m以上に達する箇所が多くなっている。

対象領域内の氾濫水の水量がほぼ最大となっている17日6時 (図2.6(d)) では、氾濫している部分は一層広がっており、とくに支川との合流点での氾濫が目立っている。しかし、綾部市および福知山市の主要部は比較的高い堤防で防御されているため、この時期においても氾濫は及んでいない。

減水が進んでいる17日13時 (図2.6(e)) では、氾濫している部分はかなり減少しており、減水の過程が表わされている。とくに、綾部市北西部および犀川と本川に囲まれた部分の減水が著しい。しかし、その速さは、流入流量のハイドログラフから予想されるとおり、浸水時よりはるかに緩やかである。

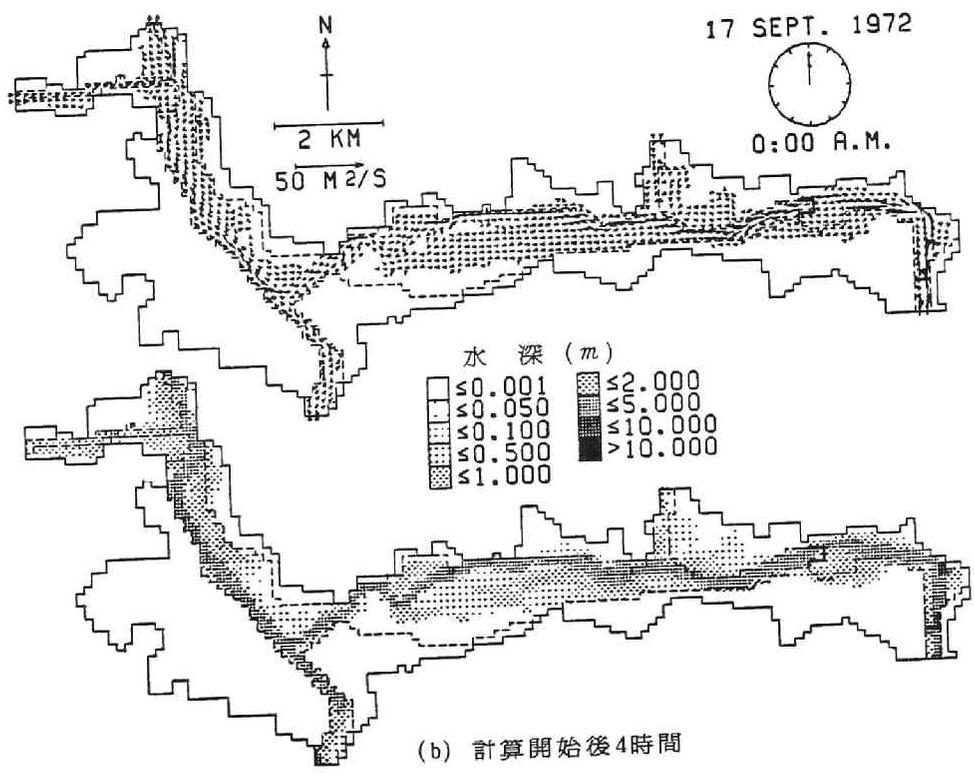
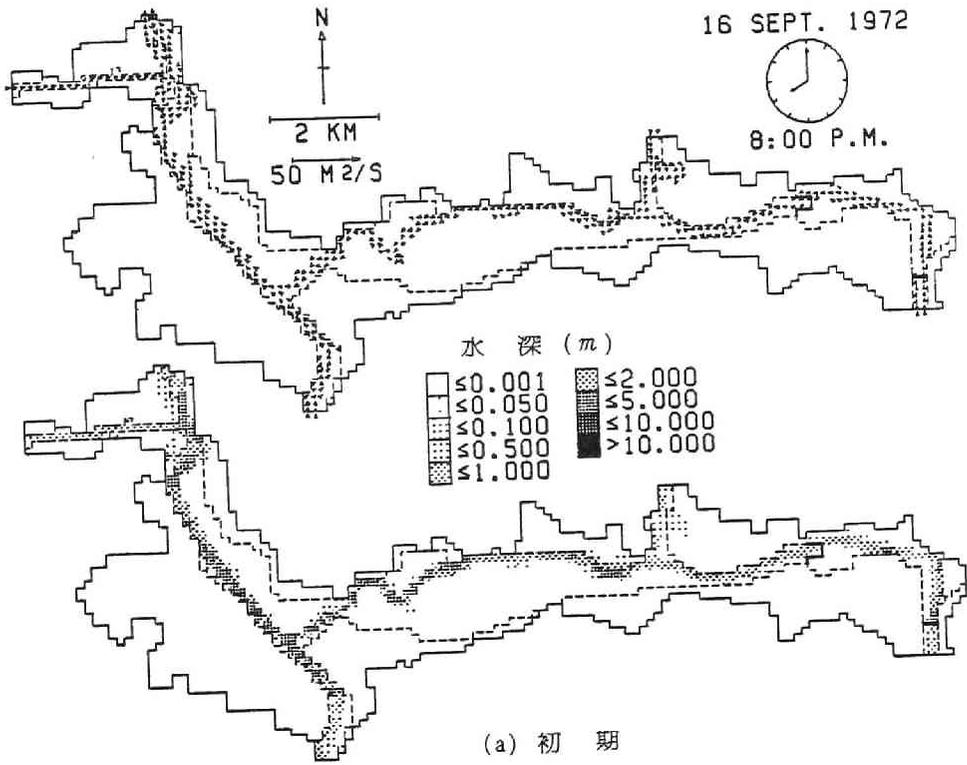


図2.6 由良川中流部の氾濫の計算結果

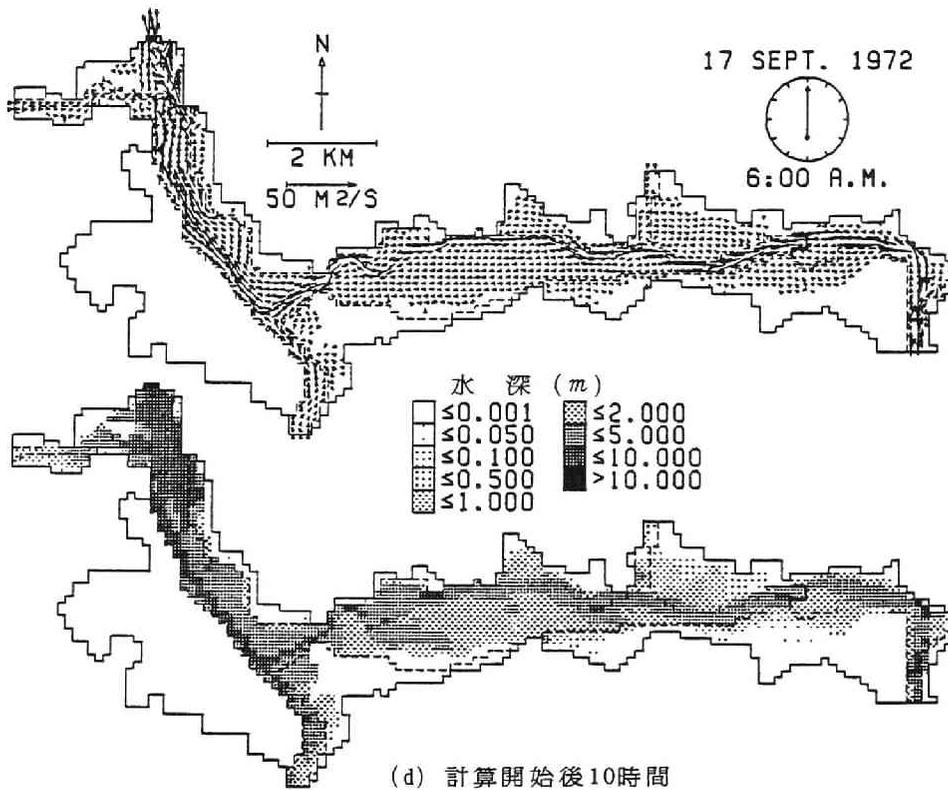
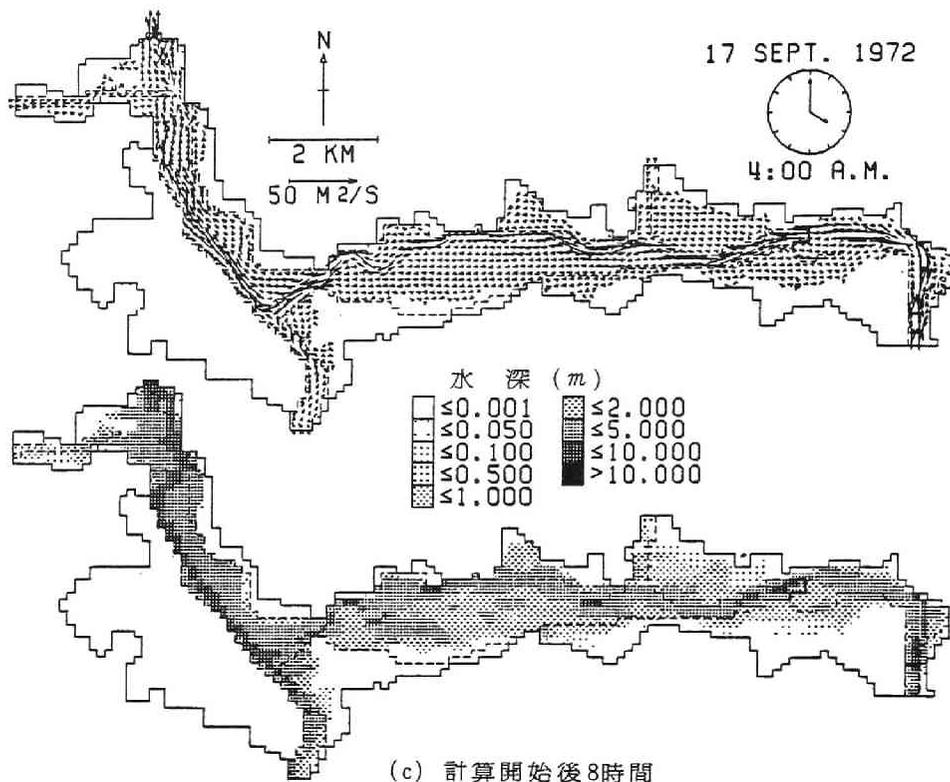


図2.6 由良川中流部の氾濫の計算結果

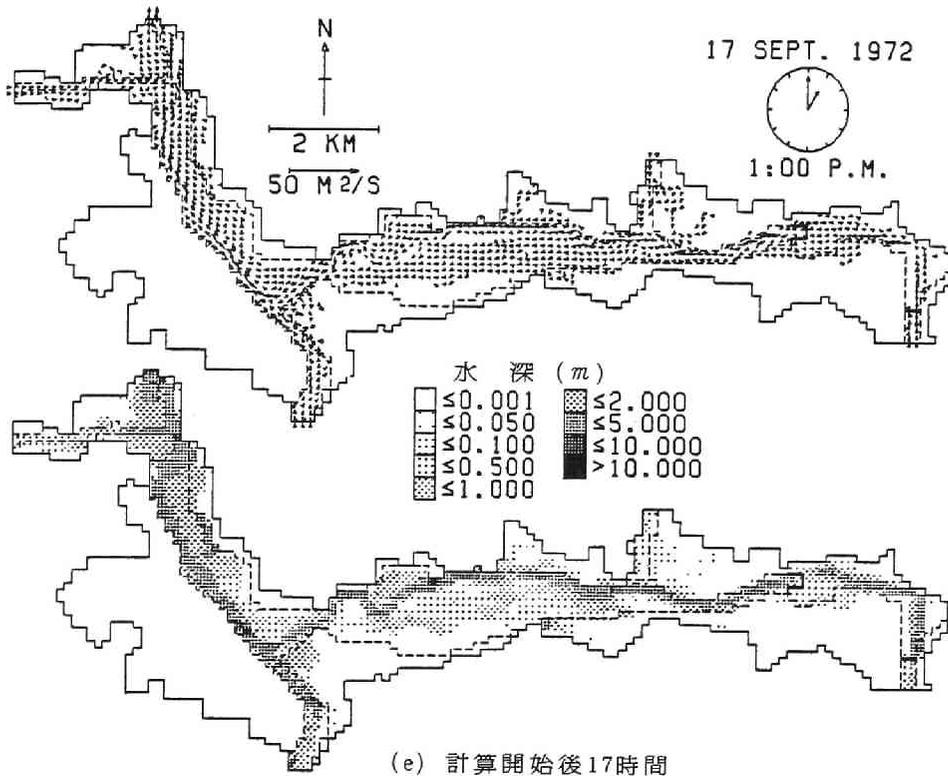


図2.6 由良川中流部の氾濫の計算結果

以上のような計算結果の特徴をみれば、2.2で展開された二次元一層モデルによって、浸水期、湛水期および減水期という氾濫の全過程を通じて、氾濫水の挙動の追跡が可能ということができよう。また、この計算例のような、対象領域において河道（堤外地）が連続堤によって堤内地と区別されない場合には、対象領域全体を一つの氾濫原とみなす方法が有効で実際的なことが知られる。

この追跡計算と、対象とした洪水氾濫との直接的な比較は示すことができなかったが、計算結果を技術担当者や地元の関係者に示したところ、よく一致しているとの証言が得られている。

(2)由良川中・下流部への適用

前項と同様の計算を対象領域をさらに拡げ河口までを含めて行う。これは下流端を海にすることにより下流端の境界条件を、(2.15)式のような水位—流量曲線に代って、外潮位で与えるためである。

対象領域は、由良川の綾部市から河口（由良）に至る河川延長にして約50kmの区間である（図2.7参照）。上流端は綾部堰の直上流であり、下流端は河口よりさらに約1km沖へ張り出した線としている。この対象領域の広さは約64km²で、福知山市より下流では河道幅が比較的狭い部分が河口まで続いている。格子分割は(1)の計算の同じであり、一般格子の総数は約3900である（境界格子を含めると約4900）。対象洪水は(1)の計算と同じ7220出水で、本川および各支川の上流端における流入流量の hidrograph は図2.5に示されている。下流端の境界条件には、満潮時の潮位である TP 0.390m を、日本海の潮位変動は小さいため、時間的に変化しない河口潮位として与える。その他の条件は(1)の計算

と同じであるので省略する。

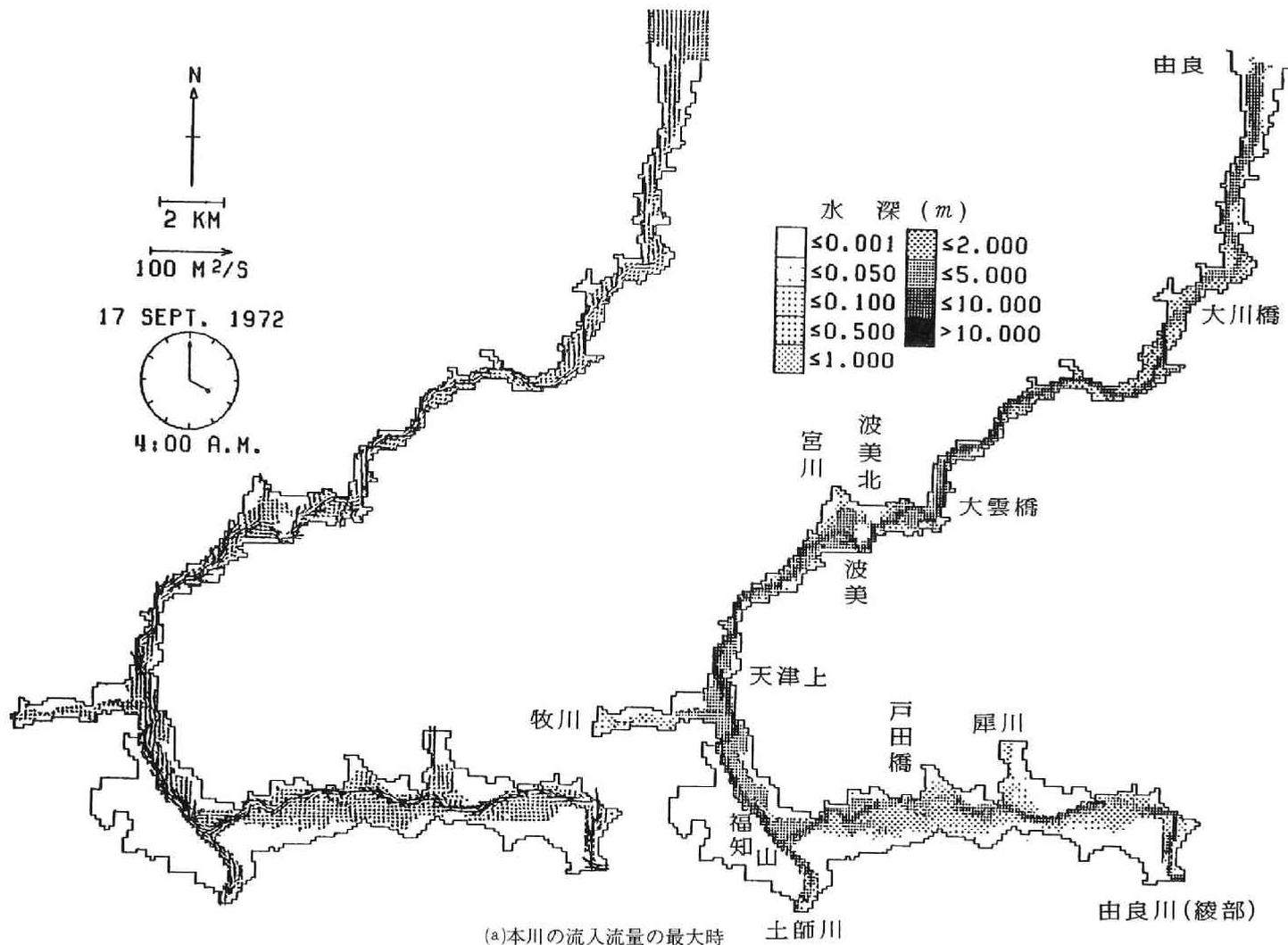
図2.7は流量フラックスおよび水深の分布を示したものである。本川の流入流量が最大となる17日4時の結果(図2.7(a))を、(1)の同時刻における結果(図2.6(c))と比較すると、福知山市より上流についてはほぼ同様であり、綾部市との間で相当広い範囲にわたって氾濫がみられるが、牧川との合流点の近くでは流量フラックスの分布に少しの差が現われている(この違いについては後述する)。また、福知山市より下流では、大江町河守地区(宮川との合流点の近く)において、かなり広い範囲にわたって氾濫している状況がみられる。この河守地区に対しては、様々な改修事業計画が考えられているが、そのうちの一部については2.4で検討を行う。

図2.7(b)は対象領域内の氾濫水の水量が最大になっている17日7時の結果である。このときには洪水の主要部はすでに福知山市より下流の河道幅の狭い部分に到達しており、上流端に近い綾部市では徐々に減水が始まっている。また、水深が5m以上で10m以下の区間が、河口に近い大川橋地点から天津上地点の近くまで達しており、かなり扁平な水面形状を持っていることがうかがわれる。

図2.7(c)は減水が進んだとき(17日15時)の結果で、とくに綾部市と福知山市の間では氾濫はほとんど消滅している。洪水の水深の大きい部分は、図2.7(b)より少し下流に移動しているが、かなり長い区間にわたっており、扁平な水面形状であることは図2.7(b)と同様である。また、河守地区ではこの時間においてもあまり減水せず、湛水が長期にわたることが予想される。

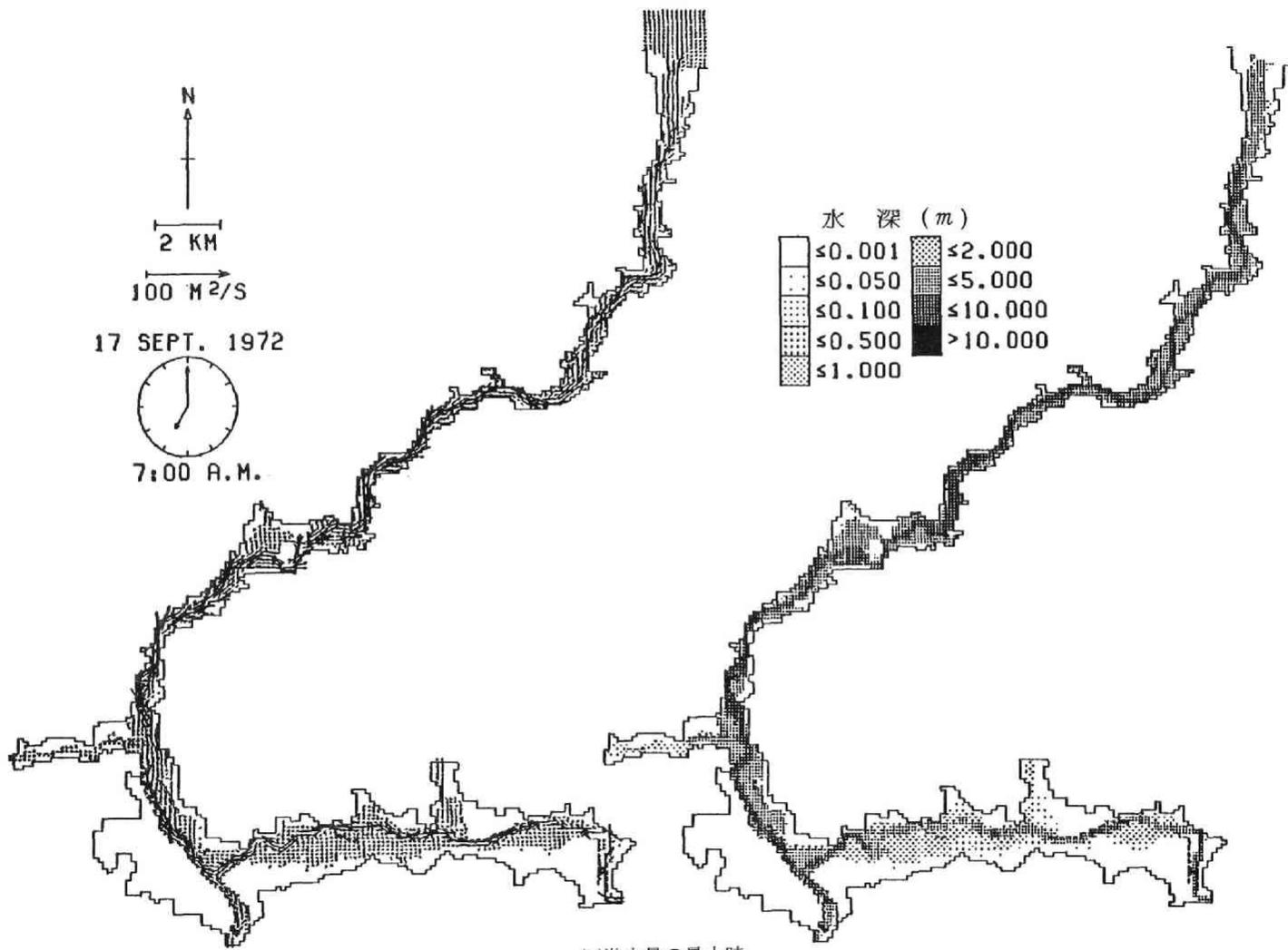
図2.8は、ここでの計算(2)の計算、図2.7)結果より、(1)の計算(図2.6)で下流端とされていた天津上地点における水位と流量の履歴をみたもので、比較のため(1)の計算で下流端境界条件とされた(2.15)式も示されている。この図からみると(2)の計算では、天津上地点において水位と流量の履歴は明確なループを描くことや、(2.15)式と比較すれば流量が大きいとき(1000m³/s程度以上のとき)同じ水位に対して大きい流量が現われることなどが知られる。(1)の計算と(2)の計算の間でみられる牧川の合流点近く(天津上地点の少し上流)の流量フラックスの分布の差は、(2)の計算では天津上地点でループを描く水位と流量の関係が、(1)の計算では(2.15)式のような水位—流量曲線にまとめられており、さらにその水位—流量曲線の示す疏通能力が(2)の計算に比べてかなり小さく評価されているため、(1)の計算では下流端からのせき上げが強く現われ、洪水の疏通が妨げられた結果と考えることができよう。また、(2)の計算で水位と流量が図2.8のようなループを描くことは、この地点が水位—流量曲線という境界条件を課す下流端としてあまり好ましい点とはいえないことを示している。

図2.9は、図2.7(a)中に示される各地点の流量ハイドログラフを求めた結果である。河守地区の下流の波美地点では流れが2つに分岐するため他と異なったハイドログラフとなっているが、それより下流では一次元的な解析法で一般的にいわれている最大流量の減衰やハイドログラフの変形(下流に伝わるにしたがい、上昇期の増加率がより大きくなり、下降期の減少率がより緩やかになるという特徴)がよく現われている。第1編第4章で述べたような一次元流れとしての計算はこの場合行われていないが、二次元の計算結果を、ハイドログラフのような一次元的な形でみれば、上記の減衰や変形が再現される点が注目される。図2.8でみられた水位と流量の関係がループを描くことについても同



(a)本川の流入流量の最大時

図2.7 由良川中・下流部の氾濫の計算結果



(b) 湛水量の最大時

図2.7 由良川中・下流部の氾濫の計算結果

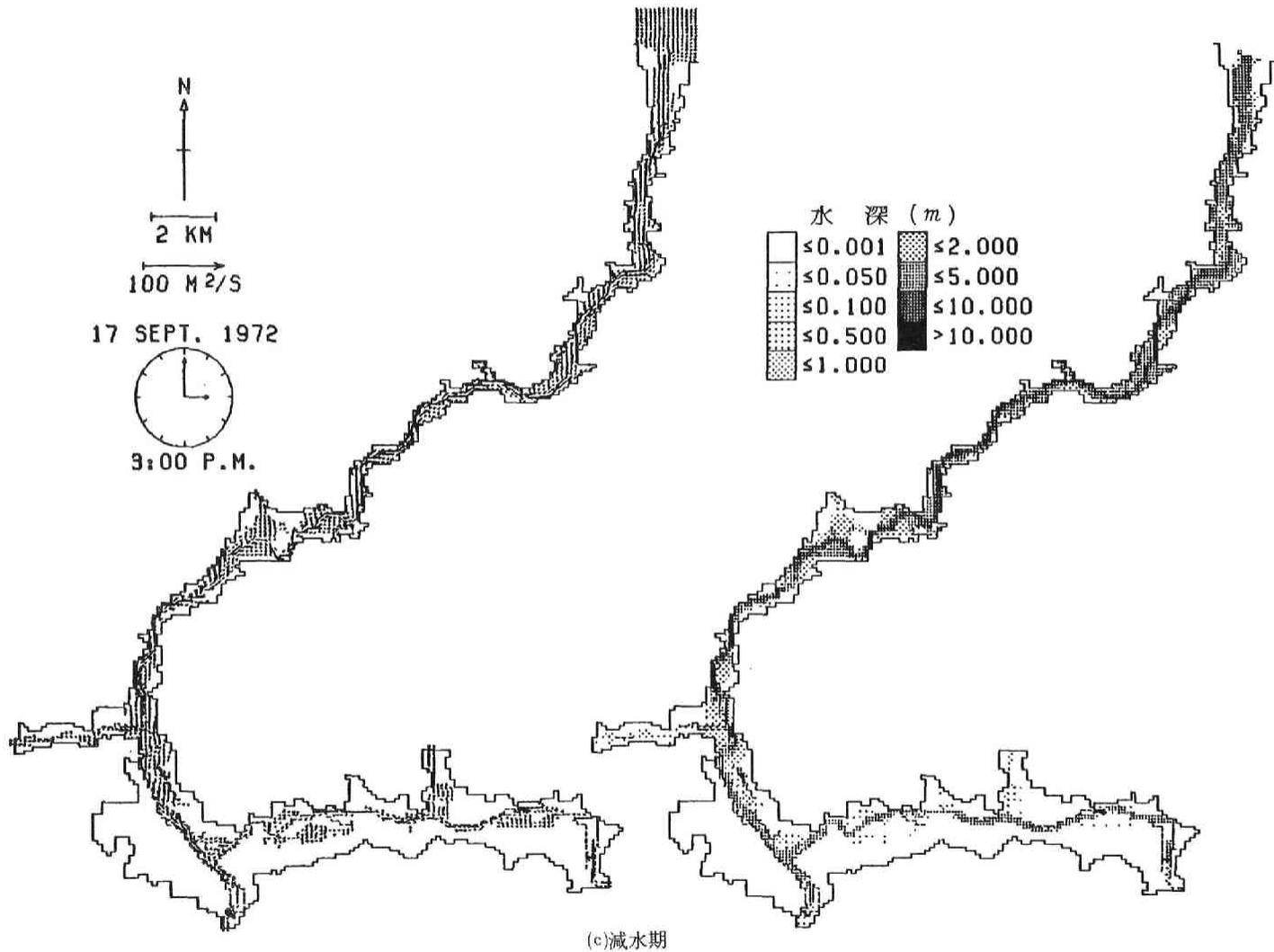


図2.7 由良川中・下流部の氾濫の計算結果

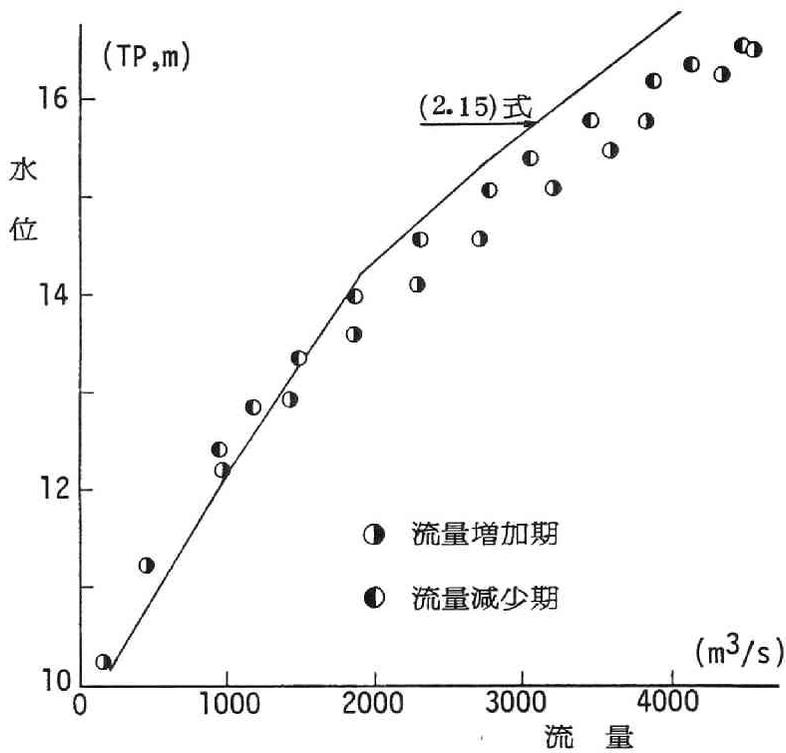


図2.8 天津上地点の水位と流量

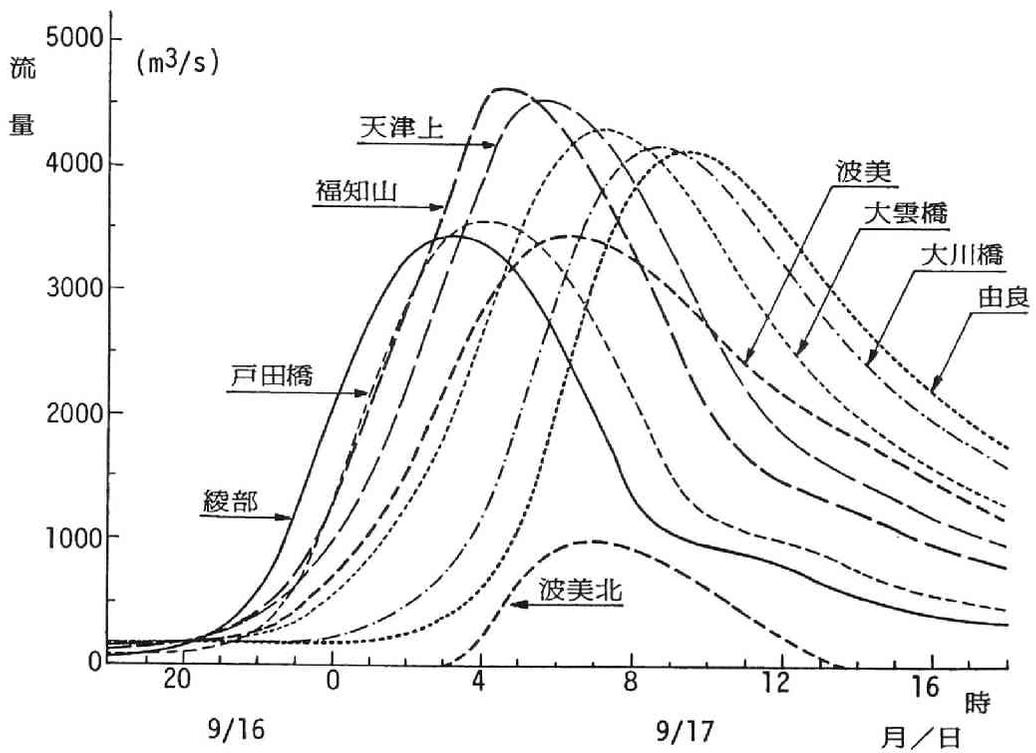


図2.9 各地点の流量ハイドログラフ

様のことがいえる。これらのことから、2.2で展開された二次元一層モデルによって、流れの一次的な特性は十分にとらえられうるということができると同時に、ここでの二次元一層モデルの有効性・有用性が確められたと考えられる。

2.4 非線型項を考慮した氾濫解析

前節の結果により、2.2で述べた二次元一層モデルによって氾濫水の挙動の追跡が可能なことが知られた。この節では、計算上不安定などの問題を起しやすいとしてこれまで省略されていた非線型項の差分化について考察する^{9,10)}。しかし、この問題は2.1で述べたように一般的な形では未解決であり、したがって理論的な面からだけでは扱うことはできないので、本節では数値計算を繰り返しながら試行錯誤的に検討を行うことにする。

(1)一次元流れにおける非線型項の差分化

問題を単純にするため、つぎの一次元の移流の方程式を考える。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u_0 \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

ここに、 u_0 は一定の流速である*。

(i)中央差分を採った場合：簡単な差分式として、つぎの中央差分を考える。

$$\frac{M_i^{n+2} - M_i^n}{2\Delta t} + u_0 \frac{(M_{i+1}^n + M_i^n) - (M_i^n + M_{i-1}^n)}{2\Delta x} = 0 \quad (2.19)$$

しかし、(2.19)式は第1編4.2で述べた(4.6)式に相当する差分式であり、不安定であることは前に導いたとおりである。いま、(2.19)式の場合これを未知数 M_i^{n+2} について解けば、次式が得られる。

$$M_i^{n+2} = M_i^n - \frac{u_0 \Delta t}{\Delta x} (M_{i+1}^n - M_{i-1}^n) \quad (2.20)$$

ここで $M_i^n = \hat{M}^n e^{ikx}$ と置いて、(2.20)式の増幅因子 ν を求めると、

$$\nu = 1 - i(u_0 \Delta t / \Delta x) \sin k \Delta x \quad (2.21)$$

である。明らかに、 $|\nu|^2 = 1 + (u_0 \Delta t / \Delta x)^2 \sin^2 k \Delta x \geq 1$ であるから、結局(2.19)式は上述のように、不安定な差分式であることが知られる。

(ii)上流側差分をとった場合：4.2で述べたように、(2.18)式の x 方向の差分において、上流側差分をとれば特性曲線の考え方が活かされた安定な差分式が得られる。すなわち、 $u_0 > 0$ とするとき、

$$\frac{M_i^{n+2} - M_i^n}{2\Delta t} + u_0 \frac{M_i^n - M_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.22)$$

*問題が線型であるので、 $u_0 \partial M / \partial x$ の項は非線型項というより、移流項と呼ぶのが適切である。

である。この差分式の増幅因子 ν はつぎのようである。

$$\nu = 1 - \frac{2u_0\Delta t}{\Delta x}(1 - \cos\kappa\Delta x) - i\frac{2u_0\Delta t}{\Delta x}\sin\kappa\Delta x \quad (2.23)$$

(2.23) 式は、第 1 編 (4.18) 式において $w = 2u_0$ および $\mu = 0$ とした場合に相当する。したがって、(2.23) 式の ν を図示すれば第 1 編図 4.4 と同様の結果が得られ、第 1 編 (4.19) 式よりこの場合の安定性の必要条件として次式が得られる。

$$u_0\Delta t/\Delta x \leq 1/2 \quad (2.24)$$

(iii) (2.19) 式において非線型項を $t = (n+1)\Delta t$ で評価した場合：(i)と同じ中央差分であるが、本章で取扱っている差分式が multi-level であることを考慮して、つぎの差分式を考える。

$$\frac{M_i^{n+2} - M_i^n}{2\Delta t} + u_0 \frac{(M_{i+1}^{n+1} + M_i^{n+1}) - (M_i^{n+1} + M_{i-1}^{n+1})}{2\Delta x} = 0 \quad (2.25)$$

すなわち、非線型項を $t = (n+1)\Delta t$ で評価する差分式である。(i)と同様に $M_i^n = \tilde{M}_i^n e^{i\kappa\Delta x}$ と置けば

$$\tilde{M}_i^{n+2} = -\frac{2iu_0\Delta t}{\Delta x}\sin\kappa\Delta x\tilde{M}_i^{n+1} + \tilde{M}_i^n \quad (2.26)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{M}^{n+2} = \tilde{M}^{n+1}$ と置き、 $M^{n+2} = [\tilde{M}^{n+2}, \tilde{M}^{n+2}]^t$ (t : 転置行列) と表わせば、上式はつぎのようにまとめられる。

$$M^{n+2} = GM^{n+1} \quad (2.27)$$

ただし、

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{2iu_0\Delta t}{\Delta x}\sin\kappa\Delta x & , & 1 \\ 1 & , & 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

である。G の固有値を ν は次式より求められる。

$$\nu^2 + \frac{2iu_0\Delta t\sin\kappa\Delta x}{\Delta x}\nu - 1 = 0 \quad (2.29)$$

$p = (2u_0\Delta t/\Delta x)\sin\kappa\Delta x$ と置くと、 $\nu = -pi \pm \sqrt{1-p^2}$ である。したがって、 $|p| \leq 1$ のときには $|\nu| = 1 - 2p^2$ であるから安定性の必要条件 $|\nu| < 1 + O(\Delta t)$ はつねに満たされるが、 $|p| > 1$ のときには $\nu = (-p \pm \sqrt{p^2-1})i$ であって、 ν のうちの 1 つの絶対値は必ず 1 より大きく、安定性の必要条件は満たされないことが知られる。 $|p|$ は $\kappa\Delta x = \pi/2$ あるいは $(3/2)\pi$ のとき最大になるから、これより再び (2.24) 式の安定性の条件が得られる。

(2)非線型項の導入と試算

(i)非線型項の空間的差分：(1)の考察の結果より、 x および y 方向の差分化には上流側差分を採る。すなわち、一例として (2.2) 式の左辺の第 1 項を考え、これをつぎのように差分化する。

$$\frac{\partial}{\partial x} uM = \frac{u_{i+1/2, j+1/2}^* M_{i+a, j+1/2}^* - u_{i-1/2, j+1/2}^* M_{i-b, j+1/2}^*}{\Delta x}$$

ここに、添字に表われる a および b には、上流側の量が移流されるように、すぐ前の流速が正であれば 0、負であれば 1 がとられる。たとえば

$$u_{i+1/2, j+1/2}^* M_{i+a, j+1/2}^* = \begin{cases} u_{i+1/2, j+1/2}^* M_{i, j+1/2}^* & ; u_{i+1/2, j+1/2}^* \geq 0 \\ u_{i+1/2, j+1/2}^* M_{i+1, j+1/2}^* & ; u_{i+1/2, j+1/2}^* < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

である。ただし、流速 u は次式によって計算される。

$$u_{i, j+1/2}^* = \frac{2M_{i, j+1/2}^*}{h_{i-1/2, j+1/2}^* + h_{i+1/2, j+1/2}^*}, \quad u_{i+1/2, j+1/2}^* = \frac{u_{i, j+1/2}^* + u_{i+1, j+1/2}^*}{2} \quad (2.31)$$

*印については以下に述べる。

(ii)非線型項の評価時間：非線型項を $t = n\Delta t$ で評価する方法 ($u^* = u^n$, $M^* = M^n$, $h^* = h^n$ など, (1-ii) に相当), および $t = (n+1)\Delta t$ で評価する方法 ($u^* = u^{n+1}$, $M^* = M^{n+1}$, $h^* = h^{n+1}$ など, (1-ii) と (1-iii) を組合せた方法) の 2 つを用いて, 2.3(1)で述べた対象領域および諸条件のもとで試算を行ってみた。しかし, 差分格子の大きさが前と同様 ($\Delta x = 142.5\text{m}$, $\Delta y = 116.25\text{m}$, $\Delta t = 1.25\text{秒}$) であって, (2.17) 式あるいは (2.24) 式の条件が満たされているにもかかわらず, 解は計算の 1 ステップごとに振動して不安定となり発散した。そこで, さらにつぎの 2 つの方法を試みることにする。

方法 1：非線型項を $t = n\Delta t$ および $t = (n+1)\Delta t$ の平均値で評価する。すなわち,

$$u^* = (u^n + u^{n+1})/2, \quad M^* = (M^n + M^{n+1})/2, \quad h^* = (h^n + h^{n+1})/2 \text{ など} \quad (2.32)$$

方法 2：(2.5) ~ (2.7) 式の leap-frog 法の特徴を活かし, 非線型項を $t = (n-2)\Delta t$ と $t = n\Delta t$ の平均値で評価する。すなわち,

$$u^* = (u^{n-2} + u^n)/2, \quad M^* = (M^{n-2} + M^n)/2, \quad h^* = (h^{n-1} + h^{n+1})/2 \text{ など} \quad (2.33)$$

方法 1 は, 非線型項が評価される時間が, 差分のとられている時間間隔内 ($t = n\Delta t \sim (n+2)\Delta t$ の間) にあるのに対し, 方法 2 では非線型項が評価される時間と差分のとられている時間とが少しずれている。方法 1 によるとき, すべての $n\Delta t$ において, h , M および N のすべてを求めなければならないから (図 2.10(a)), 連続式の差分式 (2.7) 式を

$$\frac{h_{i+1/2, j+1/2}^{n+2} - h_{i+1/2, j+1/2}^n}{2\Delta t} + \frac{M_{i+1, j+1/2}^{n+1} - M_{i, j+1/2}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{N_{i+1/2, j+1}^{n+1} - N_{i+1/2, j}^{n+1}}{\Delta y} = 0 \quad (2.34)$$

と改めなければならない, その結果 M および N と h が時間的に交互に求められるという leap-frog 法の特徴は失われる。一方, 方法 2 では $n\Delta t$ における M および N , $(n+1)\Delta t$ における h を求めればよく (図 2.10(b)), 上述した評価時間のずれという問題を別にすれば, leap-frog 法の特徴を失わず

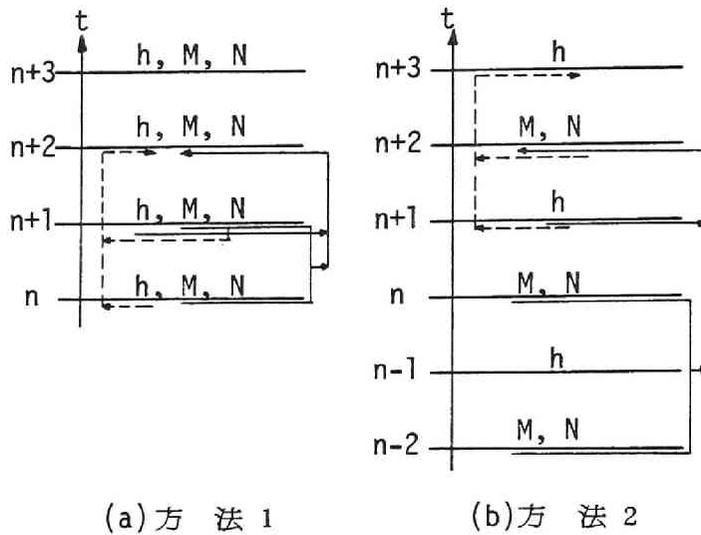


図2.10 非線型項の評価

にすむから、計算時間は方法1の半分でよい。

試算で用いられたのは、2.3(1)で述べた由良川の綾部市と福知山市の間である。地形や計算の条件はすべて2.3(1)と同じであるので省略する。

図2.11は計算結果の一例で、本川の流入流量が最大のときの流量フラックスおよび水深の分布を比較しながら示したもので、(a)は非線型を省略した場合（図2.6(c)と同じ）、(b)は方法1、(c)は方法2の結果である。流量フラックスの分布をみると(b)と(c)には全く差が認められない。また(a)と(b)、(c)の間にも大きい差はみられないが、あえていえば(a)の方が流れが“直線的”であるのに対し、(b)および(c)の方がやや“蛇行的”である。この傾向は支川の合流点の下流（図2.11(b)中のA点あるいはB点）において比較的明瞭にみられる。合流点下流のように、流れの場所的変化が大きい箇所では上のような傾向が現われることは、非線型項の影響として妥当なものと考えることができる。水深の分布については、(b)と(c)の間には上流端（本川上流端の左岸側）にわずかの差が現われているが、全体としてみれば流量フラックスの分布と同様に、ほぼ同じ結果とみなすことができる。(a)と(b)、(c)の間にもそれほど大きい差はみられないが、土師川との合流点の上流（図2.11(b)中のC点）などでは(a)の方で水深がやや小さくなっている。流量フラックスの分布と合せて考えれば、非線型項を省略すれば、やや“流れやすい”結果が得られるようであり、非線型項の導入によりこの点が改められるとみられる。しかし、(a)と(b)、(c)の差はいずれにしてもわずかであり、ここで取扱った洪水では非線型項の影響はあまり大きくなかったといえる。また、(b)と(c)に差のないことから、この洪水程度の時間的変化の場合には、方法1および方法2のいずれで非線型項を評価してもよく、結局 leap-frog 法の特徴を活かし計算時間が短くてすむ方法2（(2.33)式）の方が有利といえる。

図2.12は計算で求められた下流端の断面の流量である。方法1（(2.32)式）と方法2（(2.33)

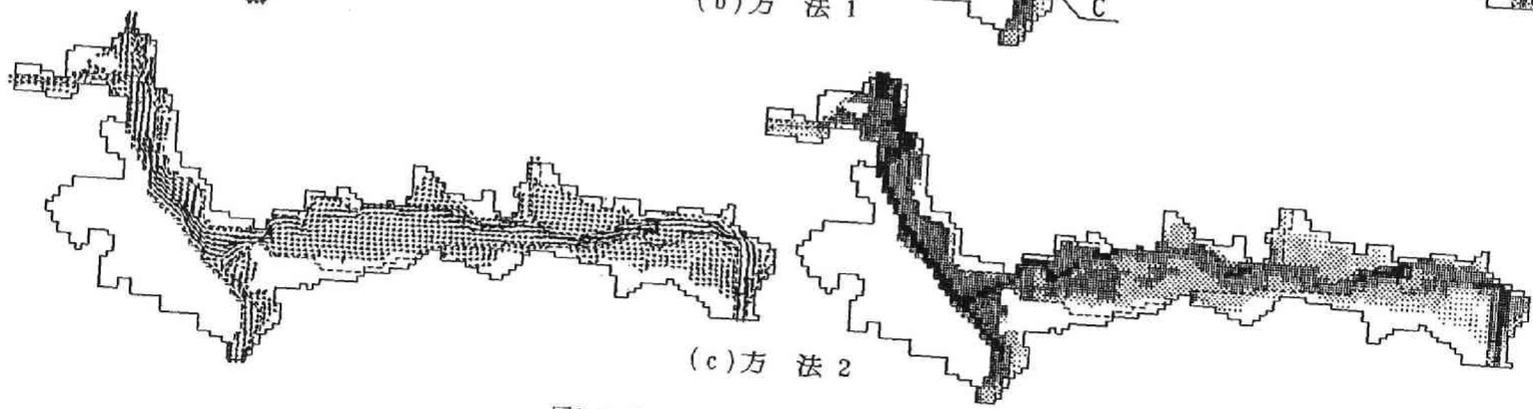
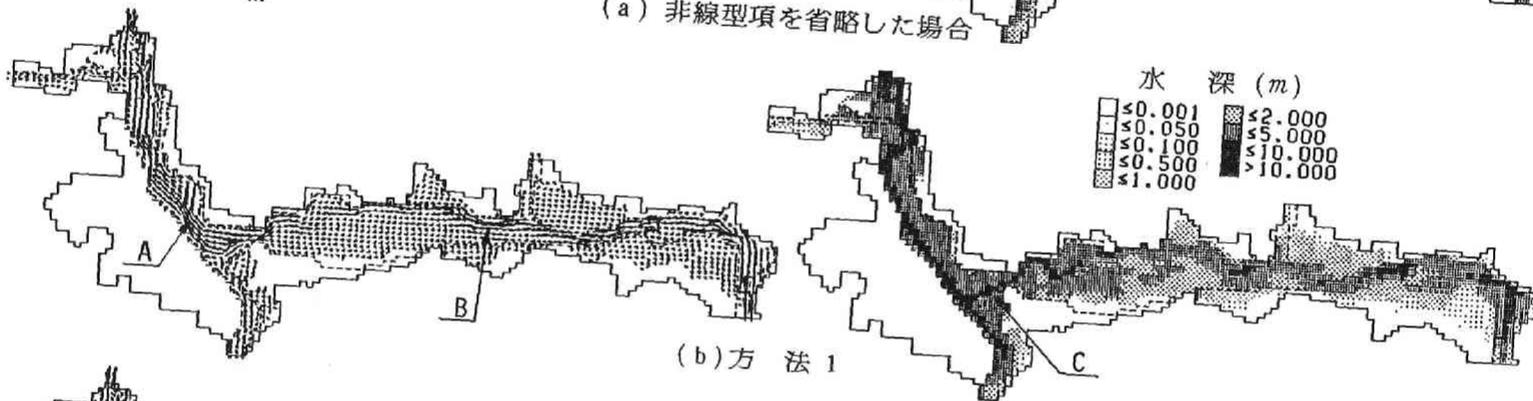
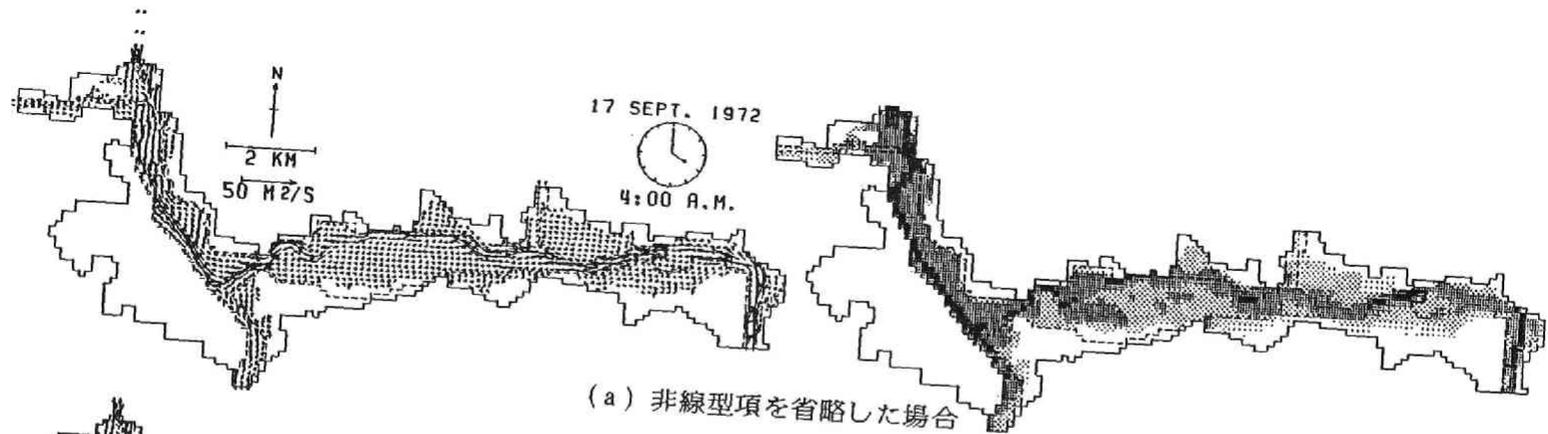


図2.11 非線型項を考慮した計算結果の比較

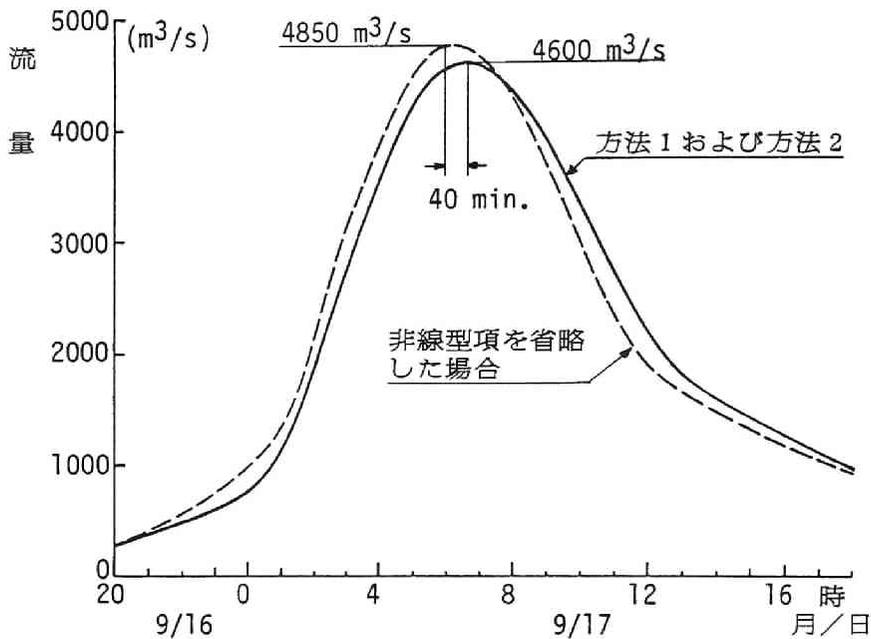


図2.12 下流端の流量の比較

式)との差は図示できないほどわずかである。非線型項を省略した場合の流量の最大値は $4850\text{m}^3/\text{s}$ であるのに対し、非線型項を導入した場合には $4600\text{m}^3/\text{s}$ で、最大値が約5%小さくなっており、その生起時刻も図にみられるように40分程度遅れている。さらに流量ハイドログラフの全体的な形状は、非線型項を含めた場合の方が扁平であり、この項によりハイドログラフが拡散されているとみなされる。つまりこの図においても、非線型項を省略した場合のやや流れやすい計算結果が、この項の導入により改められるとみられる。

以上の結果より、以下のすべての計算において、非線型項を方法2 ((2.33)式)によって導入することにする。

(3)河川改修事業の影響予測への適用

2.3(2)で少し触れた由良川下流部に位置する大江町河守地区は、水害の常襲地域で、かなり広い範囲にわたる湛水がしばしば発生している。現在、この地域に対していくつかの氾濫防御策が検討されはじめているが、本項ではそれらのうちの一つである比較的大規模な改修事業が行われたときの洪水の変形を、本章で述べてきた二次元一層モデルによる氾濫水の数値計算法によって解析する。この問題は、氾濫水の数値計算法を、氾濫の再現という計算だけでなく、河川改修事業の影響予測に応用した例である。

対象領域は、図2.13に示される 6.3km^2 で、(a)は現況(ケース1)、(b)は支川T(宮川)の合流点を現在よりも下流につけ替えるとともに、現在の本川Mと支川の合流点附近に十分高い堤防Bを設けた場

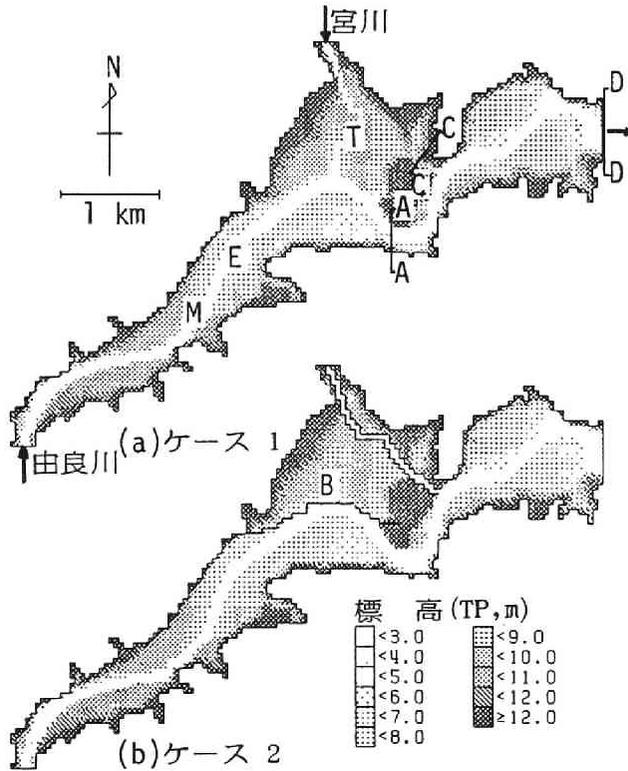


図2.13 由良川下流部の大江町河守地区

合（ケース2）である。この計画は、現在の支川の右岸側の地域（河守地区）の湛水を防ごうとするものであるが、逆に遊水効果の減少のため、これより下流の流量を増大させるおそれのあることが問題とされる。

計算格子は、東西および南北のいずれの方向にも一辺50mの正方形であって、一般格子の数は約2500（境界格子も含めると約3000）である。対象洪水は記録史上この地域に発生した最大の洪水である5313出水（1953年9月台風13号により発生した洪水）である。別に行われたこの出水についての流出解析の結果より求められた本川（由良川）および支川（宮川）の上流端の流量ヒドログラフは、図2.14に示されるとおりである。下流端（D-D断面、大雲橋地点）では、水位—流量曲線を与える。粗度係数については資料が無いので、2.3(1)と同様に $n = 0.035$ を対象領域全域に適用する。計算時間間隔 Δt は0.5秒であって、この場合には $\Delta x / \Delta t \approx 100\text{m/s}$ となっている。他の資料や条件は、2.3(1)と同様にして与えられている。

図2.15は計算結果の一例で、(a)はケース1（現況）、(b)はケース2（改修後）のそれぞれ流量フラックスおよび水深の分布を示したものである。ケース1では、この時刻に計算対象領域内の氾濫水の水量が最大になっている。ケース1とケース2を比較すると、築堤Bおよび支川のつけ替により、ケース1で支川の右岸沿にみられた広大な湛水が防がれていることが分る。しかし、これらの図では、

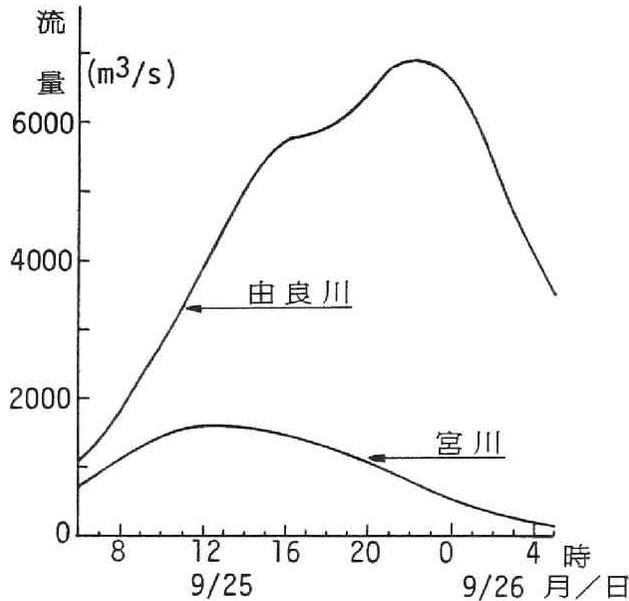


図2.14 5313出水の流量ハイドログラフ（1953年9月）

改修計画によりA断面（図2.13参照，波美地点）の流量フラックスおよびこの断面より少し上流の本川の右岸側で，水深がそれぞれやや増加している程度で，それ以外では改修の影響を読みとることはできない。図2.16はこの計算の結果より，図2.13に示されるA断面，C断面（波美北地点），D断面（下流端の大雲橋地点）の流量と，ケース1で支川との合流点より少し上流のE点（尾藤橋地点）の水位のハイドログラフを，ケース1とケース2について比較したものである。この図より改修の影響として，つぎの点を挙げることができる。

①A断面の流量は，ケース1では支川の流量の大部分がこの断面を流下するため，支川の流出が本川より速いこの出水では流量の増加はケース2よりも速い。しかし，26日0時頃現われるこの断面の流量の最大値は，ケース1ではケース2より約 $250\text{m}^3/\text{s}$ 低下している。C断面の流量は，A断面の流量が最大になる時刻より後では，ケース1の方が大きいから，上述のA断面の流量の低下はケース1の支川沿に湛水したことによる遊水効果とみることができる。

②ケース2でA断面の流量ハイドログラフは，上流端の流量ハイドログラフ（図2.14）を約1時間～1.5時間遅らせた形であり，通常の河道における洪水の流下と同様の伝播性を示している。もちろん，流下距離がわずかであるから，減衰や変形はほとんどみられない。

③下流端のD断面では改修があっても流量ハイドログラフはほとんど変化しない。これは，ケース1で支川沿に湛水していることの遊水効果が，D断面程度の下流になればわずかしか現れないことを示している。この計算の場合，ケース1で支川沿いに湛水している水量は $7 \times 10^6 \text{m}^3$ 程度であるが，これはD断面の流量の最大値（ $7500\text{m}^3/\text{s}$ ）のわずか0.26時間分にしか相当しない。下流側に遊水効果がほとんど現われなかったのは，対象とした洪水の規模があまりにも大き過ぎたことが一因であろう。

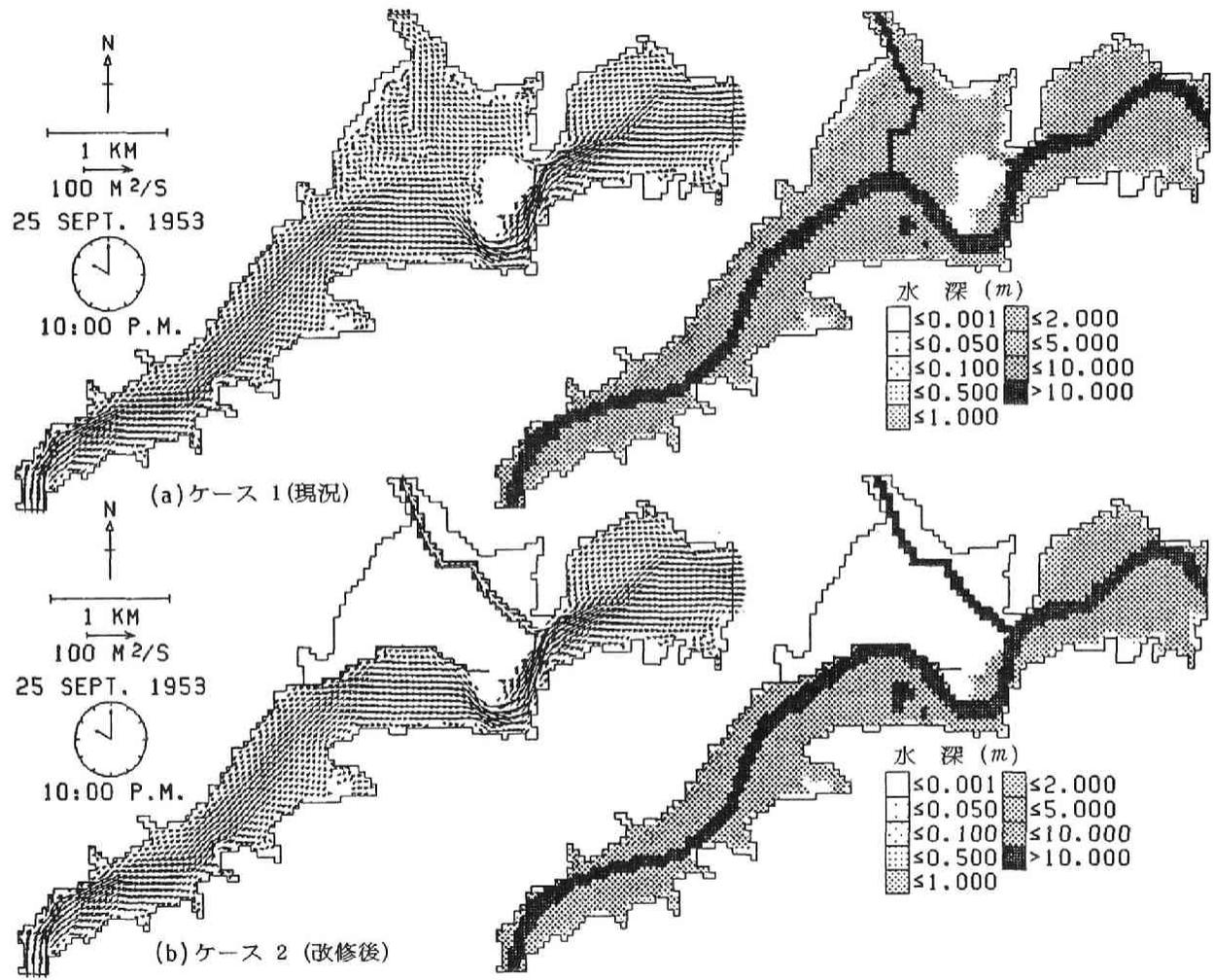


図2.15 大江町河守地区の氾濫の計算結果

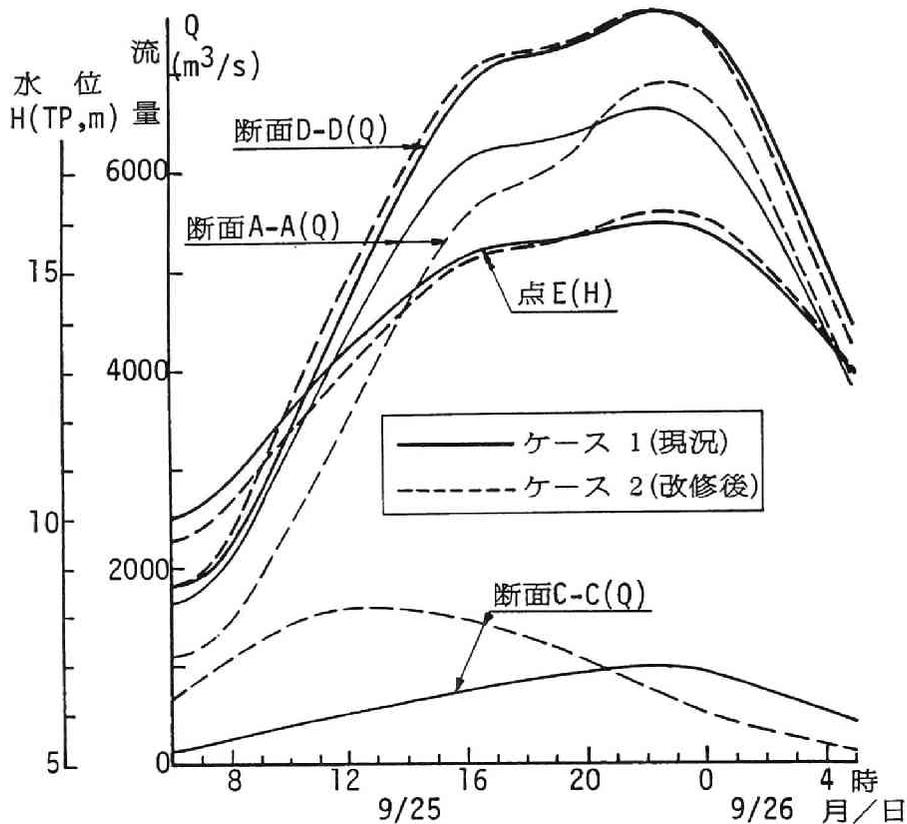


図2.16 ハイドログラフの比較

④ E点の水位は、ケース1の方が洪水の前半でやや高く、本川の流量が最大になる後半では逆に0.5m程度低くなっている。前半でケース1の方が水位が高いのは、下流の支川沿いの湛水によるせき上げの影響であり、また後半でケース2の方が水位が高いのは、流れがA断面に集中するため水位が高くなり、その影響が上流に及んだからと考えられる。

以上のように、本章で述べている氾濫水の数値計算法は、河川改修に伴う氾濫の変化およびそれらの河道の洪水に及ぼす影響予測にも有効かつ有益に適用されることが見いだされた。

2.5 一次元解析法と結合した氾濫解析

前節までは、対象領域が河道（堤外地）と堤内地とに区別されず、全域が氾濫原とみなされる場合であった。この節においては、堤外地と堤内地が区別できる場合の例として、淀川および旧巨椋池干拓地をとり上げ、淀川が破堤した場合の氾濫水の干拓地への浸入および淀川の洪水の変形を、淀川の洪水には第1編4.5で述べた一次元解析法の特長曲線法による数値計算法を、干拓地の氾濫水には本章の二次元一層モデルによる数値計算法を、それぞれ適用し解析する^{1,2,3)}。また、堤内地の排水用の

小河川（排水路と呼ぶ）を考慮した場合の計算法についても検討を行う。

(1) 淀川および旧巨椋池干拓地への適用

(i) 河道一堤内地系への適用：対象とした河道および堤内地は図2.17に示されるとおりで、河道として木津川、宇治川（淀川本川）、桂川の三川合流部と枚方地点までの淀川中・下流部（第1編5.4で取扱った）、堤内地として木津川および宇治川で挟まれた旧巨椋池干拓地である。図2.18は堤内地の概況および標高の分布を示したもので、堤内地は中央部が凹形状になっている。現在この地域には多く

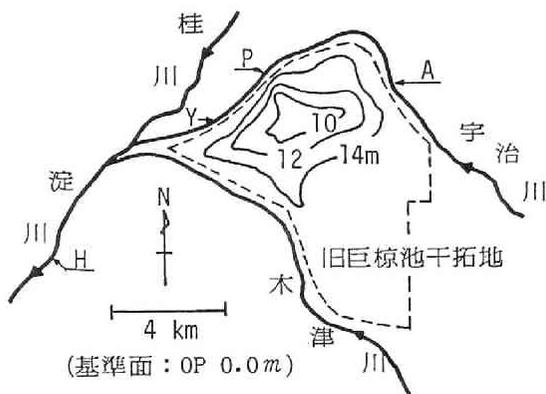


図2.17 淀川および旧巨椋池干拓地

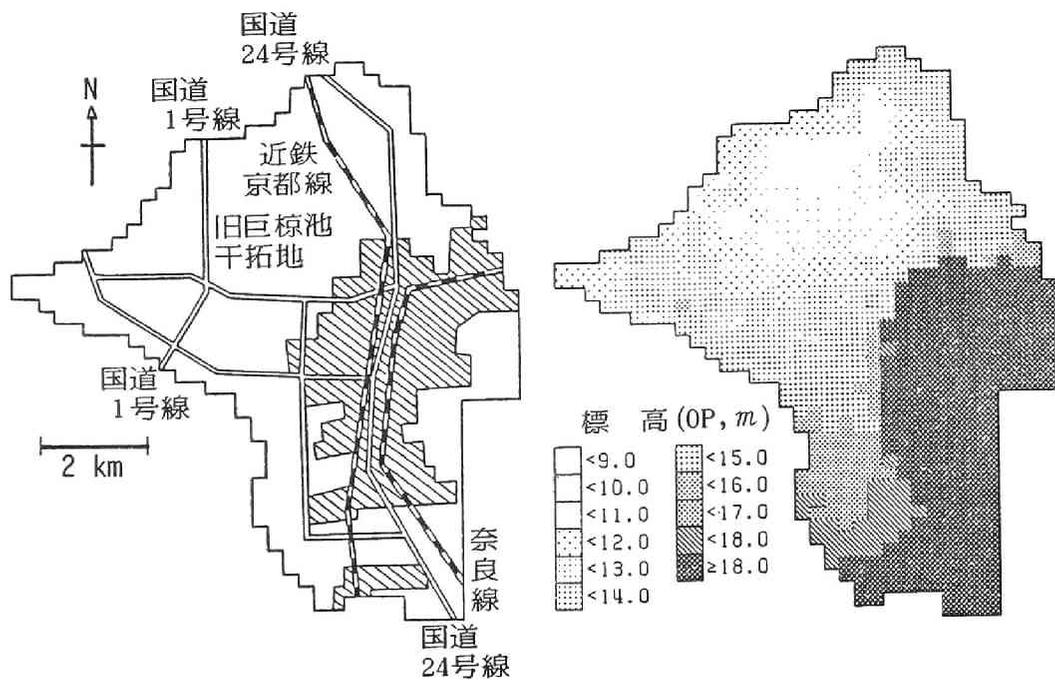


図2.18 旧巨椋池干拓地

の開発事業が進められ、地形の状況も少し変わっているが、本節では簡単のため図2.18(b)のような標高の分布のみが与えられているとする。

計算においては、河道と堤内地とは破堤点（図2.17のA点—隠元橋地点—に想定）および排水機場（P点—巨椋排水機場地点—に想定）を通じてのみ結びつけられているとする。河道においては、第1編4.5で述べた特性曲線法によって洪水の追跡を行い、堤内地においては本章の汎濫水の計算法を適用する。したがって、河道の計算においては、破堤点より流出する越流流量および排水機場からの排水流量がそれぞれ横流出および流入流量として取扱われ、また堤内地の計算では越流流量および排水流量がそれぞれ流入および流出フラックスに改められる。

ここで問題になるのは、破堤点の位置、破堤の開始に関する条件、破堤部分の堤長（破堤幅）、破堤敷高および越流流量であろう。これらのうち、破堤点の位置は過去の例や河道の洪水の疏通能力からみて想定されるのが普通であろうが、それ以外の破堤の過程やそれによって越流流量がどのように変化するかはきわめてむずかしい問題である。ここでは簡単のため、つぎのようにして破堤および越流流量を求めることにする。いま、想定された破堤点における河道の水位（外水位）を H_r 、同じ地点の堤内地の水位（内水位）を H_f 、さらに破堤開始外水位を H_i 、破堤敷高を H_0 および破堤長を L とし、これらのうち H_i 、 H_0 および L は先験的に与えられているとする。このとき、外水位が徐々に上昇して $H_r \geq H_i$ になったときはじめて、瞬時に長さ L の破堤が生ずるとして、それ以後は内・外水位の如何にかかわらず越流流量 Q_0 を計算することにし、その計算には長方形の堰に関する本間の越流公式 (2.12) および (2.13) 式を用いることにする。すなわち、ここでの記号を用いれば、 $H_r > H_f$ のとき $h_1 = H_r - H_0$ 、 $h_2 = H_f - H_0$ とおいて

$$\bullet h_2/h_1 \leq 2/3 \text{ (完全越流) のとき } \quad Q_0 = \mu L h_1 \sqrt{2gh_1} \quad (2.35)$$

$$\bullet h_2/h_1 > 2/3 \text{ (もぐり越流) のとき } \quad Q_0 = \mu' L h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (2.36)$$

とする。ここに、 $\mu = 0.35$ および $\mu' = 0.91$ とされている。 $H_r < H_f$ の場合には、堤内地より河道への逆越流が生ずるから、 $h_1 = H_f - H_0$ 、 $h_2 = H_r - H_0$ とし、上式から逆越流流量を求めるものとする。

排水機場については、複雑な操作方法を考えず、排水機場が含まれる堤内地の一般格子に浸水が及んでいるときのみ、排水能力に応じた排水が行われるとしておく。

(ii) 計算に必要な資料・条件：河道の洪水の計算¹¹⁾に用いた河道断面の特性は、第1編5.4と同様である。各河川の上流端には、図2.19に示される流量ハイドログラフを与える。これは、5313出水（1953年9月発生）が現状の河道に生じたとして貯留関数モデルによって求められた結果¹¹⁾である。宇治川の上流端において流量が一時的に減少しているのは、それより上流の天ヶ瀬ダムによる放流流量の制御の結果である。下流端には枚方地点の水位—流量曲線を与える。初期条件には標準逐次計算法による不等計算の結果を用いる。

対象とした堤内地の面積は52.0km²で、これを東西および南北方向にそれぞれ、 $\Delta x = 285.44$ m およ

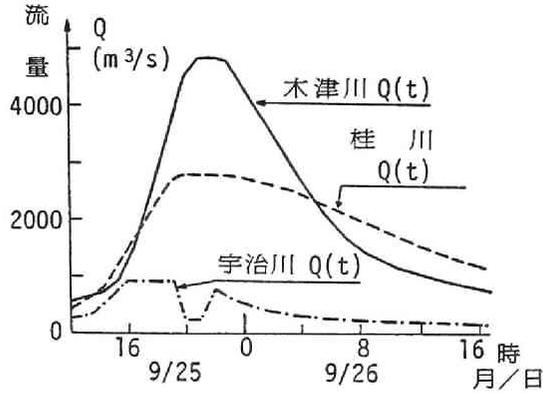


図2.19 上流端の流量ハイドログラフ（5313出水，1953年9月）

び $\Delta y = 231.0\text{m}$ の格子に分割する。したがって、一般格子の数は約790である（境界格子を含めると約930）。一般格子には図2.18(b)に示した地盤高を与える。なお、この堤内地には各種の盛土や排水用の小河川が存在するが、簡単のためそれらは一切考えないことにする。初期条件には破堤する前の状態として、堤内地の全体において水深および流量フラックスがすべて0と仮定し、降雨などによる内水は初期には存在しないとする。粗度係数は、水田・畑地においては $n = 0.025$ 、宅地においては $n = 0.040$ 、山地においては $n = 0.060$ を与える¹²⁾。排水機場として、図2.17のP点に一定の流量 ($100\text{m}^3/\text{s}$) の排水を考える。

越流流量の計算では、図2.17のA点を破堤点と想定し、破堤の条件および越流流量の算定に必要なパラメータを全く仮想的に、破堤開始外水位 $H_1 = \text{OP } 14\text{m}$ 、破堤敷高 $H_0 = \text{OP } 13\text{m}$ 、破堤長 $L = 400\text{m}$ と設定する。

計算時間間隔は、河道の洪水については $\Delta t = 10$ 秒、堤内地の氾濫水については $\Delta t = 2.5$ 秒とする。

以上で構成された河道—堤内地系における洪水・氾濫水の数値計算法をフロー・チャートにまとめたのが、図2.20である。

(iii)計算結果：図2.21(a)および(b)は、それぞれ図2.17中のY点（淀地点）およびH点（枚方地点）における水位および流量ハイドログラフを、破堤があったとした場合と、なかったとした場合の計算結果から示したものである。ただし、枚方地点においては流量だけが示され、またこの図には破堤点から堤内地へ流入する越流流量の時間的変化も示されている。この計算では、破堤想定地点（A点）において外水位が破堤開始水位より大きくなって破堤が起るのは計算開始後4時間目の9月25日16時であり、それ以後において破堤があったとした場合となかったとした場合の差が生ずる。

図2.21(a)をみれば、淀地点においては水位は破堤によりかなり低下するとともに、大流量の逆流が発生することが分る。この計算では、越流流量（図2.21(b)）が最大になる9月26日0時に、淀地点における逆流の流量は $800\text{m}^3/\text{s}$ に達しており、これは、このときの越流流量の60%に相当している。

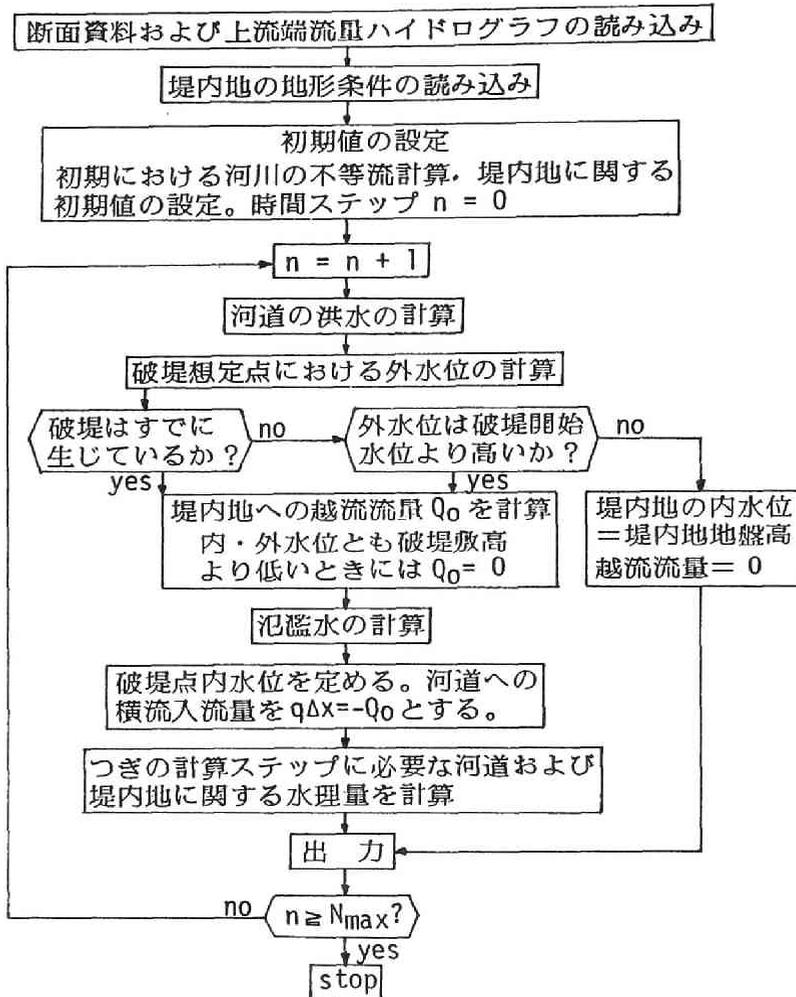


図2.20 河道—堤内池系の洪水・氾濫水の数値計算

淀地点の逆流は、後述する図2.22をみれば分かるように、木津川および桂川の合流点から流入してくるものである。減水期の水位が破堤した場合の方が高いのは、堤内地より河道へ逆に水が戻っている（逆越流）からである。破堤しなかった場合の淀地点の流量が一時的に相当減少しているのは、図2.19と比較すれば分かるように、宇治川の上流の天ヶ瀬ダムからの放流流量が制限された結果である。

枚方地点（図2.21(b)）においては、破堤により最大流量が相当減少している（この計算の場合約 $1200\text{m}^3/\text{s}$ ）。この減少量は、破堤点からの越流流量の最大値にほぼ等しい。つまり、氾濫水となって堤内地へ流入した分だけ枚方地点の流量が減少するという結果となっている。また、時間的にみれば、越流流量の最大値の出現と、枚方地点の流量の最大値の出現とは、2時間ずれている。この時間差は、破堤後枚方地点における流量に破堤がなかった場合との違いが現われるまでの時間差、および破堤点で逆越流が始ってから枚方地点の流量が破堤した場合の方が大きくなるまでの時間差とほぼ等

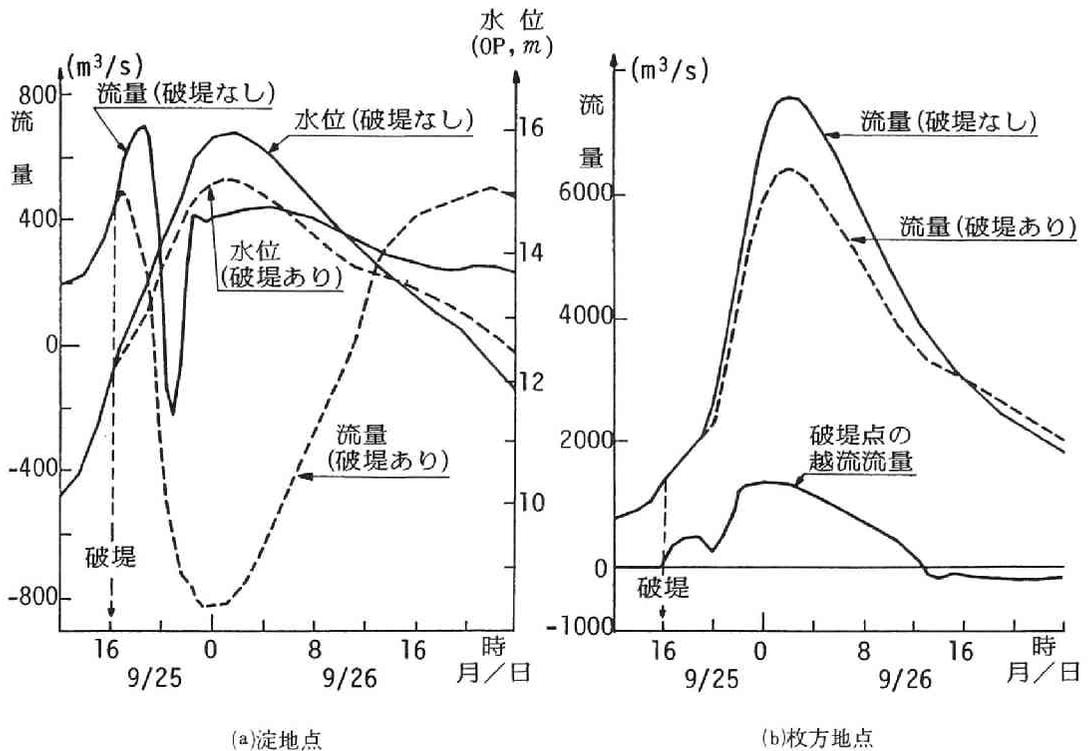


図2.21 河道の洪水の計算結果

しい。つまり、破堤による流量の増減という影響が、ほぼ同じ時間差を保持して枚方地点に伝播しているということが出来る。なお、越流流量が破堤後一時的に減少しているのは、図2.21(a)でも述べたように、天ヶ瀬ダムにおける流量制御による結果であるが、破堤点より下流からの逆流により越流流量はすぐに再び増大している。

図2.22は越流流量が最大のときの河道の流量分布を示したものである。上述のように淀地点では大きい流量の逆流となっており、また桂川の流量が2分されていることが分る。これは、木津川の流量がこの時間ではきわめて大きく(4700m³/s)、その結果、木津川の合流点において水位が相当上昇し、これによるせき上げのために桂川の流量の一部が宇治川へ逆流することを表わしており、第1編5.4の計算と同様に、三川合流部における各河川の洪水の複雑な挙動がうかがわれる。また、上のようなせき上げの結果、宇治川における水位も上昇し、その影響が破堤点にまで及び、越流流量が最大になったと考えられる。

図2.23はこれまでと同様に、堤内地の流量フラックスと水深の分布の変化を、破堤後の時間を追って示したものである。

破堤後5～9時間(9月25日21時～26日1時)では、流量フラックスは地盤の低い堤内地中央の凹部に向っており、氾濫水が地盤の高い所を避けながら順次低地へ浸水しつつあることがみられ、地形

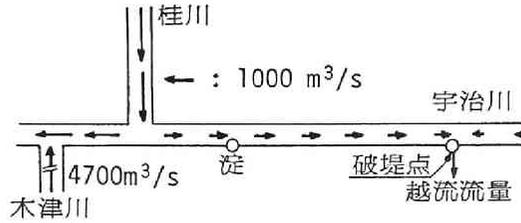


図2.22 河道における流量分布

に従った氾濫水の拡散の過程が計算で表わされているといえる。破堤後相当時間が経過した17時間後（9月26日9時）では、堤内地の凹部全域に浸水が及んでいるとともに、流量フラックスは破堤点の近くを除いてかなり小さくなっている。つまり、このときには堤内地での流れそのものは小さく、水面はほぼ水平になっており、越流してくる氾濫水によって水位が徐々に上昇して地盤の高い周辺に浸水してゆく湛水の過程が計算されているとみられる。破堤後29時間（9月26日21時）では破堤点においては逆越流が生じており、減水が始まっているが、浸水の速さに比べ減水はきわめて緩やかである。これは自然排水であるので、破堤点において内水位と外水位がほぼ等しい状態を保ちながら低下してゆくからであって、図2.21(b)にもみられるように、逆越流流量が、堤内地へ流入するときの越流流量に比べ、かなり小さいためである。

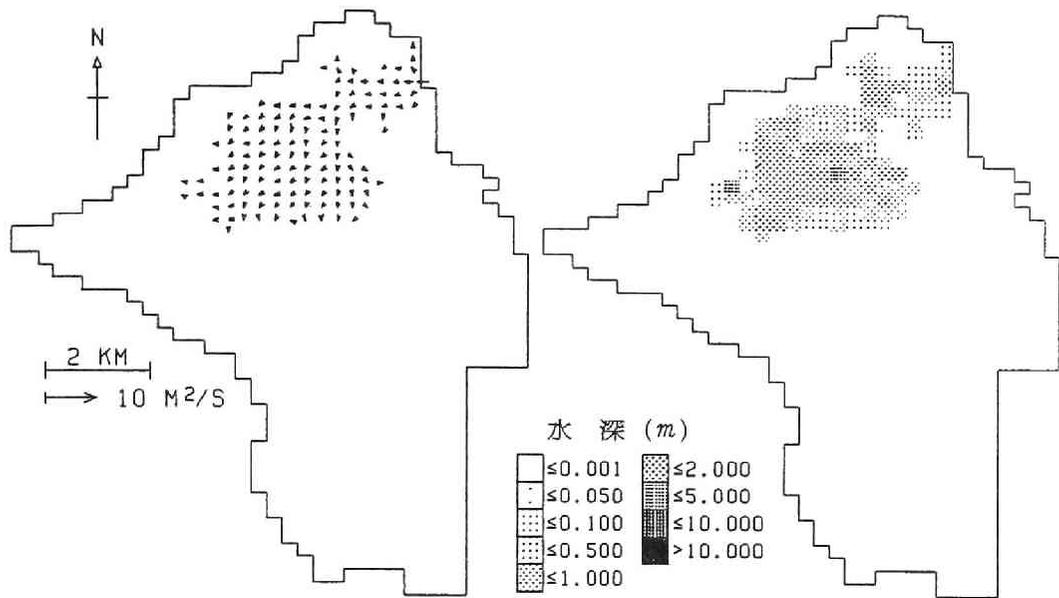
以上の結果は、河道の洪水に一次元解析法の特性格線法、堤内地の氾濫水に二次元一層モデルをそれぞれ適用し、両者を組み合わせて構成される河道一堤内地系における洪水・氾濫水の解析法によって、破堤に伴う河道の下流側の流量の減少や逆流の発生といった洪水の変形が計算されるとともに、堤内地における氾濫水の拡散やそれに続く湛水の過程がよくとらえられる、と要約することができよう。

(2) 差分格子より狭小な水路を考慮した解析

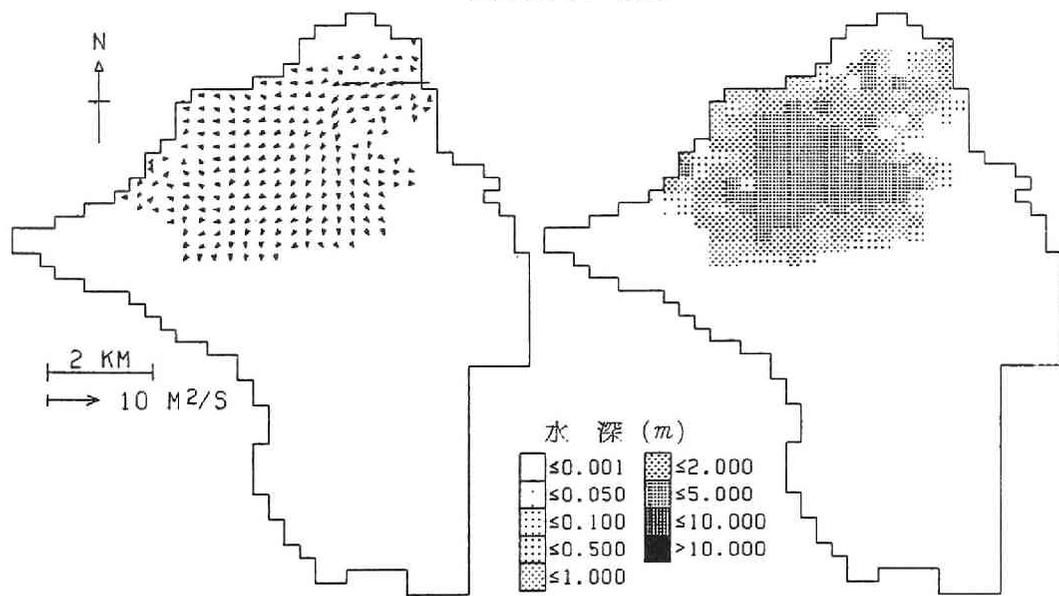
本項では、堤内地に多く存在する幅が小さい（格子の大きさに満たない）内水排除用の河川、あるいは堤内地と堤外地を区別しない場合の氾濫原に存在する幅の小さな河川（これらを排水路と呼ぶことにする）が、氾濫水の挙動に及ぼす影響を検討する方法について考察する。

ここで取扱う排水路は、その幅が格子の大きさの高々1/10程度としておく。このような排水路の存在を考慮する方法として、排水路が通る格子を地盤高の低い格子に置き換えることにより、その格子自体を排水路とみなす方法が考えられる。もしこれが可能であれば、いままでの計算法がなんの修正もなしに適用されるから、最も容易な方法である。

しかし、この方法は以下に述べる理由により不適當であることが分る。すなわち、① 格子の地盤の低下量をどの程度にするかが問題である。つまり、排水路の深さに等しいだけ地盤を低下させれば、結局排水路の幅を格子の一辺の長さに等しいと仮定することになり、ここで取扱うような幅の狭い排水路は過大に評価されるので不適當である。また、たとえば、排水路の容積（幅×長さ×排水路の深さ）が等しくなるように格子の地盤を低下させる方法では、その低下量はきわめて小さくなり、排水路の代りとなるべき地形の変化は生じない。② 排水路を無理なく一般格子として表わせる程度に格

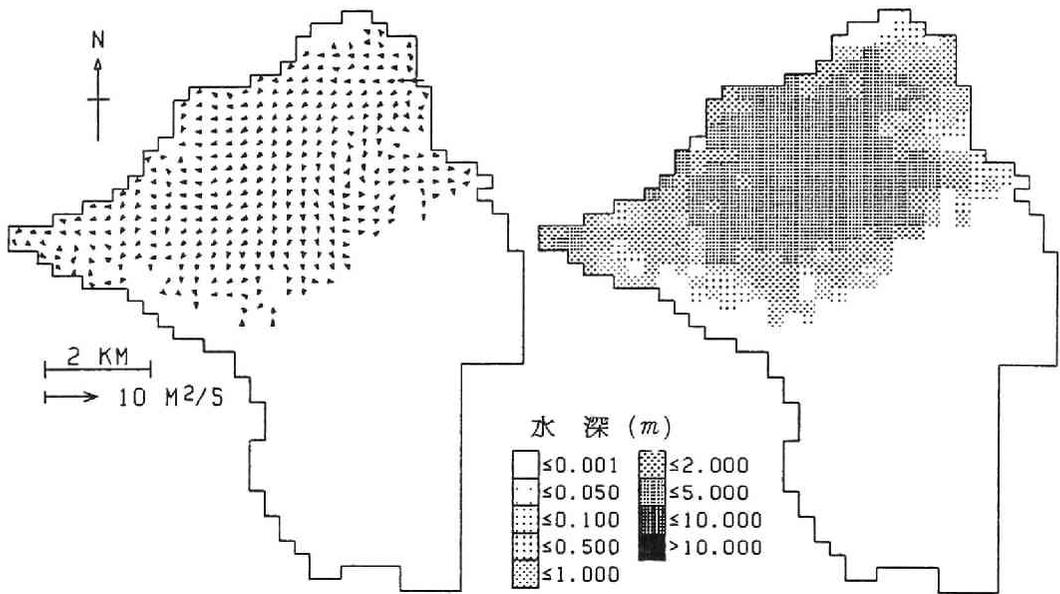


(a) 破堤後 5 時間

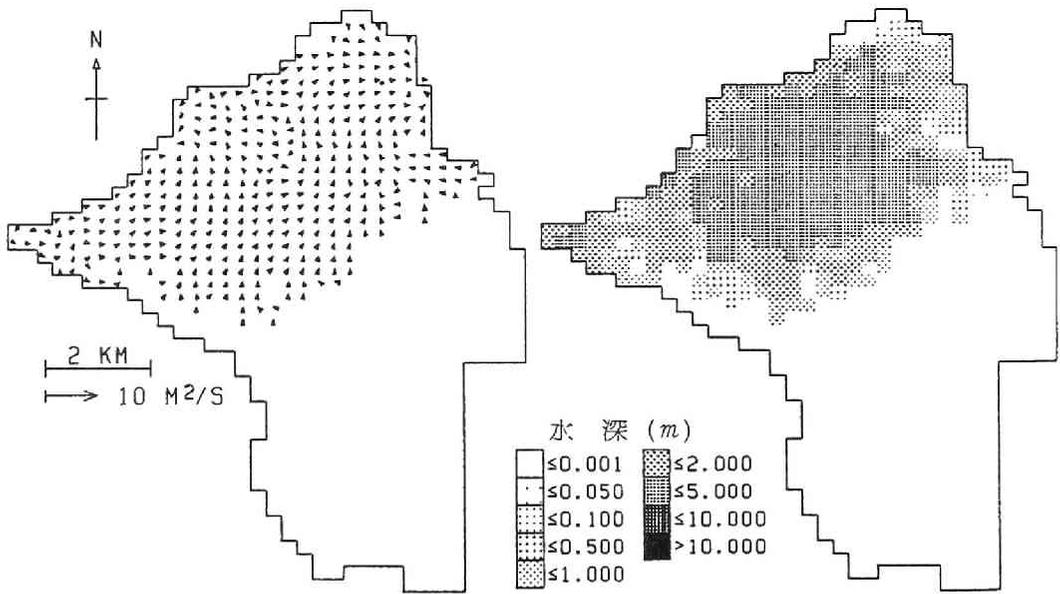


(b) 破堤後 9 時間

図2.23 堤内地の氾濫の計算結果



(c) 破堤後17時間



(d) 破堤後29時間

図2.23 堤内地の氾濫の計算結果

子をさらに細分割すれば、つまり格子の一边の長さを排水路の幅程度にとれば、上記の①の問題点は解消するが、格子の大きさが小さくなることにより格子数が著しく増大するとともに、計算の安定性の条件から計算時間間隔も小さくとらなければならない、全体の計算時間が膨大になる。

以上の理由により排水路をそのまま水路として取扱うことにする。排水路を格子分割した対象領域

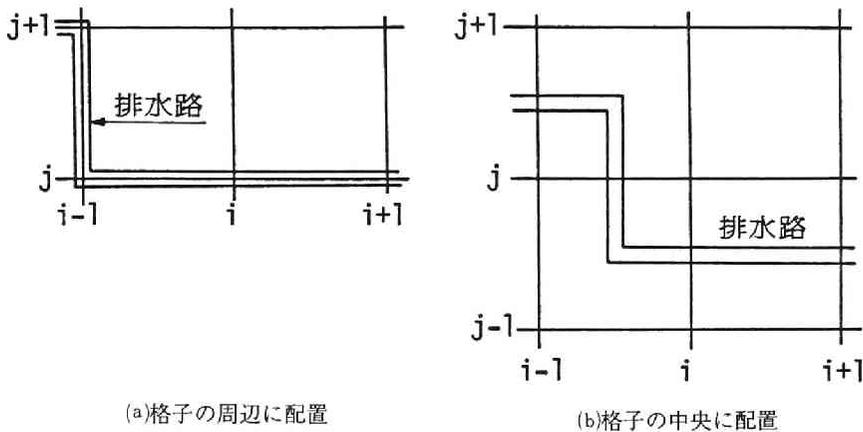


図2.24 格子における排水路の配置

に配置するのに、格子の周囲に沿わせる方法（図2.24(a)）と、格子の中（簡単のため中央とする）に配置する方法（図2.24(b)）の2つがある。前者は境界条件の一部として扱った盛土と同様の配置とするもので、排水路の流れは格子の計算とは別に行われるが、この方法では格子と排水路の大きさが極端に異なるため、格子における流れのわずかな変化が格子より小さい排水路において増幅され、計算の安定性に厳しい条件が加わるとともに、水面がほとんど水平とみられるときでも排水路だけにまだかなりの大きさの流れが現われるという実際には考えにくい結果しか得られていない¹⁾。これは上記のように基本的には格子と排水路の大きさの相違に起因するものである。しかし実際は、水深が氾濫域で排水路の深さに比べてかなり大きくなれば、排水路の存在は事実上考えなくてよいはずである。そのように計算法を改良するには、排水路を格子の辺でなく格子の中を含めることが必要であり、その例として図2.24(b)のような配置が考えられる。以下、この配置を用いたときの計算法について考察する。

(i)排水路を含む格子の計算法：排水路は簡単のため長方形断面であるとし、これを上記のように格子の中央に配置する。例として、図2.25(a)のようにA点 $((i-1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta y)$ とB点 $((i+1/2)\Delta x, (j+1/2)\Delta y)$ の間に幅 b の東西方向の排水路 AB があるとする。これを差分の形式で表わしたのが図2.25(b)である。いま、 x 方向の流量フラックスを求める (2.2) 式を、(2.5) 式のような差分式で表現する前に、図2.25(a)の四辺形 CEHF を底面とし水面を表面とする氾濫水の control volume について積分し、差分の形式に改めると、

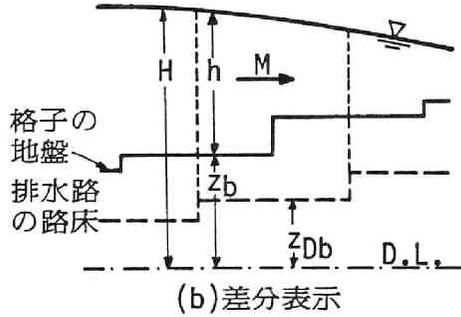
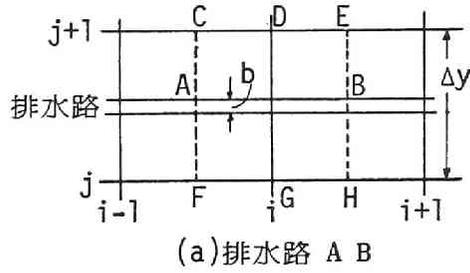


図2.25 排水路の含まれる格子

$$\frac{M_{i,j+1/2}^{n+2} - M_{i,j+1/2}^n}{2\Delta t} A_0 = -\text{conv}(x) - \text{conv}(y) + \frac{P_{CF}}{\rho} - \frac{P_{EH}}{\rho} + \Delta P + F_s \quad (2.37)$$

が得られる。ここに、 A_0 は四角形CEHF内にある水面の $x-y$ 平面への射影面積、 $\text{conv}(x)$ および $\text{conv}(y)$ は非線型項 $\partial(uM)/\partial x$ および $\partial(vM)/\partial y$ に由来する項で、2.4と同様にして評価され、また F_s は摩擦項に基づく項で(2.5)式と同様の方法によって計算されるとする。 P_{CF} および P_{EH} は、それぞれCFおよびEH断面に作用する静水圧の合力であり、 ΔP はDG断面において隣接する格子の地盤高の相違によって生ずる力である。

排水路が存在しない場合の計算式である(2.5)式の水面こう配の項の差分式は、

$$-g \frac{(h_{i+1/2,j+1/2} + h_{i-1/2,j+1/2})(H_{i+1/2,j+1/2} - H_{i-1/2,j+1/2})}{2\Delta x} = \frac{g}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} h_{i-1/2,j+1/2}^2 - \frac{1}{2} h_{i+1/2,j+1/2}^2 - \frac{1}{2} (h_{i+1/2,j+1/2} + h_{i-1/2,j+1/2})(z_{b,i+1/2,j+1/2} - z_{b,i-1/2,j+1/2}) \right] \quad (2.38)$$

と変形される。ここに、時間を示す添字は省略されており、また z_b は格子の地盤高である($h = H - z_b$)。したがって、(2.38)式は(2.37)式の記号を用いればつぎのように表わされる。

$$\frac{P_{CF}}{\rho} = \frac{g}{2} h_{i-1/2,j+1/2}^2 \Delta y, \quad \frac{P_{EH}}{\rho} = \frac{g}{2} h_{i+1/2,j+1/2}^2 \Delta y \quad (2.39)$$

$$\frac{\Delta P}{\rho} = -\frac{g}{2} (h_{i+1/2,j+1/2} + h_{i-1/2,j+1/2})(z_{b,i+1/2,j+1/2} - z_{b,i-1/2,j+1/2}) \Delta y$$

したがって、排水路のある場合には、排水路とこれを含む格子の間に水位差がないと仮定すれば、CF断面に作用する力 P_{CF} をつぎのように求めるのが妥当であろう。

- $z_{b_{i-1/2, j+1/2}} < H_{i-1/2, j+1/2}$ のとき

$$\frac{P_{CF}}{\rho} = \frac{g}{2} [(H_{i-1/2, j+1/2} - z_{b_{i-1/2, j+1/2}})^2 (\Delta y - b) + (H_{i-1/2, j+1/2} - z_{Db_{i-1/2, j+1/2}})^2 b] \quad (2.40)$$

- $z_{b_{i-1/2, j+1/2}} \geq H_{i-1/2, j+1/2} > z_{Db_{i-1/2, j+1/2}}$

$$\frac{P_{CF}}{\rho} = \frac{g}{2} (H_{i-1/2, j+1/2} - z_{Db_{i-1/2, j+1/2}})^2 b \quad (2.41)$$

ここに、 z_{Db} は排水路の路床高で、 $z_{Db_{i-1/2, j+1/2}} = z_{Db_{i+1/2, j+1/2}}$ とし (図2.25)、また z_{Db} は当然 z_b より低いものとしておく。全く同様にして、EH断面に作用する力 P_{EH} も計算することができる。DG断面に作用する力は、隣接する格子の水位と地盤高の大小関係によって変化する。この大小関係は、図2.25(b)のような形で表わせば、 $z_{b_{i+1/2, j+1/2}} > z_{b_{i-1/2, j+1/2}}$ の場合だけでも図2.26に示されるように形式上9通りに分類される。これらのすべての場合について水理的に ΔP を算定することはむずかしい問題であるので、本項では計算上の評価として (2.39) 式の第3式を参考にしてつぎのように求める。ただし、簡単のため記号をつぎのように整理しておく。すなわち、 $H_{i+1/2, j+1/2} = H$,

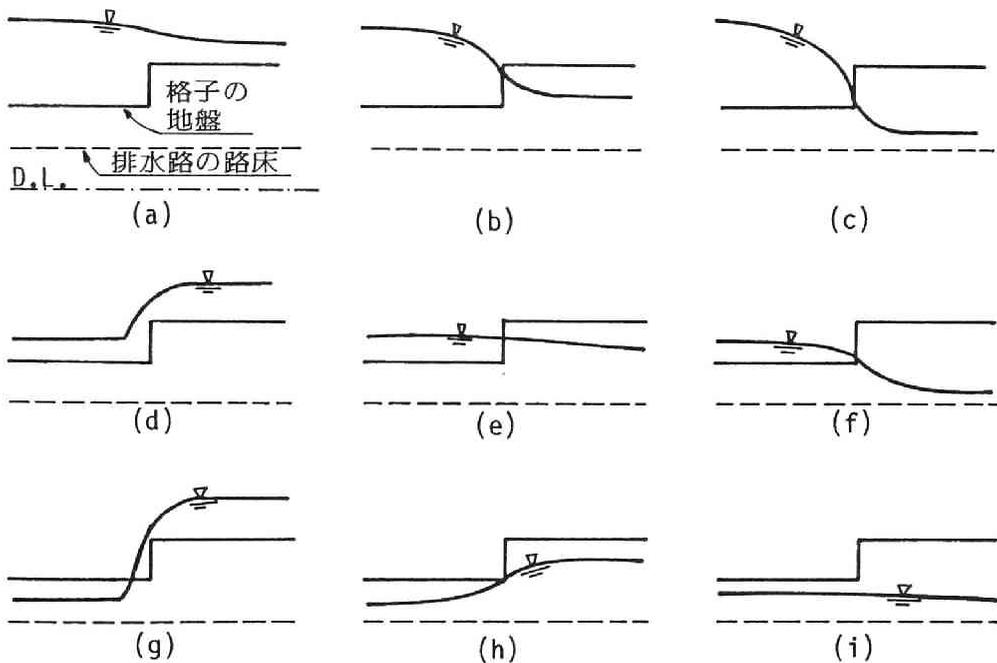


図2.26 水位の大小関係と ΔP の計算方法

$H_{i-1/2, j+1/2} = H_w$, $z_{b, i+1/2, j+1/2} = z_b$, $z_{b, i-1/2, j+1/2} = z_{bw}$, $z_{0b, i-1/2, j+1/2} = z_{0b, i+1/2, j+1/2} = z_{0b}$ である。また、ここでは $z_b > z_{bw}$ の場合だけを示すことにする（以下の a), b) …などは図2.26中の番号と対応させている）。

- a) $\min(H, H_w) > z_b$;

$$\Delta P/\rho = -g(H - z_b + H_w - z_{bw})(z_b - z_{bw})(\Delta y - b)/2 \quad (2.42)$$

- b) および c) $H_w > z_b > H$;

$$\Delta P/\rho = -g(z_b - z_{bw})^2(\Delta y - b)/2 \quad (2.43)$$

- e) $z_b > (H, H_w) > z_{bw}$;

$$\Delta P/\rho = -g(\max(H, H_w) - z_{bw})^2(\Delta y - b)/2 \quad (2.44)$$

- f) $z_b > H_w > z_{bw} > H$;

$$\Delta P/\rho = -g(H_w - z_{bw})^2(\Delta y - b)/2 \quad (2.45)$$

- h) および i) $z_b > H$, および $z_{bw} > H_w$; 排水路内だけの流れである（格子には浸水していない）ので、 $\Delta P/\rho = 0$ である。
- d) および g) の場合は段落ち流れであるので、2.2(2)で述べた方法が適用される。

以上により (2.37) 式の右辺が計算され、流量フラックス $M_{i, j+1/2}^{n+2}$ が求められる。全く同様にし、南北方向の排水路が存在する場合にも、 $N_{i+1/2, j}^{n+2}$ を計算することができる。

また、水深（あるいは水位）は、格子に連続式を適用したつぎの関係より求められる。

$$\begin{aligned} \frac{V_{i+1/2, j+1/2}^{n+3} - V_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}}{2\Delta t} = & -M_{i+1, j+1/2}^{n+2} B_{x, i+1, j+1/2}^{n+2} + M_{i, j+1/2}^{n+2} B_{x, i, j+1/2}^{n+2} \\ & - N_{i+1/2, j+1}^{n+2} B_{y, i+1/2, j+1}^{n+2} + N_{i+1/2, j}^{n+2} B_{y, i+1/2, j}^{n+2} \end{aligned} \quad (2.46)$$

ここに、 $V_{i+1/2, j+1/2}$ は格子に含まれる氾濫水の湛水量であり、排水路がない場合には、 $V_{i+1/2, j+1/2} = \Delta x \Delta y h_{i+1/2, j+1/2}$ であるが、排水路がある場合には、排水路の容量を含めて一般に水位 $H_{i+1/2, j+1/2}$ あるいは水深 $h_{i+1/2, j+1/2}$ の関数として与えられる。また B_x および B_y は M および N が流入・出す幅であり、 $B_{x, i, j+1/2}^{n+2}$ および $B_{y, i+1/2, j}^{n+2}$ には、水位 $H_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}$ が格子の地盤高 $z_{b, i+1/2, j+1/2}$ より低いときは東西および南北方向の排水路の幅に等しくとられ、 $H_{i+1/2, j+1/2}^{n+1}$ が $z_{b, i+1/2, j+1/2}$ より高い場合には Δy および Δx に等しくとられる。(2.46) 式より $V_{i+1/2, j+1/2}^{n+3}$ が計算され、これより格子ごとに定められている水位－湛水量の関係より、水位および水深が求められる。

(ii)適用例：計算に用いた対象領域は、前項と同じ旧巨椋池干拓地である。この堤内地に図2.27に配置が示される排水路（深さ2m, 幅10m, 粗度係数 $n = 0.025$ ）および盛土B1およびB2（天端高は地盤より2m高いとする）を想定した。これらでは、盛土と排水路が隣接する場合があることや排水路が分岐・合流・交差することが計算上実現されるように、現実の盛土や排水路の配置とは全く異なる仮想的なものが考えられている。また、ここでの計算では河道の計算は含めず、破堤点Aにおいて

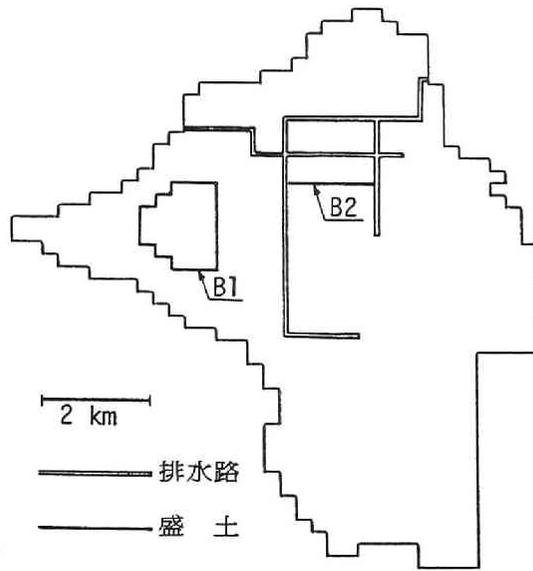


図2.27 想定される排水路および盛土

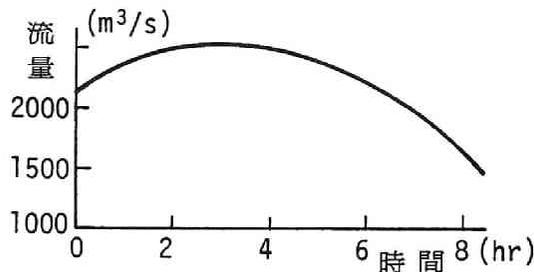
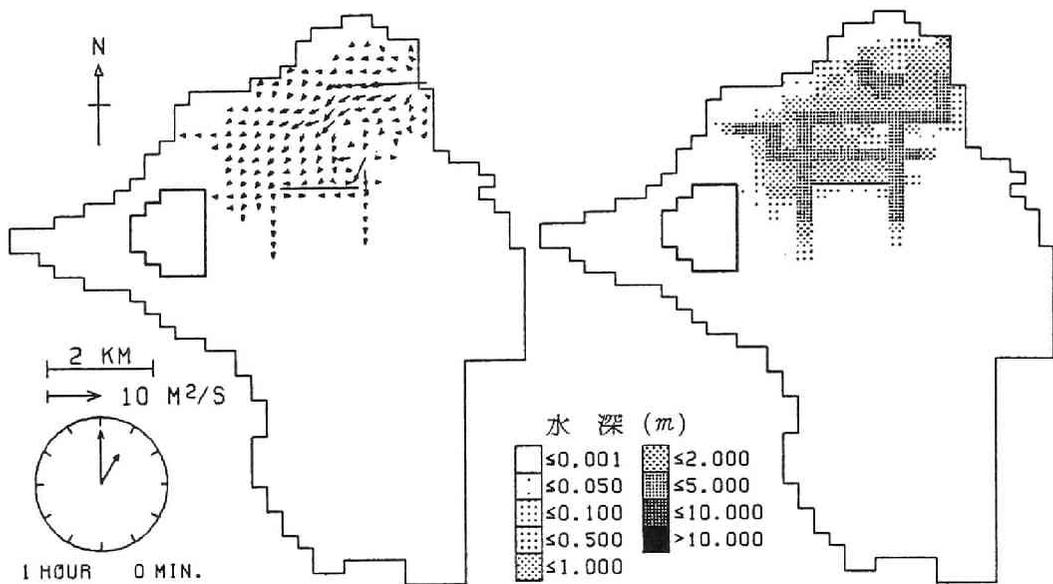


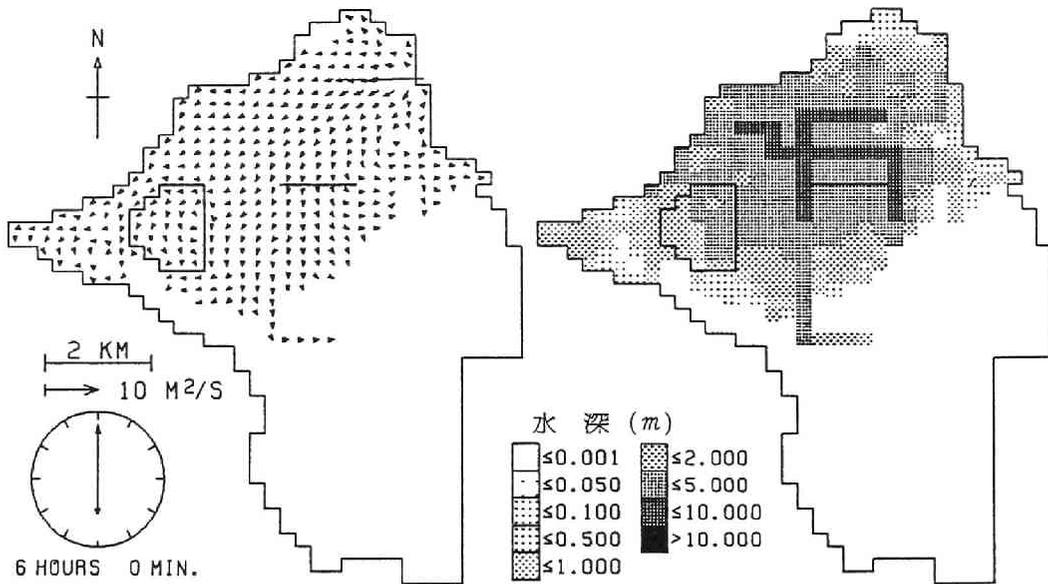
図2.28 堤内地への流入流量

図2.28のような越流流量のハイドログラフを与えた。図2.21(b)で求められた結果より大きい越流流量を与えたのは、排水路の影響が短い計算時間で現われるようにするためである。計算時間間隔を $\Delta t = 2.5$ 秒とするなど、他の条件は(1)と同じであるので省略する。

図2.29は計算結果の一例である。また比較のため、図2.30には同じ堤内地で排水路も盛土も想定しなかった場合の結果が示されている。ただし、図2.29中の水深には、図2.25に示される水面から格子の地盤までの深さ ($h = H - z_b$) ではなく、水面からその格子に含まれる排水路の一番低い路床までの深さ ($H - z_{db}$) がとられている。計算開始後1時間目の図2.29(a)を見ると、流量フラックスの分布では堤内地の地盤の低い部分へ向う流れが目立っているが、水深分布では明らかに排水路に沿って浸水が進んでいることが分る。また、図2.30(a)と比較すれば、図2.29(a)ではB2の盛土によって氾

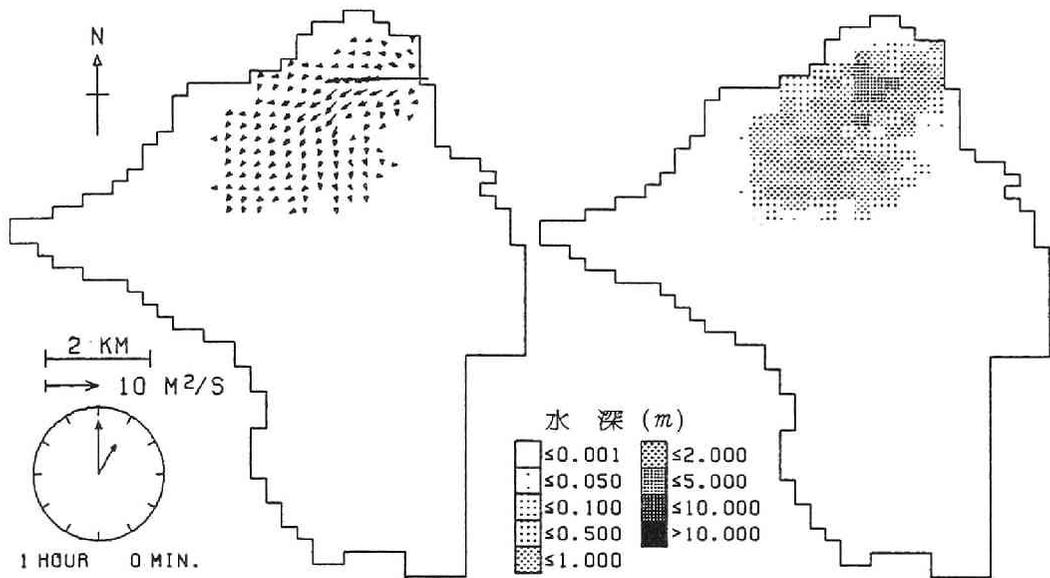


(a) 計算開始後 1 時間

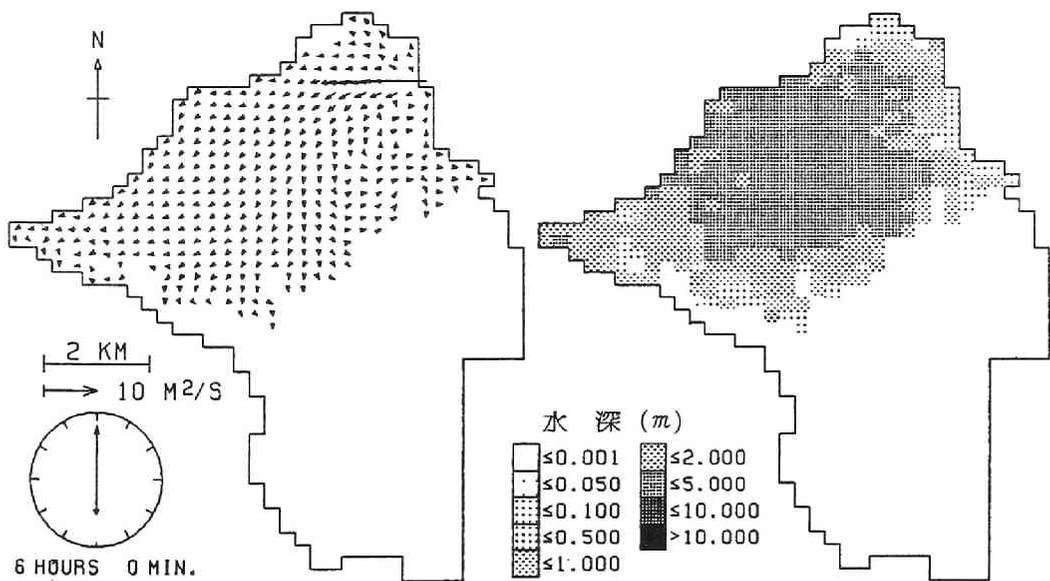


(b) 計算開始後 6 時間

図2.29 排水路および盛土を考慮した場合の計算結果



(a) 計算開始後 1 時間



(b) 計算開始後 6 時間

図2.30 排水路も盛土も存在しない場合の計算結果

濫水の南下は遮ぎられているものの、この盛土の両側にある排水路に速く浸水が及んでいるため、この排水路から盛土の南側にわずかながら浸水が始まっていることがみられる。つまり、排水路沿いに浸水が早く伝播し、周辺の格子にも浸水が及ぶ傾向がうかがわれ、排水路のある場合の計算結果として妥当なものであることが知られる。

計算開始後6時間経過した図2.29(b)では、流量フラックスは破堤点の近くを除いてきわめて小さくなっており、水面は水平に近づいているものと考えられる。B1の輪中堤の外側の水深は2 m以上に達しており、水位が盛土の天端高より高くなるため、輪中堤の内部にも氾濫水が浸水している。(a)と同様に排水路に沿った浸水も、南に延びる排水路とその周辺の格子にみられる。堤内地中央部の凹部にある排水路を含む格子の流量フラックスは上記のように小さいから、排水路を格子の周囲に沿わせる方法¹⁾でみられた計算時間が相当経過してからも排水路に大きい流量フラックスが残るという問題点は、本項での方法によって改善されたといえる。これは、格子に比べて大きさの小さい排水路を格子の内に含めることによって、大きさが極端に異なる計算を同時に進める必要がなくなったからであり、本項での方法が排水路が含まれる場合の計算法として有効なことを示すものである。

2.6 結 語

本章では、二次元一層モデルを用いて氾濫水の挙動を追跡する計算法を展開するとともに、いくつかの適用例を示した。結果を要約すれば以下のようなものである。

(1)はじめに、従来行われている一次元解析法による氾濫水の解析法の問題点と、氾濫水を二次元平面流れとして取扱わなければならない必要性について述べた。また、対象とする領域には一般に有堤部と無堤部が混在していて河道と堤内地が区別できない場合の多いことを考え、氾濫水の場をすべて二次元の氾濫原としてとらえる方法が現実的であることも示した。

(2)氾濫水の挙動には二次元一層モデルが適用されるとして、 x および y 方向の運動方程式および連続式を、前章と同様の方法によって、まず非線型項を省略した場合について差分式を導いた。ついで、氾濫水の解析で必要とされる各種の境界条件、すなわち山付堤などの境界、破堤点や河川の上・下流端などの境界、氾濫水の先端、氾濫原に散在する各種の盛土および段落ちの取扱いについても詳述した。

(3)非線型項の差分化については、問題を簡単にするため一次元流れを考えて理論的に予備的な考察を行い、この結果を氾濫水の解析に応用することを試行錯誤的な方法によって検討した。その結果、氾濫水の挙動のように時間的変化があまり大きくない場合には、非線型項を $t = n\Delta t$ の水量と $t = (n-2)\Delta t$ の水量の平均値で評価する方法が適切なことが知られた。この方法は、leap-frog法という計算法の特徴を失わずにすみ、計算時間が比較的短かいという利点を有している。

(4)対象領域が連続堤により堤外地(河道)と堤内地に区別できる場合には、河道の洪水に対しては第1編4.5の一次元解析法、堤内地の氾濫水に対しては本章の二次元一層モデルをそれぞれ適用し、両者を破堤想定点で結びつける方法が適切であるので、そのための計算法を河道一堤内地系における

洪水・氾濫水の解析法としてまとめるとともに、計算の流れを明らかにした。

(5)堤内地に排水用の小河川がある場合、これを格子の内部に含める計算法を展開し、そのための差分式の変更を行った。

(6)本章では、以上の氾濫水の解析法を種々の対象領域に適用した。その結果、

(i)二次元一層モデルによって、浸水期、湛水期および減水期という氾濫の全過程を通じて、氾濫水の挙動の追跡が可能である、

(ii)断面の流量ハイドログラフの流下に伴う変形といった一次元的特性もこの計算法によって十分とらえられる、

(iii)大規模な河川改修事業が上・下流に及ぼす影響を、この計算法によって予測できる、

(iv)河道と堤内地が連続堤によって区別できる場合、破堤による河道の洪水の変形が計算できる、ことなどが見い出され、本章で展開した氾濫水の解析法が氾濫を伴う種々の問題に有効かつ適切に応用されることが分った。

本章においては、計算値と観測値との比較は一切行われていない。これは、洪水氾濫の実績値についての資料の不足、不確実さおよび入手の困難さならびに計算で想定された各種の条件の実際との整合が十分できていないためである。しかし、計算結果は少なくとも定性的には妥当であるという証言は得られている。観測値との比較は、計算法の検証や粗度係数の推定などのために欠くことのできない技術的な課題であり、今後検討されなければならない。また、いずれの計算においても安定な計算を実施するため、きわめて小さな Δt が採られているため、膨大な計算時間を要するものも実用的な面からみれば問題点の一つであり、計算時間が短縮できるよう計算法を改良することも必要とされよう。

参考文献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 水鳥雅文: 氾濫水の水理の数値解析法, 京都大学防災研究所年報, 第23号B-2, 1980
- 2) Iwasa, Y. and K. Inoue: Mathematical simulation of flood and overland flows, Proc. International Conference on Numerical Modelling of River and Overland Flow for Water Resources and Environmental Applications, IAHR, Bratislava, Czechoslovakia, 1981
- 3) Iwasa, Y. and K. Inoue: Mathematical simulations of channel and overland flood flows in view of flood disaster engineering, Jour. Natural Disaster Science, Vol. 4, No.1, 1982
- 4) 和田 明: 原子力水理研究の現状と展望, 土木学会論文集, No.345, II-1, 土木学会, 1984
- 5) Dressler, R. F.: Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions, Jour. Res. National Bureau of Standard, Vol. 49, No. 3, 1952
- 6) 土木学会編, 水理公式集, 1985.
- 7) 岩佐義朗, 井上和也: 氾濫原における洪水の挙動の解析, 第20回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集, 1983

- 8) 建設省近畿地方建設局福知山工事事務所：由良川総合改修計画検討業務報告書, 1979
- 9) Iwasa, Y. and K. Inoue : Numerical effect of non-linear convective terms on two-dimensional flood flows invasion analysis, Proc. International Conference on Hydraulic Engineering Software, Hydrosoft'84, Portoroz, Yugoslavia, 1984
- 10) 岩佐義朗, 井上和也：氾濫原における洪水の挙動の解析(2), 第21回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集, 1984
- 11) 建設省近畿地方建設局淀川ダム統合管理事務所：淀川中・下流部不定流計算検討業務報告書, 1972
- 12) Xanthopoulos, Th. and Ch. Koutitas : Numerical simulation of a two-dimensional flood wave propagation due to dam failure, Jour. Hydraulic Research, Vol.14, No. 2, 1976

第3章 特性曲線法による二次元平面流れの数値計算法に関する研究

本編の第1および2章で述べた湖沼の湖流や氾濫水の挙動を二次元一層モデルによって数値計算するとき、その基礎方程式が時間および2つの空間変数の計3個の独立変数に関する双曲型一階連立偏微分方程式であることから、基礎式を特性曲線の理論によって書き改めることが可能であり、この考えを用いた数値計算法の展開が考えられる。

特性曲線は、第1編第1および2章で述べたように、流れにおける微小な擾乱の伝播という水理学的な現象を数学的に表現したものであるから、この特徴を活かせば流れのもつ水理学的特性を正しく反映した解析が可能と考えられる。第1編第4章においてはこのような考えのもとに、一次元流れを対象として特性曲線理論に基づく数値計算法を導いたが、その特徴の一つに境界条件の取扱いに明瞭な水理学的解釈が得られることがあった。本章は特性曲線理論を、二次元一層モデルによる数値計算に拡張して適用しようとするものであるが、後に述べるように二次元流れでは一次元流れの場合と異なり、数学的にはるかにむずかしくなるので、本章ではこの方法を用いた従来の研究の要点を概観するとともに、若干の検討¹⁾を加えるだけにとどめざるを得ない。

3.1 特性曲線理論による二次元平面流れの解析法

本節では、二次元平面流れを記述する二次元一層モデルの基礎式を、特性曲線の理論に基づく表示に改めるとともに、その結果を用いて数値計算のための差分式を導くにあたっての問題点について触れ、ついでこの方法を用いた従来の研究について述べる。

(1)基礎式と特性曲面

二次元一層式モデルの基礎式として、(1.4)~(1.6)式を考える。すなわち、それらを再記すればつぎのようである。

連続式：

$$L_1 \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(h + \xi) + \frac{\partial}{\partial y} v(h + \xi) = 0 \quad (3.1)$$

x 方向の運動方程式：

$$L_2 \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} - A_x = 0 \quad (3.2)$$

y 方向の運動方程式：

$$L_3 \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \xi}{\partial y} - A_y = 0 \quad (3.3)$$

ただし、(1.4)~(1.6)式で用いられた流量フラックス M および N は記述の都合上、流速 u および v に改められている。また、基準水面からの水位 H は ξ と表わされており、 h はこの章に限り基準

面から底面までの深さを意味する（したがって水深は $h + \zeta$ である。図3.1参照）。さらに、 A_x および A_y はそれぞれ x および y 方向の外力頂で Coriolis の力、表面せん断応力および底面せん断応力などが含まれる。

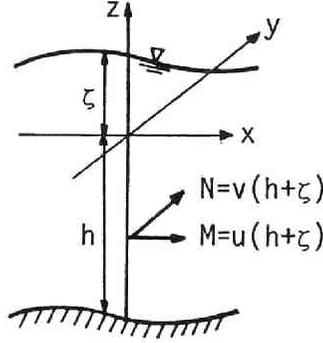


図3.1 二次元一層モデル

(3.1)～(3.3) 式は、 x, y および t を独立変数、 u, v および ζ を従属変数とする双曲型偏微分方程式系であり、以下のように特性曲面が導入される²⁾。便宜上、 $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)^t$ 、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^t = (\zeta, u, v)^t$ （右肩添字の t は転置を意味する）というベクトル表示を用いると、上の基礎式はつぎのようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{u}) = E \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \begin{bmatrix} u, & h + \zeta, & 0 \\ g, & u, & 0 \\ 0, & 0, & u \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \begin{bmatrix} v, & 0, & h + \zeta \\ 0, & v, & 0 \\ g, & 0, & v \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \\ + \begin{bmatrix} u \partial h / \partial x + v \partial h / \partial y \\ -A_x \\ -A_y \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここに、 E は単位行列である。

特性曲線を $x-y-t$ 空間に拡張した特性曲面は、この空間内のある曲面 $C: \phi(x, y, t) = 0$ で \mathbf{u} の値が初期値として与えられた場合に、(3.4)式によって $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ および $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ が一意的に定められない曲面として定義されている。いま、曲面 C 上で \mathbf{u} の値が与えられているとすると、 $\phi_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} - \phi_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ あるいは $\phi_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} - \phi_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ は C 上の内微分であって、 C 上の与えられた初期値より決定されるから既知とすることができる ($\phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ etc.)。すなわち、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} \phi_t - \frac{\partial u_i}{\partial t} \phi_x = \alpha_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial y} \phi_t - \frac{\partial u_i}{\partial t} \phi_y = \beta_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

と表わすとき、上述のことより、 α_i および β_i は既知と考えることができる。(3.4)式に ϕ_t を乗じ、

(3.5)式を用いて $\phi_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ および $\phi_t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$ を消去すれば、

$$\phi_t \mathbf{L}(\mathbf{u}) \equiv \tilde{\mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

が得られる。ここに、

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \phi_t + u\phi_x + v\phi_y & (h+\zeta)\phi_x & (h+\zeta)\phi_y \\ g\phi_x & \phi_t + u\phi_x + v\phi_y & 0 \\ g\phi_y & 0 & \phi_t + u\phi_x + v\phi_y \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 u + \beta_1 v + (\alpha_2 + \beta_3)(h+\zeta) + \phi_t \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \\ \alpha_1 g + \alpha_2 u + \beta_2 v - \phi_t A_x \\ \beta_1 g + \alpha_3 u + \beta_3 v - \phi_t A_y \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

である。 B は、上記のように、外力項および C 上の u の値から成る既知のベクトルである。(3.6)式より明らかに、 $\det \bar{Q} \neq 0$ ならば $\frac{\partial u}{\partial t}$ が一意的に決定され、これと (3.5) 式とからさらに $\frac{\partial u}{\partial x}$ および $\frac{\partial u}{\partial y}$ が一意的に決定され、これらを用いて曲面 C の近傍で (3.4) 式の解曲面が一意的に構成されることが導かれる。

一方、 $\det \bar{Q} = 0$ の場合、 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 、したがって $\frac{\partial u}{\partial x}$ および $\frac{\partial u}{\partial y}$ は一意的に決定されない。さきに述べたように、このときの曲面 $C : \phi(x, y, t) = 0$ が特性曲面である。すなわち、 $\det \bar{Q} = 0$ より

$$\det \bar{Q} = (\phi_t + u\phi_x + v\phi_y)(\phi_t + u\phi_x + v\phi_y)^2 - c^2(\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad (3.9)$$

が得られる。ここに、

$$c = \sqrt{g(h+\zeta)} \quad (3.10)$$

で定義される微小擾乱の伝播速度である。(3.9) 式は ϕ についての偏微分方程式であり、この式より特性曲面には以下の2つの型のものがあることが知られる。

(i) 第1の特性曲面

$$(\phi_t + u\phi_x + v\phi_y)^2 - c^2(\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad (3.11)$$

この場合 Monge の錐はつぎのように表わされる。

$$\left(\frac{dx}{dt} - u \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - v \right)^2 = c^2 \quad (3.12)$$

したがって、この特性曲面は図3.2のような擬円錐およびその接平面である。

(ii) 第2の特性曲面

$$\phi_t + u\phi_x + v\phi_y = 0 \quad (3.13)$$

この場合の特性曲面は、 $x-y-t$ 空間のベクトル $(u, v, 1)$ を軸とする Monge の束を構成する平面である (図3.3)。

(2) 特性曲面内の関係

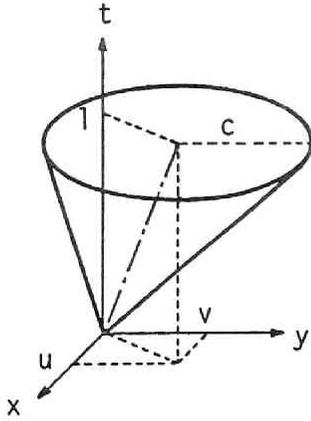


図3.2 第1の特性曲面

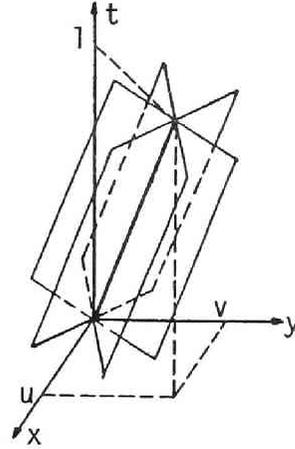


図3.3 第2の特性曲面

以上で導入された特性曲面内においては、 \mathbf{u} は任意の値をとりうるのではなく、つぎの関係によって束縛されている。すなわち、 $\det \tilde{Q} = 0$ のとき、 $\mu \tilde{Q} = 0$ を満たす $\mu (\neq 0)$ が存在するから、これを(3.6)式の左から乗ずると、

$$\phi_i \mu L(\mathbf{u}) \equiv \mu \tilde{Q} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mu \mathbf{B} = \mu \mathbf{B} = 0 \quad (3.14)$$

である。つまり、 \mathbf{B} には \mathbf{u} として特性曲面上の値およびその内微分しか含まれていないから、これより(3.4)式を μ で線型結合した式 $\mu L(\mathbf{u}) = 0$ は特性曲面上で \mathbf{u} が満たすべき微分方程式を構成する。具体的には以下のようなものである。

(i) 第1の特性曲面について：ベクトル μ として、 $\mu = (1, \frac{c \cos \theta}{g}, \frac{c \sin \theta}{g})$ が得られる(θ ：パラメータ、後述)。このとき、 $\mu L(\mathbf{u}) = 0$ は

$$\begin{aligned} \frac{D_c \xi}{Dt} + \frac{c}{g} \cos \theta \frac{D_c u}{Dt} + \frac{c}{g} \sin \theta \frac{D_c v}{Dt} &= \frac{c}{g} (A_x \cos \theta + A_y \sin \theta) \\ - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{c^2}{g} \left(\sin \theta \frac{Du}{D\theta} - \cos \theta \frac{Dv}{D\theta} \right) & \end{aligned} \quad (3.15)$$

である。ただし、

$$\frac{D_c}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u + c \cos \theta) \frac{\partial}{\partial x} + (v + c \sin \theta) \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.16)$$

$$\frac{D}{D\theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.17)$$

である。ここで、 θ を、図3.2の擬円錐のある点に立てた法線を $x-y$ 平面に投影したベクトルが x 軸となす角と考えれば(3.12)式は

$$\frac{dx}{dt} = u + c \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = v + c \sin \theta \quad (3.18)$$

と表わされる。ここに、(3.18)式で定義される曲線は陪特性曲線と呼ばれる。したがって、 $\frac{Dc}{Dt}$ は陪特性曲線に沿う微分であり、また $\frac{D}{D\theta}$ は擬円錐の接線方向の微分であって、いずれも第1の特性曲面内の微分である。つまり、(3.15)式は第1の特性曲面上での u および v に関する微分方程式である。

(ii) 第2の特性曲面について：ベクトル μ として、 $\mu = (0, -\sin \theta', \cos \theta')$ が得られる。ただし、 θ' は(i)の場合と同様である。いま、演算子

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.19)$$

$$\frac{D}{D\theta'} = -\sin \theta' \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta' \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.20)$$

を用いると、 $\mu L(u) = 0$ は

$$-\sin \theta' \frac{\delta u}{\delta t} + \cos \theta' \frac{\delta v}{\delta t} + g \frac{D\xi}{D\theta'} + A_x \sin \theta' - A_y \cos \theta' = 0 \quad (3.21)$$

である。明らかに、 $\frac{\delta}{\delta t}$ はMongeの束の軸に沿う微分であり、 $\frac{D}{D\theta'}$ は第2の特性曲面と $x-y$ 平面の交線に沿う微分であるから、この場合にも(3.21)式は特性曲面内の微分のみから構成されている。

(3) 差分式の誘導

以上に示した特性曲面内で成立する関係(3.15)および(3.21)式を用いて差分式を誘導する場合、第1編第1および4章で述べた2独立変数である一次元流れの場合と異なり、つぎのような問題が生ずる。

- (i) 第1および第2のように特性曲面が2種類存在する。
- (ii) (3.15)および(3.21)式はパラメータとしてそれぞれ θ および θ' を含んでおり、 $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$ の範囲で変化させれば無数の関係式が得られる。
- (iii) 上の(ii)の無数の関係式が互いに独立とは考えられない。
- (iv) (3.15)式で示される特性関係には陪特性曲線に沿わない微分が含まれている。

このように、2独立変数の場合(この場合、特性曲面は曲線であるから、内微分とはこの曲線に沿う微分である)とは異なり、数学的にはるかに複雑であるため、従来特性曲線法による差分式の誘導にあたっては研究者によってさまざまな方法が採られている。たとえば、Butler³⁾の方法(後にRichardson⁴⁾、Townson⁵⁾およびLai⁶⁾によって用いられている)では、第1の特性曲面に関する(3.15)式中の微分 $\frac{D}{D\theta}$ を消去するため、(3.15)式において $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の4本の陪特性曲線を考え、これに沿って(3.15)式を差分化するとともに、第2の特性曲面に関する(3.21)式を用いずに連続式(3.1)式を直接差分化している。この方法によるとき、図3.4のような差分schemeによって、時間微分を前方差分で近似すれば次式が得られる。

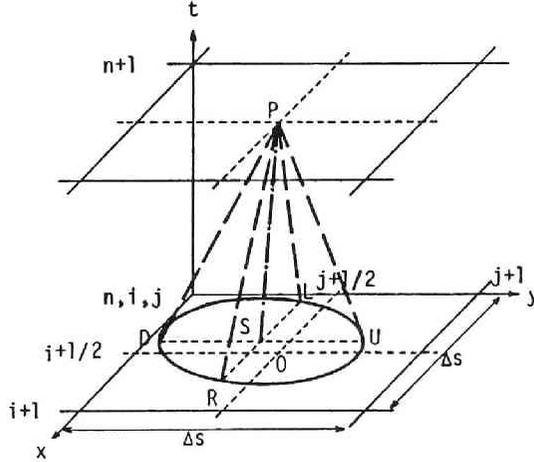


図3.4 差分 scheme

$$\theta = 0 : (\zeta_P - \zeta_n) - \frac{c_0}{g} (u_P - u_R) = \left[-\frac{c}{g} A_x - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right]_0 \Delta t \quad (3.22)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} : (\zeta_P - \zeta_U) - \frac{c_0}{g} (v_P - v_U) = \left[-\frac{c}{g} A_y - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 \Delta t \quad (3.23)$$

$$\theta = \pi : (\zeta_P - \zeta_L) + \frac{c_0}{g} (u_P - u_L) = \left[\frac{c}{g} A_x - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial v}{\partial y} \right]_0 \Delta t \quad (3.24)$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} : (\zeta_P - \zeta_D) + \frac{c_0}{g} (v_P - v_D) = \left[\frac{c}{g} A_y - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{g} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0 \Delta t \quad (3.25)$$

$$\text{連続式} : (\zeta_P - \zeta_S) = \left[-\frac{c^2}{g} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right]_0 \Delta t \quad (3.26)$$

ここに、添字 P , U などは図3.4の各点における値であることを示し、 Δt は時間の差分間隔である (ただし、Butler は (3.26) 式の右辺を、点 S と点 P における値の平均で評価している)。(3.22) ~ (3.26) 式の5式より、添字 P の未知量の計算式として、

$$u_P = \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_R - \zeta_L) + [A_x]_0 \Delta t \quad (3.27)$$

$$v_P = \frac{v_U + v_D}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_U - \zeta_D) + [A_y]_0 \Delta t \quad (3.28)$$

$$\zeta_P = \frac{1}{2} (\zeta_R + \zeta_L + \zeta_U + \zeta_D - 2\zeta_S) - \frac{c_0}{2g} (u_R - u_L + v_U - v_D) - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 \Delta t \quad (3.29)$$

が得られる。

一方、Daubert および Graffe⁷⁾ は、第1の特性曲面に関する (3.15) 式の差分式である (3.22) ~ (3.25) 式のみから未知量をつぎのように求めている。

$$u_P = \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{g}{2c_0} (\zeta_R - \zeta_L) + [A_x]_0 \Delta t \quad (3.30)$$

$$v_p = \frac{v_u + v_b}{2} - \frac{g}{2c_0}(\zeta_u - \zeta_b) + [A_y]_0 \Delta t \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \zeta_p = & \frac{1}{4}(\zeta_R + \zeta_L + \zeta_u + \zeta_b) - \frac{c_0}{4g}(u_R - u_L + v_u - v_b) - \\ & - \left[\frac{h+\zeta}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]_0 \Delta t - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0 \Delta t \end{aligned} \quad (3.32)$$

以上のほかにも、Coburn および Dolph や Holtらの2本の陪特性曲線と連続式を用いる方法⁴⁾、Thornhillの3本の陪特性曲線から誘導する方法があり¹⁾、さらに Pin-nam Lin⁸⁾らのように第2の特性曲面についての(3.21)式にも(3.22)～(3.25)式と同様の4方向を考える方法などが挙げられる。

3.2 staggered scheme による差分式との比較および計算例

前節で述べたように、特性曲線法による差分式には種々のものが考えられる上、さらにたとえば(3.22)～(3.32)式の右辺の諸量の値を、それらが既知の点の値から内挿するのにもいくつかの方法が考えられる。その結果、きわめて多様な計算式が出現することになるが、第1章で用いた staggered scheme による差分式との比較のため、差分化には第1の特性曲面だけを考える Daubertの方法を採り、また内挿法には3通りの方法を考える。

(1) staggered scheme による差分式

第1章で用いた基礎式は、(3.1)～(3.3)式に流量フラックスを用いるとともに、流れの移流的变化が小さいとして(3.2)および(3.3)式の方非線型項を省略した(1.4)、(1.8)および(1.9)式であった。これらをこの章での記号を用いて再記すると、つぎのようである。

$$\text{連続式: } \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (3.33)$$

$$x \text{ 方向の運動量方程式: } \frac{\partial M}{\partial t} + g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} - F_x = 0 \quad (3.34)$$

$$y \text{ 方向の運動量方程式: } \frac{\partial N}{\partial t} + g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - F_y = 0 \quad (3.35)$$

ここに、 $M = u(h+\zeta)$ 、 $N = v(h+\zeta)$ 、 $F_x = (h+\zeta)A_x$ 、 $F_y = (h+\zeta)A_y$ である。(3.33)～(3.35)式を第1章と同じ multi-level の staggered scheme (leap-frog 法の一つ)によって差分化した結果は、(1.10)～(1.12)式をここでの記号で表わした次式である(ただし、記述の都合上、時間ステップは、 $n, n+1, n+2, \dots$ に代って、 $n, n+1/2, n+1, \dots$ に改められており、また $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ としておく)。

連続式(3.33)式:

$$\frac{\zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+3/2} - \zeta_{i+1/2, j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} = - \frac{M_{i+1, j+1/2}^{n+1} - M_{i, j+1/2}^n}{\Delta s} - \frac{N_{i+1/2, j+1}^{n+1} - N_{i+1/2, j}^n}{\Delta s} \quad (3.36)$$

x 方向の運動量方程式 (3.34) 式：

$$\frac{M_{i,j+1/2}^{n+1} - M_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = -g(h + \zeta)_{i,j+1/2}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta s} + [F_x]_{i,j+1/2}^n \quad (3.37)$$

y 方向の運動量方程式 (3.35) 式：

$$\frac{N_{i+1/2,j}^{n+1} - N_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} = -g(h + \zeta)_{i+1/2,j}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta s} + [F_y]_{i+1/2,j}^n \quad (3.38)$$

(2) 特性曲線法の適用と差分式

(3.33) ~ (3.35) 式を前節と同様にして特性曲線による表示に改める。この場合の u は、 $u = (\zeta, M, N)^t$ であり、また行列 \tilde{Q} は

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \phi_t & \phi_x & \phi_y \\ c^2 \phi_x & \phi_t & 0 \\ c^2 \phi_y & 0 & \phi_t \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

である。したがって、特性曲面として、 $\det \tilde{Q} = 0$ より

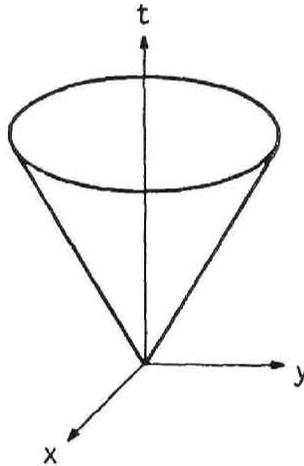


図3.5 第1の特性曲面
(非線型項を省略)

$$\phi_t^2 - c^2(\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \quad \text{および} \quad \phi_t = 0 \quad (3.40)$$

の2種類が導かれる。前者が第1の特性曲面 (図3.5) であり、後者が第2の特性曲面であることはいうまでもない。(3.18) 式に相当する陪特性曲線はこの場合、

$$\frac{dx}{dt} = c \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = c \sin \theta \quad (3.41)$$

である。上述のように、本節では、Daubert らの差分法を用いるので、以下では第1の特性曲面につ

いてのみ考える。 $\det \tilde{Q} = 0$ のとき $\mu \tilde{Q} = 0$ を満たす μ は、 $\mu = (1, \frac{\cos \theta}{c}, \frac{\sin \theta}{c})$ と求められ、
 (3.33) ~ (3.35) 式をこの μ によって線型結合した結果はつぎのようである。

$$\begin{aligned} \frac{D\zeta}{Dt} + \frac{\cos \theta}{c} \frac{DM}{Dt} + \frac{\sin \theta}{c} \frac{DN}{Dt} - \sin \theta \frac{DM}{D\theta} + \cos \theta \frac{DN}{D\theta} \\ - \frac{\cos \theta}{c} F_x - \frac{\sin \theta}{c} F_y = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

ただし、この場合の $\frac{D}{Dt}$ および $\frac{D}{D\theta}$ はつぎのようである。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + c \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + c \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \text{および } \frac{D}{D\theta} &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.43)$$

(3.42) 式を差分化するのに、 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ および $\frac{3\pi}{2}$ の 4 本の陪特性曲線を考えると、図3.6を参照して、

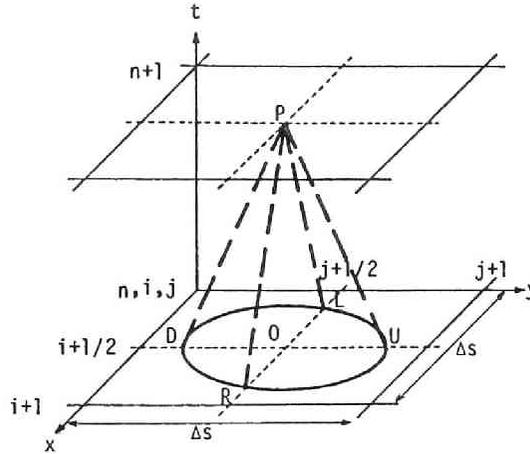


図3.6 差分 scheme (非線型項を省略)

$$\zeta_P - \zeta_R - \frac{1}{c_0} (M_P - M_R) = \left[-\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{1}{c} F_x \right]_0 \Delta t \quad (3.44)$$

$$\zeta_P - \zeta_U - \frac{1}{c_0} (N_P - N_U) = \left[-\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{1}{c} F_y \right]_0 \Delta t \quad (3.45)$$

$$\zeta_P - \zeta_L + \frac{1}{c_0} (M_P - M_L) = \left[-\frac{\partial N}{\partial y} + \frac{1}{c} F_x \right]_0 \Delta t \quad (3.46)$$

$$\zeta_P - \zeta_D + \frac{1}{c_0} (N_P - N_D) = \left[-\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{c} F_y \right]_0 \Delta t \quad (3.47)$$

が得られる。これらの 4 式より未知量を求めるとつぎのようである。

$$M_P = \frac{M_R + M_L}{2} - \frac{c_0}{2} (\zeta_R - \zeta_L) + [F_x]_0 \Delta t \quad (3.48)$$

$$N_p = \frac{N_u + N_d}{2} - \frac{c_0}{2}(\zeta_u - \zeta_d) + [F_y]_0 \Delta t \quad (3.49)$$

$$\zeta_p = \frac{1}{4}(\zeta_R + \zeta_L + \zeta_u + \zeta_d) - \frac{1}{4c_0}(M_R - M_L + N_u - N_d) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)_0 \Delta t \quad (3.50)$$

(3) 内挿法

(3.48)～(3.50)式で必要な、点 R , L , U および D における ζ , M および N は、当該点の周辺の格子点での値から内挿法によって求めなければならない。まず、1次内挿によると、

$$\frac{f_R + f_L}{2} = f_{i+1/2} + \frac{c_{i+1/2} \Delta t}{2\Delta S} (f_{i+3/2} - 2f_{i+1/2} + f_{i-1/2}) \quad (3.51)$$

$$f_R - f_L = \frac{c_{i+1/2} \Delta t}{\Delta S} (f_{i+3/2} - f_{i-1/2}) \quad (3.52)$$

などが得られる。ここに、 $f_{i+1/2}$ は点 $i+1/2$ における M , N および ζ の値を意味する。

2次元内挿によるならば、(3.51)式は

$$\frac{f_R + f_L}{2} = f_{i+1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{c_{i+1/2} \Delta t}{\Delta S} \right)^2 (f_{i+3/2} - 2f_{i+1/2} + f_{i-1/2}) \quad (3.53)$$

と改められ、(3.52)式は変化しない。これらの内挿法を用いれば、(3.48)～(3.50)式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - \zeta_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} &= - \frac{M_{i+3/2,j+1/2}^n - M_{i-1/2,j+1/2}^n}{2\Delta S} - \frac{N_{i+1/2,j+3/2}^n - N_{i+1/2,j-1/2}^n}{2\Delta S} \\ &+ \varepsilon \frac{c_{i+1/2,j+1/2}^n}{4\Delta S} \{ \zeta_{i+3/2,j+1/2}^n - 2\zeta_{i+1/2,j+1/2}^n + \zeta_{i-1/2,j+1/2}^n \} \\ &+ \{ \zeta_{i+1/2,j+3/2}^n - 2\zeta_{i+1/2,j+1/2}^n + \zeta_{i+1/2,j-1/2}^n \} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - M_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} &= - g(h + \zeta)_{i+1/2,j+1/2}^n \frac{\zeta_{i+3/2,j+1/2}^n - \zeta_{i-1/2,j+1/2}^n}{2\Delta S} + [F_x]_{i+1/2,j+1/2}^n \\ &+ \varepsilon \frac{c_{i+1/2,j+1/2}^n}{2\Delta S} (M_{i+3/2,j+1/2}^n - 2M_{i+1/2,j+1/2}^n + M_{i-1/2,j+1/2}^n) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{i+1/2,j+1/2}^{n+1} - N_{i+1/2,j+1/2}^n}{\Delta t} &= - g(h + \zeta)_{i+1/2,j+1/2}^n \frac{\zeta_{i+1/2,j+3/2}^n - \zeta_{i+1/2,j-1/2}^n}{2\Delta S} + [F_y]_{i+1/2,j+1/2}^n \\ &+ \varepsilon \frac{c_{i+1/2,j+1/2}^n}{2\Delta S} (N_{i+1/2,j+3/2}^n - 2N_{i+1/2,j+1/2}^n + N_{i+1/2,j-1/2}^n) \end{aligned} \quad (3.56)$$

ただし、 ε はつぎのようである。

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & (1\text{次内挿}) \\ c_{i+1/2,j+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta S} & (2\text{次元内挿, ただし } \varepsilon \text{ の添字は略}) \end{cases} \quad (3.57)$$

さらに近似的な内挿として、図3.6において $R-L$ 間および $D-U$ 間で M , N および ζ が直線的に

変化するとすれば、(3.51)式において、 $\frac{(f_R + f_L)}{2} = f_{i+1/2}$ とできるから、この結果は (3.54) ~ (3.56) 式において $\epsilon = 0$ とすることに相当する (ただし、この場合 (3.54) ~ (3.56) 式は不安定な差分式である⁹⁾)。

(4) staggered scheme による差分式との比較

staggered scheme による差分式 (3.36) ~ (3.38) 式と比較するため、(3.48) ~ (3.50) 式を同様の scheme (図3.7) を用いて (3.54) ~ (3.56) 式を導いたのと同じ考え方により書き改めると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+3/2} - \zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} &= - \frac{M_{i+1,j+1/2}^{n+1} - M_{i,j+1/2}^{n+1}}{\Delta s} - \frac{N_{i+1/2,j+1}^{n+1} - N_{i+1/2,j}^{n+1}}{\Delta s} \\ &+ \epsilon \frac{C_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{4\Delta s} \{ \zeta_{i+3/2,j+1/2}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \zeta_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2} \\ &+ \zeta_{i+1/2,j+3/2}^{n+1/2} - 2\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} + \zeta_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2} \} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{M_{i+1,j+1/2}^{n+1} - M_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} &= - g(h + \zeta)_{i,j+1/2}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta s} + [F_x]_{i,j+1/2}^n \\ &+ \epsilon \frac{C_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{2\Delta s} (M_{i+1,j+1/2}^n - 2M_{i,j+1/2}^n + M_{i-1,j+1/2}^n) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{i+1/2,j+1}^{n+1} - N_{i+1/2,j}^n}{\Delta t} &= - g(h + \zeta)_{i+1/2,j}^{n+1/2} \frac{\zeta_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - \zeta_{i+1/2,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta s} + [F_y]_{i+1/2,j}^n \\ &+ \epsilon \frac{C_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{2\Delta s} (N_{i+1/2,j+1}^n - 2N_{i+1/2,j}^n + N_{i+1/2,j-1}^n) \end{aligned} \quad (3.60)$$

これより、staggered scheme による差分式 (3.36) ~ (3.38) 式は、(3.58) ~ (3.60) 式において $\epsilon = 0$ と置いた (この差分式の安定条件は C.F.L. 条件 (1.18) 式である⁹⁾) 場合に相当することが分かる。つまり、(3.36) ~ (3.38) 式は、特性曲線法において図3.7のように未知量を求めるべき点を時間のお

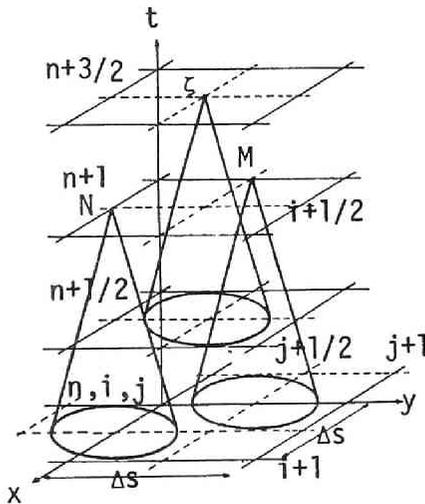


図3.7 staggered scheme と特性曲面

よび空間的にずらせた staggered scheme を用いて、しかも内挿法として関与する格子点の間で水量が直線的に変化するとした ($\epsilon = 0$) ものと同等であるということが出来る。

(5) 琵琶湖南湖の湖流の計算

以上述べてきた特性曲線法による二次元一層モデルの数値計算法を、第1章で採り上げた琵琶湖南湖の湖流の解析に適用しよう。計算に必要なせん断応力の評価法や各種の定数および南湖の差分格子の分割や境界条件の設定法などはすべて第1章と同様であるので、ここでは省略する。

計算では、1.3とほぼ同様の平水時に近い水理条件を考え、瀬田川の流量（宇治川発電所の取水流量を含む）が $100\text{m}^3/\text{s}$ 、琵琶湖疏水の取水流量が $22.3\text{m}^3/\text{s}$ 、堅田の水位がTP 84.371m（鳥居川量水標の零点）とし、また風については北東の風向で風速は 5m/s とした。

図3.8(a)は、(3.54)～(3.56)式で $\epsilon = 1$ とした場合の定常状態に達したとみなされるときの湖流の分布であり、図3.8(b), (c)および(d)は、それぞれ (3.58)～(3.60)式で $\epsilon = 1$, $\epsilon = c_{i+1/2,j+1/2}^2 \frac{\Delta t}{\Delta s}$ および $\epsilon = 0$ とした場合の同様の結果である ($\Delta t = 15$ 秒, $\Delta s = 500\text{m}$, また(c)では南湖の中央部で $\epsilon \approx 0.25$)。図より明らかなように、(a)と(b)ではともに、流れは北端から流入した後そのまま南下し、東岸に接するところでようやく南西向きになるものの再び直線的に南下し瀬田川へ流入してしまうという、互いにほとんど差のない結果が示されている。つまり $\epsilon = 1$ の場合、図3.7のように staggered scheme にしてもしなくても大差がないといえる。第1章の差分式と同じである(d)では、水深の浅い東岸側に風向と同じ向きの流れが発生し、水深が比較的深い西岸側では風向と逆向きの流れ

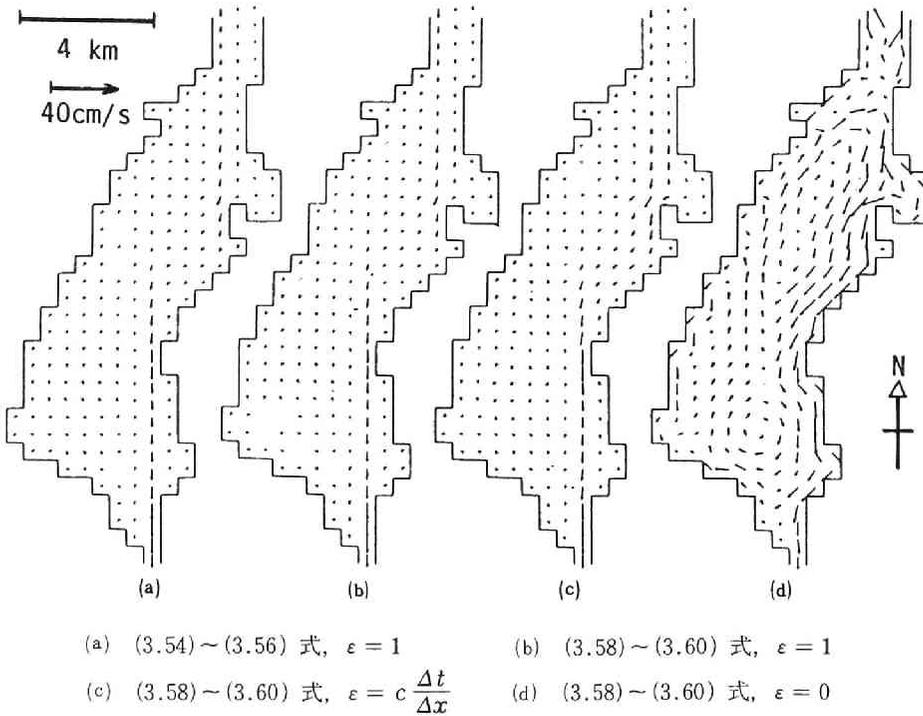


図3.8 琵琶湖南湖へ適用した結果

が現われ、第1章で述べたとおり、全体として時計回りの環流が生じている。 ε が(b)と(d)の中間の値となっている(c)では、流れも(b)と(d)の中間的な特徴を示している。この図には含まれていないが、(3.54)～(3.56)式で $\varepsilon = c_{i+1/2, j+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta S}$ としたときの結果は、(a)と(b)がほぼ同一であるのと同じ程度で、(c)に似通っている。

これらをまとめると、図3.7のような staggered scheme にするか否かよりも、 ε の値の方が結果に大きい影響を及ぼしていることが知られる。しかし、一方 $\varepsilon = 0$ の場合には、(3.54)～(3.56)式は不安定な差分式であるのに対し、(3.58)～(3.60)式は(d)のように安定な結果をもたらしている。つまり、 ε を単なるパラメータとみなすならば、 ε がある程度大きければ、(3.54)～(3.56)式と、これを staggered scheme で表わした(3.58)～(3.60)式とほとんど差異のない結果を与えるが、 $\varepsilon \rightarrow 0$ に従って両者の結果は急速に異なってくるものと予想される。また一方、(3.54)～(3.56)式あるいは(3.58)～(3.60)式において ε が乗せられている項は、明らかに2階の微係数の差分近似に相当しているから、この項は数値粘性として作用することが考えられる。図3.8の(b)、(c)および(d)の差異はむしろこの点からみるべきかも知れないが、特性曲線法が通常の差分法と異なり、なぜこのような粘性項をもたらすかについてはさらに検討が必要である。

3.3 結語

本章においては、一次元流れの場合に、水理学的な意義づけが明瞭な数値計算法を導くことができた特性曲線理論を二次元一層モデルで表わされる二次元平面流れにも適用しようとした。しかし、一次元流れの場合と異なり、二次元平面流れでは特性曲線理論がきわめて複雑になり、基礎式の特性曲線による表示は比較的容易に導かれるにもかかわらず、2種類の特性曲面が存在することや陪特性曲線に沿う無数の関係が存在しうること、および陪特性曲線に沿わない方向の微分が含まれることなどから、さまざまな差分化が可能なが分った。そこで、本章では第1の特性曲面において4本の陪特性曲線に沿う関係より差分式を導くことにし、これに含まれる内挿値のとり方に3種類の方法を考えてみた。その結果、第1および第2章で用いていた基礎式を staggered scheme において直接差分化した式が、上の方法の特殊な場合であることが知られ、特性曲線理論における位置づけが明らかにされた。また、ここで導かれた計算式を用いて琵琶湖南湖の湖流を数値計算した結果からは、上述の内挿値のとり方が数値粘性に結びつけて考えられうることが予想され、第1章で述べたような風向と湖底地形によって特徴づけられる吹送流は得られないことが分った。特性曲線法の計算式がこのような粘性項をもたらす理由およびこの項の数値計算上の特性などを明らかにすることが今後必要とされる。

参考文献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 吉田英信: 特性曲線法による二次元平面流れの数値解析法に関する2, 3の検討, 京都大学防災研究所年報, 第24号B-2, 1981

- 2) Courant, R. and D. Hilbert : Methods of mathematical physics, Vol. II, Interscience Pub., 1962
- 3) Butler, D. S. : The numerical solution of hyperbolic systems of partial differential equations in three independent variables, Proc. Roy. Soc., A, 255, 1966
- 4) Richardson, D. J. : The solution of two-dimensional hydrodynamic equations by the method of characteristics, Method of Computational Physics, Vol. 3, New York Academic Press, 1964
- 5) Townson, J. M. : An application of the method of characteristics to tidal calculations in (x-y-t) space, Jour. of Hydraulic Research, Vol. 12, 1974
- 6) Lai, C. : Computer simulation of two-dimensional unsteady flows in estuaries and embayments by the method of characteristics, Basic theory and formulation of numerical method, U. S. Geological Survey, 1977
- 7) Daubert, A. et O. Graffe : Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et nonpermanents, Application aux estuaires, La Houille Blanche, 22 Année, 1967
- 8) Lin, Pin-nam, Xuehua Chao and Linbao Shi : Simulation of tidal flow in a bay, Application of the characteristics theory, Jour. of Hydraulic Engineering, Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power Research, Beijing, P. R. C., 1979
- 9) 吉田英信：特性曲線法による平面流れの数値解析法に関する研究，京都大学修士論文，1980

結 論

水工学の分野において、複雑な境界形状を有する場での流れおよび輸送現象を、与えられた初期・境界および環境条件のもとで個々に具体的に解析するのに、電子計算機を用いる数値計算法が現在きわめて有効な手段として採られており、適用される水域およびそのための方法は急速な拡がりを見せられている。本研究は、このような数値計算法のうちから、一次元および二次元の開水路流れを対象にして、差分法によって解析する方法の現状を取りまとめるとともに、適用にあたっての諸問題について考慮し、数値計算法の有用性と有効性を高めようとしたものである。すなわち、一次元および二次元の開水路流れを数値計算の方法によって解析する場合のそれぞれの流れに応じた計算モデルを構成し、数値計算上の種々の問題について検討して計算のアルゴリズムを確立するとともに、水工学の分野に現われる実際の開水路流れの諸問題に数値計算法を適用して解析を行い、数値計算による解析がどの程度の有用性と有効性をもつかを考察したものである。

本研究で対象とする流れの取扱い方については、つぎのような制約を加えている。

- (1) 非定常流を中心とするが、乱れなどの流れの微視的な構造の問題には立ち入らない。
- (2) 漸変流を扱い、圧力は静水圧分布であるとする。
- (3) 自由表面の曲率は無視されるとしておく。
- (4) 水路床は時間的に変化しない固定床とする。

対象とした流れを具体的にいえば、一次元流れとしては河道における洪水流を中心とする非定常流、二次元流れについては湖沼における平面的な流れおよび氾濫原における洪水などの大規模流れの水理学的挙動である。

本研究においては、数値計算法として差分法を適用した。それは、差分法が空間の次元数にかかわらず同じ考え方で比較的容易に数値計算式を導くことができるからである。

以下に本研究の各章の結果を要約し、結論とする。

第1編では一次元流れを取扱った。第1章においては、一次元流れを表わす慣用の基礎式に関して、運動量解析法およびエネルギー解析法のそれぞれから一次元の保存則性を示し、さらに特性曲線表示への変換について考察した。すなわち、まず一次元流れの基礎式は、質量、運動量および力学的エネルギーに関して、一次元の保存則の関係、つまり流れ方向の単位長さに含まれる物理量の時間的変化率は、その物理量のフラックスの流れ方向のこう配および物理量の単位時間あたり単位長さあたりの発生量と平衡するという関係を、近似的に満たしていることを示すとともに、保存則系の不連続部における跳躍条件 (Rankine - Hougnot の関係) が、従来より段波に対して水理学的に導びかれている関係に他ならないことを明らかにした。また、従来より慣用されているエネルギー解析法の基礎式すなわち Saint Venant の式は、上記のような物理的な意義を有する保存則をそのままでは表わしていないが、形式上保存則にまとめられること、およびその結果は水路を一様とすれば運動量解析法の

基礎式とみかけ上大差のないことを述べた。

ついで双曲型の保存則系における特性曲線の意義および特性曲線による表示への展開を一般的に述べ、数値計算に用いられる特性曲線に沿う微分方程式が、基礎式の線型結合で表わされることを導いた。さらに、運動量解析法およびエネルギー解析法の基礎式を特性曲線による表示に改め、それらが流れによる影響の伝播という水理学的な意義を有することを示し、これから一次元の非定常流の解析において境界条件の数が、流れが常流の場合には上・下流端でそれぞれ1個ずつであり、流れが射流の場合には上流端で2個であるという従来の知見を確かめた。

第2章においては、一次元の非定常流に関する従来の解析的な研究のうち、本研究の展開に関連する事項についての取りまとめを行った。まず、非定常流の基礎式(2.1)および(2.2)式において、すべての項が省略されない場合のdynamic wave理論と、底こう配および摩擦こう配がつり合うような流れのkinematic wave理論の適用性を分類するのに、水深方向の長さのスケールと流れ方向の長さのスケールとの比を底こう配で除したパラメータ σ を用いて、 $\sigma \geq 1$ のときdynamic wave理論が適用され、 $\sigma \ll 1$ のときkinematic wave理論が適用されることを示した。また、流れの変化が急な場合に、dynamic waveの波先での擾乱の発達をみることにより、同族のdynamic waveの交差による段波の発生条件(2.25)式を示すとともに、dynamic waveが減衰する場合の時間スケールが、(2.21)式の λ の逆数で与えられることを導いた。

つぎに、dynamic waveとkinematic waveが共存する流れにおいて、それぞれがどのような役割を果たすかをみるため、基礎式を線型化した系に加えられた擾乱の検討を行い、その結果、擾乱の波先がdynamic waveで伝播し、水深が最大である擾乱の主要部がkinematic waveで伝播することを明らかにした。さらに、上の取扱いで考慮されていないkinematic waveの非線型性、すなわちkinematic waveの伝播速度の相違によるkinematic waveの収束あるいは発散について検討し、とくに収束の極限であるkinematic waveの交差によって発生するkinematic shockについて考察し、不連続な解で表わされるkinematic shockが並進座標系において定常ならば、単斜上昇波によって置き換えられること、および単斜上昇波の前面のFroude数に応じてkinematic waveとdynamic waveとが合体した流れが生ずることを導いた。最後に、以上の取扱いでしばしば現われる流れの安定性についてのまとめを行い、線型系に加えられたすべての波数の擾乱の発達条件と転波列の維持条件およびkinematic waveの伝播速度がdynamic waveの伝播速度より大きくなる条件がすべて同一であることを、摩擦項に一般的な表示を用いて示した。

第3章においては、kinematic wave理論を用いた流れの解析法について詳述した。kinematic wave理論の第1次近似の基礎式は(3.1)および(3.2)式によって示され、これより

- ① kinematic waveの伝播速度がKleitz-Seddonの法則によって表わされる、
- ② kinematic waveに沿って流量したがって水深が一定である、
- ③ kinematic waveの伝播速度は流量が大きいほど速い、
- ④ 第1次近似によって波形の前面は流下に伴ってより急峻になり、また後面はより緩やかになる

という波形の変形が示される、

⑤ 第1次近似によっては波形の減衰は示されない、

などの従来の結果をまとめた。また、kinematic wave が収束して kinematic shock が発生した場合には、図3.3のような手順によってその位置を予め求めておかなければならないことを導き、kinematic shock が含まれる第1次近似による計算法を明らかにした。

ついで、第1次近似の問題点である波形の減衰が表わせないことや、kinematic shock が機械的な計算に依りがたいことを補正する第2次近似として、先述のパラメータ σ に関する摂動法あるいは逐次近似法と、これらとは考え方を異にして水面こう配の影響を考慮して拡散項を基礎式に導入する方法とがあることを述べ、それぞれの方法について解析的な検討を行った。波形全体を対象とする摂動法および逐次近似法による結果は、それぞれ(3.44)および(3.59)式(あるいは、次元を戻した(3.64)式および(3.67)式)によって表わされることを導くとともに、両者を比較して流れの変化や緩やかな場合には互いに大差なく、また洪水流の水深のピークの伝播に関しては従来(高橋および林の結果)に一致することおよびピークの減衰はピークが kinematic shock に巻き込まれるまでにはそれほど大きくはないことなどを明らかにした。また同時に、摂動法や逐次近似法の適用範囲は考えている kinematic wave が kinematic shock に含まれてしまうまでに限られることも明らかにされ、結局、これらの方法では kinematic shock の問題は克服できないことが知られた。もう一つの第2次近似である拡散項を含む方法に関しては、拡散項の導入により波形の減衰が表わされるとともに、kinematic shock での不連続性が緩和されることを、線型化された解析的な解によって確かめ、この方法が kinematic wave の第2次近似として適用性が広いことを示した。

第4章では、これまでのように単純な水路条件のもとで流れを解析的に取扱おうとする立場を離れ、数値計算による方法を実際の一次元流れに適用するように、一般的な形で述べた。まず、kinematic wave 理論による計算方法の差分式を導き、第1次近似では kinematic wave の伝播を考慮して上流側差分を採用した(4.8)式が安定性の点からみて好ましい差分式であることを導くとともに、kinematic shock が現われた場合にも機械的な計算が可能な拡散項を含む第2次近似への拡張を、水路幅が十分に広く単位幅での取扱いが可能な場合に限って行い、さらに計算式の安定条件を検討した。その結果、差分式に応じて種々の安定性の必要条件、すなわち(4.17)式(拡散に関する安定条件および kinematic wave に関する Courant-Friedrichs-Lewy, —C.F.L.—, 条件)や(4.19)式(拡散の安定条件と C.F.L. 条件の組み合わせ)が得られた。

つぎに、dynamic wave 理論による数値計算法について、保存則系の代表的な差分法である Lax-Wendroff 法および第1章で得られた特性曲線による表示を用いる特性曲線法(4.31)および(4.32)式を導き、両者の関係が、用いる内挿法が Lax-Wendroff 法では2次であるのに対し、本章の特性曲線法では1次であることを明らかにした。また、Lax-Wendroff 法および特性曲線法による安定条件の検討を行い、Lax-Wendroff 法では dynamic wave に関する C.F.L. 条件(4.55)式および摩擦項に起因する Vasiliev の安定条件(4.54)式を導き、また特性曲線法に関しては上記の条件の他に流れが

射流ではないことがつけ加わることを示し、これが、ここでの特性曲線法では上流および下流に伝わる dynamic wave が存在することを前提としているためであることを導いた。さらに、Vasiliev の条件を避けるためには、摩擦項に含まれる流速を、時間 $n\Delta t$ での流速と $(n+1)\Delta t$ での流速の平均で評価すればよいことを示すとともに、流れが射流の場合の特性曲線法を、dynamic wave がいずれも下流向きであることを考慮して導き、第2章での流れの安定性とこの章の計算の安定性の関連について考察して、計算においては与えられる擾乱の波数によって安定性が異なることを明らかにした。最後に、エネルギー解析法を適用した射流でない場合の特性曲線法によって、河川における洪水などの非定常流を数値計算する方法を、計算格子の中間点、境界点、分・合流点について詳しく述べ、また初期条件の設定法より、この特性曲線法が定常流に対する標準逐次計算法を非定常流に拡張したものであることを明らかにするとともに、図4.14のような計算法の構成を示して計算のプログラムの作製を容易にした。

第5章においては、以上の計算法を各種の一次元の非定常流に適用した。すなわち、幅が十分に広く単位幅の取扱いが可能な開水路における微小な擾乱や水深の変化の大きい洪水の伝播、実験水路において発生させた非定常流、淀川における洪水追跡、上野遊水池の調節計算、瀬田川の遡上波、淀川における洪水の遡上追跡を採り上げた。kinematic wave 理論による方法と dynamic wave 理論による方法とが比較された仮想的な水路における計算(5.1および5.2)では、先述のパラメータ σ が 10^{-3} の程度であれば kinematic wave の第1次近似で十分であり、 σ が 10^{-2} の程度になれば波頂の減衰を示す摂動法や逐次近似法による第2次近似が有効になり、 σ が 10^{-1} の程度になれば上のような近似では過剰な減衰が示され十分な結果が得られないことや、拡散項を含む第2次近似では σ の広い範囲にわたって良好な結果が得られ、とくに σ が小さいときは線型解で波頂の減衰が示されることなどが得られた。一方、kinematic shock が現われた場合には、摂動法や逐次近似法では計算が不可能であることや、kinematic shock は dynamic wave 法では非常に急な水深変化を示す解として得られ、また拡散項を含む第2次近似では kinematic shock の内部で拡散が大きく現われることなどが知られた。実験水路における非定常流の計算(5.3)では、dynamic wave 理論による Lax-Wendroff 法および特性曲線法だけを適用した。その結果、Lax-Wendroff法の精度が高いことや特性曲線法では急激な変化が平滑化されすぎることなどが得られた。

5.4~5.7における実際の河川の洪水などの計算では、特性曲線法だけを適用した。その結果、河川における洪水追跡の計算、遊水池による洪水調節機能の計算、ゲート操作に伴うゲートより上流の水位変動、下流のハイドログラフより上流のハイドログラフを求める洪水の遡上追跡に、特性曲線法の考え方が有効に適用されうることを、したがってまたこの方法により水工学上の種々の問題の水理学的な検討が可能なが知られた。

第4および第5章においては、dynamic wave 理論にもとづいた洪水の解析に重点が置かれている。それは、kinematic wave が、理論上の種々の役割を有するものの、基本的に kinematic wave によって流れの影響の上流から下流への伝播しか表わされていないという理論的な制約がある上、伝播速度

および拡散係数に関して経験的な資料が十分に得られないという実際的な面の制約も強く、実用的な数値計算にそれほど広い適用性を有していないと考えられるからである。また、これらの章においては dynamic wave 理論のうちでも、特性曲線法が中心になっているのは、この方法が dynamic wave による影響の伝播という水理学的な特徴を数値計算法にもそのまま反映させたものであるからであり、さらに基本的に2点間の差分で表わされる計算法が構成でき、不規則な断面を有する実際の流れに、流れの変化が緩やかであれば広い適用性を有するからである。

第2編においては二次元平面流れの数値計算法とその応用を取扱った。第1章においては、浅水湖の湖流などの二次元平面流れに二次元一層モデルを適用する場合の基礎式、およびこれを数値計算するときの計算式と方法について詳述するとともに、これを琵琶湖南湖の湖流と拡散の解析に適用し、琵琶湖南湖の水理学的な特性について考察した。まず、流れの基礎式を、底面が $\Delta x \times \Delta y$ 、高さが水面から湖底までの有限な大きさの control volume について積分し、その後 Δx および $\Delta y \rightarrow 0$ とし、二次元一層モデルの基礎式 (1.4), (1.5), (1.6) および (1.7) 式を導いた。つぎに、これを差分表示するため、multi-level の staggered scheme を用いることにし、基礎式の移流項（非線型項）を省略した場合についての差分式を示して二次元平面流れの計算モデルを構成し、さらにこれを琵琶湖南湖へ適用するときに必要な境界条件や外力の条件を具体的に述べた。

琵琶湖南湖の湖流および拡散を解析した結果はつぎのようである。まず、湖流に関しては南湖に卓越して現われる4時間周期の静振など、比較的長周期の変動に対して計算値と観測値は少なくとも定性的に一致するとみてよい結果が得られた。すなわち、4時間の周期の静振は計算によってよく再現されたが、その減衰は観測値より遅く、計算モデルはやや揺れやすいことや、これらを改善するには湖底および水面の摩擦の再検討や非線型項の導入が必要であることが知られた。また、南湖の平均的な湖流の分布は、風向と湖底地形によって特徴づけられる吹送流によって表わされ、図1.8のように風向に応じて時計回りあるいは反時計回りの環流が形成され、さらにこれに瀬田川の流量の影響が加わることが知られた。また、2風系による定常な湖流を用いた拡散・滞留の計算結果より、南湖内の拡散物質の濃度分布は環流の強弱によって顕著な差を呈し、それに伴って南湖の応答を示す滞留特性も著しく異なることが分り、結局湖流および物質の拡散・滞留という南湖の水理にとって、風が重要な因子であることが得られた。

第2章においては、第1章と同じ二次元一層モデルを用いて氾濫原における洪水の挙動を追跡する計算法を展開し、いくつかの適用例を示した。まず、対象領域全体を河川も含めて氾濫原とみなす方法が、河川に有堤部と無堤部が混在する場合には現実的であることを示し、計算には第1章と同じ差分式を対象領域の全域で用いることにした。湖流の場合と異なり、氾濫水の計算で必要とされる破堤点や河川の上・下流端などの境界、氾濫水の先端、氾濫原に散在する盛土や段落ちといった特殊な境界条件の計算法を詳述した。つぎに、これまで省略されていた非線型項の差分化について、簡単のため一次元流れについて理論的に予備的な検討を行い、この結果を氾濫水の解析に応用することを試行錯誤的な方法によって検討した。その結果、氾濫水のように時間的な変化があまり大きくない場合には、

非線型項を $t = n\Delta t$ 水理量と $t = (n-2)\Delta t$ の水理量の平均値で評価する方法が適切なことが知られた。この方法は leap-frog 法という計算法の特徴を失わずにすみ、計算時間が比較的短かくてすむという点において有利である。

対象領域が連続堤により河道と堤内地に区別できる場合には、河道の洪水に対して第1編第4章の一次元解析法、堤内地の氾濫水に対して二次元一層モデルを適用し、両者を破堤点で結びつける方法が適切であるので、そのための計算法を河道一堤内地系における洪水・氾濫水の解析法としてまとめ、計算の流れを明らかにした。最後に、堤内地の特殊な地形として、幅が計算の格子の大きさに比較してかなり小さい排水用の小河川（排水路）を考え、これが含まれる場合には、排水路を計算格子の中央に配置する方が計算の安定性の面から好ましいことを示し、そのときの計算法を導いた。

この章では、以上の氾濫水の解析法を種々の対象領域に適用した。その結果、二次元一層モデルによって、氾濫水の浸水期、湛水期および減水期といった氾濫の全過程の追跡が可能なることが知られた。さらに、流量ハイドログラフの流下に伴う変形といった一次元的な特性もこの計算法によって十分とらえられることや、大規模な河川改修が上・下流に及ぼす影響をこの計算法によって予測できることが分った。また、河道と堤内地が連続堤により区別できる場合には、破堤による河道の洪水の変形が計算できることや、堤内地に排水路がある場合には氾濫の初期において排水路沿いに氾濫水が浸入するが、時間がかなり経過すれば排水路沿いの流れは小さくなって浸水にはほとんど影響がないという特徴が、ここでの計算法で解析できることが知られた。

第3章においては、特性曲線理論を二次元平面流れに適用した。特性曲線（面）は、第1編で述べたように、流れに加えられた微小な擾乱の伝播という水理学的な現象を数学的に表現したものであるから、この特徴を活かせば流れのもつ水理学的特徴を正しく反映した計算法が可能であるという意図のもとに研究が進められている。まず、二次元平面流れの基礎式から2種類の特性曲面を導くとともに、この曲面内で成立する微分方程式を基礎式の線型結合によって (3.15) および (3.21) 式のように導いた。しかし、一次元流れの場合と異なり、これらより差分式を導く場合、

- ① 2種類の特性曲面が存在する、
- ② 陪特性曲線に沿う無数の関係が存在しうる、
- ③ この無数の関係が互いに独立とは考えられない、
- ④ 陪特性曲線に沿わない方向の微分が含まれる、

などから、さまざまな差分法が可能なることが分った。この章では4本の陪特性曲線に沿う関係より差分式を導き、これに含まれる内挿値のとり方をいくつか変えて差分式を導くとともに、第1章の staggered scheme による差分式と比較した。その結果、内挿点において従属変数が直線的に変化するとした差分式 ((3.57) 式の $\epsilon = 0$) が、第1章の差分式に相当することが知られた。

ここで導かれた計算式を用いて琵琶湖南湖の湖流を数値計算した結果からは、内挿値のとり方が数値粘性に結びつけて考えられることが予想されたが、特性曲線法の計算式がこのような粘性項をもたらす理由やこの項の数値計算上の役割などを明らかにすることは今後の課題とされた。

謝 辞

最後に、本研究をすすめるにあたり、終始御懇篤な御指導と御激励を賜った京都大学工学部教授岩佐義朗先生に衷心より感謝申し上げます。また、研究遂行上の種々の問題に適切な御助言をいただいた京都大学工学部教授中川博次先生および同防災研究所教授村本嘉雄先生にも厚く御礼申し上げます。さらに、研究の実施においては、京都大学工学部土木工学教室河川工学研究室の卒業生各位および現在在籍の諸兄の絶大な御支援をいただいたことを記し、深甚の謝意を表わします。

筆者が水工学に関連した勉強を始めることができたのは、故石原藤次郎先生の門下へ入門が許されてからであります。亡き先生の師恩に感謝し、謹んで御冥福をお祈り申し上げます。

