

格子ボルツマン法と個別要素法を用いた  
固液混相流解析システムの地球工学分野への応用

京都大学大学院工学研究科

社会基盤工学専攻地質工学研究室

三善孝之

2009年3月

## 概要

固液混相流とは、固体(粒子)と液体が混在する流れである。その発現分野は、化学、機械、土木、そして医療分野にまで多岐に渡っている。地球工学分野においても、以下のように多くの事例が挙げられる。防災工学では、地震動などによって発生する液状化・流動化問題がある。中でも粒子によって支保される地盤が、振動により流体支保の状態に一時的に変化するメカニズムは、完全には明らかにはなっていない。また人的・物的に大きな損害をもたらす火砕流、土石流や海底地すべりなどは、堆積物重力流の一種であり、斜面上を流下する粒子は周囲の流体を取り込み、複雑な流動形態を示す。さらに、海底地すべりは、津波の誘因として近年注目が集まっている。地すべりの規模や水深などと、発生する津波の波高との関係を推定する研究が進められているが、まだ未解明な点は非常に多い。また、石油生産・開発の分野においては、石油生産にとりまなう砂および泥粒子の輸送によって、出砂等の油層障害が引き起こされている。従って、こうした様々な分野における、固液混相流の発生・発展過程および、内部での粒子および流体の挙動を明らかにしていくことが必要である。

これまでの固液混相流システム解析は、その流れの複雑さゆえに、実験的および経験的な方法によって、巨視的な評価を行う研究が大半であった。近年では、計算機の演算能力の向上とともに、コンピュータシミュレーションによる再現も多くなされるようになってきた。こうした固液混相流の数値計算においては、流体流動と固体運動を連成的に解いていく必要がある。しかしながら、多くの研究では、流体要素もしくは固体要素に対して仮定を行い系の簡素化・単純化が行われている。例えば、対象となるモデル構造そのものを単純化・平滑化したものや、流体から粒子への作用もしくは、粒子から流体への作用を無視したもの、さらに粒子を含む流体を高粘性単相流として扱うものや、三乗則やダルシー則などを使って流体流動を簡単に扱うものなどが挙げられる。このような手法では、複雑な構造を有する問題や複雑な流動形態を正確に表現しているとは言い難い。

そこで、本研究では流体流動計算としてナビエ-ストークス方程式を解くことができる格子ボルツマン法と、個々の粒子運動を逐次計算する個別要素法を連成させることで、これらの問題の解決を試みる。格子ボルツマン法は、流体を連続体として取り扱うのではなく、離散粒子の集合体と捉える考え方に基づいている。この仮想的な粒子群の運動は、ボルツマン方程式に従うものとし、局所的な粒子同士の衝突および並進運動によってのみ表現される。個別要素法は、バネ、ダッシュポッド、スライダーといった単純要素で粒子間の力学的相互作用を表現する手法である。すなわち、多数粒子による同時衝突を比較的正確に求めることができる。なお粒子から流体への作用は、粒子の移動に伴う流体領域の変化を逐次更新することと、粒子の移動速度を流体計算の境界条件に取り込むことで表現できる。流体から粒子への作用は、粒子周囲の流速分布から粒子にかかる力学的作用を算出することで実現できる。このように、格子ボルツマン法と個別要素法の連成解法では、複雑構造下における固液混相流を粒子サイズのスケールにおいて正確に求めることができると考えられる。しかしながら、この手法の地球工学各分野への適用事例はまだ極めて少ない。また本手法における課題の一つは、対象となる岩石構造などを格子によりモデル化するため、精度よい計算を行うためには計算コストが高くなりがちであることである。ただし、格子ボルツマン法では、各格子点上における近傍の情報のみを用いて時間発展的に計算を進める方法であるゆえに、領域分割を行う並列化をなすことで有る程度解決することができる。

本研究では、地球工学分野における固液混相流システムに対する汎用数値シミュレータとして、格子ボルツマン法と個別要素法の連成解法の構築を目的としている。まず、格子ボルツマン法の並列化を行い、多孔質岩石内流体流動に適用しその有効性を検討した(第3章)。その結果、並

列数 8 程度までは、領域分割による並列化で比較的良好な並列効率が得られることがわかった。

続いて、フラクチャ内流体流動シミュレーションを行い、複雑形状を対象にした流体流動計算における格子ボルツマン法の有効性を示した (第 4 章)。しばしばフラクチャ形状は平行平板を仮定して、その流量は開口幅の三乗に比例するとされる。ここでは、実際に見られるような三乗則からの乖離を再現し、開口幅の標準偏差を用いて平均開口幅を正規化したものが鍵となるパラメータであることを示した。

次に、開発した固液混相流シミュレータを用いて、水中における固体運動力学の素過程となる、粒子沈降シミュレーションを行った (第 6 章)。これは、本手法の妥当性を、既存の実験的研究や数値シミュレーションから、検証するものである。単一粒子沈降シミュレーションでは、レイノルズ数の違いによる粒子沈降過程の差異を再現することができた。また、二粒子沈降シミュレーションにおいても、同様にレイノルズ数の大きさによって、二つの粒子が (1) 沈降方向と垂直な方向に並んで安定して沈降する場合と、(2) 先行粒子に後方粒子が追いついて、衝突し、次いで追い越すという現象 (DKT 現象) を繰り返す場合、に分かれることを示した。これらは既存の研究結果とよく一致を示した。また、アナログ実験もを行い、数値シミュレーションにおけるパラメータのキャリブレーションとして有用であることを示した。

最後に大規模な応用問題として、海底地すべりを模した数値シミュレーションを行った (第 7 章)。開発した固液混相流シミュレータによって、水中土石流の再現を行うことができた。この土石流は、ヘッド部とボディ部に明確に分かれて流動していた。ヘッド部においては粒子流が周囲の流体を取り込む流動形態が見られ、これは、海底地すべりにおける堆積物重力流の流動形態が、水中土石流から混濁流へと変化することに対応している。また、シミュレーションで得られた堆積物重力流の内部速度プロファイルは、実際の海底地すべりにおける速度プロファイルと、定性的によく一致していた。ヘッド部とボディ部の速度プロファイルは、明瞭な違いが見られ、これは、実測される速度プロファイルに対する解釈への有益な情報を与えることができるものである。さらに、流動後の堆積厚さを見てみると、斜面を下りきった直後に少しへこみが生じていることが観察された。これは、既存の堆積物重力流の水路実験結果とよく一致するものであった。これらのことから、本シミュレータが、海底地すべりの発生から堆積物の流動化そして堆積に至るまでの一連の流れを全て表現することが可能であることを示せた。また、シミュレーションの条件を変えることで、海底地すべりの発生原因を検討することや、また流動形態の違いから生じる堆積構造の違い等を検討することも可能である。さらに、格子ボルツマン法と個別要素法の連成解析では、地すべりによる粒子運動によって発生する二次的な流体流動も計算している。そのため、海底地すべりが海水面に及ぼす影響をも計算することが可能であり、津波研究に応用できる。すなわちこれまで作られた波高推定モデルの検証や、新たな地すべり津波モデルの構築を行っていくことができると考えている。

さらに、格子ボルツマン法は二相流体のシミュレーションも比較的容易であるため、ここで提案した固液混相流モデルを、液液二相流下での粒子運動問題に応用することを考えている。これは、例えば、石油開発分野におけるリザーバシミュレータで用いるパラメータを決定するための、ポアスケールシミュレーション手法としての利用が期待される。

## Abstract

Solid-fluid physics is of great importance in geo-engineering studies about liquefaction, submarine landslides, fluidized bed, and so on. Complex solid-fluid systems have commonly been studied with experimental and empirical methods. Recently direct simulation of the solid-fluid systems became popular thanks to dramatic improvement of computer performance. The numerical methods need to carefully consider a coupling of three processes; solid dynamics, fluid dynamics, and their interaction. But most of conventional methods adopt some approximations to at least one of the process, and may lead to oversimplification.

In this thesis, I developed a new simulator for geo-engineering solid-fluid problems. I used the lattice Boltzmann Method (LBM) as a solver of Navier-Stokes equation; and the discrete element method (DEM) as a simulator for the motion of solid particles including neighbourhood interactions. Interaction between solid particles and fluid flow are also implemented. The method is suitable for complicated boundary structures such as fractures and porous media. Although computationally expensive, it is easy to parallelize the programming code.

Two numerical simulations were conducted to evaluate the developed LBM-DEM simulator. First, I simulated particles settling in steady water. In the single particle settling, I observed that trace patterns of a particle changed at  $Re = 2.0$ . In two particle settling simulation, the DKT phenomenon was reproduced at relatively high Re number. At low Re number, two particles descended in parallel. These results showed good correspondence with the previous numerical and experimental works.

Next, I applied the LBM-DEM method to the sediment gravity flow, a type of submarine landslides. The simulation reproduced the characteristics of subaqueous debris flow, and its deposition pattern. Head and body part of the flow were clearly distinguishable. In the head part, the sediment flowed down the slope convolving surrounding water with increasing fluidization. This indicated there happened transition from subaqueous debris flow to turbidity current. The internal velocity of the sediment gravity flow showed the same trend as the in-situ measurement of submarine landslides offshore California. I also observed that deposits were thinner just upstream of the slope break point, and thickest downstream of the slope break point, which agreed with the previous analogue experiments. The LBM-DEM simulator also have a good potential for analyzing relationship between tsunami and sediment gravity flow, since the method compute secondary water movement caused by the submarine slide.

My research suggest that the LBM-DEM simulator be a powerful tool to analyze various geo-engineering problems from small as a fracture, to large as submarine landslides.



# 目次

第 1 章	緒言	1
1.1	本論文の概要	2
第 2 章	格子ボルツマン法の理論	3
2.1	格子ボルツマン法とは	3
2.2	格子ボルツマン方程式	4
2.2.1	ボルツマン方程式から格子ボルツマン方程式の導出	4
2.2.2	BGK 近似	5
2.3	具体的な計算手法	5
2.3.1	格子と速度モデル	6
2.3.2	衝突演算	6
2.3.3	並進過程および巨視化	9
2.3.4	境界条件	10
2.4	チャップマン・エンスコグ展開を用いた流れの支配方程式の導出	16
2.4.1	平衡分布関数	16
2.4.2	格子ボルツマン法における格子速度の等方性	16
2.4.3	平衡分布関数の速度モーメント	18
2.4.4	$W_i$ の導出	19
2.4.5	ナビエ・ストークス 方程式の導出	20
第 3 章	格子ボルツマン法の並列化とその効果	29
3.1	はじめに	29
3.2	モデルに対する離散化の影響	29
3.3	格子ボルツマン法の並列化手順	32
3.4	並列化による性能向上	33
3.4.1	計算機環境および計算モデル	35
3.4.2	並列化効果	36
3.4.3	ハイブリッド並列の効果	37
3.5	まとめ	38
第 4 章	フラクチャ内流れの解析	40
4.1	はじめに	40
4.2	フラクチャモデルの作成	40
4.3	3 乗則からの乖離	41
4.4	乖離のパラメータ	44
4.5	2 次元フラクチャ内流体流動解析	45

4.5.1	2次元解析に用いたフラクチャモデル	45
4.5.2	シミュレーション結果	46
4.5.3	2次元流解析のまとめ	49
4.6	3次元フラクチャ内流動解析	52
4.6.1	3次元解析に用いたフラクチャモデル	52
4.6.2	Reynolds 方程式と LBM	52
4.6.3	3次元流れの可視化	57
4.6.4	速度の鉛直成分	57
4.6.5	3乗則からの乖離	58
4.6.6	3次元流解析のまとめ	62
4.7	まとめ	62
<b>第5章</b>	<b>LBM と DEM のカップリング手法</b>	<b>65</b>
5.1	LBM と DEM のカップリング手法の概要	65
5.2	粒子から流体への作用	65
5.3	固体粒子の運動	66
5.3.1	流体から粒子への作用	66
5.3.2	粒子 - 粒子間相互作用	67
<b>第6章</b>	<b>水中の粒子沈降</b>	<b>69</b>
6.1	単一粒子沈降	69
6.1.1	はじめに	69
6.1.2	シミュレーション結果	70
6.1.3	まとめ	72
6.2	二粒子沈降	72
6.2.1	はじめに	72
6.2.2	モデル設定とシミュレーションの概要	72
6.2.3	水平安定	77
6.2.4	Drafting, Kissing & Tumbling	77
6.2.5	まとめ	82
6.3	パラメータスタディのためのアナログ実験	82
6.3.1	実験装置と実験の概要	82
6.3.2	実験結果	86
6.3.3	実験のまとめ	90
6.4	まとめ	90
<b>第7章</b>	<b>堆積物重力流シミュレーション</b>	<b>91</b>
7.1	はじめに	91
7.1.1	海底地すべりの発生から堆積まで	91
7.1.2	本シミュレーションの位置づけ	92
7.2	モデルの設定	92
7.3	シミュレーション結果	92
7.3.1	流体流動形態の変動と粒子群の巨視的構造変化	93
7.3.2	ヘッドの構造変化	98

7.3.3	粒子群の巨視的速度	99
7.3.4	粒子群内部速度	99
7.3.5	シミュレーション結果のまとめ	105
7.4	考察	110
7.4.1	堆積物重力流の概観	110
7.4.2	堆積物重力流の内部速度	111
7.4.3	堆積構造	111
7.4.4	まとめと今後の課題	111
第 8 章 結言		113
付 録 A Navier-Stokes 方程式の導出		119
A.1	平衡分布関数の導出	119
A.2	平衡分布関数の速度モーメントの導出	121
A.2.1	積分公式	121
A.2.2	平衡分布関数に対する速度モーメント	122
A.3	$W_i$ の導出	125
A.3.1	D2Q9 モデル	125
A.3.2	D3Q15 モデル	126

# 目 次

2.1	2D lattice models . . . . .	7
2.2	3D fifteen velocity model . . . . .	8
2.3	Boundary condition. . . . .	11
2.4	Boundary condition on the lattice node. . . . .	15
2.5	The periodic boundary condition. . . . .	17
3.1	3D pore structure model by Finney’s random packing (Finney, 1970). . . . .	30
3.2	Cross-sections through the 3D random packing model with various mesh dimensions. $\zeta$ is the sphere diameter length with the lattice number. The rock spheres become finer according to the mesh number. . . . .	31
3.3	Variation of porosity with sphere diameter of the porous rock models used in our numerical experiment. Porosity becomes almost uniform when $\zeta$ is greater than 20. . . . .	32
3.4	Slice parallelization of model, where $np$ is the number of processors. . . . .	33
3.5	Full domain and parallelized sub-domains. Full domain is separated into four gray regions. Each sub-domain has extra nodes (white regions) for MPI communications. . . . .	34
3.6	Results of benchmark tests of (a) the PC cluster and (b) HPC2500. From left to right, calculation time, speedup ( $s$ ), and efficiency ( $\epsilon$ ) are plotted versus the number of processors. . . . .	37
3.7	Thread efficiency with respect to 1 thread calculation versus the number of threads; (a) the number of total CPU is fixed; (b) the number of process is fixed. . . . .	39
4.1	The PSD functions of surface profile and aperture profile for a natural fracture. . . . .	42
4.2	The lower wall of the fracture. . . . .	42
4.3	2D fracture model. This model is divided into $1000 \times 120$ lattices. . . . .	43
4.4	The schematic model of a single fracture. . . . .	43
4.5	The deviation from the cubic law for the 2D fracture model. The deviation becomes larger according to narrowing the aperture. . . . .	44
4.6	The schematic drawings of $\sigma_f$ (a) and $\sigma_d$ (b). $\sigma_f$ is the standard deviation of upper or lower fracture height and $\sigma_d$ is the standard deviation of the fracture aperture. . . . .	45
4.7	Model A. As the both surfaces are the same shape, the aperture is uniform. That is, $\sigma_d$ is zero and $\sigma_f$ depends on the amplitude of a sine curve. . . . .	46
4.8	Model B. The upper surface is a sine curve and the lower surface is flat. $\sigma_f$ is equal to $\sigma_d$ . . . . .	47

4.9	Model C. The upper surface is a mountain shape and the lower surface is flat. $\sigma_f$ is equal to $\sigma_d$ .	47
4.10	Model D. (a) The upper and lower surfaces are the same shape which are created by the fractal algorithm. The lower surface moves to right direction with (b) 5% and (c) 10% of the fracture length.	48
4.11	The lines with symbols are the result of model 2D-A. The solid line corresponds to Figure 4.5. The legend " $\sigma$ " is all $\sigma_f$ . $\sigma_d$ is zero. The deviation from the cubic law cannot be seen.	49
4.12	The dashed lines with solid symbols are the result of model B. The solid line without symbols corresponds to Figure 4.5. The deviation from the cubic law becomes larger with increasing of $\sigma_d$ .	50
4.13	The dotted lines with line symbols are the result of model C. The solid line without symbols corresponds to Figure 4.5. The deviation from the cubic law becomes larger with increasing of $\sigma_d$ .	50
4.14	The dashdotted lines with open symbols are the result of model D. The solid line without symbols corresponds to Figure 4.5. The deviation from the cubic law becomes larger with increasing of $\sigma_d$ . The legend " $\sigma$ is all $\sigma_d$ . $\sigma_f$ is 12.6.	51
4.15	All the result of model B–D. The solid line corresponds to Figure 4.5. The dashed lines with solid symbols are model B. The dotted lines with line symbols are model C. The dashdotted lines with open symbols are model D. The deviation from the cubic low becomes larger according to increasing of $\sigma_d$ .	51
4.16	the result of model B–D normalized by $\sigma_d$ without $\sigma_d = 0$ . The solid line corresponds to Figure 4.5. The dashed lines with solid symbols are model B. The dotted lines with line symbols are model C. The dashdotted lines with open symbols are model D. The tendency of the deviation from the cubic low is very similar.	52
4.17	The left figures are M121(1), and the right figures are M121(2). The upper figures show aperuture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.	53
4.18	The left figures are M151(1), and the right figures are M151(2). The upper figures show aperuture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.	54
4.19	The left figures are L121(1), and the right figures are L121(2). The upper figures show aperuture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.	55
4.20	The left figures are L151(1), and the right figures are L151(2). The upper figures show aperuture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.	56
4.21	The visualized fluid flow through the 3D fracture. A solid line is a streamline for fluid flow. A gray plate is a section of the fracture.	58
4.22	3D flow in L151(2) with the isosurface of fluid velocity.	59
4.23	Lower wall in a fracture. The red area is a moutain shape and the blue area is a valley shape.	60

4.24	Vertical velocity on two parallel sections in the fracture. The fluid flows upward in the red area and it flows downward in the blue area. . . . .	61
4.25	The schematic drawings of the 2D section for two fracture types. . . . .	62
4.26	The model 3D-A. The legend " $\sigma$ " is $\sigma_f$ . The $\sigma_d$ is constant. The trend of the deviation is the same in each model. . . . .	63
4.27	The model 3D-B. The legend " $\sigma$ " is $\sigma_d$ . The $\sigma_f$ is constant. The deviation becomes larger according to the $\sigma_d$ . . . . .	63
5.1	The closed surface $S$ around a particle with a diameter $D_s$ and the unit outward normal vector $\mathbf{n}$ on the surface $S$ (Inamuro et al., 2000). . . . .	68
6.1	The initial model for single particle settling. . . . .	70
6.2	Trajectories of particles settling in the narrower channel ( $L = 1.5d$ ). . . . .	73
6.3	Trajectories of particles settling in the middle channel ( $L = 4d$ ). . . . .	74
6.4	Trajectories of particles settling in the wider channel ( $L = 8d$ ). . . . .	75
6.5	Trajectories of particles settling from different initial positions in the middle wide channel ( $L = 4d$ ). (a) $Re=0.565$ . (b) $Re=13.2$ . . . . .	76
6.6	Drag coefficient. . . . .	77
6.7	The initial model of two particles settling. . . . .	78
6.8	Snapshots of two particles settling. $L = 8d$ . $Re = 1.95$ . . . . .	79
6.9	$L = 8d$ . $Re = 1.95$ . Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter. . . . .	80
6.10	$L = 4d$ . $Re = 0.922$ . Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter. . . . .	81
6.11	Snapshot of two particles settling. $Re = 7.92$ . $L = 8d$ . . . . .	83
6.12	$L=8d$ . $Re=7.92$ . Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter. . . . .	84
6.13	$L=8d$ . $Re=3.51$ . Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter. . . . .	85
6.14	Apparatus in this experiment. . . . .	86
6.15	The location of a particle. The dots corresponds to picked up values and the solid line is estimated by the moving average of picked values. Both axes are pixels. . . . .	87
6.16	Snapshot of two particles settling in an experiment. . . . .	88
6.17	Experimental results of particles settling. Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, respectively. (c) angular velocity is not available. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter. . . . .	89
7.1	Model settings for particles sedimentation simulation. All four boundaries are rigid walls, and the inside steady water contains. . . . .	93

7.2	Snapshots during the acceleration period from 500 to 5,000 timesteps with 500 steps intervals. The particles color corresponds to particle velocities. . . . .	94
7.3	Snapshots during the deceleration period from 5,500 to 10,000 timesteps with 500 steps intervals. The particles color corresponds to particle velocities. . . . .	95
7.4	Snapshots during the stationary period from 11,000 to 20,000 timesteps with 1000 steps intervals. The particles color corresponds to particle velocities. . . . .	96
7.5	Snapshots from 500 to 2,000 steps with fluid flow vectors. . . . .	97
7.6	Snapshots at the flow head. . . . .	100
7.7	Velocity profiles through the whole period. The slope angle is $7.6^\circ$ . The solid line corresponds to the average velocity of all particles. The dashed line corresponds to the head velocity. . . . .	101
7.8	Velocity profiles through the whole period. The slope angle is $8.5^\circ$ . The grain size distribution is the same as that in the model with the $7.6^\circ$ slope angle. . . .	102
7.9	Velocity profiles through the whole period. The slope angle is $6.2^\circ$ . The grain size distribution is the same as that in the model with the $7.6^\circ$ slope angle. . . .	103
7.10	Velocity profiles through the whole period. The slope angle is $7.6^\circ$ , and the grain is equigranular. . . . .	104
7.11	7 locations where the flow velocities are examined. First five lines, (a) to (e), have the same intervals and the other two lines, (f) and (g), have twice intervals.	106
7.12	Particle velocities along 7 lines at 3,000 timesteps. . . . .	106
7.13	Particle velocities along 7 lines at 4,000 timesteps. . . . .	107
7.14	Particle velocities along 7 lines at 5,000 timesteps. . . . .	107
7.15	Particle velocities along 7 lines at 6,000 timesteps. . . . .	108
7.16	Particle velocities along 7 lines at 7,000 timesteps. . . . .	108
7.17	Particle velocities along 7 lines at 8,000 timesteps. . . . .	109
7.18	Particle velocities along 7 lines at 9,000 timesteps. . . . .	109
7.19	Particle velocities along 7 lines at 10,000 timesteps. . . . .	110

# 表 目 次

3.1	Specifications of parallel machines used in this work . . . . .	36
4.1	The parameters of the fracture models. . . . .	41
4.2	The parameter of the fracture models. . . . .	59



## 第1章 緒言

固液混相流は、固体(粒子)と液体が混在する流れである。その発現分野は、化学、機械、土木、そして医療分野にまで多岐に渡っている。地球工学分野においても、以下のように多くの事例が挙げられる。防災工学では、地震動などによって発生する液状化・流動化問題がある。中でも粒子によって支保される地盤が、振動により流体支保の状態に一時的に変化するメカニズムは、未解明な点も多い。また人的・物的に大きな損害をもたらす火砕流、土石流や海底地すべりなどは、堆積物重力流の一種であり、斜面上を流下する粒子は周囲の流体を取り込み、複雑な流動形態を示す(Middleton, 1993; Kneller and Buckee, 2000; Naruse and Masuda, 2006)。さらに、海底地すべりは、津波の誘因として近年注目が集まっている(Locat et al., 2001; Tappin et al., 2001; Lee et al., 2003)。地すべりの規模や水深などと、発生する津波の波高との関係を推定する研究が進められている(Harbitz, 1992; 檀 et al., 2005)が、まだ未解明な点は非常に多い。石油生産・開発の分野においても、水圧破碎によるき裂の支持剤として用いられるプロパント注入(Sparlin and Hagen, 1995; 金子 et al., 2005)では、プロパント粒子の最適な圧入方法を得るために、固液混層流解析が不可欠であると言える(Clifton and Wang, 1988)。さらに、石油生産にともなう砂および泥粒子の輸送(Miyoshi et al., 2004)によって、出砂等の油層障害が引き起こされている(沼澤・満田, 2005)。こうした様々な分野における、固液混相流の発生・発展過程および、内部での挙動を明らかにしていくことは、工学的に非常に重要であると言える。

これまでの固液混相流システム解析は、その流れの複雑さゆえに、実験的および経験的な方法によって、巨視的な評価を行う研究が大半であった(Julien, 1995)。近年では、計算機の演算能力の向上とともに、コンピュータシミュレーションによる複雑な系に対する再現も多くなされるようになってきた。こうした固液混相流の数値計算においては、流体流動と固体運動を連成的に解いていく必要がある。しかしながら、これまでの研究では、流体要素もしくは固体要素に対して仮定を行い簡素化・単純化したものが多い。例えば、流体流動を簡素化して取り扱うものとしては、ストークス流として慣性項を無視し流体流動を簡単に扱うもの(Brady and Bossis, 1988; Chang and Powell, 1993)や、流体流動をポアネットワークモデルで代用するもの(Bruno, 1994)や、ダルシー則で代用するもの(Klosek, 1997)などがある。それに対して、粒子同士の直接的相互作用を考慮しないものとして、流体流動計算には有限要素法を用いているもの(Feng et al., 1994; Huang et al., 1998)、境界要素法を用いたもの(Mammoli and Ingber, 1999)などがある。しかしながら、このような手法では、複雑な構造を有する問題や複雑な流動形態を正確に表現できるとは言い難い。

そこで、本研究では流体流動計算としてナビエ-ストークス方程式を解くことができる格子ボルツマン法と、個々の粒子運動を逐次計算する個別要素法を連成させることで、これらの問題の解決を試みる。格子ボルツマン法は、流体を連続体として取り扱うのではなく、離散粒子の集合体と捉える考え方に基づいている(Chen et al., 1992)。この仮想的な粒子群の運動は、ボルツマン方程式に従うものとし、局所的な粒子同士の衝突および並進運動によってのみ表現される。したがって、モデル形状の変化を伴うなど複雑な形状に対する流れの計算に非常に有効な手法である。

また、結果として巨視的にはナビエ-ストークス方程式を満たしている (Abe, 1997; He, 1997)。一方、個別要素法は、バネ、ダッシュポッド、スライダーといった単純要素で粒子間の相互作用を表現する手法である (Cundall and Strack, 1979)。従って、多数粒子による同時衝突を比較的正確に求めることができる。粒子から流体への作用は、粒子の移動に伴う流体領域の変化を逐次更新することと、粒子の移動速度を流体計算の境界条件に取り込むことで表現できる (Inamuro et al., 1995; Ladd, 1994)。また、流体から粒子への作用は、粒子周囲の流速分布から粒子にかかる力学的作用を算出することで実現できる (Inamuro et al., 2000)。このように、格子ボルツマン法と個別要素法の連成解法では、複雑構造下における固液混相流を粒子サイズのスケールにおいて正確に求めることができると考えられる。いまだ、この手法の地盤・岩盤分野への適用事例は極めて少ないが、本研究においてその適用範囲の広さを示す。

また、本手法における課題の一つは、対象となる岩石構造などを格子によりモデル化するため、精度よい計算を行うためには計算コストが高くなりがちであることである。ただし、格子ボルツマン法では、各格子点上における近傍の情報のみを用いて時間発展的に計算を進める方法であるゆえに、領域分割を行う並列化をなすことで有る程度解決することができる (Keehm, 2003; Pan et al., 2004)。

本研究は、地球工学分野における固液混相流システムに対する汎用数値シミュレータとして、格子ボルツマン法と個別要素法の連成解法システムの構築を目的としている。また計算コストを下げるために格子ボルツマン法の並列化を行い、その有効性を検討する。さらに開発した固液混相流シミュレータを用いて、水中における固体運動力学の素過程となる、粒子沈降シミュレーションを行い、本手法の妥当性を検討する。最後に大規模な応用問題として、海底地すべりを模した数値シミュレーションを行う。

## 1.1 本論文の概要

第 1 章では、本研究の背景および目的、さらに既往の研究について概説する。第 2 章では、ナビエ-ストークス方程式の解法の一つである格子ボルツマン法の理論について述べる。また格子ボルツマン方程式から、ナビエ-ストークス方程式の導出も行う。これにより格子ボルツマン方程式に従う仮想粒子の挙動が、巨視的にはナビエ-ストークス方程式に従うことを示している。また、第 3 章では、多孔質岩石中の流体流動挙動解析を行い、格子ボルツマン法の並列化効果について検討する。第 4 章では、複雑形状をしたモデルにおける流体流動挙動の計算手法として、格子ボルツマン法が有効であることを示す。岩石不連続面内流体流動シミュレーションを行い、とくに三乗則からの乖離に着目してその水理学的特性を検討する。第 5 章では、粒子運動を計算する個別要素法の理論と、格子ボルツマン法との連成手法について述べる。第 6 章では、上記連成解析手法を用いて、水中での粒子沈降現象について検討する。ここでは、アナログ水槽実験や既存の数値実験との比較を行い、流体と粒子の相互作用の妥当性を検討する。第 7 章では、海底地すべりを模したシミュレーションを行い、既存の観測結果との比較し、堆積物重力流の流動形態について検討する。第 8 章では、本論文を総括し、結論を述べる。

## 第2章 格子ボルツマン法の理論

本章では、流体流動計算手法である格子ボルツマン法の理論について概説する。この手法は、流体の連続体近似に基づく流れの支配方程式を離散的に解く従来型の流体流動解析手法とは異なり、流体を仮想的な粒子の集合体であると近似し、その粒子運動をボルツマン方程式に基づいて解析的に求める手法である。

まず最初に、格子ボルツマン法の概略を示し、次に具体的な計算手法について説明する。さらに、ボルツマン方程式からナビエ・ストークス方程式の導出を示し、これをもって、ボルツマン方程式に基づく解が、流体流動を表すことを示す。

### 2.1 格子ボルツマン法とは

従来の流体挙動解析においては、流体を連続体近似に基づく各種の偏微分方程式を数値的に解析するのが一般的である。差分法、有限要素法、境界要素法などがそれぞれ、偏微分方程式をなんらかの方法で離散化し定式化している。しかしながら、これらの手法では解析モデルに対して何らかの定式化を行う必要があり、複雑境界問題においては汎用性に欠ける欠点がある。

また、流体を分子の粒子運動と捉えて、個々の粒子運動を追いかける分子動力学的手法も提案されているが、この手法では分子数が  $10^{23}$  のオーダーと膨大になり流体流動解析には現実的ではない。

このような背景から考え出された計算手法が格子気体法 (Rivet et al., 2001) である。この手法は流体を仮想的な粒子で近似して、その粒子運動を追跡し、そののちに巨視化することで流体挙動を求める手法である。格子気体法では、粒子は存在するかしないかで 0, 1 の関数として与えられ、一つの格子点上には、ある時刻にある方向の速度を持つ粒子がないかまたは、一つであると規定される。そのため巨視的な流れを再現するためには、多くの粒子を集めて平均化および粗視化することが必要となる。このとき、十分な安定性を持った解を得るためには、非常に多くの格子点をとる必要があり、有限な計算機資源においてはノイズの多い解析となることがある。また、粒子速度が増えると衝突演算が非常に煩雑になるという欠点や、圧力が速度に依存するという欠点も有している。

これらの問題点を改良し、格子気体法をベースとして開発されたのが格子ボルツマン法 (McNamara and Zanetti, 1988) である。LBM では粒子の状態は 0, 1 の関数ではなく、実数値をとる密度分布関数を用いている。これにより、計算値の揺らぎがなくなり、滑らかな状態変化が得られるようになった。ただし、実数演算であるため、格子気体法ではなかった丸め誤差が発生するようになった。流体を近似する粒子は、密度の分布関数として表され、衝突・並進を時間ステップごとに繰り返すことにより空間的に広がっていく。また流体の巨視的変数である速度、密度、圧力は分布関数 (微視的変数) から計算される。この分布関数は、流体の連続体としての性質を保持するように適切に設定される必要がある。格子形状や、衝突則としては多数のモデルが提案されている (Qian et al., 1992; Rothman and Zaleski, 1997; Succi, 2001; 蔦原 et al., 1999; Wolf-Gladrow,

2000)。

## 2.2 格子ボルツマン方程式

### 2.2.1 ボルツマン方程式から格子ボルツマン方程式の導出

粒子の挙動を支配する最も一般的な方程式はボルツマン方程式として知られている。この方程式は外力項を無視すると、以下のように記述される。

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F = Q(F, F) \quad (2.1)$$

ただし、 $F$  は粒子密度の速度に関する分布関数、 $t$  は時間、 $\mathbf{v}$  は粒子速度、 $Q(F, F)$  は粒子同士の衝突項である。後述する BGK 近似 (Bhatnagar et al., 1954) を、式 (2.1) の衝突項  $Q$  に適用すると、

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla F = -\frac{1}{\tau} (F - F^{(0)}) \quad (2.2)$$

が得られる。ここで、 $\tau$  は衝突から平衡に達するまでの緩和時間を表し、BGK モデルにおいては単一の緩和時間が適用される。また、 $F^{(0)}$  は粒子密度の平衡分布関数である。次に式 (2.2) の離散化を考える。ここで分布関数  $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  は、空間  $\mathbf{x}$ 、時間  $t$  および速度  $\mathbf{v}$  の関数である。まず粒子運動の方向を離散化し、 $i$  方向の速度を  $v_i$  とする。このとき、対応する粒子密度分布関数は  $F_i(\mathbf{x}, t)$  となり、粒子速度に関して離散化されたボルツマン方程式として、

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + v_i \nabla F_i = -\frac{1}{\tau} (F_i - F_i^{eq}) \quad (2.3)$$

が得られる。さらに、代表長さ  $L$ 、代表速度  $U$ 、代表密度  $\rho_0$ 、代表時間  $t_0$  を用いて各変数を無次元化することで

$$\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial \hat{t}} + c_i \hat{\nabla} \hat{F}_i = -\frac{1}{\varepsilon \hat{\tau}} (\hat{F}_i - \hat{F}_i^{eq}) \quad (2.4)$$

が得られる。ただし、 $c_i = v_i/U$ 、 $\hat{\nabla} = L \nabla$ 、 $\hat{t} = Ut/L$ 、 $\hat{\tau} = \tau/t_0$ 、 $\hat{F}_i = F_i/\rho_0$  である。また、変数  $\varepsilon = t_0 U/L$  は粒子の平均自由行程と系の代表長さとの比であり、クヌッセン数と呼ばれる。また、式 (2.4) の各微分演算子を差分化すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})}{\Delta \hat{t}} + c_{ix} \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}} + \Delta \hat{x}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \hat{x}} \\ & + c_{iy} \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}} + \Delta \hat{y}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \hat{y}} \\ & + c_{iz} \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}} + \Delta \hat{z}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \hat{z}} \\ & = -\frac{1}{\varepsilon \hat{\tau}} (\hat{F}_i - \hat{F}_i^{eq}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

が得られる。ただし、 $\Delta \hat{t} = \Delta t \cdot U/L$ 、 $\mathbf{c}_i = (c_{ix}, c_{iy}, c_{iz})$  である。また、格子間隔を時間間隔で割ったものを粒子速度と等しくとる ( $\Delta \hat{x}/\Delta \hat{t} = c_i$ ) と、

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})}{\Delta \hat{t}} + \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_i \Delta \hat{x}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t} + \Delta \hat{t})}{\Delta \hat{x}} \\ & = \frac{\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_i \Delta \hat{t}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})}{\Delta \hat{t}} = -\frac{1}{\varepsilon \hat{\tau}} (\hat{F}_i - \hat{F}_i^{eq}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

が得られる。ここで、 $\Delta t = t_0$  となるように選ぶと BGK モデルにおける格子ボルツマン方程式

$$\hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_i \Delta \hat{t}, \hat{t} + \Delta \hat{t}) - \hat{F}_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) = -\frac{1}{\hat{\tau}} \left( \hat{F}_i - \hat{F}_i^{eq} \right) \quad (2.7)$$

が得られる。即ち、式 (2.7) は、空間、時間的に離散化され、さらに粒子速度も離散化されたボルツマン方程式である。

## 2.2.2 BGK 近似

ボルツマン方程式を扱う上で重大な問題の一つに複雑な衝突演算子  $Q(F, F)$  の取り扱いがある。そこで、簡便な衝突演算子  $J(F)$  に置き換えることが提案されている。ただし、衝突演算子  $J(F)$  には二つの制約がある。

1.  $J(F)$  は、 $Q(F, F)$  に対する衝突不変量 (collision invariants)  $\psi_k$  を保存する。これは、

$$\int \psi_k J(F) d^3 x d^3 v = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (2.8)$$

と、表される。ただし、 $\psi_0 = 1$ 、 $\psi_i = \mathbf{c}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )、 $\psi_4 = v^2$  である。

2. 衝突スキームがマクスウェル分布に従う傾向にある (H 理論)。

これら両方の制約を満たすために、BGK 近似 (Bhatnagar et al., 1954) が一般的によく用いられる。二番目の制約を考慮するための最も単純な方法は、各衝突において分布関数  $f$  は、マクスウェル分布に従う分布関数  $F^M$  からの逸脱量に比例して変化すると考えることであり、これは

$$J(F) = \omega [F^M(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v})] \quad (2.9)$$

と表される。ただし、係数  $\omega$  は衝突周波数であり、マクスウェル分布に従う分布関数  $F^M$  は次式で表される。

$$F^M = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{c} - \mathbf{u})^2}{2RT}\right] \quad (2.10)$$

ここで、 $R$  はガス定数、 $\rho$  は密度、 $\mathbf{u}$  は流速、 $T$  は温度である。ただし、これらの巨視的変数は、次節において定義する。また、式 (2.9) によって、一番目の制約は以下の様になることから満たされる。

$$\int \psi_k J(F) d^3 x d^3 v = \omega \left[ \int \psi_k F^M(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 x d^3 v - \int \psi_k F(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3 x d^3 v \right] = 0 \quad (2.11)$$

## 2.3 具体的な計算手法

本節では、その格子ボルツマン方程式を用いた具体的な計算手順について説明する。本節以下では、断らない限り各変数は第 2.2.1 節内で示す無次元化量を表し、 $\hat{\cdot}$  は省略している。

1. 計算領域の格子による離散化を行う (第 2.3.1 節)。
2. 離散化された格子点上の流体の巨視的変数から、局所平衡分布関数  $F^{(0)}$  を計算する。この計算を衝突演算と呼ぶ (第 2.3.2 節)。
3. 求めた局所平衡分布関数  $F^{(0)}$  を格子ボルツマン方程式 (式 (2.7)) に代入し、新しい時間ステップで、格子がずれた場所での分布関数が求まる。これを並進過程と呼ぶ (第 2.3.3 節)。

4. 次に境界条件を元に，境界での分布関数を求める (第 2.3.4 節) .
5. これら全ての格子点上で，新しい時間ステップに対して求めた分布関数を用いて，巨視的変数である密度，速度，圧力などを求める．これを巨視化と呼ぶ (第 2.3.3 節) .

以上の手順のうち 2~5 を繰り返すことで，最終的には流体の挙動がシミュレーションできる．

### 2.3.1 格子と速度モデル

格子ボルツマン法では通常、解析領域は規則的な格子によって離散化される．2次元では，正六角形格子や正方形格子がよく用いられる．3次元では立方体格子が一般的である．ただし，最近では不等間隔格子への拡張として，一般座標において補間を用いる方法 (Interpolation-Supplemented LBM: ISLBM)(He and Doolen, 1997) や，差分法を導入して一般座標を用いて離散ボルツマン方程式を解く方法 (Finite Difference LBM: FDLBM)(Cao et al., 1997)，有限体積法のスキームを導入した方法 (Finite Volume LBM: FVLBM)(Nannelli and Succi, 1992)，特性曲線有限要素法を導入した方法 (Characteristic Galerkin Finite Element LBM: CGLBM)(Lee and Lin, 2001) なども提案されている．

全ての粒子は，各タイムステップにおいて常に格子点上に存在し，その間でとどまることはない．そのため，粒子速度は離散的に表される．非熱流体モデルにおいては，粒子は隣接する格子点にのみ移動する速度モデルとして，二次元では，正三角形格子における D2Q7 モデルや，正方形格子における D2Q9 モデル図 2.1(c) などが一般的である．また，熱流体モデルとしては，同一方向に 2, 3 種類の速度を持つモデルとして，正三角形格子における D2Q13 モデルや D2Q19 モデル図 2.1(a)、正方形格子における，D2Q13Q モデル図 2.1(e) や D2Q13C モデル図 2.1(g) などがある．本研究で用いた D2Q9 モデルの速度ベクトルは、

$$c = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

である．また，3次元においては，立方体格子が一般的であるが，その速度の取り方には種々ある．非熱流体モデルとしても，D3Q19 モデルや D3Q15 モデル図 2.2(a) などがある．本研究で用いた D3Q15 モデルの速度ベクトルは、

$$c = c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

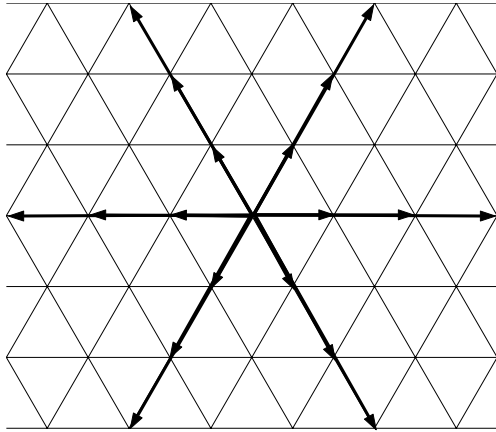
である．

### 2.3.2 衝突演算

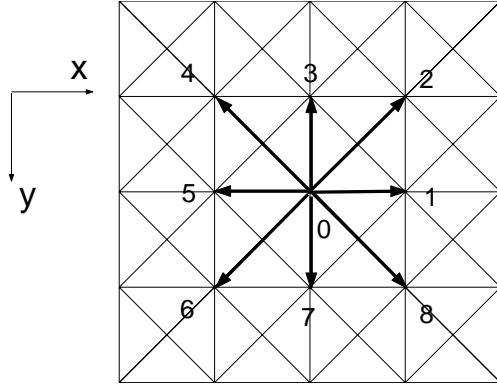
衝突演算の種類により以下の 3 種のモデルが推奨されている．

- 複雑粒子衝突モデル
- マトリクスモデル
- 格子 BGK モデル

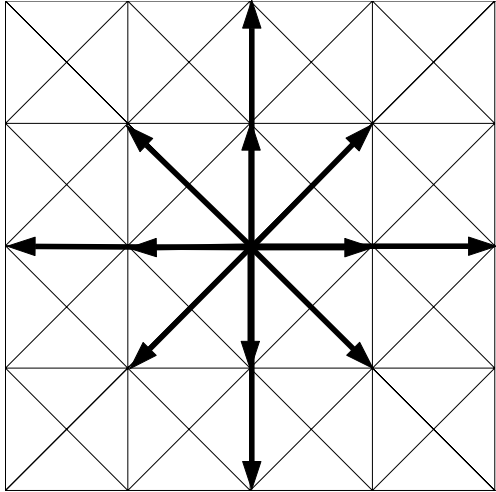
複雑粒子衝突モデルは，高レイノルズ数の流れの再現に適していると言われている．また，マトリクスモデルは個々の衝突パターンを考えることなくモデルが構築できる利点がある．格子 BGK



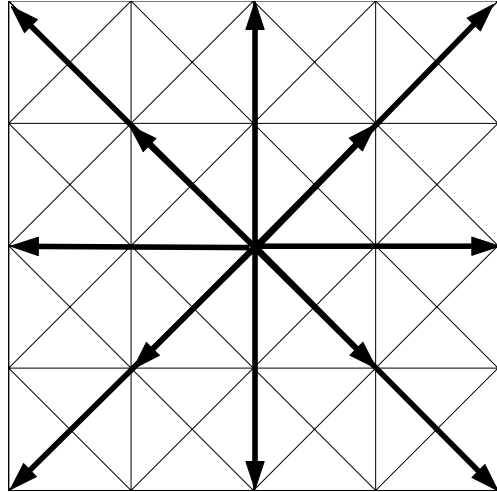
(b) D2Q19 model



(d) D2Q9 model



(f) D2Q13Q model



(h) D2Q13C model

☒ 2.1 2D lattice models

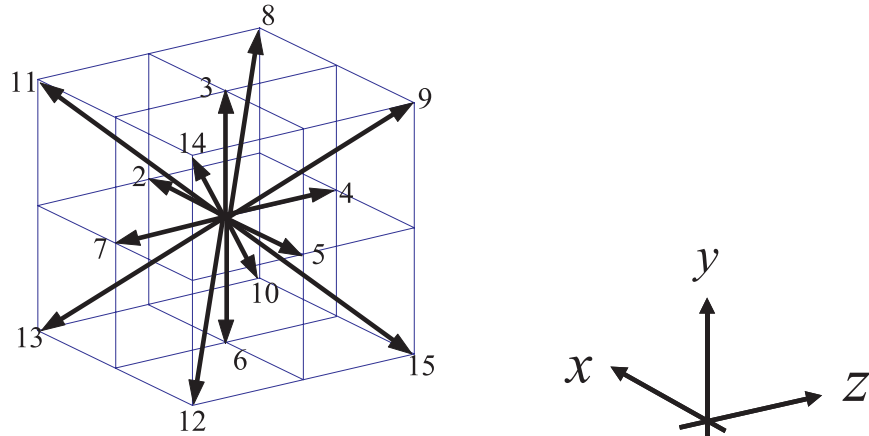


図 2.2 3D fifteen velocity model

モデルはマトリクスモデルをさらに簡素化したものであり，粒子の種類が増えても演算式自体は変化しないという利点がある．

### 1. 複雑粒子衝突モデル(McNamara and Zanetti, 1988)

このモデルは衝突則を陽的に書き表していくモデルである．そのため衝突の起こり方は非常にわかりやすく表現しているが，自分であらかじめ衝突パターンを決めておかなければならない．さらに，粒子の種類が増えると衝突のパターンは複雑となり，演算そのものが困難になる．長所として，容易に高レイノルズ数流れを再現することができる．2体衝突と3体衝突を考慮した分布関数の一般式は以下のように書き表される．ここで， $\sigma$  は衝突断面積と呼ばれるパラメータである．

$$F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta x, t + \Delta t) = F_i(\mathbf{x}, t) + \sigma_{jk} F_j(\mathbf{x}, t) F_k(\mathbf{x}, t) + \sigma_{jki} F_j(\mathbf{x}, t) F_k(\mathbf{x}, t) F_i(\mathbf{x}, t) \quad (2.14)$$

### 2. マトリクスモデル

衝突演算式は複雑粒子衝突モデルと同じ式 (2.14) で書き表される．ここで，式 (2.15) を用いて分布関数  $F_i$  を平衡状態周りに展開する．

$$F_i = F_i^{eq} + F_i^{neq} \quad (2.15)$$

ここで， $F_i^{eq}$  は平衡分布関数であり， $F_i^{neq}$  は平衡状態からの逸脱量で非平衡量と呼ばれ， $F_i^{eq}$  と比べて非常に小さい．これを式 (2.14) に代入して微小項を無視すると，以下のように線形化される．

$$F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) = F_i(\mathbf{x}, t) + \omega_{ij} \{F_j(\mathbf{x}, t) - F_j^{eq}(\mathbf{x}, t)\} \quad (2.16)$$

ただし，式 (2.14) の右辺第2項，3項は平衡状態においては0となる．ここで， $\omega_{ij}$  は正方マトリクスの  $i$  行  $j$  列目の要素となっている．このマトリクス要素は質量および運動量を保存するように決定する必要がある．このモデルでは衝突演算の固有値を直接与えることで複雑な衝突パターンを考える必要がなくなる．しかし，粒子の種類が多くなるとマトリクスが大規模となり計算は複雑になる．



### 3. 格子 BGK モデル(Bhatnagar et al., 1954; Qian et al., 1992)

このモデルの特徴は、衝突演算を簡素化するために、マトリクスモデルの固有値を一つに決定することである。その固有値を  $-1/\tau$  とする。ここで、 $\tau$  は単一時間緩和係数 (single relaxation time) と呼ばれる定数である。マトリクスモデルと同様に衝突のパターンを考える必要がない上に、粒子の種類が増えても演算式そのものが変化することがない。そのため非熱流体、熱流体のどちらのモデルにおいても格子ボルツマン法の一般的衝突演算子となっている。しかしながら、演算子が簡潔であるため、扱うことが出来る流体に制限が生じる。また、流体が連続体としての特徴を満たすように  $F_i^{eq}$  を設定しなければならない。

#### 格子 BGK モデルを用いた基礎方程式

格子 BGK モデルを用いた時、格子ボルツマン方程式は式 (2.7) で表される。ここで、2 次元においては図 2.1(c) に示すような 9 速度モデルを用い、3 次元では図 2.2 で示す 15 速度モデルを用いる。この時の平衡分布関数  $F^{(0)}$  は、

$$F_i^{(0)} = E_i \rho \left\{ 1 + \frac{3}{c^2} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}) + \frac{9}{2c^4} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u}^2 \right\} \quad (2.17)$$

となる。ただし、2 次元において  $E_0 = 4/9$ ,  $E_i = 1/9$ ;  $i = 1, 3, 5, 7$ ,  $E_i = 1/36$ ;  $i = 2, 4, 6, 8$  であり、3 次元では  $E_1 = 2/9$ ,  $E_i = 1/9$ ;  $i = 2, \dots, 7$ ,  $E_i = 1/72$ ;  $i = 8, \dots, 15$  である。また、 $\rho$  および  $\mathbf{u}$  は、後で定義する巨視的な流体密度および速度を表す。

#### 2.3.3 並進過程および巨視化

前節で示したように、各タイムステップごとに流体の巨視的な変数を用いて平衡分布関数が求められる。次に式 (2.7) に示す格子ボルツマン方程式にこの平衡分布関数  $F_i^{(0)}$  を代入することにより、新しいタイムステップにおける分布関数が求められる。つまり、各方向速度 (式 (2.12) および (2.13)) に従って隣接する格子に対して分布関数の値を並進させる。この過程を並進過程と呼ぶ。

次に、境界上での境界条件の適用があるが詳細は第 2.3.4 節において述べる。

そして、最後に新たなタイムステップにおける全格子点上の分布関数から、流体の巨視的な変数である密度  $\rho$ 、流速  $\mathbf{u}$  を式 (2.18) ~ (2.19) を用いて計算する。

$$\rho = \sum_i F_i \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i F_i \mathbf{c}_i \quad (2.19)$$

また、圧力  $p$  および粘性係数  $\mu$  は、後述するナビエ・ストークス方程式の導出を行う過程において、

$$p = \frac{\rho c^2}{3} \quad (2.20)$$

$$\mu = \frac{c^2}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t \quad (2.21)$$

と定まる。この過程を巨視化と呼ぶ。

### 2.3.4 境界条件

壁面上の点は，流体領域外からの並進が行われないので 15 方向全ての分布関数が既知ではない．そこで，未知の分布関数を既知の分布関数から決定しなければならない．境界条件にはバウンズバックを始め種々ある (Inamuro et al., 1995; Zou and He, 1995; Maier et al., 1996; Mei et al., 2000) が，今回 Inamuro らの手法 (Inamuro et al., 1995) を用いる．

#### 面上の境界条件

図 2.3 の下半分の灰色領域が壁であるとき，つまり，中心の点  $(i, j, k)$  に対して  $(0, 1, 0)$  の法線ベクトルをもつ  $y = j$  なる平面が壁面であるとき， $c_y > 0$  の速度をもつ分布関数  $F_3, F_8, F_9, F_{11}, F_{14}$  は未知となる．ここで，各分布関数は式 (2.22) の様に表現できる．ただし， $u_w, v_w, w_w$  は各方向への壁面移動速度である．

$$F_i = W_i \rho' \left\{ 1 + 3(u_0 + v_w + w_0) + \frac{9}{2}(u_0 + v_w + w_0)^2 - \frac{3}{2}[(u_w + u')^2 + v_w^2 + (w_w + w')^2] \right\} \quad (i = 3, 8, 9, 11, 14) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 & w_0 &= 0 & (i = 3) \\ u_0 &= u_w + u' & w_0 &= w_w + w' & (i = 8) \\ u_0 &= -u_w - u' & w_0 &= w_w + w' & (i = 9) \\ u_0 &= u_w + u' & w_0 &= -w_w - w' & (i = 11) \\ u_0 &= -u_w - u' & w_0 &= -w_w - w' & (i = 14) \end{aligned}$$

式 (2.22) で未知変数は  $\rho', u', w'$  である．壁面上の流体の速度は壁面速度と等しいと考えられるので各方向別に流速について方程式が立てられる．今回のシミュレーションでは壁面速度は 0 とする．また，粒子密度の式 (2.18) から壁面上の粒子密度  $\rho_w$  に関する式が成り立つ．これらの方程式の解として最終的に式 (2.23) ~ (2.26) が得られる．

$$\rho_w = \frac{1}{1 - v_w} [F_1 + F_2 + F_4 + F_5 + F_7 + 2(F_6 + F_{10} + F_{12} + F_{13} + F_{15})] \quad (2.23)$$

$$\rho' = 6 \frac{\rho_w v_w + (F_6 + F_{10} + F_{12} + F_{13} + F_{15})}{1 + 3v_w + 3v_w^2} \quad (2.24)$$

$$u' = \frac{1}{1 + 3v_w} \left[ \frac{6}{\rho'} \{ \rho_w u_w - (F_2 - F_5 + F_{10} - F_{12} + F_{13} - F_{15}) \} - u_w - 3u_w v_w \right] \quad (2.25)$$

$$w' = \frac{1}{1 + 3v_w} \left[ \frac{6}{\rho'} \{ \rho_w w_w - (F_4 - F_7 + F_{10} - F_{12} - F_{13} + F_{15}) \} - w_w - 3v_w w_w \right] \quad (2.26)$$

以上の結果を用いて，壁面と流体の境界となっている面上格子点上での計算を行うことができる．

#### 頂点上での境界条件

次に，面の交差する線上や角となる境界では，面上の境界条件を応用して未知分布関数を決定する．具体的には，図 2.4 で示すように，境界となる格子点を通る境界面を仮想的に想定し，そ

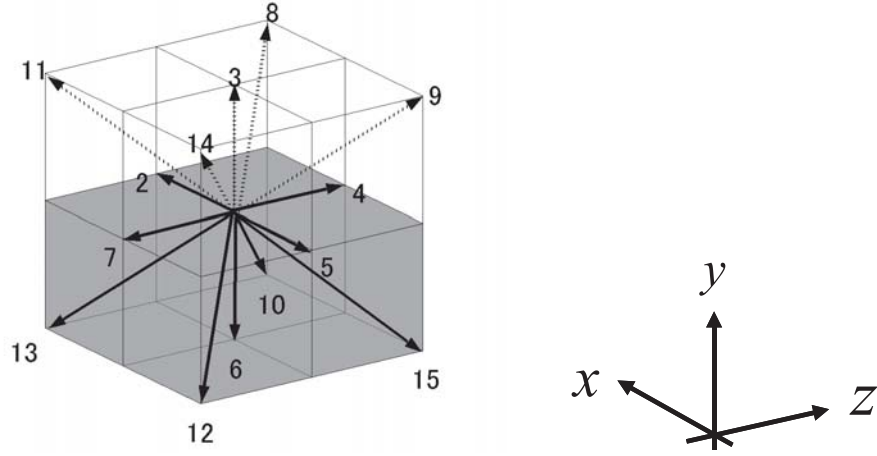


図 2.3 Boundary condition.

の仮想境界面での境界条件を計算する． $n$  は仮想境界面の法線ベクトルであり， $t$  および  $b$  は格子点上で法線ベクトル  $n$  と垂直に交わる仮想境界面上にある任意の 2 本の単位ベクトルである．粒子速度  $c_i$  は各単位ベクトルを用いて次式で表す．

$$c_i = c_{in}n + c_{it}t + c_{ib}b \quad (2.27)$$

式 (2.27) により新たに定められた各方向  $(n, t, b)$  への粒子速度  $(c_{in}, c_{it}, c_{ib})$  が決定される．この新しい粒子速度を用いて上記の面上の境界条件を適用する．また、壁面上の流体速度  $u_w$  も同様に式 (2.28) によって新しい座標系に変換される。

$$u_w = u_{wn}n + u_{wt}t + u_{wb}b \quad (2.28)$$

境界となる頂点では、式 (2.29) で表される写像および式 (2.17) より、未知分布関数は式 (2.30) と表現できる。

$$\begin{pmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_{wn} \\ v_{wt} + u'_t \\ w_{wb} + u'_b \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} F_i = W_i \rho \{ & 1 + 3[c_{in}u_{wn} + c_{it}(u_{wt} + u'_t) + c_{ib}(u_{wb} + u'_b)] \\ & + \frac{9}{2}[c_{in}u_{wn} + c_{it}(u_{wt} + u'_t) + c_{ib}(u_{wb} + u'_b)]^2 \\ & - \frac{3}{2}[u_{wn}^2 + (u_{wt} + u'_t)^2 + (u_{wb} + u'_b)^2] \} \text{ for } c_{in} > 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

ただし、 $u'_t$ 、 $u'_b$  は滑り速度であり、 $c_{in} > 0$  なる方向の分布関数が未知である。また、壁面上の粒子速度は壁面速度と等しくなることから、式 (2.18) ~ (2.19) および (2.28) を用いて以下の方程式が成り立つ。

$$u_{wn} = \frac{1}{\rho_w} \left( \sum_{c_{in} \leq 0} F_i c_{in} + \sum_{c_{in} > 0} F_i c_{in} \right) \quad (2.31)$$

$$u_{wt} = \frac{1}{\rho_w} \left( \sum_{c_{in} \leq 0} F_i c_{it} + \sum_{c_{in} > 0} F_i c_{it} \right) \quad (2.32)$$

$$u_{wb} = \frac{1}{\rho_w} \left( \sum_{c_{in} \leq 0} F_i c_{ib} + \sum_{c_{in} > 0} F_i c_{ib} \right) \quad (2.33)$$

$$\rho_w = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i + \sum_{c_{in} > 0} F_i \quad (2.34)$$

ここで、これらを解くことで未知定数は、 $u'_t$ 、 $u'_b$ 、 $\rho'$ 、および  $\rho_w$  が求まる。これらを式 (2.30) より、未知分布関数が求められる。

以下は、上記方程式の解を求める計算である。式 (2.34) に式 (2.30) を代入すると、

$$\begin{aligned} \rho_w = & \sum_{c_{in} \leq 0} F_i + \sum_{c_{in} > 0} \rho' W_i \left\{ \left[ 1 + 3(c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb}) + \frac{9}{2} (c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb})^2 \right. \right. \\ & - \frac{3}{2} (u_{wn}^2 + u_{wt}^2 + u_{wb}^2) \left. \left. \right\} + \left\{ 3c_{it} u'_t + 9(c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb}) c_{it} u'_t - 3u_{wt} u'_t \right\} \\ & + \left\{ 3c_{ib} u'_b + 9(c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb}) c_{ib} u'_b - 3u_{wb} u'_b \right\} \end{aligned} \quad (2.35)$$

となる。ここで、

$$A_i = 1 + 3(c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb}) + \frac{9}{2} (c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb})^2 - \frac{3}{2} (u_{wn}^2 + u_{wt}^2 + u_{wb}^2) \quad (2.36)$$

$$B_i = 3c_{it} + 9(c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb}) c_{it} - 3u_{wt} \quad (2.37)$$

$$C_i = 3c_{ib} + 9(c_{in} u_{wn} + c_{it} u_{wt} + c_{ib} u_{wb}) c_{ib} - 3u_{wb} \quad (2.38)$$

とおくと、式 (2.35) は、

$$\rho_w = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i + \sum_{c_{in} > 0} \rho' (A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) \quad (2.39)$$

となる。次に、式 (2.31) より  $c_{in}$  の正負で分類すると、

$$\left( \sum_{c_{in} \leq 0} F_i + \sum_{c_{in} > 0} F_i \right) u_{wn} = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i c_{in} + \sum_{c_{in} > 0} F_i c_{in} \quad (2.40)$$

となる。 $t$ 、 $b$  についても同様である。また、

$$D_1 = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i (c_{it} - u_{wt}) \quad (2.41)$$

$$D_2 = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i (c_{in} - u_{wn}) \quad (2.42)$$

$$D_3 = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i (c_{ib} - u_{wb}) \quad (2.43)$$

とおくと、式 (2.40) は

$$D_1 = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i (c_{it} - u_{wt}) = \sum_{c_{in} > 0} F_i (u_{wt} - c_{it}) \quad (2.44)$$

$$D_2 = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i(c_{in} - u_{wn}) = \sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wn} - c_{in}) \quad (2.45)$$

$$D_3 = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i(c_{ib} - u_{wb}) = \sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wb} - c_{ib}) \quad (2.46)$$

となる。さらに、

$$D_1 = \sum_{c_{in} > 0} (u_{wt} - c_{it}) \rho'(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) \quad (2.47)$$

$$D_2 = \sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wn} - c_{in}) \rho'(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) \quad (2.48)$$

$$D_3 = \sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wb} - c_{ib}) \rho'(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) \quad (2.49)$$

となる。上記3式から  $\rho'$  を消去すると、

$$\frac{D_1}{\sum_{c_{in} > 0} (u_{wt} - c_{it})(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b)} = \frac{D_2}{\sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wn} - c_{in})(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b)} \quad (2.50)$$

$$\frac{D_3}{\sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wb} - c_{ib})(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b)} = \frac{D_2}{\sum_{c_{in} > 0} F_i(u_{wn} - c_{in})(A_i + B_i u'_t + C_i u'_b)} \quad (2.51)$$

となる。これらをまとめると、

$$\sum_{c_{in} > 0} X_i A_i + \sum_{c_{in} > 0} X_i B_i u'_t + \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i u'_b = 0 \quad (2.52)$$

$$\sum_{c_{in} > 0} Y_i A_i + \sum_{c_{in} > 0} Y_i B_i u'_t + \sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i u'_b = 0 \quad (2.53)$$

となる。ただし、

$$X_i = D_3(u_{wn} - c_{in}) - D_2(u_{wb} - c_{ib}) \quad (2.54)$$

$$Y_i = D_1(u_{wn} - c_{in}) - D_2(u_{wt} - c_{it}) \quad (2.55)$$

である。式(2.52)に  $\sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i$ 、式(2.53)に  $\sum_{c_{in} > 0} X_i C_i$  を掛けるとそれぞれ、

$$\sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i A_i + \sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i B_i u'_t + \sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i u'_b = 0 \quad (2.56)$$

$$\sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i A_i + \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i B_i u'_t + \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i u'_b = 0 \quad (2.57)$$

となる。各々引き算すると、

$$\sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i A_i - \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i A_i + \left( \sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i B_i - \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i B_i \right) u'_t = 0 \quad (2.58)$$

となり、まとめると、

$$u'_t = \frac{\sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i A_i - \sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i A_i}{\sum_{c_{in} > 0} X_i C_i \sum_{c_{in} > 0} Y_i B_i - \sum_{c_{in} > 0} Y_i C_i \sum_{c_{in} > 0} X_i B_i} \quad (2.59)$$

となり、 $u'_t$  が求まる。 $b$  についても同様に  $\sum_{c_{in}>0} Y_i B_i$  を式 (2.52) に、 $\sum_{c_{in}>0} X_i B_i$  を式 (2.53) に掛けると

$$\sum_{c_{in}>0} Y_i B_i \sum_{c_{in}>0} X_i A_i + \sum_{c_{in}>0} Y_i B_i \sum_{c_{in}>0} X_i B_i u'_t + \sum_{c_{in}>0} Y_i B_i \sum_{c_{in}>0} X_i C_i u'_b = 0 \quad (2.60)$$

$$\sum_{c_{in}>0} X_i B_i \sum_{c_{in}>0} Y_i A_i + \sum_{c_{in}>0} X_i B_i \sum_{c_{in}>0} Y_i B_i u'_t + \sum_{c_{in}>0} X_i B_i \sum_{c_{in}>0} Y_i C_i u'_b = 0 \quad (2.61)$$

となる。引き算すると、

$$\sum_{c_{in}>0} Y_i B_i \sum_{c_{in}>0} X_i A_i - \sum_{c_{in}>0} X_i B_i \sum_{c_{in}>0} Y_i A_i + \left( \sum_{c_{in}>0} X_i C_i \sum_{c_{in}>0} Y_i B_i - \sum_{c_{in}>0} Y_i C_i \sum_{c_{in}>0} X_i B_i \right) u'_b = 0 \quad (2.62)$$

となり、まとめると

$$u'_b = \frac{\sum_{c_{in}>0} Y_i B_i \sum_{c_{in}>0} X_i A_i - \sum_{c_{in}>0} X_i B_i \sum_{c_{in}>0} Y_i A_i}{\sum_{c_{in}>0} Y_i C_i \sum_{c_{in}>0} X_i B_i - \sum_{c_{in}>0} X_i C_i \sum_{c_{in}>0} Y_i B_i} \quad (2.63)$$

となり、 $u'_b$  が求まる。

次に、式 (2.40) および式 (2.36) ~ (2.38) より

$$\left\{ \sum_{c_{in} \leq 0} F_i + \sum_{c_{in} > 0} \rho' (A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) \right\} u_{wn} = \sum_{c_{in} \leq 0} F_i c_{in} + \sum_{c_{in} > 0} \rho' (A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) c_{in} \quad (2.64)$$

となり、まとめると、

$$\rho' = - \frac{\sum_{c_{in} \leq 0} F_i (c_{in} - u_{wn})}{\sum_{c_{in} > 0} (A_i + B_i u'_t + C_i u'_b) (c_{in} - u_{wn})} \quad (2.65)$$

となり、 $\rho'$  が求められる。

#### 周期境界条件

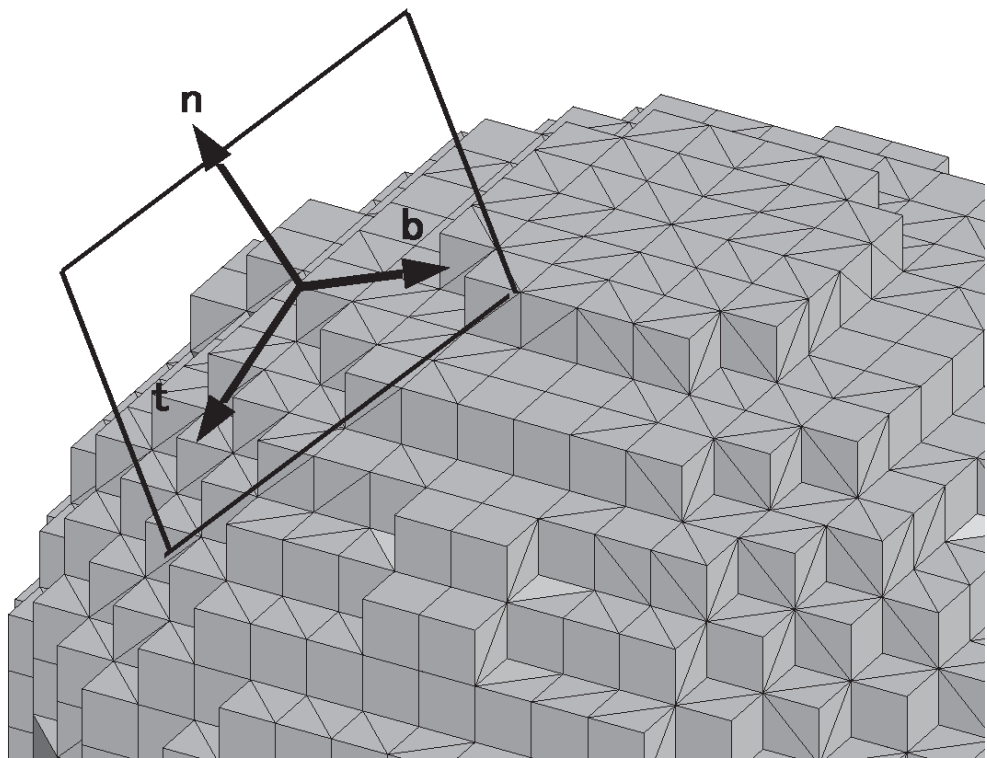
次に計算領域への流入と流出の境界条件は周期境界条件を適用する。流入面と流出面との間の圧力差に従って、流出した粒子を流入面より流入させることでこの条件は達成される。本研究では、 $x$  軸に平行な方向に圧力差をかけ、 $x = 0$  面を流入面とし、 $x = L_x$  面を流出面とする。そのとき、図 2.5(a) で示す流入面では点線矢印で表される  $F_2, F_8, F_{10}, F_{11}, F_{13}$  が未知関数であり、実線矢印で表される分布関数は内部流体領域より並進してくるので既知関数である。同様に図 2.5(b) で示す流出面では  $F_5, F_9, F_{12}, F_{14}, F_{15}$  がそれぞれ未知関数となる。ここで、流出面では  $F_2$  は既知関数であるので、この関数を流入面に導入する。この時、圧力差の項  $K$  を加え式 (2.66) とする。その他 4 つの未知関数については式 (2.67) に従う。一方、流出面では逆方向に式 (2.68) および (2.69) に従って同様に行う。圧力差による項  $K$  は式 (2.70) で与えられる。

$$F_2|_{in} = F_2|_{out} + K \quad (2.66)$$

$$F_i|_{in} = F_i|_{out} + \frac{1}{8} K \quad (i = 8, 10, 11, 13) \quad (2.67)$$

$$F_5|_{out} = F_5|_{in} - K \quad (2.68)$$

$$F_i|_{out} = F_i|_{in} - \frac{1}{8} K \quad (i = 9, 12, 14, 15) \quad (2.69)$$



⊗ 2.4 Boundary condition on the lattice node.

$$K = \Delta p - \frac{1}{3}(F_1|_{\text{in}} - F_1|_{\text{out}} + F_3|_{\text{in}} - F_3|_{\text{out}} + F_4|_{\text{in}} - F_4|_{\text{out}} + F_6|_{\text{in}} - F_6|_{\text{out}} + F_7|_{\text{in}} - F_7|_{\text{out}}) \quad (2.70)$$

これら衝突過程，並進過程，境界条件，巨視化を繰り返すことで時間発展する流体挙動を計算することができる。

## 2.4 チャップマン・エンスコグ展開を用いた流れの支配方程式の導出

格子ボルツマン方程式は、粒子挙動を支配する方程式であり、直接的に流体流動を表すものではない。しかしながら、流体流動計算において、格子ボルツマン方程式を用いて計算した結果が、ナビエ・ストークス方程式の解となる必要がある。そのために、適切な格子モデルおよび平衡分布関数を設定しなければならない。ここでは、D2Q9 モデルにおける格子速度および平衡分布関数を用いて、格子ボルツマン方程式からナビエ・ストークス方程式を導出できることを確認する。以下ではまず、格子 BGK モデルにおける平衡分布関数を示し(第 2.4.1 節)、次に格子速度テンソルの 4 次までの等方性を示し(第 2.4.2 節)、さらに、平衡分布関数の 4 次までの速度モーメントを求める(第 2.4.3 節)。これらを利用して、格子ボルツマン方程式からナビエ・ストークス方程式を導出する。

### 2.4.1 平衡分布関数

格子 BGK モデルにおける平衡分布関数は、質量および運動量の保存則と、最大エントロピー原理を用いて、 $j^2$  のオーダーにおいて、

$$F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) = \frac{W_i}{\rho_0} \left\{ \rho + \frac{m}{k_B T} c_{i\alpha} j_\alpha + \frac{m}{2\rho k_B T} \left( \frac{m}{k_B T} c_{i\alpha} c_{i\beta} j_\alpha j_\beta - j_\alpha j_\alpha \right) \right\} \quad (2.71)$$

となる。導出は、第 A.1 節に示す。ただし、 $\rho_0$  は粒子密度、 $m$  は粒子質量、 $k_B$  はボルツマン定数、 $T$  は温度である。また、 $W_i$  は、流体速度をゼロとしたときの、大域平衡分布(停滞する流体)として定義される。

### 2.4.2 格子ボルツマン法における格子速度の等方性

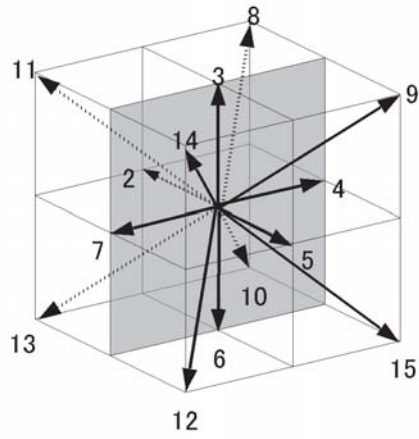
格子速度  $c_i$  に対する  $n$  階テンソルを、

$$L_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = \sum_i c_{i\alpha_1} c_{i\alpha_2} \dots c_{i\alpha_n} \quad (2.72)$$

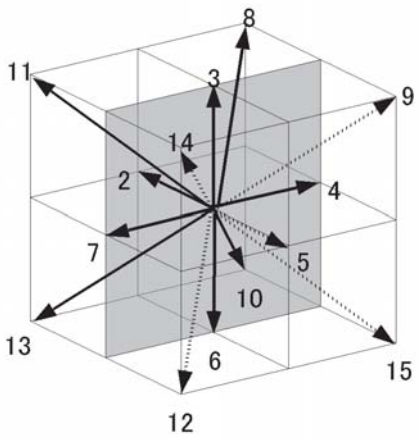
と定義する。ただし、 $c_{i\alpha}$  は、格子速度  $c_i$  の直交座標系における各成分である。ここでは、このテンソルを  $n$  階格子テンソルと呼ぶ。格子ボルツマン法において、格子ボルツマン方程式からナビエ・ストークス方程式を導出するにあたり、4 階までの格子テンソルが等方的でなくてはならない。D2Q9 モデルにおける格子速度  $c_i$  に対して各階の格子テンソルを求める。1 階格子テンソルは、格子速度の対称性から

$$L_\alpha = \sum_i c_{i\alpha} = 0 \quad (2.73)$$





(a) Inlet boundary.



(b) Outlet boundary.

☒ 2.5 The periodic boundary condition.

となる。2 階格子テンソルは、

$$L_{\alpha\beta} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = 6c^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (2.74)$$

となる。3 階格子テンソルは、1 階と同様に

$$L_{\alpha\beta\gamma} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = 0 \quad (2.75)$$

となる。4 階格子テンソルは、

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} = 4c^4 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) - 6c^4 \delta_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (2.76)$$

となり、等方的ではない。そこで、重み付き格子テンソルとして、

$$G_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \sum_i w_i c_{i\alpha_1} c_{i\alpha_2} \dots c_{i\alpha_n} \quad (2.77)$$

を定義する。ここで、 $w_i$  は重み関数である。D2Q9 モデルにおける重み関数を、

$$w_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, 2, \dots, 4) \\ \frac{1}{4} & (i = 5, 6, \dots, 8) \end{cases} \quad (2.78)$$

とすると、2 階および 4 階格子テンソルは、

$$G_{\alpha\beta} = 3c^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (2.79)$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = c^4 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (2.80)$$

となり、等方的である。また 1 階および 3 階格子テンソルはゼロとなる。D3Q15 モデルにおいては、重み関数を

$$w_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, 2, \dots, 6) \\ \frac{1}{8} & (i = 7, 8, \dots, 14) \end{cases}$$

と定めると、D2Q9 モデルと同様に、2 階および 4 階の重み付き格子テンソルは

$$G_{\alpha\beta} = 3c^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (2.81)$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = c^4 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (2.82)$$

となり、これも等方的である。

### 2.4.3 平衡分布関数の速度モーメント

大域平衡分布  $W_i$  に対する格子速度モーメントと、マクスウェル分布

$$w_B(v) = \rho_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{D/2} \exp[-mv^2/2k_B T] \quad (2.83)$$

に対する速度モーメントは同一となる。ここで  $D$  は次元、 $\rho_0$  は密度、 $m$  は粒子質量、 $v$  は粒子速度、 $k_B$  はボルツマン定数、 $T$  は温度である。奇数次モーメントは全てゼロとなり、

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} = \int w_B(v) v_\alpha d\mathbf{v} = 0 \quad (2.84)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = \int w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma d\mathbf{v} = 0 \quad (2.85)$$

と表される。また、偶数次モーメントは以下となる。

$$\sum_i W_i = \int w_B(v) d\mathbf{v} = \rho_0 \quad (2.86)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \int w_B(v) v_\alpha v_\beta d\mathbf{v} = \rho_0 \frac{k_B T}{m} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} &= \int w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta d\mathbf{v} \\ &= \rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \end{aligned} \quad (2.88)$$

これらの詳しい導出は、第 A.2 節に示す。

#### 2.4.4 $W_i$ の導出

平衡分布関数式 (2.71) の係数  $W_i$  は、第 2.4.3 節で示した各次モーメントの式から、各格子モデルごとに求めることができる。ここで求めた各係数を、式 (2.71) に代入することで、式 (2.17) で示した平衡分布関数が求められる。

#### D2Q9 モデル

D2Q9 モデルにおいて、各粒子は 3 種類の速度を有する。各速度毎に平衡分布関数の係数  $W_i$  を、

$$W_i = \begin{cases} W_0 & (i = 0) \\ W_1 & (i = 1, 2, 3, 4) \\ W_2 & (i = 5, 6, 7, 8) \end{cases} \quad (2.89)$$

と定義する。平衡分布関数の各次モーメント式 (2.86)、式 (2.87) および式 (2.88) から、連立方程式が得られ、これらの解として、

$$\begin{aligned} W_0/\rho_0 &= \frac{4}{9} \\ W_1/\rho_0 &= \frac{1}{9} \\ W_2/\rho_0 &= \frac{1}{36} \\ \frac{k_B T}{m} &= \frac{c^2}{3} \end{aligned} \quad (2.90)$$

が求められる。

### D3Q15 モデル

D3Q15 モデルにおいても、D2Q9 モデルと同様に、各粒子は 3 種類の速度を有する。各速度毎に平衡分布関数の係数  $W_i$  を、

$$W_i = \begin{cases} W_0 & (i = 0) \\ W_1 & (i = 1, 2, \dots, 6) \\ W_2 & (i = 7, 8, \dots, 14) \end{cases} \quad (2.91)$$

と定義する。これも D2Q9 モデルと同様に、

$$\begin{aligned} W_0/\rho_0 &= \frac{2}{9} \\ W_1/\rho_0 &= \frac{1}{9} \\ W_2/\rho_0 &= \frac{1}{72} \\ \frac{k_B T}{m} &= \frac{c^2}{3} \end{aligned} \quad (2.92)$$

が得られる。

#### 2.4.5 ナビエ・ストークス 方程式の導出

外力項を考慮した格子ボルツマン方程式は、

$$F_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - F_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} [F_i(\mathbf{x}, t) - F_i^{(0)}(\mathbf{x}, t)] + \frac{\Delta t \mathbf{c}_i}{12c^2} [\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t)] \quad (2.93)$$

となる。これは、粒子挙動を記述する方程式であり、それが流体の挙動を表現できているかを調べる必要がある。そこで、式 (2.93) に対して、チャップマン・エンスコグ展開を用いることでナビエ・ストークス方程式の導出を試みる。このとき必要となるのが、4 次テンソルまで等方的である格子速度モデルおよび適切な平衡分布関数である。

チャップマン・エンスコグ展開は、分布関数  $F$  をクヌッセン数に相当する微量  $\varepsilon$  を用いて式 (2.94) のように、平衡状態の周りに展開することで、 $F$  の解を漸近的に求める手法である。

$$F_i(\mathbf{x}, t) = F_i^{(0)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon F_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 F_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) + O(\varepsilon^3) \quad (2.94)$$

ここで、局所平衡分布関数  $F_i^{(0)}$  もマクスウェル分布を満たすので、

$$\sum_i F_i = \sum_i F_i^{(0)} = \rho \quad (2.95)$$

$$\sum_i \mathbf{c}_i F_i = \sum_i \mathbf{c}_i F_i^{(0)} = \rho \mathbf{u} \quad (2.96)$$

となる。また、式 (2.94) ~ (2.96) より

$$\sum_i F_i^{(1)} = 0 \quad (2.97)$$

$$\sum_i F_i^{(2)} = 0 \quad (2.98)$$

$$\sum_i c_i F_i^{(1)} = 0 \quad (2.99)$$

$$\sum_i c_i F_i^{(2)} = 0 \quad (2.100)$$

ここで、以下断らない限りベクトル量は、式 (2.101) のように添え字 ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) を使った表記に代えるものとする。また、繰り返しの添え字に関しては、総和規約に基づくものとする。

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) = A_\alpha \quad (2.101)$$

となる。次に、分布関数  $F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t + \Delta t)$  を、2次精度で Taylor 展開する。まず、時間方向に展開すると

$$\begin{aligned} F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t + \Delta t) &= F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t) + \Delta t \partial_t F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \partial_t^2 F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t) + O[(\Delta t)^3] \end{aligned} \quad (2.102)$$

となる。次に、 $F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t)$  について、 $x_\alpha$  方向に展開すると、

$$\begin{aligned} F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t) &= F_i(x_\alpha, t) + c_{i\alpha}\Delta t \partial_{x_\alpha} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}c_{i\alpha}c_{i\beta}\Delta t^2 \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\beta} F_i(x_\alpha, t) + O[(c_{i\alpha}\Delta t)^3] \end{aligned} \quad (2.103)$$

となり、これを代入すると、

$$\begin{aligned} F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t + \Delta t) &= F_i(x_\alpha, t) + c_{i\alpha}\Delta t \partial_{x_\alpha} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}c_{i\alpha}c_{i\beta}\Delta t^2 \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\beta} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + \Delta t \partial_t \{F_i(x_\alpha, t) + c_{i\alpha}\Delta t \partial_{x_\alpha} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}c_{i\alpha}c_{i\beta}\Delta t^2 \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\beta} F_i(x_\alpha, t)\} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \partial_t^2 \{F_i(x_\alpha, t) + c_{i\alpha}\Delta t \partial_{x_\alpha} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + \frac{1}{2}c_{i\alpha}c_{i\beta}\Delta t^2 \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\beta} F_i(x_\alpha, t)\} + O(\partial^3 F_i) \end{aligned} \quad (2.104)$$

となり、まとめると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} F_i(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t + \Delta t) &= F_i(x_\alpha, t) + \Delta t \partial_t F_i(x_\alpha, t) + c_{i\alpha}\Delta t \partial_{x_\alpha} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{\partial_t \partial_t F_i(x_\alpha, t) + 2c_{i\alpha} \partial_t \partial_{x_\alpha} F_i(x_\alpha, t) \\ &\quad + c_{i\alpha}c_{i\beta} \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\beta} F_i(x_\alpha, t)\} + O(\partial^3 F_i) \end{aligned} \quad (2.105)$$

次に、外力項についても2次精度で Taylor 展開すると、

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta t c_{i\alpha}}{12c^2} [K_\alpha(x_\alpha, t) + K_\alpha(x_\alpha + c_{i\alpha}\Delta t, t + \Delta t)] \\ &= \frac{\Delta t c_{i\alpha}}{12c^2} [K_\alpha(x_\alpha, t) + K_\alpha(x_\alpha, t) + \Delta t \partial_t K_\alpha(x_\alpha, t) + c_{i\beta}\Delta t \partial_{x_\beta} K_\alpha(x_\alpha, t) \\ &\quad + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{\partial_t \partial_t K_\alpha(x_\alpha, t) + 2c_{i\beta} \partial_t \partial_{x_\beta} K_\alpha(x_\alpha, t) + c_{i\beta}c_{i\gamma} \partial_{x_\beta} \partial_{x_\gamma} K_\alpha(x_\alpha, t)\}] + O(\partial^3 K_\alpha) \\ &= \frac{\Delta t c_{i\alpha}}{6c^2} K_\alpha(x_\alpha, t) + \frac{(\Delta t)^2 c_{i\alpha}}{12c^2} [\partial_t K_\alpha(x_\alpha, t) + c_{i\beta} \partial_{x_\beta} K_\alpha(x_\alpha, t)] + O[(\Delta t)^3] \end{aligned} \quad (2.106)$$

となる。また、時間微分  $\partial_t$ 、空間微分  $\partial_{x_\alpha}$ 、外力項  $K_\alpha$  の、チャップマン・エンスコグ展開は

$$\partial_t = \varepsilon \partial_t^{(1)} + \varepsilon^2 \partial_t^{(2)} \quad (2.107)$$

$$\partial_{x_\alpha} = \varepsilon \partial_{x_\alpha}^{(1)} \quad (2.108)$$

$$K_\alpha = \varepsilon K_\alpha^{(1)} \quad (2.109)$$

となる。式 (2.93) に、式 (2.105) および式 (2.106) を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 = & F_i + \Delta t \partial_t F_i + c_{i\alpha} \Delta t \partial_{x_\alpha} F_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} (\partial_t \partial_t F_i + 2c_{i\alpha} \partial_t \partial_{x_\alpha} F_i \\ & + c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\beta} F_i) - F_i + \frac{\Delta t}{\tau} [F_i - F_i^{(0)}] - \frac{\Delta t c_{i\alpha}}{6c^2} K_\alpha \\ & - \frac{(\Delta t)^2 c_{i\alpha}}{12c^2} (\partial_t K_\alpha + c_{i\beta} \partial_{x_\beta} K_\alpha) + O[(\Delta t)^3] + O[\partial^3 F_i] \end{aligned} \quad (2.110)$$

となり、式 (2.94)、式 (2.107) ~ 式 (2.109) を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 = & \Delta t \{ \varepsilon \partial_t^{(1)} + \varepsilon^2 \partial_t^{(2)} \} \{ F_i^{(0)} + \varepsilon F_i^{(1)} + \varepsilon^2 F_i^{(2)} \} + c_{i\alpha} \Delta t \varepsilon \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ F_i^{(0)} + \varepsilon F_i^{(1)} + \varepsilon^2 F_i^{(2)} \} \\ & + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{ \varepsilon \partial_t^{(1)} + \varepsilon^2 \partial_t^{(2)} \}^2 \{ F_i^{(0)} + \varepsilon F_i^{(1)} + \varepsilon^2 F_i^{(2)} \} \\ & + 2c_{i\alpha} \{ \varepsilon \partial_t^{(1)} + \varepsilon^2 \partial_t^{(2)} \} \varepsilon \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ F_i^{(0)} + \varepsilon F_i^{(1)} + \varepsilon^2 F_i^{(2)} \} \\ & + c_{i\alpha} c_{i\beta} \varepsilon^2 \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} \{ F_i^{(0)} + \varepsilon F_i^{(1)} + \varepsilon^2 F_i^{(2)} \} + \frac{\Delta t}{\tau} \{ F_i^{(0)} + \varepsilon F_i^{(1)} + \varepsilon^2 F_i^{(2)} \} - F_i^{(0)} \\ & - \frac{\Delta t c_{i\alpha}}{6c^2} \varepsilon K_\alpha^{(1)} - \frac{(\Delta t)^2 c_{i\alpha}}{12c^2} \{ \varepsilon \partial_t^{(1)} + \varepsilon^2 \partial_t^{(2)} \} \varepsilon K_\alpha^{(1)} + c_{i\beta} \varepsilon \partial_{x_\beta}^{(1)} \varepsilon K_\alpha^{(1)} + O[\varepsilon^3] \\ = & \varepsilon \Delta t \{ \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} \} + \varepsilon^2 \Delta t \{ \partial_t^{(1)} F_i^{(1)} + \partial_t^{(2)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(1)} \} \\ & + \varepsilon^2 \frac{(\Delta t)^2}{2} \{ \partial_t^{(1)} \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + 2c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} \} \\ & + \varepsilon \frac{\Delta t}{\tau} F_i^{(1)} + \varepsilon^2 \frac{\Delta t}{\tau} F_i^{(2)} - \varepsilon \frac{\Delta t c_{i\alpha}}{6c^2} K_\alpha^{(1)} - \varepsilon^2 \frac{(\Delta t)^2 c_{i\alpha}}{12c^2} \{ \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} + c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} K_\alpha^{(1)} \} + O[\varepsilon^3] \end{aligned} \quad (2.111)$$

となり、ここで両辺  $\Delta t$  で割ると、

$$\begin{aligned} 0 = & \varepsilon \{ \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(1)} - \frac{c_{i\alpha}}{6c^2} K_\alpha^{(1)} \} + \varepsilon^2 \{ \partial_t^{(1)} F_i^{(1)} + \partial_t^{(2)} F_i^{(0)} \\ & + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + \Delta t c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} \\ & + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(2)} - \frac{\Delta t}{12c^2} c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} - \frac{\Delta t}{12c^2} c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} K_\alpha^{(1)} \} + O[\varepsilon^3] \end{aligned} \quad (2.112)$$

となる。ここで、 $\varepsilon$  および  $\varepsilon^2$  の項をそれぞれ  $E_i^{(0)}$  および  $E_i^{(1)}$  とおくと、上式は

$$0 = \varepsilon E_i^{(0)} + \varepsilon^2 E_i^{(1)} + O[\varepsilon^3] \quad (2.113)$$

となる。ただし、

$$E_i^{(0)} = \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(1)} - \frac{c_{i\alpha}}{6c^2} K_\alpha^{(1)} \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} E_i^{(1)} = & \partial_t^{(1)} F_i^{(1)} + \partial_t^{(2)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} \\ & + \Delta t c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(2)} \\ & - \frac{\Delta t}{12c^2} c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} - \frac{\Delta t}{12c^2} c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} K_\alpha^{(1)} \end{aligned} \quad (2.115)$$

である。

ここで、格子ボルツマン方程式において、質量および運動量に関する保存則が成り立たねばならない。よって、格子ボルツマン方程式と等価である式 (2.113) においても、0 次および 1 次の速度モーメントは 0 となる。

$\varepsilon$  に関する 1 次精度モーメント

式 (2.113) において、 $\varepsilon$  に関する 1 次精度を考えると、 $E_i^{(0)}$  のみ考えればよい。よって、 $E_i^{(0)}$  の 0 次モーメントは、式 (2.95) ~ (2.97) および (2.114) より、

$$\begin{aligned}\sum_i E_i^{(0)} &= \sum_i \left\{ \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(1)} - \frac{c_{i\alpha}}{6c^2} K_\alpha^{(1)} \right\} \\ &= \partial_t^{(1)} \rho + \partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\alpha \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.116}$$

となる。また、1 次モーメントは、式 (2.96)、(2.99) および (2.74) から

$$\begin{aligned}\sum_i c_{i\alpha} E_i^{(0)} &= \sum_i c_{i\alpha} \left\{ \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} + c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(1)} - \frac{c_{i\beta}}{6c^2} K_\beta^{(1)} \right\} \\ &= \partial_t^{(1)} j_\alpha + \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} - \frac{1}{6c^2} K_\beta^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \\ &= \partial_t^{(1)} j_\alpha + \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} - \frac{1}{6c^2} K_\beta^{(1)} 6c^2 \delta_{\alpha\beta} \\ &= \partial_t^{(1)} j_\alpha + \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} - K_\alpha^{(1)}\end{aligned}\tag{2.117}$$

となる。ここで、式 (2.71) より、

$$\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} = \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{W_i}{\rho_0} \left\{ \rho + \frac{m}{k_B T} c_{i\gamma} j_\gamma + \frac{m}{2\rho k_B T} \left( \frac{m}{k_B T} c_{i\gamma} c_{i\delta} j_\gamma j_\delta - j_\gamma j_\gamma \right) \right\}\tag{2.118}$$

である。ここで式 (2.118) に関してそれぞれの項を個別に見る。

第 1 項

式 (2.87) より、

$$\begin{aligned}\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{W_i}{\rho_0} \rho &= \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{\rho}{\rho_0} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} W_i \\ &= \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{\rho}{\rho_0} \rho_0 \frac{k_B T}{m} \delta_{\alpha\beta} \\ &= \partial_{x_\alpha}^{(1)} p\end{aligned}\tag{2.119}$$

となる。ただし、

$$p = \rho \frac{k_B T}{m}\tag{2.120}$$

である。

第 2 項

式 (2.85) より、

$$\begin{aligned}\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{W_i}{\rho_0} \frac{m}{k_B T} c_{i\gamma} j_\gamma &= \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{1}{\rho_0} \frac{m}{k_B T} j_\gamma \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} W_i \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.121)$$

となる。

第 3 項

式 (2.88) より、

$$\begin{aligned}\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{W_i}{\rho_0} \frac{m}{2\rho k_B T} \frac{m}{k_B T} c_{i\gamma} c_{i\delta} j_\gamma j_\delta &= \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{1}{\rho_0} \frac{m}{2\rho k_B T} \frac{m}{k_B T} j_\gamma j_\delta \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} W_i \\ &= \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{1}{\rho_0} \frac{m}{2\rho k_B T} \frac{m}{k_B T} j_\gamma j_\delta \rho_0 \left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \\ &\quad + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \\ &= \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{1}{2\rho} (j_\gamma j_\gamma \delta_{\alpha\beta} + 2j_\alpha j_\beta) \\ &= \frac{1}{2\rho} \partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\gamma j_\gamma + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta\end{aligned}\quad (2.122)$$

となる。

第 4 項

式 (2.87) より、

$$\begin{aligned}-\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{W_i}{\rho_0} \frac{m}{2\rho k_B T} j_\gamma j_\gamma &= -\partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{1}{\rho_0} \frac{m}{2\rho k_B T} j_\gamma j_\gamma \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} W_i \\ &= -\partial_{x_\beta}^{(1)} \frac{1}{\rho_0} \frac{m}{2\rho k_B T} j_\gamma j_\gamma \rho_0 \frac{k_B T}{m} \delta_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2\rho} \partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\gamma j_\gamma\end{aligned}\quad (2.123)$$

となる。式 (2.119) および式 (2.121) ~ (2.123) を式 (2.118) に代入すると、

$$\sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} = \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta\quad (2.124)$$

が得られる。よって、式 (2.117) は

$$\begin{aligned}\sum_i c_{i\alpha} E_i^{(0)} &= \partial_t^{(1)} j_\alpha + \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta - K_\alpha^{(1)} \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.125)$$

となる。ここで、式 (2.116) および (2.125) において、式 (2.107) ~ (2.109) を用いてチャップマン・エンスコグの逆展開を行う。0 次モーメントより、連続の式

$$\begin{aligned}0 &= \varepsilon \{ \partial_t^{(1)} \rho + \partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\alpha \} \\ &= \partial_t \rho + \partial_{x_\alpha} j_\alpha \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}\end{aligned}\quad (2.126)$$



が得られた。また、1次モーメントより、Eular 方程式

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon \{ \partial_t^{(1)} j_\alpha + \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta - K_\alpha^{(1)} \} \\
&= \partial_t j_\alpha + \partial_{x_\alpha} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta} j_\beta - K_\alpha \\
&= \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} (\nabla \cdot \mathbf{j}) - \mathbf{K} \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{K} \tag{2.127}
\end{aligned}$$

が得られた。

$\varepsilon$  に関する 2 次精度モーメント

式 (2.113) において、 $\varepsilon$  に関する 2 次精度を考える。 $E_i^{(0)}$  のモーメントは上記で計算済みであるので、ここでは、 $E_i^{(1)}$  の 0 次および 1 次モーメントを計算する。0 次モーメントは、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\sum_i E_i^{(1)} &= \sum_i [ \partial_t^{(1)} F_i^{(1)} + \partial_t^{(2)} F_i^{(0)} + c_{i\alpha} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} \partial_t^{(1)} F_i^{(0)} \\
&\quad + \Delta t c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau \Delta t} F_i^{(2)} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{12c^2} c_{i\alpha} \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} - \frac{\Delta t}{12c^2} c_{i\alpha} c_{i\beta} \partial_{x_\beta}^{(1)} K_\alpha^{(1)} ] \tag{2.128}
\end{aligned}$$

ここで、以下の項は式 (2.97) ~ (2.99) および (2.73) より消去できる。

$$\partial_t^{(1)} \sum_i F_i^{(1)} = 0 \tag{2.129}$$

$$\partial_{x_\alpha}^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} F_i^{(1)} = 0 \tag{2.130}$$

$$\frac{1}{\tau \Delta t} \sum_i F_i^{(2)} = 0 \tag{2.131}$$

$$\frac{\Delta t}{12c^2} \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} = 0 \tag{2.132}$$

また、式 (2.95)、(2.96)、(2.124) および (2.74) から、

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t^{(2)} \rho + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} \partial_t^{(1)} \rho + \Delta t \partial_t^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{12c^2} \partial_{x_\beta}^{(1)} K_\alpha^{(1)} 6c^2 \delta_{\alpha\beta} \tag{2.133}
\end{aligned}$$

となる。また、式 (2.116) より

$$0 = \partial_t^{(2)} \rho + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} \{ -\partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\alpha \} + \Delta t \partial_t^{(1)} \partial_{x_\alpha}^{(1)} j_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} - \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\alpha}^{(1)} K_\alpha^{(1)} \tag{2.134}$$

となる。さらに、式 (2.125) より

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t^{(2)} \rho + \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta - K_\alpha^{(1)} \} - \Delta t \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta - K_\alpha^{(1)} \} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\alpha}^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} - \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\alpha}^{(1)} K_\alpha^{(1)} \tag{2.135}
\end{aligned}$$

となる。これを計算すると、

$$\partial_t^{(2)}\rho = 0 \quad (2.136)$$

となる。式 (2.113) に式 (2.116) および (2.136) を代入すると、

$$\varepsilon\{\partial_t^{(1)}\rho + \partial_{x_\alpha}^{(1)}j_\alpha\} + \varepsilon^2\partial_t^{(2)}\rho = 0 \quad (2.137)$$

となる。ここで1次の時と同様に式 (2.107) ~ (2.109) を用いてチャップマン・エンスコグの逆展開を行うと、

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + \partial_{x_\alpha}j_\alpha &= 0 \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0 \end{aligned} \quad (2.138)$$

となり、連続の式が得られる。

次に、式 (2.113) における  $\varepsilon^2$  の項に関して、1次モーメントを計算する。

$$\begin{aligned} \sum_i c_{i\alpha}E_i^{(1)} &= \sum_i c_{i\alpha}[\partial_t^{(1)}F_i^{(1)} + \partial_t^{(2)}F_i^{(0)} + c_{i\beta}\partial_{x_\beta}^{(1)}F_i^{(1)} + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^{(1)}\partial_t^{(1)}F_i^{(0)} \\ &\quad + \Delta t c_{i\beta}\partial_t^{(1)}\partial_{x_\beta}^{(1)}F_i^{(0)} + \frac{\Delta t}{2}c_{i\beta}c_{i\gamma}\partial_{x_\beta}^{(1)}\partial_{x_\gamma}^{(1)}F_i^{(0)} + \frac{1}{\tau\Delta t}F_i^{(2)} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{12c^2}c_{i\beta}\partial_t^{(1)}K_\beta^{(1)} - \frac{\Delta t}{12c^2}c_{i\beta}c_{i\gamma}\partial_{x_\gamma}^{(1)}K_\beta^{(1)}] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.139)$$

ここで、以下の項は式 (2.99)、(2.100) および (2.75) より消去できる。

$$\partial_t^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}F_i^{(1)} = 0 \quad (2.140)$$

$$\frac{1}{\tau\Delta t}\sum_i c_{i\alpha}F_i^{(2)} = 0 \quad (2.141)$$

$$\frac{\Delta t}{12c^2}\partial_{x_\gamma}^{(1)}K_\beta^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}c_{i\gamma} = 0 \quad (2.142)$$

また、式 (2.96) および (2.74) より

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t^{(2)}j_\alpha + \partial_{x_\beta}^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}F_i^{(1)} + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^{(1)}\partial_t^{(1)}j_\alpha + \Delta t\partial_t^{(1)}\partial_{x_\beta}^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}F_i^{(0)} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2}\partial_{x_\beta}^{(1)}\partial_{x_\gamma}^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}c_{i\gamma}F_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{12c^2}\partial_t^{(1)}K_\beta^{(1)}6c^2\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.143)$$

となる。また、式 (2.116)、(2.124) および (2.125) より

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t^{(2)}j_\alpha + \partial_{x_\beta}^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}\frac{\Delta t}{\omega}\{-\partial_t^{(1)}F_i^{(0)} - c_{i\gamma}\partial_{x_\gamma}^{(1)}F_i^{(0)} + \frac{c_{i\gamma}}{6c^2}K_\gamma^{(1)}\} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^{(1)}\{-\partial_{x_\alpha}^{(1)}p - \frac{1}{\rho}j_\alpha\partial_{x_\beta}^{(1)}j_\beta + K_\alpha^{(1)}\} + \Delta t\partial_t^{(1)}\{\partial_{x_\alpha}^{(1)}p + \frac{1}{\rho}j_\alpha\partial_{x_\beta}^{(1)}j_\beta\} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2}\partial_{x_\beta}^{(1)}\partial_{x_\gamma}^{(1)}\sum_i c_{i\alpha}c_{i\beta}c_{i\gamma}F_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{2}\partial_t^{(1)}K_\alpha^{(1)} \end{aligned} \quad (2.144)$$

となる。さらに、式 (2.124)、(2.75) より

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t^{(2)} j_\alpha - \frac{\Delta t}{\omega} \partial_t^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} - \frac{\Delta t}{\omega} \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} F_i^{(0)} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} + \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} + \Delta t \partial_t^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} F_i^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} \partial_t^{(1)} K_\alpha^{(1)} \tag{2.145}
\end{aligned}$$

となる。まとめると、

$$0 = \partial_t^{(2)} j_\alpha + \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_t^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} + \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} F_i^{(0)} \tag{2.146}$$

となる。ここで、第 2 項および第 3 項について個別に見る。 $j^2$  以上の項を無視すると、第 2 項は、式 (2.116) より、

$$\begin{aligned}
\left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_t^{(1)} \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta \} &= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_t^{(1)} \left\{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} \rho \frac{k_B T}{m} + \frac{1}{\rho} \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\alpha j_\beta \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \left\{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} \frac{k_B T}{m} \partial_t^{(1)} \rho + \frac{1}{\rho} \partial_t^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta j_\alpha \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \left\{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} \frac{k_B T}{m} [-\partial_{x_\delta}^{(1)} j_\delta] + \frac{1}{\rho} \partial_t^{(1)} \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta j_\alpha \right\} \\
&= \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \Delta t \frac{k_B T}{m} \partial_{x_\delta}^{(1)} j_\delta \partial_{x_\alpha}^{(1)} + O(j^2) \tag{2.147}
\end{aligned}$$

となり、第 3 項は、式 (2.71)、(2.85)、(2.88) より

$$\begin{aligned}
\left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} F_i^{(0)} &= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} \left\{ \frac{W_i}{\rho_0} \left[ \rho + \frac{m}{k_B T} c_{i\delta} j_\delta \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{m}{2\rho k_B T} \left( \frac{m}{k_B T} c_{i\delta} c_{i\zeta} j_\delta j_\zeta - j_\delta j_\zeta \right) \right\} \\
&= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} j_\delta \frac{m}{k_B T} \frac{1}{\rho_0} \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} W_i \\
&= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \partial_{x_\beta}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} j_\delta \frac{m}{k_B T} \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \\
&\quad + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \\
&= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \frac{k_B T}{m} j_\delta \{ \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\delta}^{(1)} + \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\delta}^{(1)} + \partial_{x_\gamma}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \delta_{\alpha\delta} \} \\
&= \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \frac{k_B T}{m} j_\delta \{ \partial_{x_\gamma}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \delta_{\alpha\delta} + 2\partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\delta}^{(1)} \} \tag{2.148}
\end{aligned}$$

となる。よって、式 (2.146) は、

$$\partial_t^{(2)} j_\alpha + \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \frac{k_B T}{m} j_\delta \{ \partial_{x_\gamma}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \delta_{\alpha\delta} + \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\delta}^{(1)} \} = 0 \tag{2.149}$$

となる。ここで式 (2.113) は式 (2.125) および (2.149) より、

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon \{ \partial_t^{(1)} j_\alpha + \partial_{x_\alpha}^{(1)} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta}^{(1)} j_\beta - K_\alpha^{(1)} \} \\
&\quad + \varepsilon^2 \left[ \partial_t^{(2)} j_\alpha + \left( \frac{1}{2} - \tau \right) \Delta t \frac{k_B T}{m} j_\delta \{ \partial_{x_\gamma}^{(1)} \partial_{x_\gamma}^{(1)} \delta_{\alpha\delta} + \partial_{x_\alpha}^{(1)} \partial_{x_\delta}^{(1)} \} \right] \tag{2.150}
\end{aligned}$$

となる。ここで、チャップマン・エンスコグ逆展開により

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_t j_\alpha + \partial_{x_\alpha} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta} j_\beta - K_\alpha + \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \Delta t \frac{k_B T}{m} j_\delta \{ \partial_{x_\gamma} \partial_{x_\gamma} \delta_{\alpha\delta} + \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\delta} \} \\
 &= \partial_t j_\alpha + \partial_{x_\alpha} p + \frac{1}{\rho} j_\alpha \partial_{x_\beta} j_\beta - K_\alpha + \left(\frac{1}{2} - \tau\right) \Delta t \frac{k_B T}{m} \{ \partial_{x_\gamma} \partial_{x_\gamma} j_\alpha + \partial_{x_\alpha} \partial_{x_\delta} j_\delta \} \quad (2.151)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、粘性係数  $\mu$  を、

$$\mu = \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \Delta t \frac{k_B T}{m} \quad (2.152)$$

とおくと、上式は、

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{j}(\nabla \cdot \mathbf{j}) - \mathbf{K} - \mu \{ \nabla^2 \mathbf{j} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{j}) \} = 0 \quad (2.153)$$

となる。ここで、非圧縮性の仮定より

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.154)$$

であるから、Navier–Stokes 方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{K} \quad (2.155)$$

ただし、 $\nu$  は以下で表される動粘性係数である。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \left(\tau - \frac{1}{2}\right) \Delta t \frac{k_B T}{m\rho} \quad (2.156)$$

## 第3章 格子ボルツマン法の並列化とその効果

格子ボルツマン法は、対象となる岩石構造や地下構造を直接モデル化し、その複雑な形状内を流れる流体流動を比較的正しく計算できる手法である。そのためモデル形状を計算機上で正しく再現することが必須である。しかしながら、一般的には等間隔格子を用いて解析領域を離散化するため、曲線などを正しくモデル化するためには、多くの格子点を必要とする。そのため多くのメモリを必要とし、計算時間も増大する。これらの解決のため、本章では格子ボルツマン法の並列化を行い、その効果について検討する(三善・松岡, 2004)。

### 3.1 はじめに

例えば、格子ボルツマン法を用いて、多孔質岩石内流体流動計算を行う場合、常に以下の2点について考慮しなくてはならない。つまり、(1)再現した多孔質岩石モデルが巨視的現象を再現する上で十分な大きさを有しているのか(REVの問題)、(2)多孔質岩石粒子1個あたりの格子数は十分か(離散化格子サイズの問題)、である。

(1)に関しては、多くの検討がなされているがいまだ決めてとなる答えは存在しないようである。例えばPanら(Pan et al., 2004)は、多孔質岩石における油水混相流解析から、相対浸透率曲線や毛細管圧力曲線を求めるに際し、一辺辺り10粒子程度、全体としては1,200粒子程度の多孔質岩石モデルが必要であると述べている。(2)に関しては、詳細は第3.2節で論じるが、離散化格子サイズとしては粒子直径あたり20格子程度必要であることが示された。これらを考慮してモデル化を行う場合、モデル形状を立方体とすると、格子数は $200 \times 200 \times 200$ 程度となる。このとき計算に必要なメモリ量はおよそ2GBであり、計算に要する時間はおよそ5~6時間程度となる。しかしながら、仮に粒子の直径を1mmという非常に大きな砂粒であるとしても、そのモデルサイズはおよそ1cm四方でしかない。また一辺の長さを2倍にすると、格子点数は8倍、メモリは約16GB必要で、もはやPCでの計算は不可能である。コアサイズのシミュレーションなどでは、これよりはるかに大きな領域を設定しなくてはならない。

これらのことから、格子ボルツマン法を用いた多孔質岩石内流体流動を大規模モデルに対して実行するためには、計算の並列化は避けられない。そこで本章では、多孔質岩石の離散化格子サイズについて検討し、ついで並列化の手順を述べる。さらに、並列化格子ボルツマン法を用いた多孔質岩石内流体流動および矩形ダクト内流体流動計算を行い、計算機の違いや並列化法の違いによる並列化効率について検討する。

### 3.2 モデルに対する離散化の影響

図3.1は、多孔質な岩石を模した約400個の等粒径粒子をランダムにパッキングしたモデルの一例である(Finney, 1970)。ここでは、Finneyモデルと呼ぶ。このモデルの孔隙率は約35%である。このFinneyモデルをLBM計算用に格子で離散化し、中心部の断面を切り出したものを、図

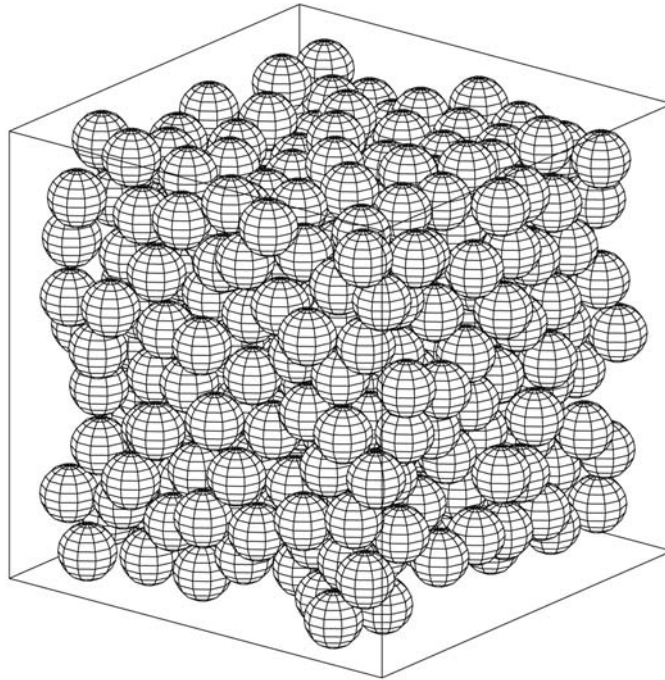


図 3.1 3D pore structure model by Finney's random packing (Finney, 1970).

3.2 に示した。ここで、 $21 \times 21$  などは、離散化された断面の格子数であり、 $\zeta$  は粒子直径を格子数で表記したものである。また白色部が粒子部であり、黒色が孔隙を表す。概観としては、 $\zeta = 15$  程度あれば球体であるとみなすことができる。また、格子で離散化されたモデルの孔隙率を、粒子直径に対してプロットしたものが図 3.3 中の黒丸である。格子数の増加に伴って孔隙率は増加していき、次第に真の孔隙率の値である 35% に漸近している。このモデルでは、 $\zeta = 20$  程度でモデルが再現されたとみなすことができる。

さらに、等粒径およびランダム粒径の粒子群に対して重力落下法によって作成した、多孔質岩石モデルに対しても同様に離散化と孔隙率変化について検討した。ここで作成したランダム粒径モデルの粒径分布は、等粒径モデルの粒径の 80% ~ 120% の間で一様である。等粒径モデルの孔隙率がおよそ 35%、ランダム粒径モデルではおよそ 27% である。また、粒子配置の異なるモデルとして複数モデル作成し、ここでは代表的なモデルにおける結果のみ示す。図 3.3 は、粒子直径に対応する格子数に対する孔隙率の変化を表している。三角マーカーは等粒径モデルの結果であり、四角マーカーはランダム径モデルの結果である。等粒径粒子では、重力落下式モデル (uniform) においても Finney モデルと同様に、 $\zeta = 20$  程度で孔隙率は約 35% に収束した。また粒径がランダムである場合は、等粒径モデルよりも孔隙率は減少したが、 $\zeta = 20$  程度で収束することは同様であった。このことから、多孔質岩石のモデル化において、 $\zeta = 20$  程度の離散化が必要であると言える。

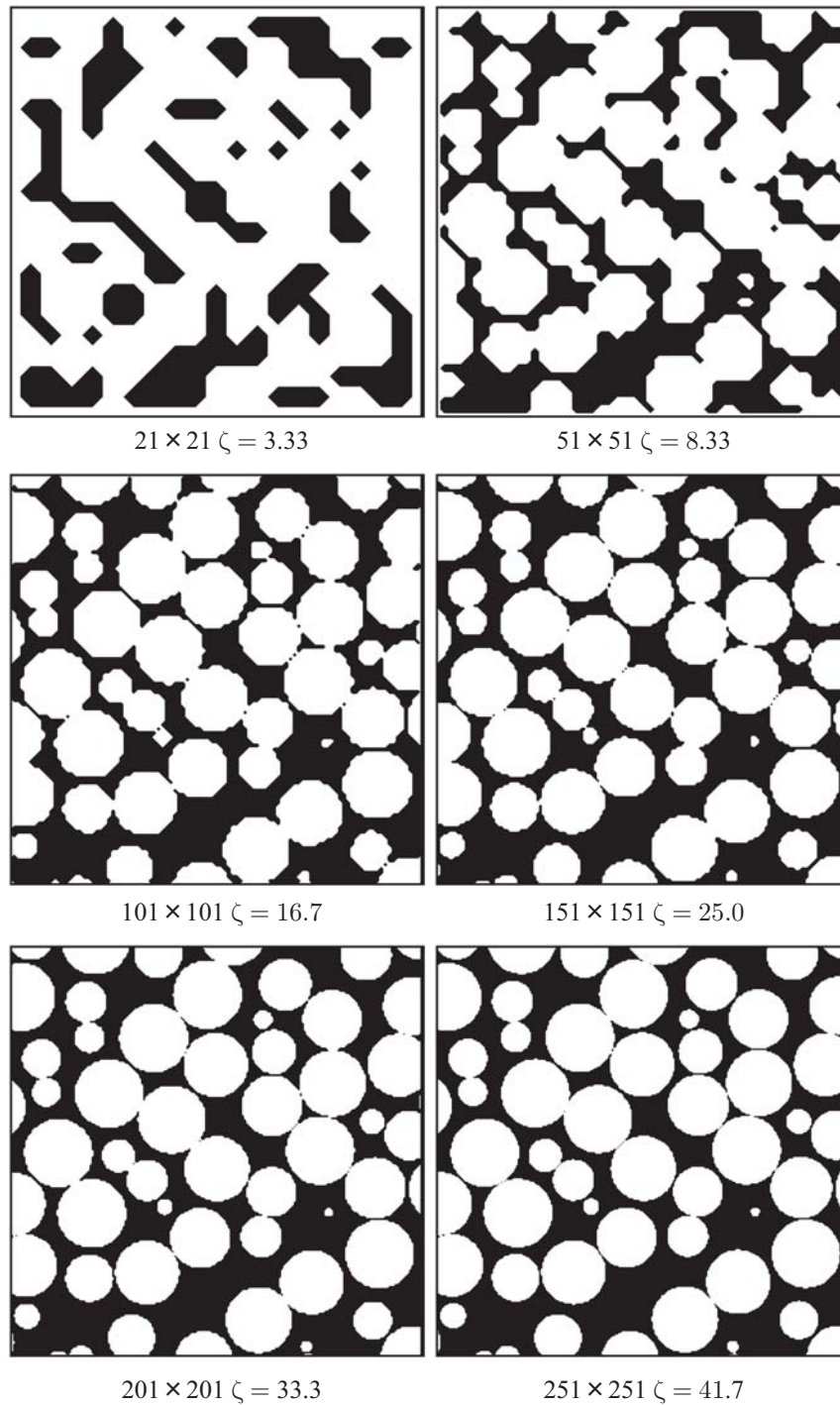


图 3.2 Cross-sections through the 3D random packing model with various mesh dimensions.  $\zeta$  is the sphere diameter length with the lattice number. The rock spheres become finer according to the mesh number.

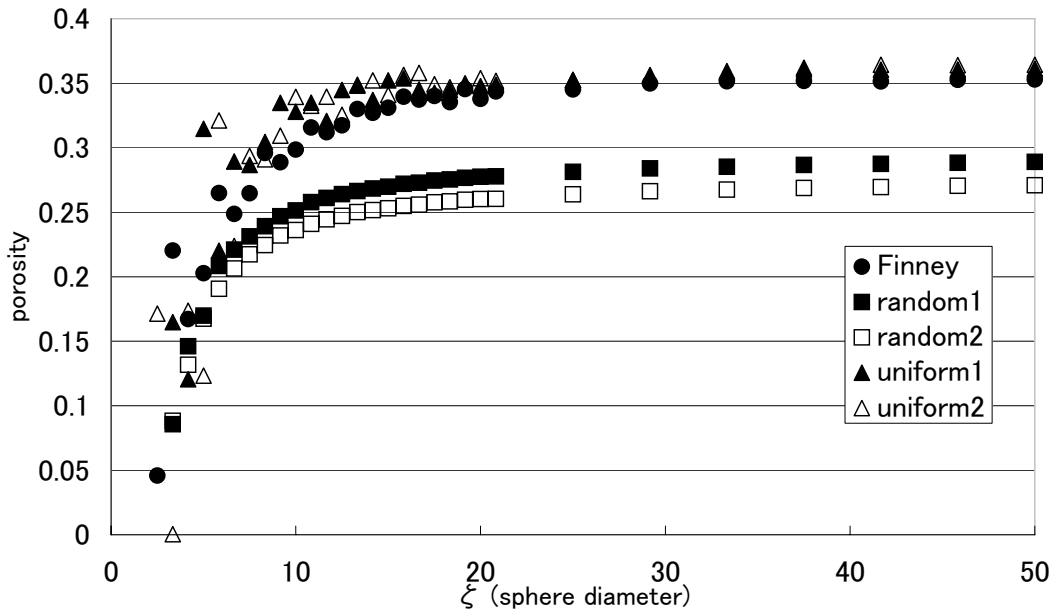


図 3.3 Variation of porosity with sphere diameter of the porous rock models used in our numerical experiment. Porosity becomes almost uniform when  $\zeta$  is greater than 20.

### 3.3 格子ボルツマン法の並列化手順

本研究では、MPI を用いたプロセス並列による LBM の並列計算を行った。ここでは、LBM に対する MPI による並列化の手順について記す。LBM では、第 2 章で示したように、粒子密度の分布関数がタイムステップ毎に更新されていく。このとき、ある格子点において、各タイムステップ毎で計算に必要な値は、D3Q15 モデルにおいて、その点および周囲 14 点における分布関数値のみである。これは、粒子が各タイムステップ毎に隣接点にしか移動できないためである。よって、境界の分布関数値のみを通信することで、領域分割による並列計算が可能となる。つまり、MPI を用いた LBM 並列計算は、PC クラスタに代表される分散メモリ型並列計算機で簡便に計算が可能であり、そのため、計算機の台数を増やした分だけ解析領域を大きくとることができるメリットがある。

本研究では、解析領域に対して  $x$  方向に圧力差を設けて流体を流動させ、その方向には周期境界条件を適用し、また  $y$  および  $z$  方向の境界は壁で覆われているものとした。今回、モデルの分割の方向は  $x$  方向のみとした (図 3.4)。分割面が 1 方向であるため、各計算機毎に 2 度通信が行われるだけであり、プログラムの構築が容易である。しかしながら、分割後の領域形状が板状になることから、領域形状が立法体である時に比べると通信量が増え、計算が非効率的となる欠点もある。

ここで、4 分割モデルを例にとって計算の流れを説明する (図 3.5)。まず最初に、計算領域を 4 個に分割し、各領域のデータは各計算機にそれぞれ渡される。このとき、分割はできる限り均等に行われるべきである。なぜなら、領域サイズが不均等であれば、小さい領域を受け持つ計算機が先に計算を終了し、他の計算機の計算が終わるのを待つことになるからである。このアイドル状態ができる限り減るように、領域分割の大きさを決定すると計算効率が高い。



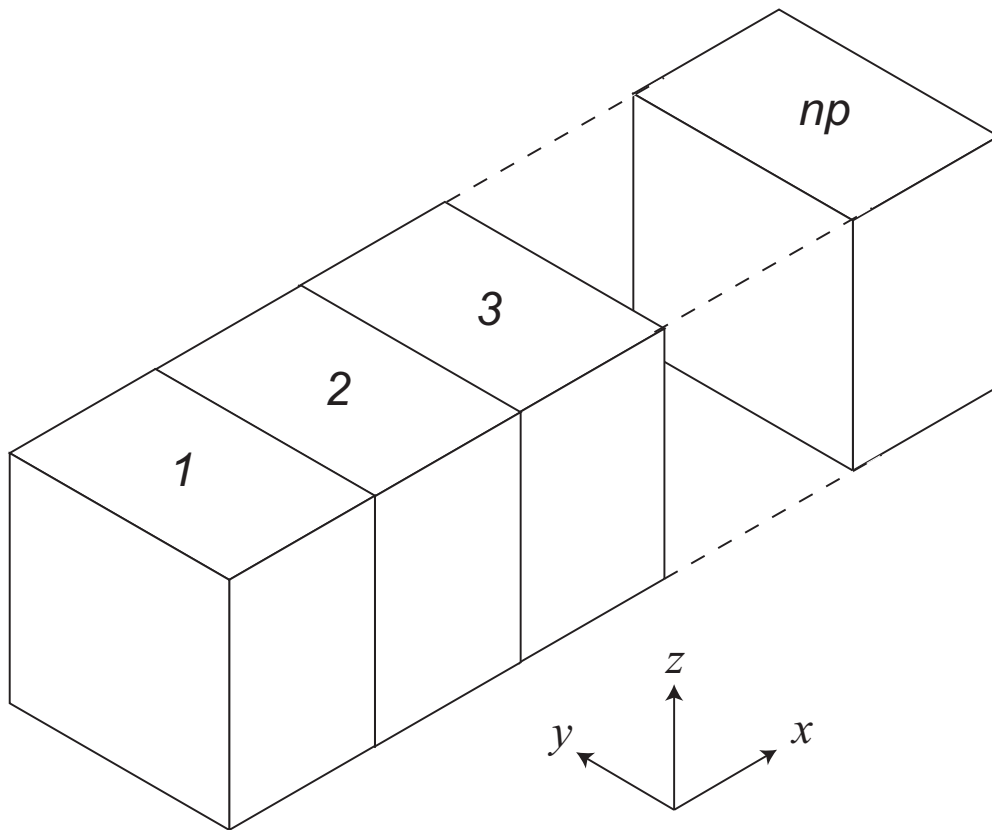


図 3.4 Slice parallelization of model, where  $np$  is the number of processors.

次に、LBM においての各計算ステップ (衝突、並進、境界条件、巨視化) が各計算機毎になされる。このとき、並進および周期境界条件の計算には、各格子点以外の格子点の情報が必要となる。並進の計算では、その格子点に隣接する格子点の分布関数が必要である。従って、その格子点各計算領域の境界上にある場合、別の計算機の割り当て領域上にある格子点が計算に必要なことがある。この計算を行うために、その都度通信を行うと通信回数が増加し、並列効率の低下を引き起こすことがあるため、通信は一度にまとめて行うことが望まれる。仮想格子点を各計算機との境界の外側に設けることで、通信を一度にまとめるとともに、並進過程の計算は各計算機内で行うことが可能となり、計算効率を高く保つことが可能となる。図 3.5 の下図において、灰色の領域が各計算機が割り当てられた計算領域であり、その左右の外側にある一列の格子点が仮想格子点となり、隣接する計算機の割り当てられた計算領域の一端の一列と等しい値を持つ。また、1 台目の左端および 4 台目の右端でも同様に連結させることで、周期境界条件の計算が各計算機内でローカルに行われる。これにより、並列化の台数を  $np$  として、 $nx/np$  が割り切れる場合、各計算機の解析領域は  $(nx/np + 2) \times ny \times nz$  とすることができる。

### 3.4 並列化による性能向上

並列計算による計算速度向上および計算効率は、並列計算性能評価のための指標であり、以下の様に定義される。速度向上 ( $s$ ) は、CPU を  $np$  台用いた時の計算時間  $T_{np}$  に対する単一 CPU

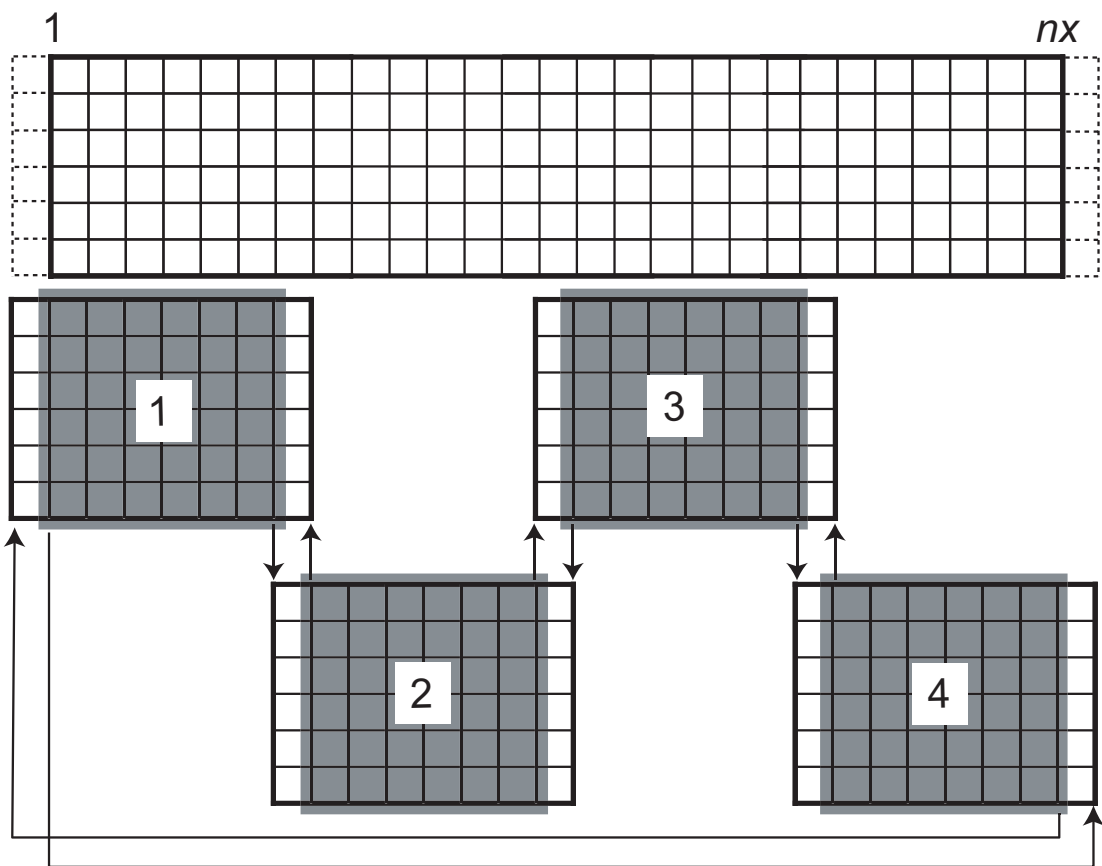


图 3.5 Full domain and parallelized sub-domains. Full domain is separated into four gray regions. Each sub-domain has extra nodes (white regions) for MPI communications.

を用いた計算時間  $T_1$  の割合として表される (式 (3.1))。また、計算効率 ( $\epsilon$ ) は並列計算プログラムの並列化能力を図る尺度として用いられ、式 (3.2) のように、使用台数  $np$  に対する速度向上 ( $s$ ) の割合として表される。

$$s = \frac{T_1}{T_{np}} \quad (3.1)$$

$$\epsilon = \frac{s}{np} \quad (3.2)$$

### 3.4.1 計算機環境および計算モデル

現在、並列計算を目的とした計算機システムにはその設計思想によって 2 つに大別できる。そのカギとなるのはメモリの利用法であり、巨大な実メモリ空間を、複数の計算ユニットが共有して利用する共有メモリ型計算機と、PC クラスタで代表される分散メモリ型計算機である。この 2 つには設計思想により、各々の得意とする問題と苦手とする問題がある。また、両者ではプログラムの並列化にも差異が生じる。そこで、この 2 つのタイプの計算機環境下において、LBM の並列化効果について検討した。

今回の計算に用いた 2 つ計算機環境を表 3.1 に示す。表中の HPC2500(富士通) は、京都大学大型計算機センター内にあるスーパーコンピュータであり、スーパーコンピュータランキング Top500 で 33 位 (2004 年 11 月発表) に入る計算機である。この計算機は、1 ノードあたり 128CPU を有し、共有メモリとして 512GB 利用することができる。ノードとしても 11 ノードあり、非常に多くの CPU を同時に利用することができる。共有メモリを利用するために、コンパイラによる自動並列化 (スレッド並列) を行うことができ、MPI(プロセス並列) と組み合わせて利用するハイブリッド並列も可能である。また、ノード間通信には高速光インターコネクタが用いられ、最大 4GB/sec の双方向通信が可能であり、さらにノード内通信では最大 133 GB/sec と、非常に高速な通信が可能となっている。それに対し、Silent-SCC Box(HIT) は PC クラスタと呼ばれるものであり、コスト的には非常に安価なシステムである。各ノードに CPU は 1 つで、メモリは各 2GB の分散型メモリであり、ここで使用したシステムでは最大 8 並列までのプロセス並列が可能である。また、通信には GigaEthernet が用いられ、理論値で 125MB/sec の通信が可能となっている。

スレッド並列とは、コンパイラによる自動並列化や OpenMP を用いた並列化処理を指し、共有メモリマルチプロセッサ上でのみ利用できる並列化手法である。自動的もしくは非常に簡便な指示行を挟むことで、単一プロセッサ用のプログラムを並列化することが出来るため汎用性も高い。しかしながら、一般的には並列可能ループ等に限って並列化されるため、領域分割による並列化 (MPI などによるプロセス並列) ほどのパフォーマンスを発揮することは難しいと言われている。

今回、並列化効率のベンチマークテストとして  $141 \times 101 \times 101$  の多孔質岩石モデル (以下では岩石モデル) と、 $2^{13} \times 21 \times 21$ 、 $2^{14} \times 21 \times 21$ 、および  $2^{15} \times 21 \times 21$  サイズの矩形ダクトモデルを用いた。今回の計算では、分割方向が単一であり、立方体に近い形状のものでは多くの CPU を用いた並列化が利用できないため、並列計算のベンチマークのために矩形ダクトモデルを用いた。矩形ダクトモデルの並列数は、HPC2500 を用いたとき、2,4,8,16,32,64,128 であり、PC クラスタ (Silent-SCC Box) では、岩石モデルおよび矩形ダクトモデルともに 2~8 並列である。各計算ともタイムステップを 100 ステップとし、最後に全格子点の速度及び密度の値をファイルに出力した。

表 3.1 Specifications of parallel machines used in this work

Machine	FUJITSU	HIT
	PRIMEPOWER HPC2500	Silent-SCC Box
Configuration	11-node 128-way	8-node 1-way
Processor	SPARC64V 1.56GHz	Pentium4 3.4GHz
Memory per node /total memory	512 GB / 5632 GB	2 GB / 16 GB
Network	high-speed optical interconnect 2 ch of 4 GB/sec (in,out) per node Max 133 GB/sec in a node	Gigabit Ethernet 125 MB/sec (theoretical)

### 3.4.2 並列化効果

並列効果を考える際に重要となるのが、単体 CPU の性能と並列化効率である。まず単体 CPU の性能について比較する。図 3.6 左図のプロセッサ数 1 における計算時間を比較すると、矩形ダクト  $2^{15}$  モデルにおいては、HPC2500 で 1,206 秒に対し、PC クラスタでは 707 秒の計算時間を要した。この時間差は、単体 CPU の演算性能の差を示している。

図 3.6(a) に、PC クラスタ (Silent-SCC Box) を用いた際の計算時間、計算速度向上および計算効率を示す。白抜きマーカーは矩形ダクトモデル、×マーカーのグラフは岩石モデルのベンチマーク結果である。岩石モデルでは、並列化による速度向上が 8CPU を用いても 3 倍弱までしか向上せず、計算効率は単調に減少している。これは、単一方向スライスによって分割されたモデル形状が、薄い板状に近づくためであり、データ通信にかかるコストの割合が、ノード内における計算コストに対して大きくなってしまったためであると考えられる。そこで、並列化の効果を単純に検討するために矩形ダクトモデルを用いた。図 3.6(a) の白抜きマーカーのグラフを見ると、計算速度のアップ率は、ほぼ理想的な伸びを示しており、計算効率も概ね 1 前後を保っており、どのモデルもかなりよいパフォーマンスを示している。並列効率が 1 を超えることがあるのは、領域が分割されることによりループ長が短くなり、キャッシュミスやオーバーヘッドといった計算効率を落とす可能性が増したためである。また、 $2^{13}$  モデルにおいて並列化効率が減少し始めるのは、ループ長が短くなったためである。そのため、高い並列化効率を保持するためには、各 CPU に割り当てられる領域の大きさは、適切に設定される必要がある。

次に、HPC2500 によるベンチマークテスト結果を図 3.6(b) に示す。各モデルとも、並列数の増加にともなって、計算時間は短縮されているが、その速度向上のアップ率は理想的なアップ率から乖離している。また、計算効率としても、16 並列程度までは 80% 以上の計算効率があるが、それ以上ではかなり低下しており、128 並列では、50% 程度の効率しか実現できていない。2-8 並列において PC クラスタと比較すると、計算時間では単体の CPU の能力の違いによって、PC クラスタの方がよい性能を示している。また速度向上では、 $x$  方向の長さが  $2^{15}$  格子のモデルを例にとると、HPC2500 では 4 並列、8 並列でそれぞれ 3.22 および 6.41 であったが、PC クラスタでは 4.01 および 7.88 となった。さらに、計算効率は、HPC2500 が 4 並列、8 並列ともに 0.80 であったが、PC クラスタではそれぞれ 1.00 と 0.98 となった。

HPC2500 では、大容量メモリ (1 ノードあたり 512GB) を利用した自動並列処理において、大きな利点を有しており、今回の問題のような比較的小さなメモリ量を必要とする問題では、その能力を最大限活かすことができていると言える。逆に、ここで考えた問題は小規模な PC クラ

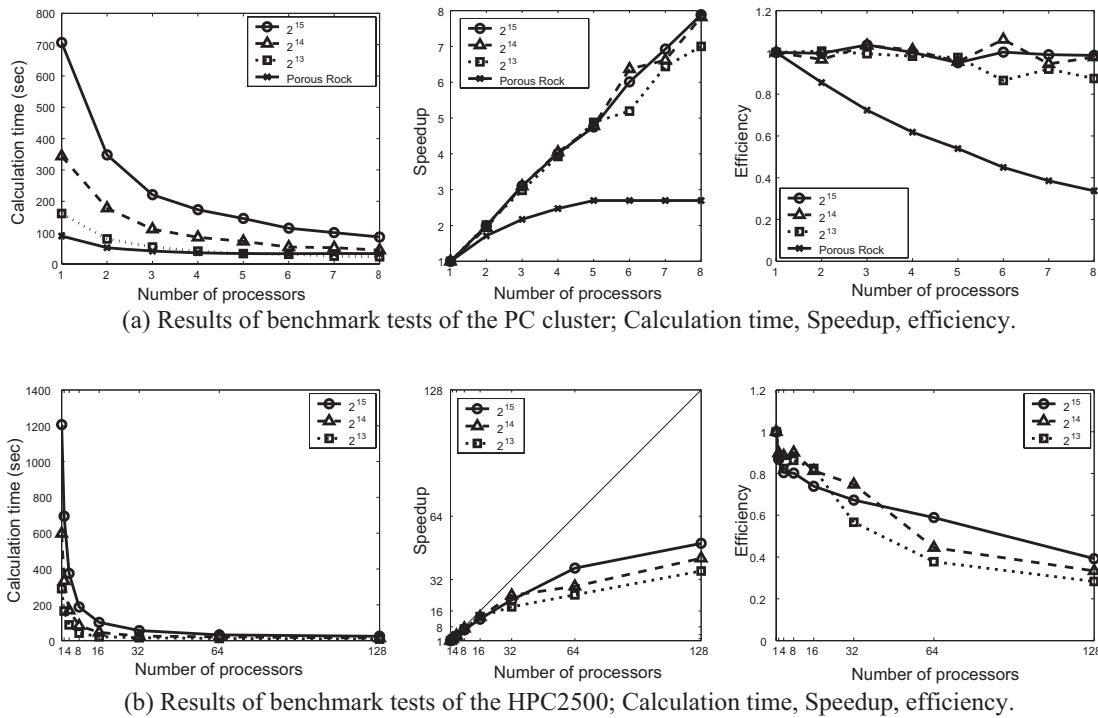


図 3.6 Results of benchmark tests of (a) the PC cluster and (b) HPC2500. From left to right, calculation time, speedup ( $s$ ), and efficiency ( $\epsilon$ ) are plotted versus the number of processors.

スタに適した問題であったと言える。

### 3.4.3 ハイブリッド並列の効果

次に、コンパイラの自動並列 (スレッド並列) と MPI によるプロセス並列の違いについて比較する。HPC2500 では、ハイブリッド並列 (MPI+ 自動並列化) が行えるため、スレッド並列台数による計算効率について検討した。ここで、ハイブリッド並列による使用する CPU 数  $np$  は、スレッド並列数  $np_{th}$  とプロセス並列数  $np_{pr}$  の積で表される。図 3.7(a) は、CPU 数  $np$  を固定して  $np_{th}$  を変化させた時の、 $np_{th} = 1$  の計算時間に対する計算効率である。CPU 数によらず、スレッド並列数の増加 (プロセス並列数の減少) に伴って計算効率が落ちているのがわかる。この結果は、同 CPU 数で計算するのであれば、MPI による並列化が最も効率的に計算効率を向上させることを示している。

しかしながら、モデルの形状によっては、プロセス並列 (領域分割) の数に限界が生じる場合がある。特に、領域分割の方法が今回のように単一であれば、比較的少ない並列数でも限界に達してしまう。この様なときにこそ、スレッド並列の効果が現れると考えられる。そこで、プロセス並列数を固定して、スレッド数を増加させた場合の計算効率について図 3.7(b) に示す。プロセス数によらず、スレッド数の増加に伴い計算効率は上昇している。特に、スレッド数 8 程度での計算効率上昇が著しい。しかし、その効率上昇は 2.5 倍程度までしか得られなかった。これは、並列化されているのが特定のループに限られており、またその長さが有限であることに起因する。つまり、ある程度の長さをもったループでないと、並列化の効果が現れてこないためである。今回

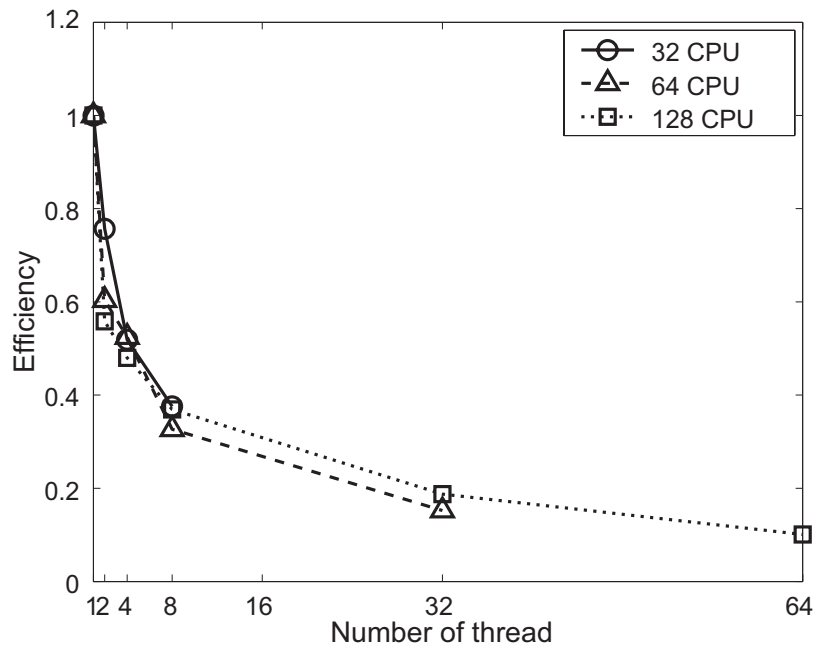
の場合、プロセス並列によって分割された領域に対してスレッド並列を行っているため、プロセス数が増加するに従ってループ長が短くなり、スレッド並列の効果があまり現れないことを示している。

これらのことから、同数の CPU を用いる場合、全てプロセス並列を行うことが最も高い並列効率を保持することがわかった。また、プロセス数が増やせない (増やしても効果が得られない) 場合には、スレッド並列を組み合わせたハイブリッド並列によって、スレッド並列なしの時と比較して、速度向上を得ることができることがわかった。

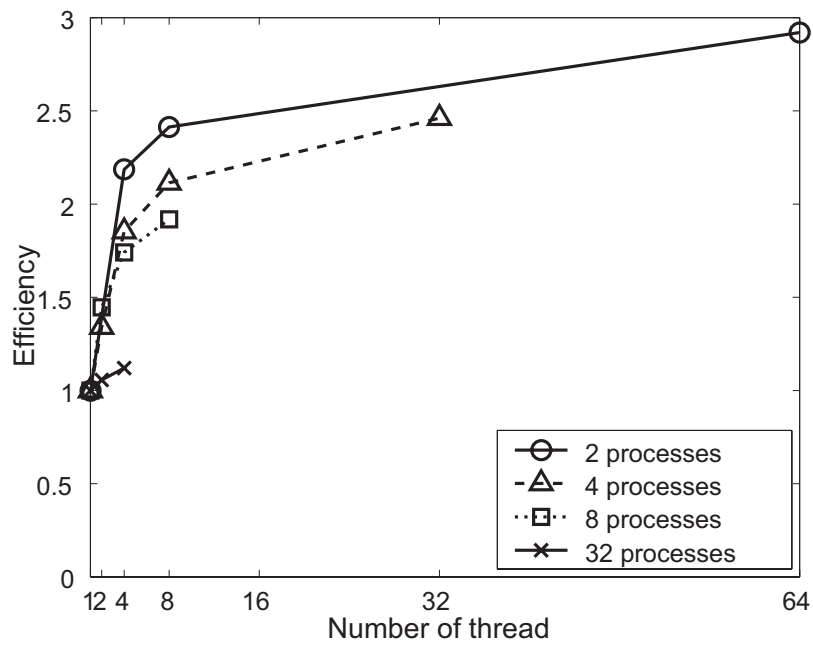
### 3.5 まとめ

本章では、格子ボルツマン法を用いた解析例を示し、計算の並列化の効果について検討した。以下にその結果をまとめる。

1. 多孔質岩石のモデル化において、平均粒子直径に対して 20 格子以上とすることで、真の孔隙率を満足するモデルを構築することができた。これは、モデルの作成方法によらずほぼ一定であることがわかった。
2. 格子ボルツマン法の並列計算によって、矩形ダクトモデルでは 8 並列程度までは比較的高い計算効率を保つことができた。分割の方向が単一方向であるために、矩形ダクトモデルにおいてのみ、並列化による速度向上が発揮された。任意形状のモデルにおいて、並列化効果を実現するためには、3 方向の分割面を設定する必要がある。
3. ある CPU 数を用いて計算する場合、スレッド並列を行わずに全て MPI による並列化 (プロセス並列) を行うことで、最も効率的に時間短縮できることがわかった。これは、LBM が領域分割によるプロセス並列に適したアルゴリズムであることを示している。しかしながら、同一プロセス数においてはスレッド数の増加によって計算効率は上昇した。これは、分割面が単一の場合など、領域分割に制約がある場合に有効である。



(a) The number of total CPU is fixed.



(b) The number of total process is fixed.

Figure 3.7 Thread efficiency with respect to 1 thread calculation versus the number of threads; (a) the number of total CPU is fixed; (b) the number of process is fixed.

## 第4章 フラクチャ内流れの解析

### 4.1 はじめに

亀裂性岩盤の浸透性評価は、土木構造物や地下構造物の設計において重要な役割を果たしている。一般的にはフラクチャの配置や大きさに着目した解析が盛んに行われている。その際のフラクチャ内の流体流動は、フラクチャを平行平板と仮定して、開口幅の3乗に比例するとする、いわゆる三乗則が用いられることが多い。しかしながら、Brown (1987) によって開口幅の狭小化にともなって、フラクチャ内の流体流量は3乗則から乖離してくることが示された。しかしながら、その三乗則からの乖離に寄与する要因は全て明らかになっているわけではない。そこで、複雑な亀裂形状であっても、その形状に応じて正しく流体流動を計算することができる格子ボルツマン法を用いて、フラクチャ内流体流動を再現し、三乗則からの乖離に寄与するパラメータについて検討する (松岡ほか, 2002; Miyoshi et al., 2003)。

また、岩盤内に存在するフラクチャ内の流体挙動解析には、次の Reynolds の方程式を差分近似して解く手法がよく用いられている (Brown, 1989)。

$$\nabla \cdot (d^3 \nabla p) = 0 \quad (4.1)$$

ここで、 $d$  は開口幅、 $p$  は流体圧力である。この手法をここでは Reynolds の方法と呼ぶ。この手法では、フラクチャにおける開口幅が狭いことからフラクチャ内流体流動を2次元に近似し、各点での流量が開口幅の3乗に比例するとして解くものであった。そのため鉛直方向の形状変化の大きなモデルに対しては誤差が大きくなると考えられてきた。

そこでここでは、3次元格子ボルツマン法 (LBM) の適用を考える。本手法は、3次元空間に対して直接流体流動を計算できる手法であり、鉛直成分を加味した解析を行うことができる。本章では、3次元フラクチャ内を流れる流体挙動の計算に対して、LBM が妥当であることを確認するとともに、Reynolds の方法との比較を中心に検討を行う (三善ほか, 2003)。

### 4.2 フラクチャモデルの作成

フラクチャの表面形状は観測される範囲では、自己アフィンのフラクタルである。そのプロファイルランダム波形として周波数解析を行った結果得られるパワースペクトル密度 (PSD) は、図 4.1 に示すように、空間周波数に対して両対数グラフ上で直線状となる。一方、フラクチャの開口幅プロファイルの振幅は、不連続面のかみ合わせによって長い波長で不連続面プロファイルの振幅より小さくなる。このため、図 4.1 に示すように、開口幅プロファイルの PSD は、低い周波数領域で表面プロファイルの PSD のトレンドから低い方にずれる。このようなフラクチャの幾何学的特性をよく表現する数値モデルを生成する方法が Brown (Brown, 1995) 及び Glover ら (Glover et al., 1997) によって提案されている。

ここでは、Glover らの方法を用い、格子間隔が 0.2mm の 256×256 点からなるフラクチャ上



表 4.1 The parameters of the fracture models.

モデル名	$\langle d \rangle$	接触面積率 (%)	F.D.	$\sigma_f$	$\sigma_d$
M121(1)	2.3851	12.152	1.2	2.537	0.7963
M121(2)	1.8686	31.945	1.2	2.536	0.7969
M151(1)	3.3611	3.1173	1.5	2.339	1.1027
M151(2)	2.4613	16.808	1.5	2.339	1.0150
L121(1)	2.5972	15.898	1.2	3.767	1.1027
L121(2)	2.2522	25.058	1.2	3.766	1.0996
L151(1)	3.8830	5.0385	1.5	3.472	1.4460
L151(2)	3.5388	7.9285	1.5	3.471	1.4448

面および下面を数値的に生成する．図 4.2 はここで生成したフラクチャの下面である．3次元解析においてはこのフラクチャモデルをそのまま用い，2次元解析においては，適当なプロファイルを切り出し，図 4.3 で示すように2次元モデルとして用いる．

作成したフラクチャモデルの詳細を，表 4.1 に示す．左から順に，モデル名，平均開口幅  $\langle d \rangle$ ，接触面積率 (%), フラクタル次元 (F.D.)，壁面高さの標準偏差  $\sigma_f$ ，開口幅分布の標準偏差  $\sigma_d$  である．ただし，フラクチャの大きさは  $256 \times 256$  格子であり，平均開口幅および壁面高さの標準偏差の単位は格子長さである．また，壁面高さの標準偏差  $\sigma_f$  は、上部面または下部面そのものの壁面形状の粗さを表すパラメータであり，今回は比較的なだらかな形状をしたものを M モデルとし，粗いものを L モデルとする．具体的には表 4.1 で示すように，壁面高さの標準偏差  $\sigma_f$  の値が小さいモデル (M モデル：なだらかな形状) と大きなモデル (L モデル：高低差の大きな形状) を用意する．また，モデル名の M または L の後ろに続く数値はフラクタル次元を表しており，M121 モデルおよび L121 モデルのフラクタル次元は F.D.=1.2、M151 モデルおよび L151 モデルは F.D.=1.5 である．さらに，各モデルについて接触面積率の大小異なるモデルを作成した．モデル名の最後の括弧内の数値がそれであり，(1) 接触面積率小モデル、(2) 接触面積率大モデルである．ただし，表 4.1 において定められた開口幅  $\langle d \rangle$  は、後述する Reynolds の方法との比較時に用いるものであり，3乗則からの乖離についての検討のためには，開口幅の異なるモデルを作成している．

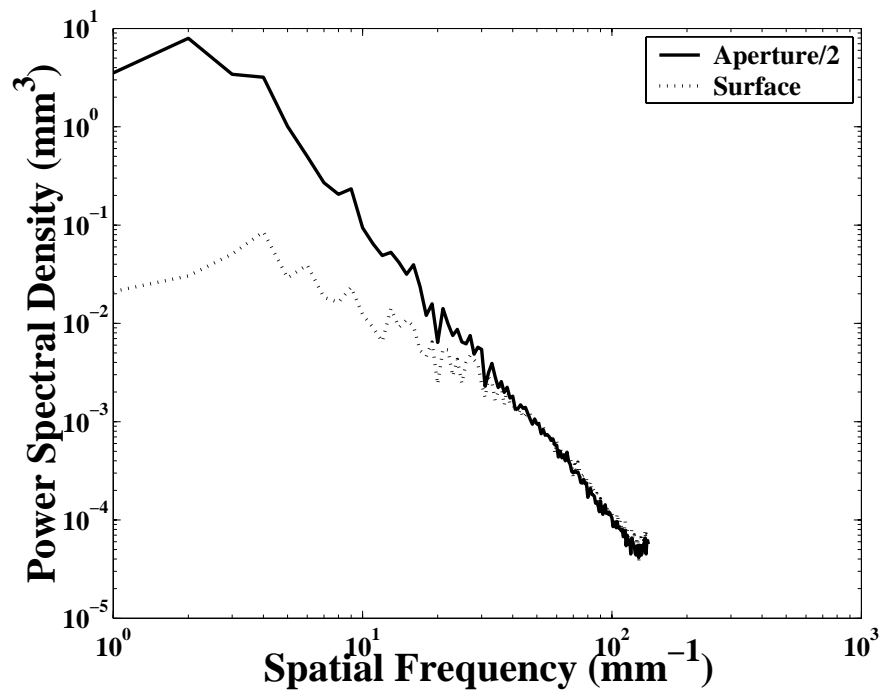
### 4.3 3乗則からの乖離

一般的にフラクチャ内の流量は，平行平板を仮定して開口幅の3乗に比例し3乗則が成立するとされている．しかしながら，開口幅が狭くなるとその流量は3乗則で予測されるよりも少なくなることが Brown により示された (Brown, 1987)．ここでは，まずこの結果を格子ボルツマン法を用いて追試することを試みる．

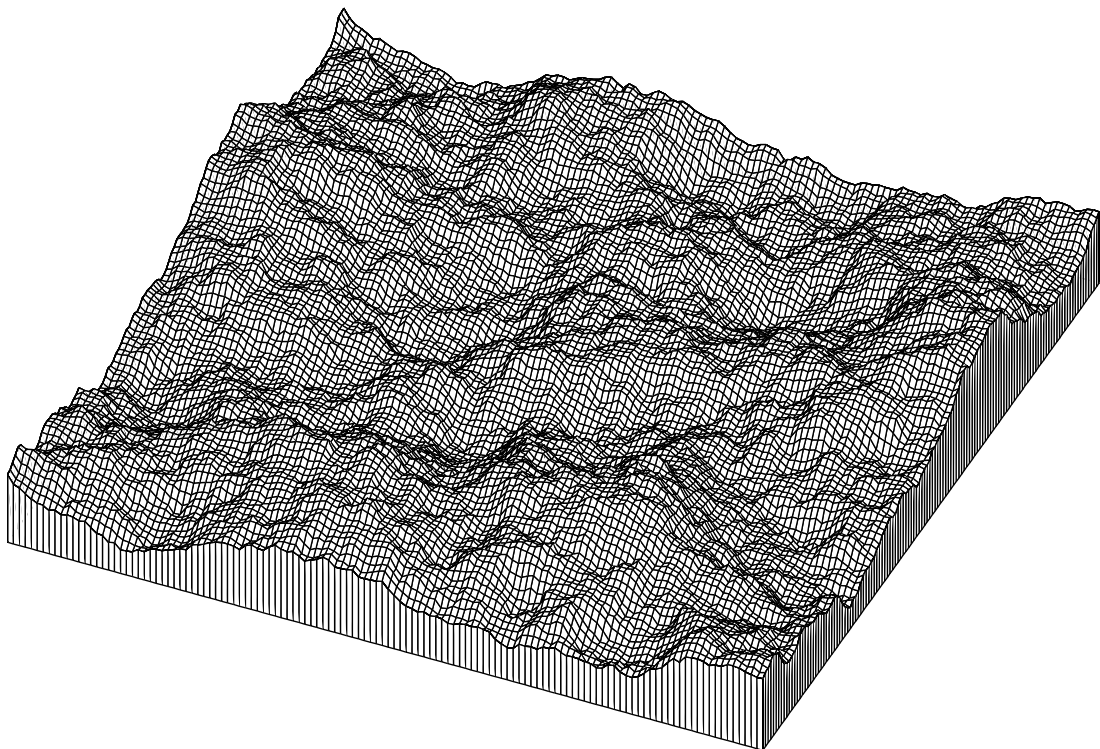
まず，モデルの平均開口幅を、

$$\langle d \rangle = \frac{\iint d(x, y) dx dy}{L_x L_y} \quad (4.2)$$

と定義する．ここで，図 4.4 で表すように、 $d(x, y)$  はフラクチャ開口幅分布， $L_x, L_y$  はそれぞれフラクチャ長さおよび幅である．さらに、得られた流量  $Q$  に対して，3乗則が成り立つと仮定す



⊠ 4.1 The PSD functions of surface profile and aperture profile for a natural fracture.



⊠ 4.2 The lower wall of the fracture.



图 4.3 2D 断裂模型。该模型被划分为  $1000 \times 120$  个晶格。

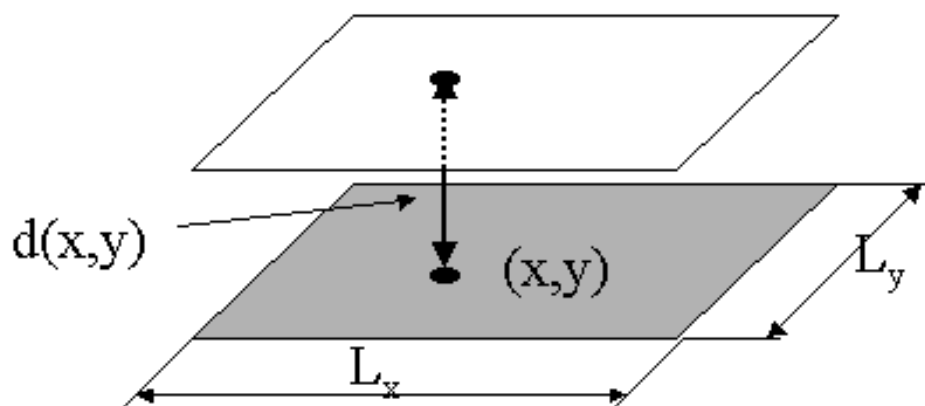


图 4.4 单个断裂的示意图。

ることによって開口幅が定まる。この開口幅を水理学的開口幅とよび、

$$d_h = \left( \frac{12\mu Q}{L_y \Delta p / L_x} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.3)$$

と定義する。ここで、 $\mu$  は水の動粘性係数、 $\Delta p$  は  $x$  方向にかかる圧力差である。流量により求めた水理学的開口幅  $d_h$  と、境界の形状から求まる平均開口幅  $\langle d \rangle$  が一致すると（つまり、両者の比が 1 の時）、フラクチャを流れる流量は 3 乗則を完全に満足していると考えられる。

この様な方法で行ったシミュレーション結果を図 4.5 に示す。図 4.5 では 3 乗則からの乖離を検討するために縦軸に 2 つの開口幅の比を 3 乗したものをとっている。また、この  $(d_h / \langle d \rangle)^3$  を乖離度と定義する。横軸には、平均開口幅をフラクチャ面の高さの標準偏差で割ったものを取り、表面粗さで正規化している。この図より開口幅の狭小化に伴って流量が 3 乗則から乖離していく様子がわかる。この結果は Brown (1989) の Fig.10 とほぼ同一であり、その結果を追認したものとなっている。

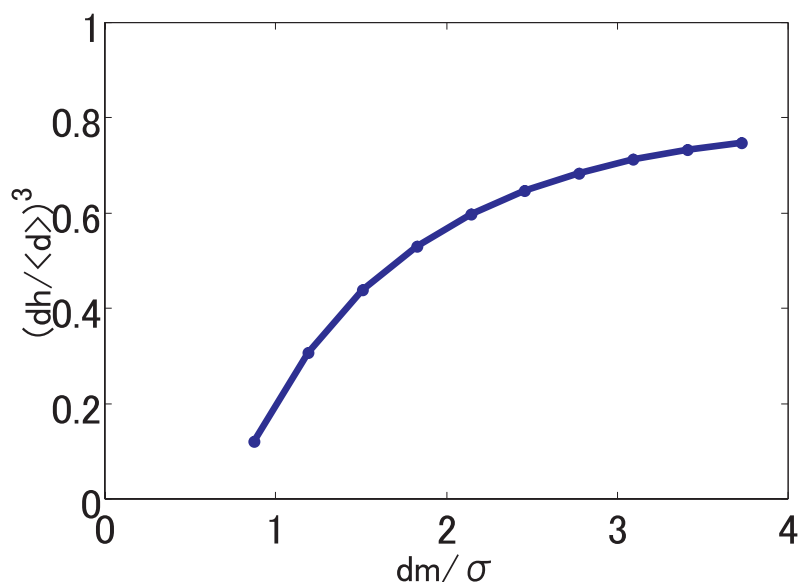


図 4.5 The deviation from the cubic law for the 2D fracture model. The deviation becomes larger according to narrowing the aperture.

#### 4.4 乖離のパラメータ

第 4.3 節で平均開口幅が狭いモデルの方が 3 乗則からの乖離度は大きいことを示した。しかしながら、平行平板モデルであれば、平均開口幅が狭いモデルでも 3 乗則からの乖離は理論的に見られないはずである。そこで、3 乗則からの乖離に関するパラメータとして壁面形状の粗さが考えられる。本研究では、図 4.6 で示すような、(a) 壁面形状の粗さを表すパラメータ  $\sigma_f$ （壁面の形状の標準偏差）と、(b) 開口幅分布の乱れを表すパラメータ  $\sigma_d$ （開口幅に対する標準偏差）を定義して、これらのパラメータと流量における 3 乗則からの乖離との関係について検討を加える。

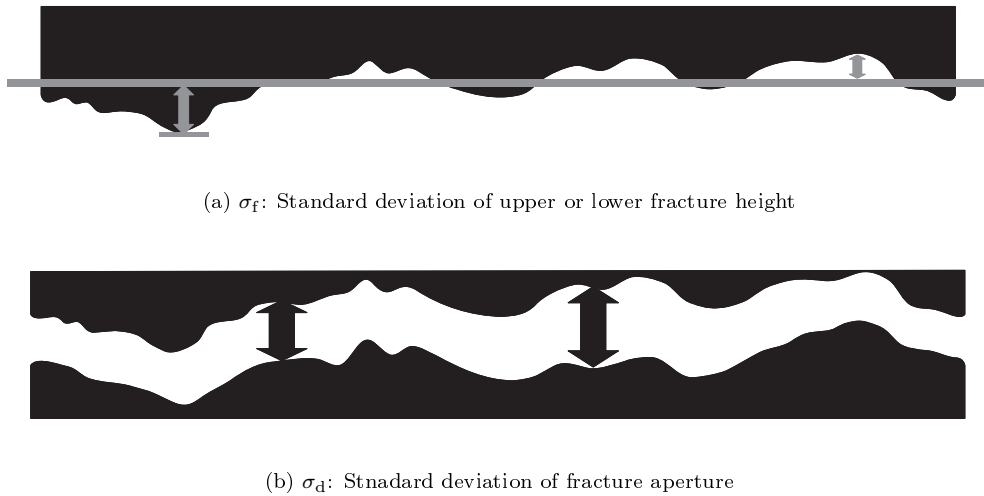


図 4.6 The schematic drawings of  $\sigma_f$  (a) and  $\sigma_d$  (b).  $\sigma_f$  is the standard deviation of upper or lower fracture height and  $\sigma_d$  is the standard deviation of the fracture aperture.

(a) は、フラクチャの上面もしくは下面そのものの形状粗さを表しており、壁面高さ平均位置からのばらつきを示す指標として壁面高さに対する標準偏差を用いた。フラクタル理論に基づいて作成したモデルでは、上下壁面はほぼ同じ標準偏差をもつ。(b) では、上下面でのかみ合わせを考慮するものとして、開口幅の変化に着目した。平均開口幅からのばらつきを表す指標として、標準偏差を用いた。仮に上下面の形状が全く同一であれば、開口幅は常に一定であるため、 $\sigma_d = 0$  となる。

## 4.5 2次元フラクチャ内流体流動解析

本節では、2次元フラクチャ内流体流動解析を行い、 $\sigma_f$  および  $\sigma_d$  が3乗則からの乖離に及ぼす影響について検討した。

### 4.5.1 2次元解析に用いたフラクチャモデル

$\sigma_f$  および  $\sigma_d$  の影響を考慮するために、ここでは以下に示す4種類のモデルを用いた。

モデル A：上下とも sin 曲線であり、等しい開口幅を持つモデル

モデル B：上部面が sin 曲線、下部壁面が水平面のモデル

モデル C：上部面が山形、下部壁面が水平面のモデル

モデル D：フラクタル理論を用いて作成した1つの壁面を上下に離し、さらにフラクチャの長手方向にずらしたモデル

モデル A は、上下面ともサイン曲線をしており常に等しい開口幅をもつモデルである。よって、開口幅の標準偏差は  $\sigma_d = 0$  である。また、サイン曲線の振幅の異なるモデルを作成する。これは、振幅が大きいほど壁面の標準偏差  $\sigma_f$  が大きいモデルとなる。図 4.7 に、その代表例を示す。

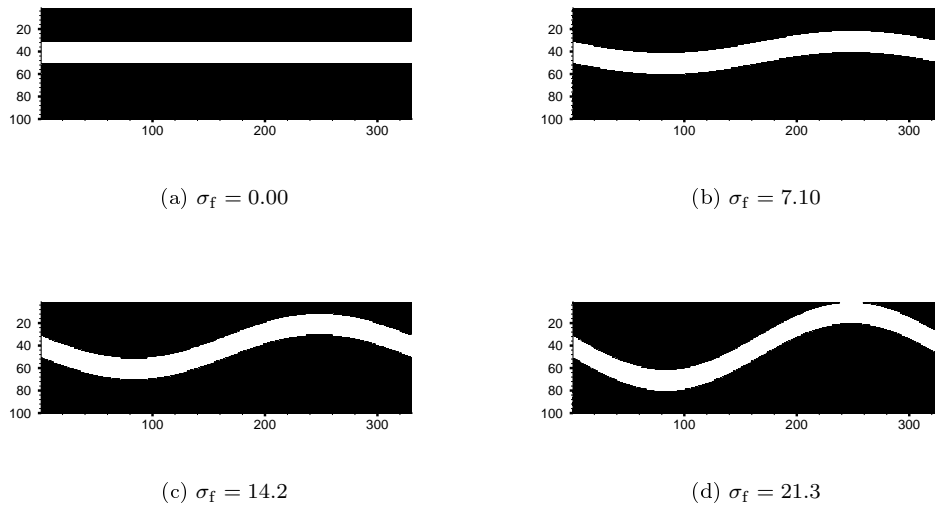


図 4.7 Model A. As the both surfaces are the same shape, the aperture is uniform. That is,  $\sigma_d$  is zero and  $\sigma_f$  depends on the amplitude of a sine curve.

モデル B では下部面を水平にすることで開口幅分布を変化させる．モデル A と同様に sin 曲線の振幅異なるモデルを作成する (図 4.8)．このとき壁面形状の標準偏差としては上部壁面の数値を用いるので，壁面形状の標準偏差  $\sigma_f$  と開口幅分布の標準偏差  $\sigma_d$  は等しくなる．

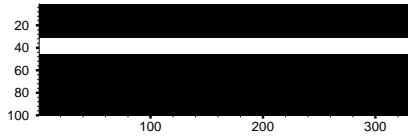
モデル C もモデル B と同様に下部壁面が水平面であるため， $\sigma_f$  と  $\sigma_d$  は等しくなる．また，図 4.9 で示すように上部壁面は山形をしており開口幅は直線的に変化している．このモデルは，モデル B との比較としてサイン曲線でなく直線的な変化においても，3 乗則からの乖離が進むのかについて検討するために設定している．

モデル D では，フラクタル理論を用いて作成したフラクチャ面を上下同じものを用意し，長手方向にずらすことで  $\sigma_f$  を変化させずに  $\sigma_d$  のみが異なるモデルを作成する．すなわち，(a) 上下全く同じ壁面形状であるもの (図 4.10(a))，(b) フラクチャ全体が長手方向に約 5% ずれたもの (図 4.10(b))，および (c) 約 10% ずれたもの (図 4.10(c)) である．このモデルでは， $\sigma_f = 12.6$  に固定される．

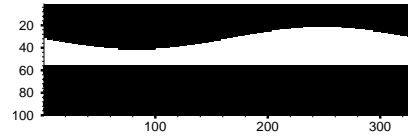
#### 4.5.2 シミュレーション結果

第 4.5.1 節で作成したモデルに対して，第 4.3 節と同様に格子ボルツマン法を用いて流体流動計算を行い流量を求める．式 (4.2) および式 (4.3) から，図 4.5 と同様の開口幅と乖離度に関するグラフを作成する．図 4.5 では，標準偏差  $\sigma$  で正規化しているが，本解析では開口幅の標準偏差が  $\sigma_d = 0$  となる場合があるので，正規化せずにそのまま開口幅を横軸とする．

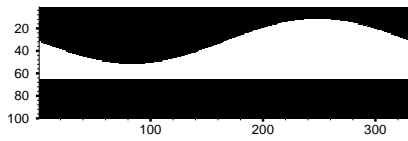
図 4.11 はモデル A の結果を示したものである．図における  $\sigma$  は全て  $\sigma_f$  である．また右下の実線 (凡例:fracture) は図 4.5 のフラクタル理論から生成した場合のモデルに対応している．図より明らかなように， $\sigma_f$  が変化しても，基本的にはどれも開口幅の狭小化に伴う乖離現象は見られない．つまり，フラクチャの壁面形状がいかなる形であれ，開口幅が一定であるときには流量は開口幅に依存しないという結論が得られた．



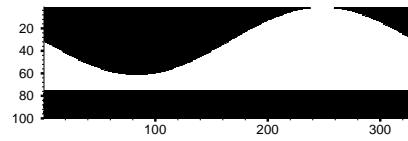
(a)  $\sigma_d = 0.00$



(b)  $\sigma_d = 7.10$

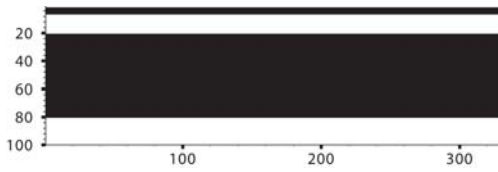


(c)  $\sigma_d = 14.2$

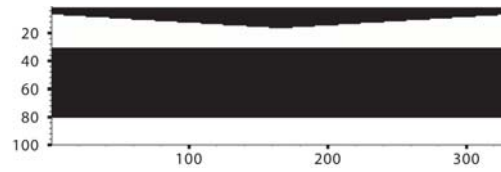


(d)  $\sigma_d = 21.3$

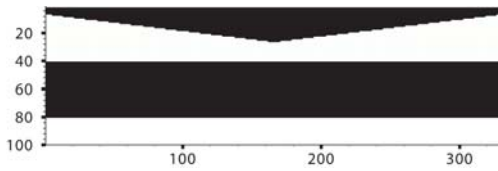
⊠ 4.8 Model B. The upper surface is a sine curve and the lower surface is flat.  $\sigma_f$  is equal to  $\sigma_d$ .



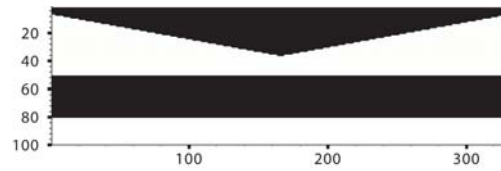
(a)  $\sigma_d = 0.00$



(b)  $\sigma_d = 2.93$

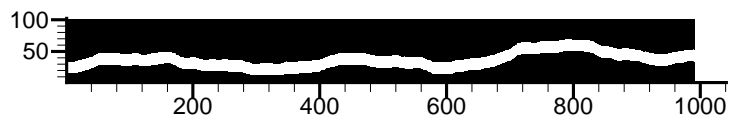


(c)  $\sigma_d = 5.83$

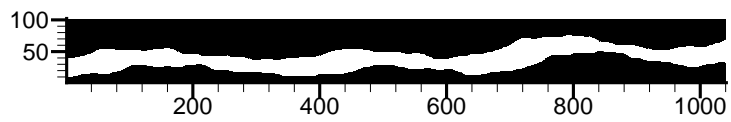


(d)  $\sigma_d = 8.71$

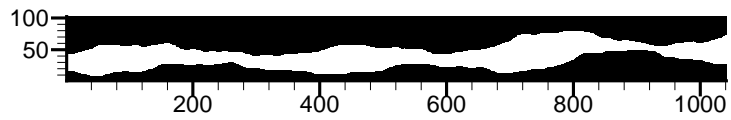
⊠ 4.9 Model C. The upper surface is a mountain shape and the lower surface is flat.  $\sigma_f$  is equal to  $\sigma_d$ .



(a)  $\sigma_d = 0.00$



(b)  $\sigma_d = 7.36$



(c)  $\sigma_d = 11.9$

☒ 4.10 Model D. (a) The upper and lower surfaces are the same shape which are created by the fractal algorithm. The lower surface moves to right direction with (b) 5% and (c) 10% of the fracture length.



図 4.12 にモデル B の結果を示す．下部壁面が水平面であるので， $\sigma_f = \sigma_d$  であり，図内の凡例  $\sigma$  を表している．また，比較のために図 4.5 の結果を凡例 fracture の実線として示す．このグラフから，開口幅の狭小化に伴い乖離が増大していることが確認できる．また  $\sigma$  の増大でも乖離が増大していることがわかる．

図 4.13 にモデル C の結果を示す．これもモデル B と同様に，凡例  $\sigma$  は  $\sigma = \sigma_f = \sigma_d$  である．また，開口幅の狭小化に伴う 3 乗則からの乖離および  $\sigma$  の増加に伴い乖離が増大が確認している．

これに対し，モデル D では壁面形状を固定し，フラクチャの長手方向に移動することで開口幅を変化させ， $\sigma_d$  のみの影響を調べる．その結果を図 4.14 に示す．凡例  $\sigma$  は  $\sigma_d$  であり， $\sigma_f = 12.6$  で固定されている．これも上記モデル B および C と同様に， $\sigma_d$  の増加に伴い 3 乗則からの乖離が増大している．

また，これらのうちモデル B，C，および D を重ねて示したものが図 4.15 である．図 4.15 からわかるように，3 乗則からの乖離は  $\sigma_d$  が大きいほど大きくなっている．このことより，フラクチャ内の流量に関して 3 乗則からの乖離を支配しているのは，開口幅に対する標準偏差  $\sigma_d$  であることがわかる．

最後に，モデル B，C，D のうち  $\sigma_d \neq 0$  であるものについて， $\sigma_d$  で正規化した場合の結果を図 4.16 に示す．図 4.15 において， $\sigma_d$  の順に整列していたグラフが，ほぼ一つの曲線上にのっている．

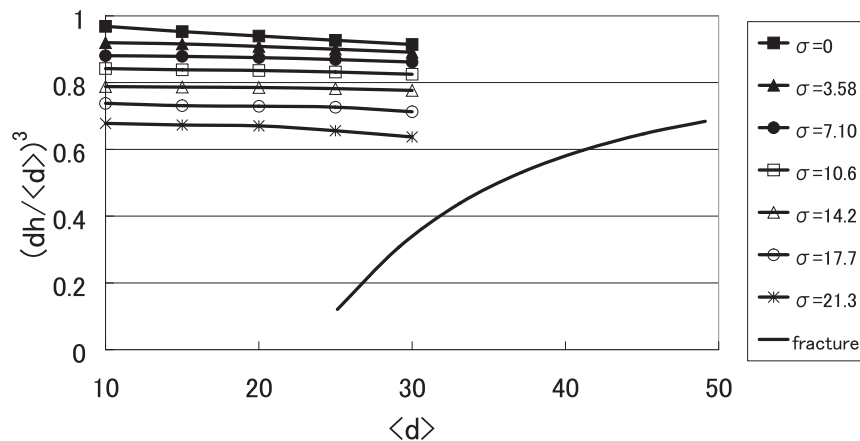


図 4.11 The lines with symbols are the result of model 2D-A. The solid line corresponds to Figure 4.5. The legend " $\sigma$ " is all  $\sigma_f$ .  $\sigma_d$  is zero. The deviation from the cubic law cannot be seen.

### 4.5.3 2次元流解析のまとめ

フラクチャ内部での流量が平均開口幅の 3 乗に比例するのは，フラクチャの開口幅が一定の場合である．つまり，上下に同じ形状の壁面がある場合は，壁面形状が複雑であっても開口幅の狭小化に伴う 3 乗則からの乖離はほとんど発生しない．また， $\sigma_d$  が大きくなるほど乖離が大きくなる．この 3 乗則からの乖離はフラクチャ壁面の粗さではなく，フラクチャの開口幅の乱れ（ラン

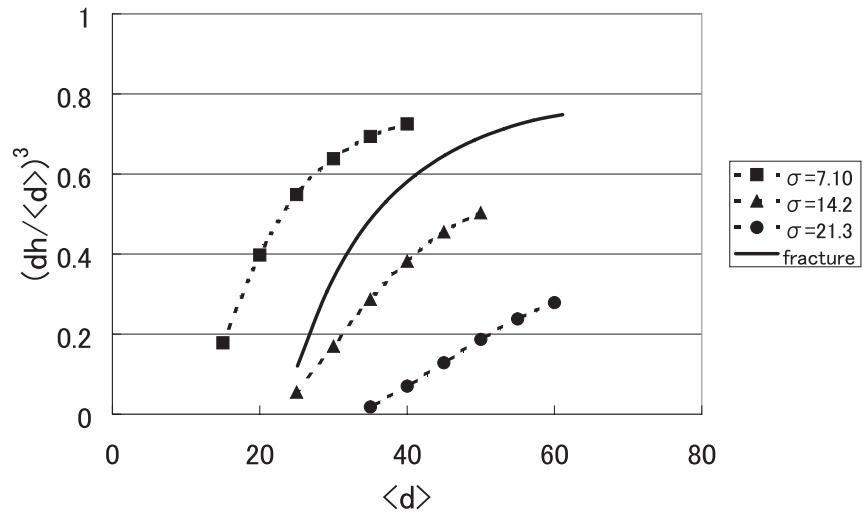


Figure 4.12 The dashed lines with solid symbols are the result of model B. The solid line without symbols corresponds to Figure 4.5. The deviation from the cubic law becomes larger with increasing of  $\sigma_d$ .

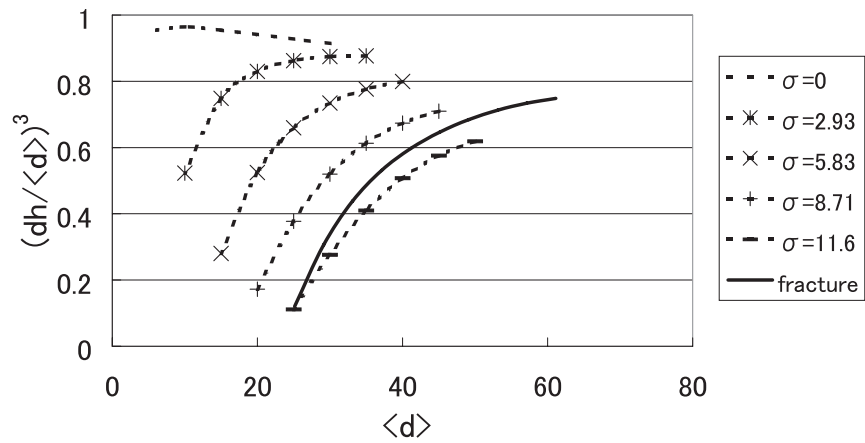


Figure 4.13 The dotted lines with line symbols are the result of model C. The solid line without symbols corresponds to Figure 4.5. The deviation from the cubic law becomes larger with increasing of  $\sigma_d$ .

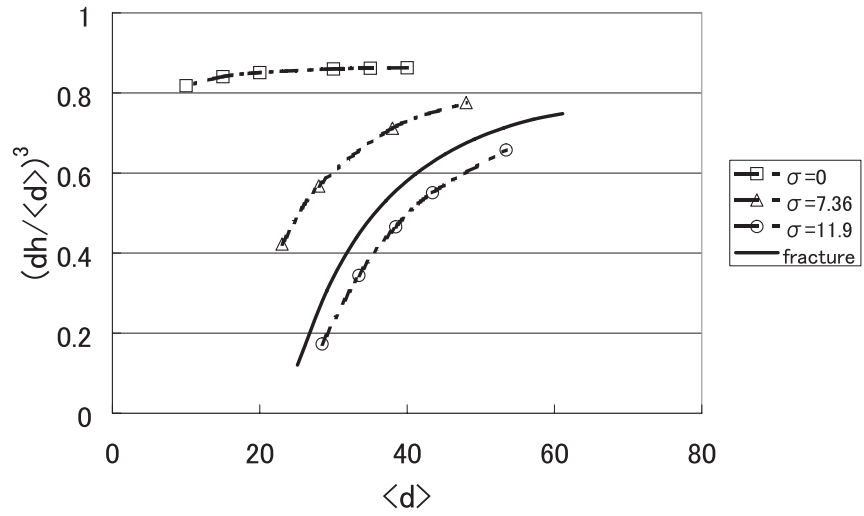


Figure 4.14 The dashdotted lines with open symbols are the result of model D. The solid line without symbols corresponds to Figure 4.5. The deviation from the cubic law becomes larger with increasing of  $\sigma_d$ . The legend " $\sigma$ " is all  $\sigma_d$ .  $\sigma_f$  is 12.6.

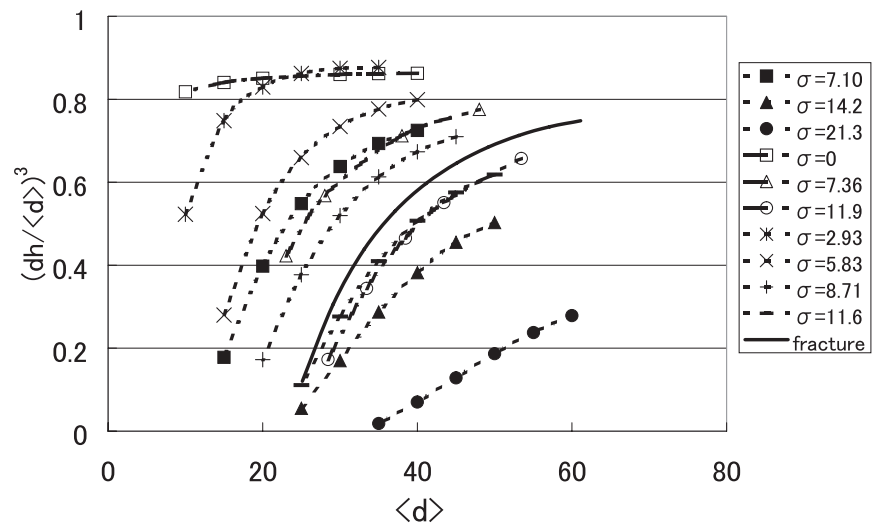


Figure 4.15 All the result of model B–D. The solid line corresponds to Figure 4.5. The dashed lines with solid symbols are model B. The dotted lines with line symbols are model C. The dashdotted lines with open symbols are model D. The deviation from the cubic law becomes larger according to increasing of  $\sigma_d$ .

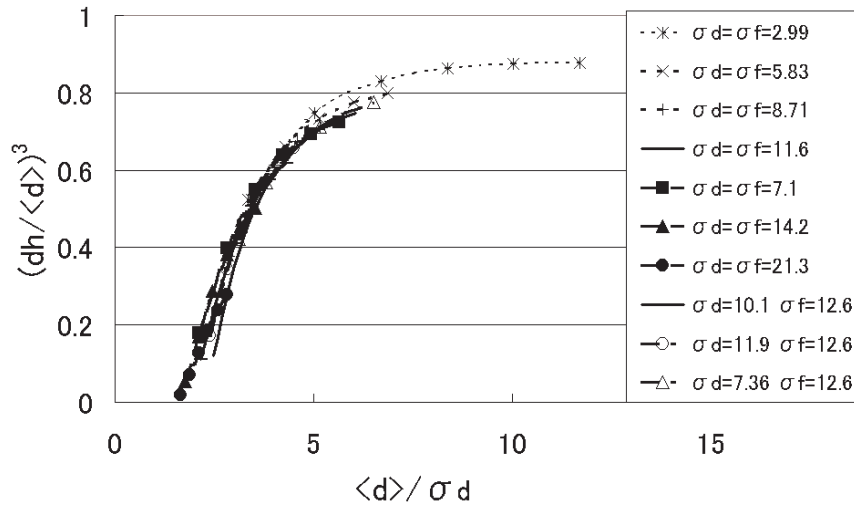


図 4.16 the result of model B-D normalized by  $\sigma_d$  without  $\sigma_d = 0$ . The solid line corresponds to Figure 4.5. The dashed lines with solid symbols are model B. The dotted lines with line symbols are model C. The dashdotted lines with open symbols are model D. The tendency of the deviation from the cubic law is very similar.

ダムさ) によって大きく支配されている。結論として、平均開口幅の狭小化に伴う 3 乗則からの乖離を支配しているのは  $\sigma_d$  であり、開口幅分布の乱雑さが増えれば乖離が大きくなることがわかった。また、この  $\sigma_d$  で正規化した場合、3 乗則からの乖離はほぼ一本の曲線で表現できることがわかった。

## 4.6 3次元フラクチャ内流動解析

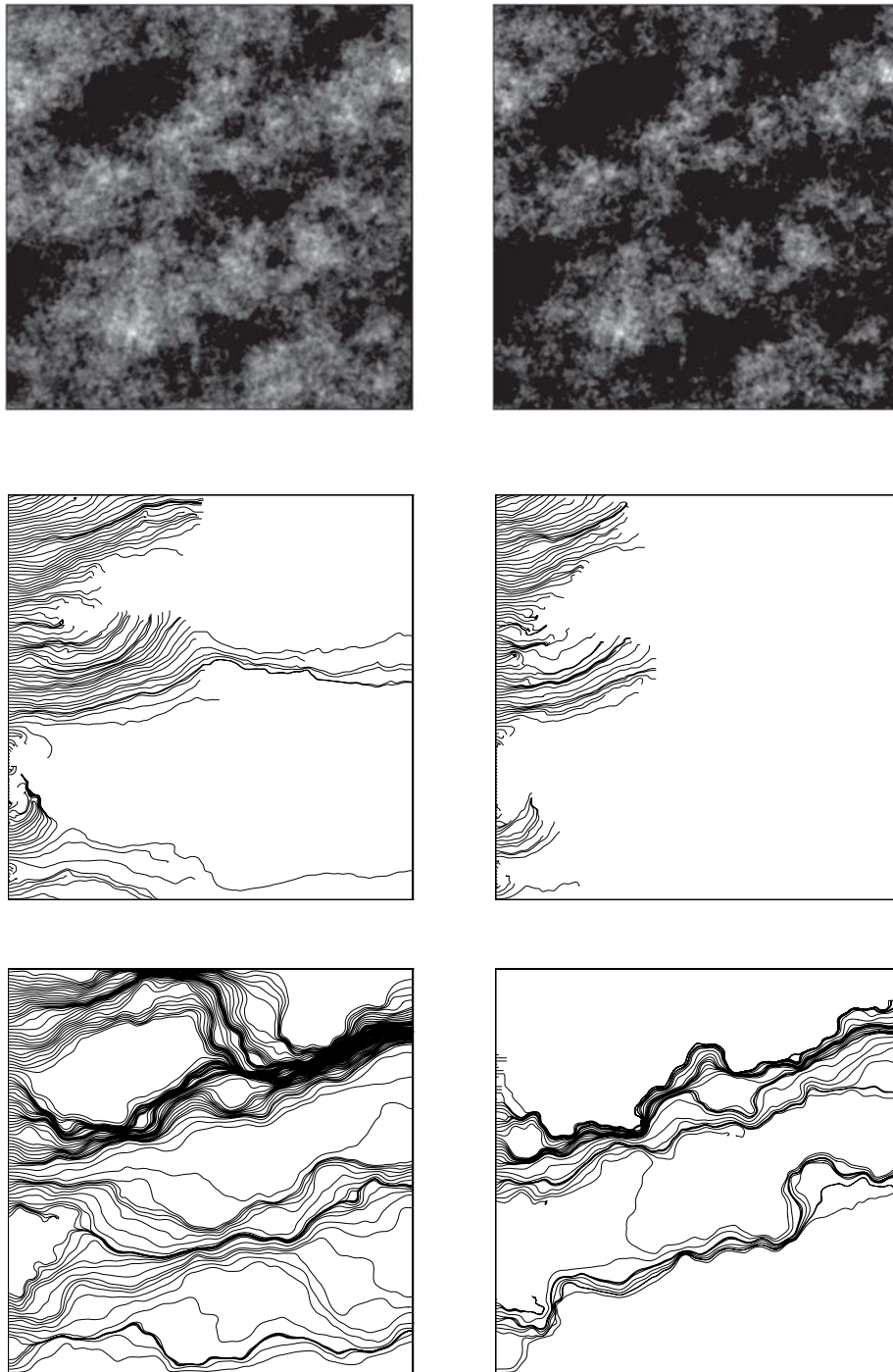
第 4.5 節では、2 次元モデルを用いた検討を行ったが、実験結果との比較等を考えると 3 次元解析をする価値は高い。そこでここでは、3 次元格子ボルツマン法を用いて、3 次元フラクチャ内流動解析を行う。また、2 次元解析において提案した  $\sigma_d$  を用いた評価法について、3 次元フラクチャに適用した場合についての検討も行う。

### 4.6.1 3次元解析に用いたフラクチャモデル

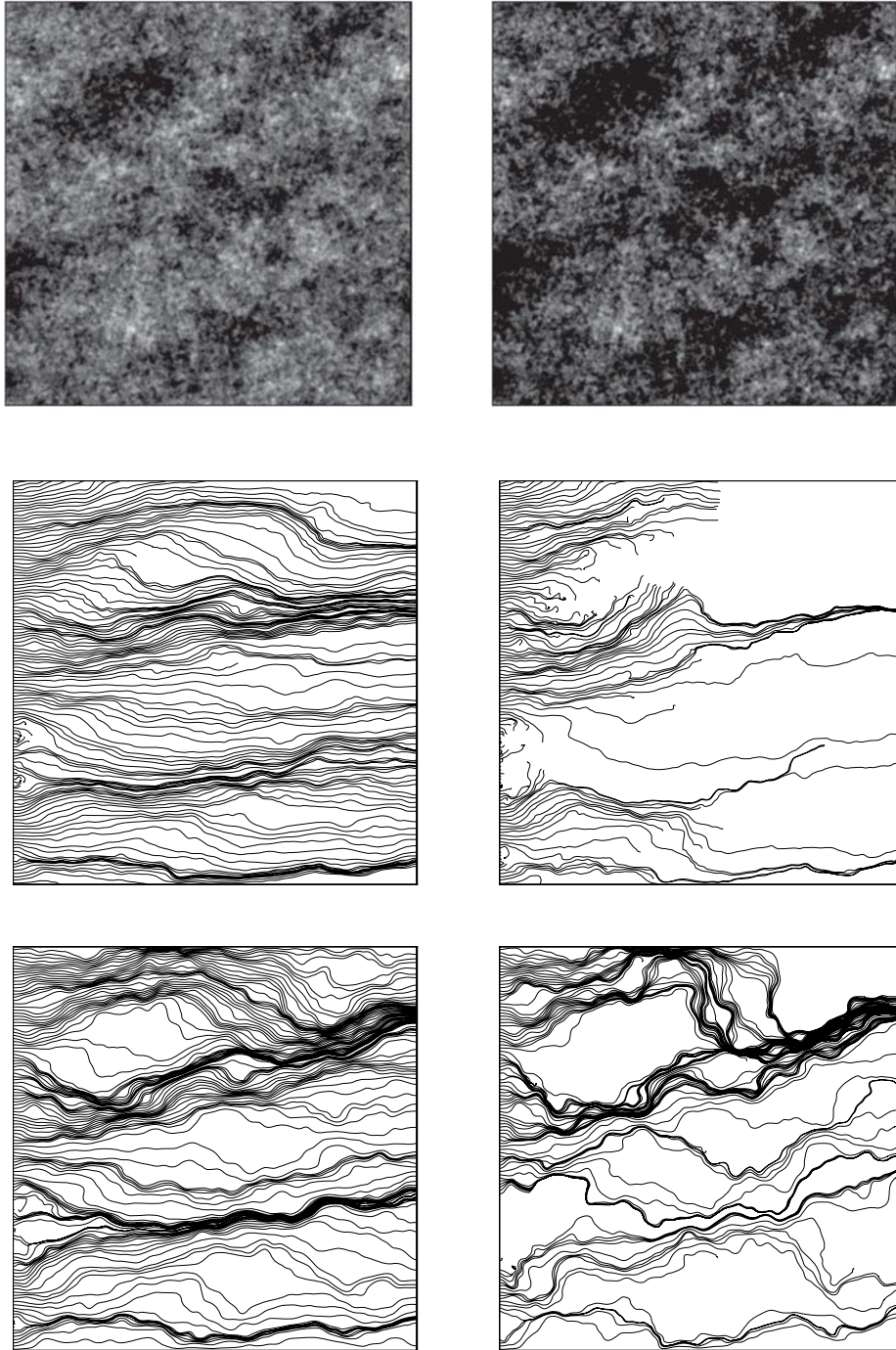
ここでは、第 4.2 節で作成した 3 次元フラクチャモデルを用いる。各パラメータは表 4.1 で示す通りであるが、3 乗則の乖離を検討するために、フラクチャ面を上下方向に変位させ、開口幅の異なるモデルを作成している。

### 4.6.2 Reynolds 方程式と LBM

第??節で示した各モデルに対して、3 次元格子ボルツマン法を用いて流体流動のシミュレーションを行った結果を図 4.17-4.20 に示す。上段 2 図が開口幅分布をグレースケール表示したもの



⊠ 4.17 The left figures are M121(1), and the right figures are M121(2). The upper figures show aperture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.



☒ 4.18 The left figures are M151(1), and the right figures are M151(2). The upper figures show aperture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.

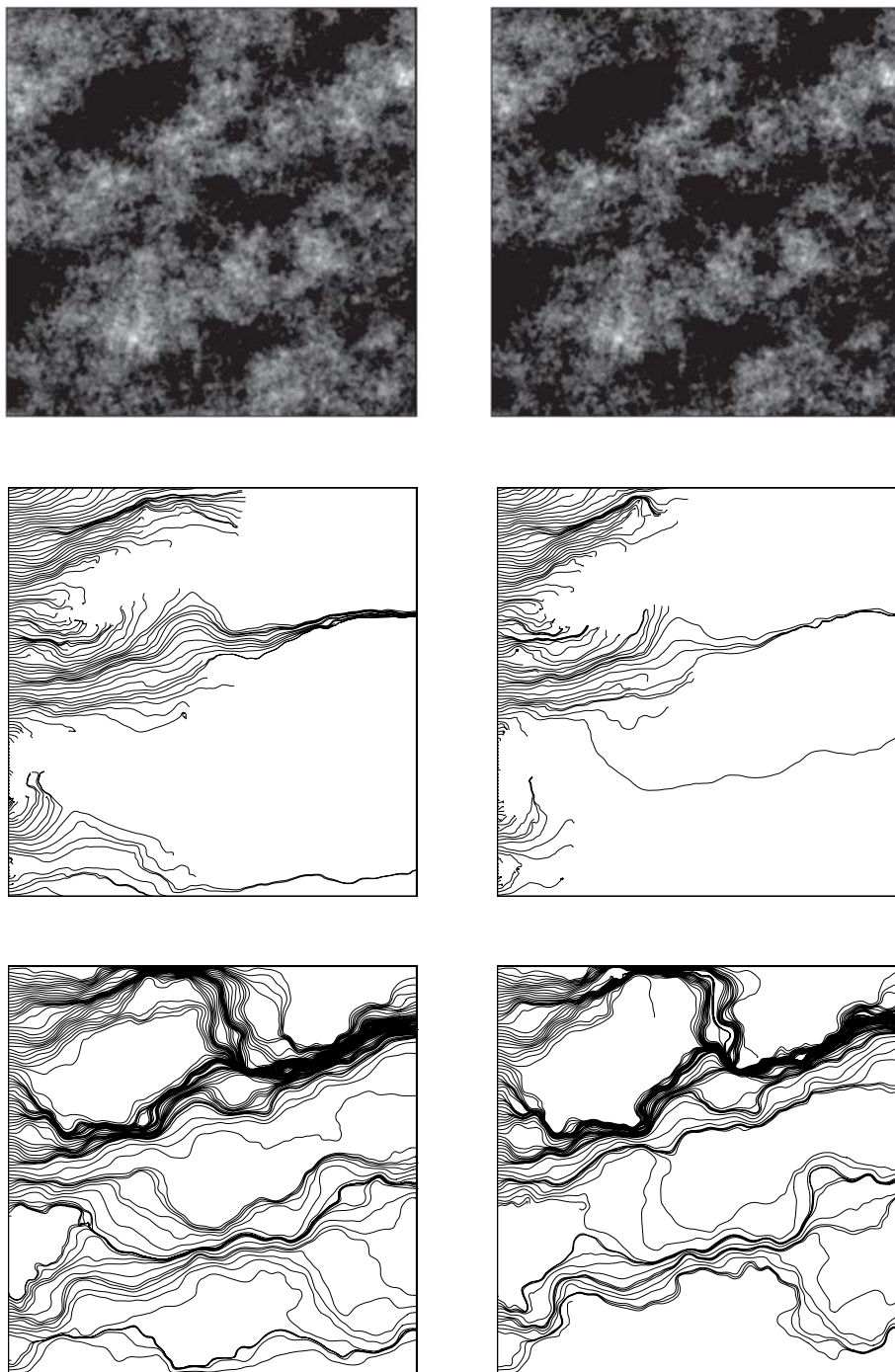


图 4.19 The left figures are L121(1), and the right figures are L121(2). The upper figures show aperture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.



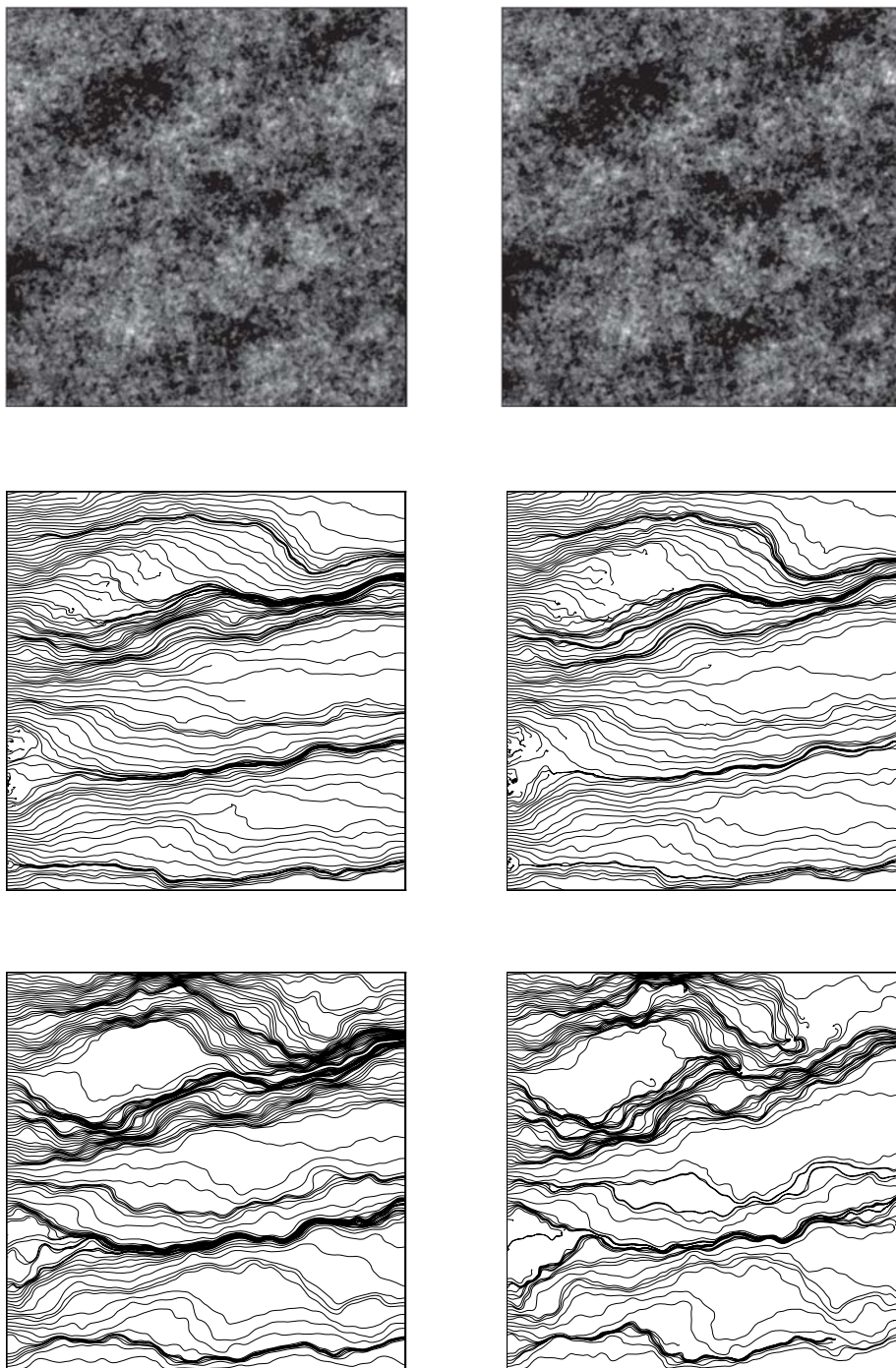


图 4.20 The left figures are L151(1), and the right figures are L151(2). The upper figures show aperture distribution. The middle figures show the result of the LBM. The lower figures show the result of the Reynolds equation.



である．色の濃淡は開口幅に相当し，淡い領域は開口幅が広いことを表し，黒色部は上下壁面が接触していることを示す．中段 2 図は格子ボルツマン法の計算結果を流線で表示し，2 次元に射影したものである．図の右向きに圧力勾配が存在し，その方向に流体が流動している．さらに，下段 2 図は Reynolds の方法の結果を流線で表示したものである．

表 4.1 のモデル M121(図 4.17) および L121(図 4.19) においては，LBM の計算結果では流線は途中でほとんど途絶えている．つまり，流体がほとんど流れていないことを表している．これは LBM では壁面形状を格子で表現するために，1 格子以上の空間がなければ流体が流ることができないことに起因する．それに対し，Reynolds の方法では開口幅は実数で表現されることから，非常に狭い開口幅の時でも流体は流れることができる．したがって，非常に狭い形状をモデル化するためには，格子数を増加せねばならないが，計算機のメモリーおよび計算時間の問題から今回は行っていない．それに対し，M151(図 4.18) および L151(図 4.18) では多くの流線が最後まで到達し，フラクチャ内を流れる流体挙動がよく再現されている．Reynolds の方法と 2 次元に射影した LBM の結果は大局的には同様のものとなっている．

さて，大局的には同様の流れを再現しているが，細部においては異なった傾向を示している．図 4.18 の左図，M151(1) モデルにおける中央上方より流入した流線を見ると，LBM はほぼ水平に流動していることがわかる．それに対し，Reynolds の方法では右肩上がりの流れになっている．ここで，図 4.18 上段左図の開口幅分布を見ると，開口幅の広い領域が右肩上がりで存在している．しかし，このモデルでは表 4.1 で示すように，開口幅は全般的に広く接触面積もほとんど無いため，LBM で求めた結果の様になると予想される．それに対し，Reynolds の方法ではその性質上，開口幅分布に大きく依存しているため，右肩上がりの流動となったと思われる．この様に開口幅のみで決定される Reynolds の方法には，3 次元的な構造に対する流体のシミュレーションでは限界があると思われる．

### 4.6.3 3次元流れの可視化

今回用いたモデルのうち，L151(1) の計算結果を 3 次元表示したものが図 4.21 および図 4.22 である．図 4.21 は流れを流線で表示したものであり，灰色の断面はフラクチャの形状を表し，白色部が空隙部である．図 4.20 中段左図を 3 次元で表示したものであり，フラクチャ内を流体がいかに流れているかをよく表している．これにより，フラクチャ内の流体流動を可視化することができたと考えられる．また，図 4.22 は等速度面で表示したものである．図 4.21 の流線表示ではわかりにくい鉛直方向の速度がより鮮明に現れている．図 4.2 で示すようなフラクチャの凹凸具合に応じて速度が鉛直方向にも変化していることがわかる．

### 4.6.4 速度の鉛直成分

LBM によって流体流動を 3 次元的に計算することができたことから，本節では前節で用いた L151(1) におけるモデルを用いて，鉛直成分について検討する．

図 4.23 は下部壁面を表しており，青色部はくぼんでいる領域であり，赤色部は盛り上がっている領域である．実線で四角形に囲まれた部分は，左から右に流れる流れの方向に対して赤色から青色へと変遷している箇所であり，流れる方向に対して下り坂に相当する．逆に，一点鎖線で丸く囲まれた箇所は，上り坂に相当する．このモデルに対する流体流動をより明確にするため，図 4.6.4 および図 4.6.4 は，鉛直方向の中心付近 2 断面における鉛直成分速度を示す．赤色の箇所は

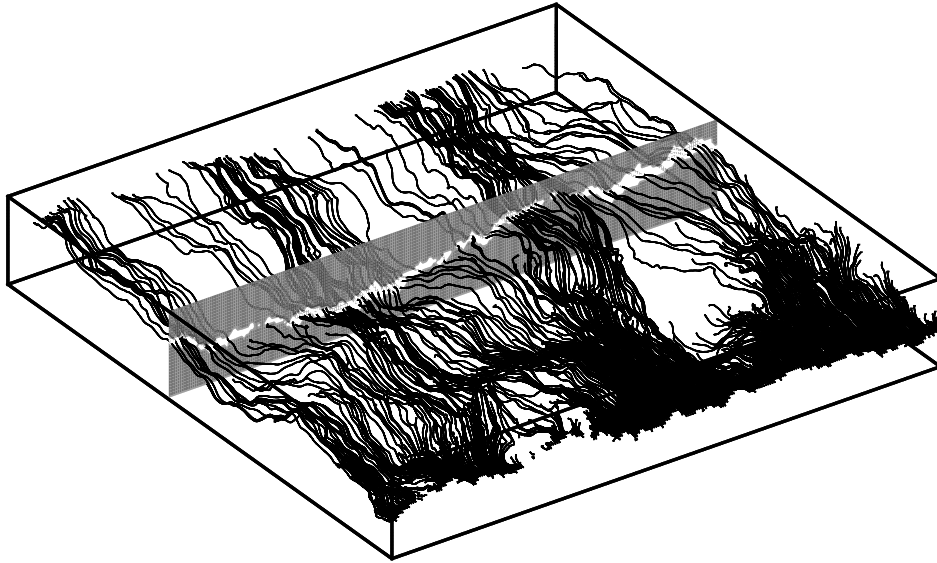


図 4.21 The visualized fluid flow through the 3D fracture. A solid line is a streamline for fluid flow. A gray plate is a section of the fracture.

上向きの方が卓越している箇所であり、青色の箇所は下向き成分が卓越した箇所を示す。ここで、図 4.23 と同じ箇所をそれぞれ実線および一点鎖線で示すと、四角で囲まれた下り坂斜面においては鉛直方向下向きの速度が現れており、円形で囲まれた上り坂斜面では鉛直成分上向きの速度が現れている。このことから、3次元 LBM においては、モデルの形状に応じて流体が流れていることがわかる。この様に、3次元格子ボルツマン法を用いることで、鉛直成分が正確に計算できているといえる。

#### 4.6.5 3乗則からの乖離

本節では、3乗則からの乖離について検討する。そのために用いるモデルは、第 4.2 節で作成したフラクチャモデルを使って以下のように設定する。図 4.25 は以下のモデルの 2次元断面である。

モデル A: (開口型フラクチャモデル) 開口幅分布の乱れ  $\sigma_d$  は全てほぼ等しく 0.65 である。しかし壁面形状の粗さ  $\sigma_f$  はモデルごとにさまざまである (図 4.25(a))。

モデル B: (横ずれを伴うフラクチャモデル) モデル A の 1 つを用いて、上下壁面を横滑りするようにならしたモデル。開口幅分布の粗さ  $\sigma_d$  は最初は 0.65 であるがある範囲まではずれ量に比例して増加する。この時の壁面形状の粗さ  $\sigma_f$  はほぼ一定となる (図 4.25(b))。

それぞれのモデルについての詳細なデータは表 4.2 である。

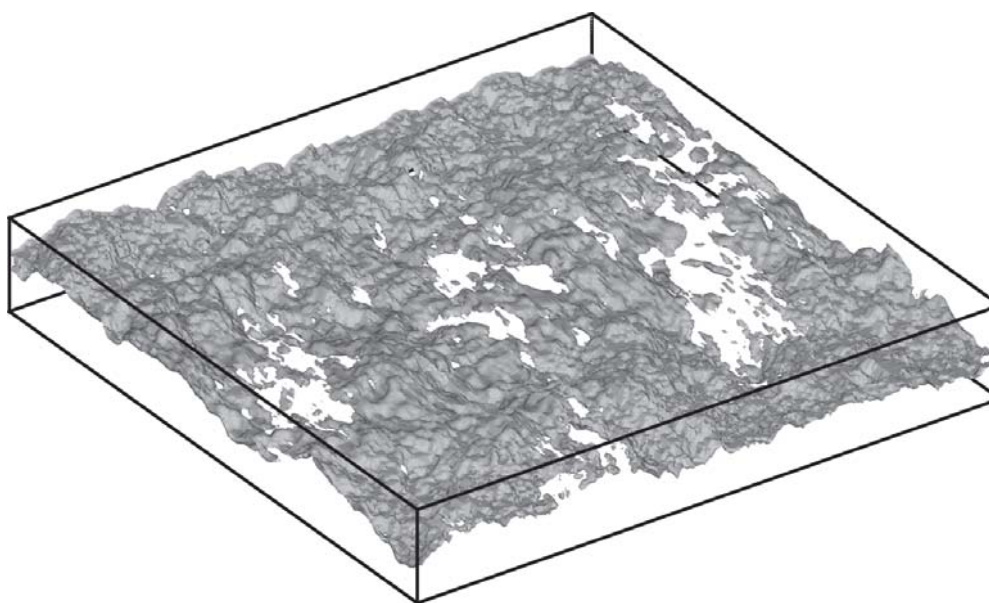


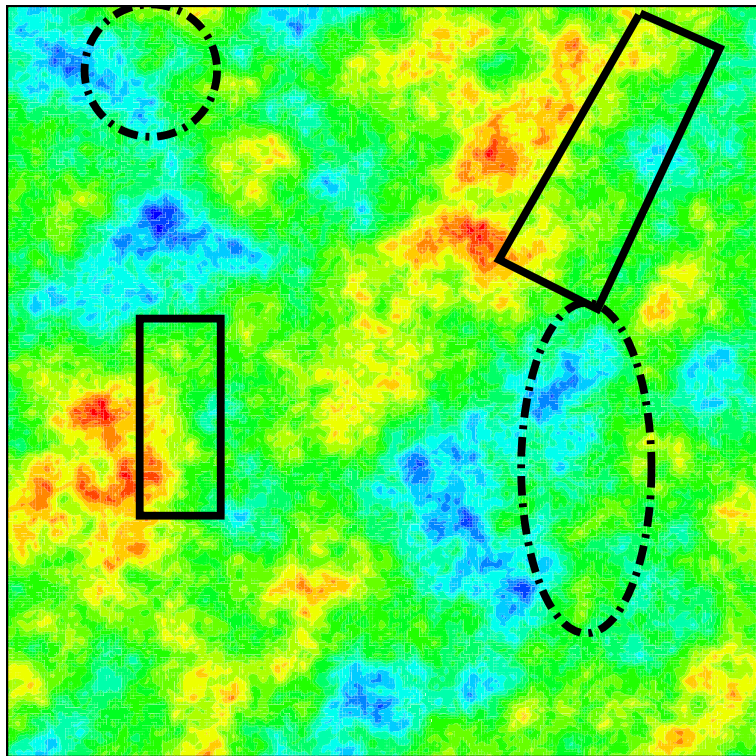
図 4.22 3D flow in L151(2) with the isosurface of fluid velocity.

表 4.2 The parameter of the fracture models.

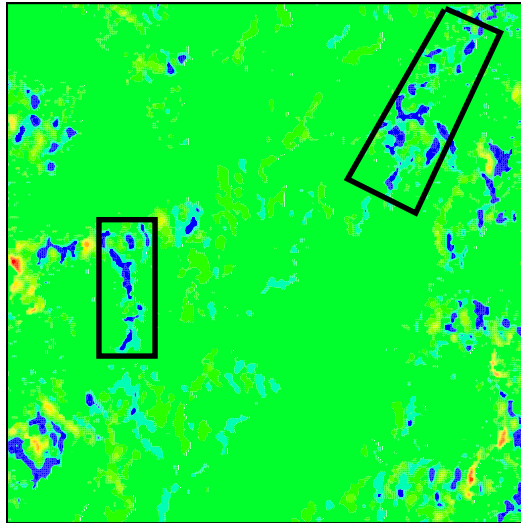
モデル名	F.D.	$\sigma_f$	$\sigma_d$
A(1)	1.2	1.88	0.65
A(2)	1.2	2.34	0.65
A(3)	1.2	2.97	0.65
B(1)	1.2	1.88	0.65
B(2)	1.2	1.88	1.50
B(3)	1.2	1.88	2.07

モデル A に関して，壁面の粗さを表す  $\sigma_f$  はそれぞれ，2.97，1.88，2.34 である．開口幅分布の標準偏差  $\sigma_d$  はほぼ等しく 0.65 である．これら 3 種のモデルに対して，格子ボルツマン法によって流量を評価し，それらの 3 乗則からの乖離を表したものが図 4.26 である． $\sigma_f$  は異なるが，乖離の傾向はほぼ同じものとなっている．つまり 2 次元の場合と同様に，フラクチャ内の流量を規定しているのは開口幅の乱れを表す  $\sigma_d$  と考えられる．

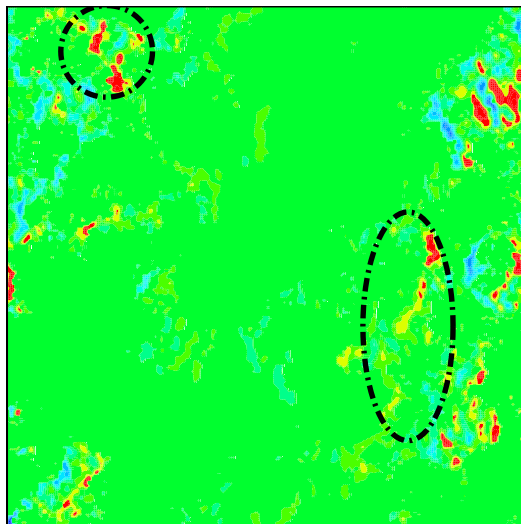
次にモデル B に対して，モデル A(1) の  $\sigma_f = 1.88$  の壁面を利用する．壁面形状をそのままにして，流体が流れる方向に移動させてモデルを作成する．このモデルは，横ずれを伴うフラクチャを想定したモデルである．モデル A では  $\sigma_d = 0.65$  と小さいため，上下の面はほぼ同じであると言える．しかし，横滑りさせることで  $\sigma_d$  は増加する．下部面を固定し，上部面を  $x$  方向へ  $X$  移動すると  $0 \leq x \leq X$  では上部面が存在しない．そこで，周期境界条件を適用し， $L_x - X \leq x \leq L_x$  の壁面データを不足部に補う．この場合およそ  $L_x/2$  移動したときに上下の面は最もかみ合わなくなるので  $\sigma_d$  は最大になる．シミュレーションではフラクチャ長さのおよそ 4% と，8% ずらしたモデルでの計算を行った．図 4.27 の  $\sigma$  は  $\sigma_d$  であり，また  $\sigma_f$  はすべてほぼ 1.88 である．壁面形状はほぼ同じであるが， $\sigma_d$  が大きくなるほど乖離の傾向が強く現れている．



☒ 4.23 Lower wall in a fracture. The red area is a moutain shape and the blue area is a valley shape.



(a) Blue colored area corresponds to the area fluids flow downward.



(b) Red colored area corresponds to the area fluids flow upward.

图 4.24 Vertical velocity on two parallel sections in the fracture. The fluid flows upward in the red area and it flows downward in the blue area.

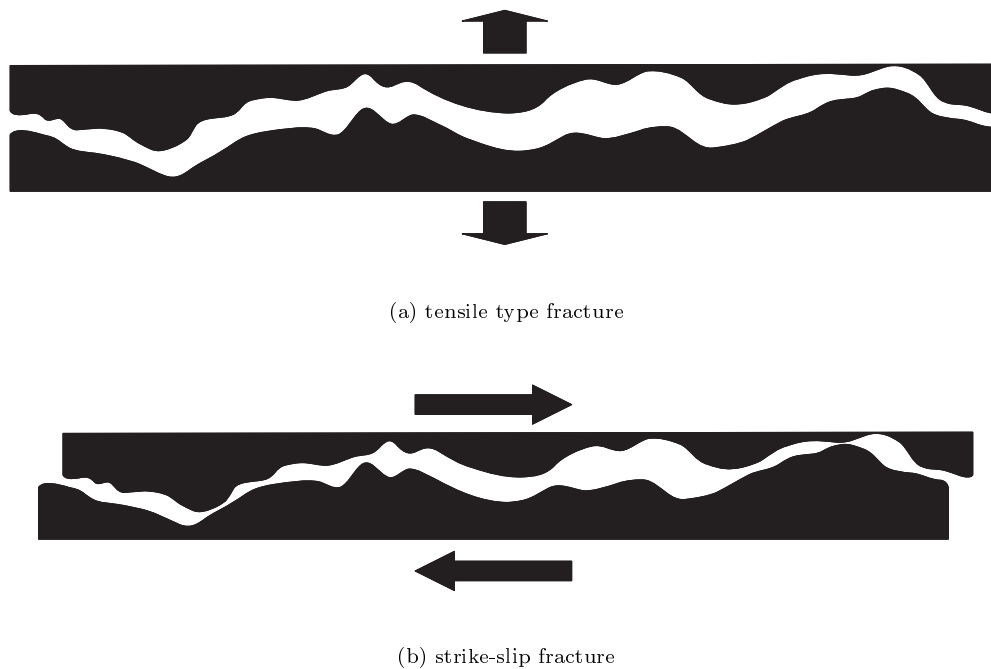


図 4.25 The schematic drawings of the 2D section for two fracture types.

3次元解析においても、2次元解析と同様の結果を得ている。 $\sigma_d$ を固定して $\sigma_f$ を変化させて作ったモデルにおける平均開口幅の狭小化に伴う3乗則からの乖離はほぼ同じである。逆に $\sigma_f$ を固定して $\sigma_d$ を変化させると、 $\sigma_d$ の増加に伴って3乗則からの乖離は増大する。

#### 4.6.6 3次元流解析のまとめ

3次元格子ボルツマン法により、Reynoldsの方法では計算できなかった鉛直方向の流れを加味したフラクチャ内流れのシミュレーションを行うことができた。これにより、鉛直成分を考慮すべき構造に対する正確な数値シミュレーションが可能となった。さらに、3次的に流線の長さを測定することが可能となったため、フラクチャ面の凸凹やトーチュオシティが及ぼす影響について検討することが可能となった。

また、3乗則からの乖離は、2次元と同様に3次元においても、 $\sigma_d$ によって規定されることがわかった。つまり、フラクチャ内を流れる流体流量は、そのフラクチャの開口幅の標準偏差が大きくなればなるほど、3乗則から乖離して流量は減少するといえる。

### 4.7 まとめ

二次元および三次元格子ボルツマン法によって、フラクチャ内流体流動解析を行い、その亀裂特性について以下の知見を得られた。

1. 亀裂形状が平行でないときには、フラクチャ内流体流量は、三乗則に従わず、開口幅の減少に従って、その乖離は増大する。

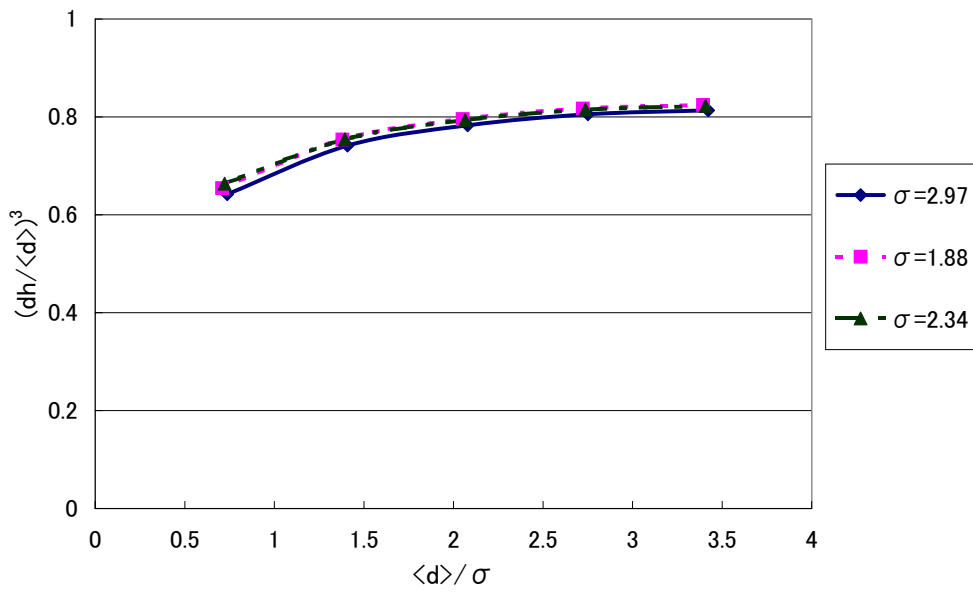


Figure 4.26 The model 3D-A. The legend " $\sigma$ " is  $\sigma_f$ . The  $\sigma_d$  is constant. The trend of the deviation is the same in each model.

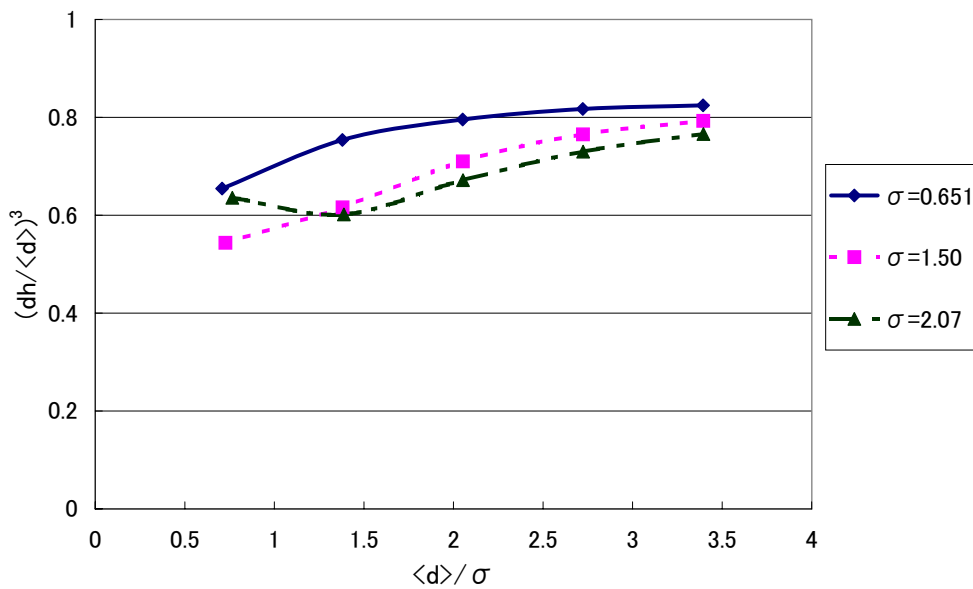


Figure 4.27 The model 3D-B. The legend " $\sigma$ " is  $\sigma_d$ . The  $\sigma_f$  is constant. The deviation becomes larger according to the  $\sigma_d$ .

2. 三乗則からの乖離は、亀裂開口幅のばらつき  $\sigma_d$  に強く影響を受け、 $\sigma_d$  が大きくなるほど乖離が増大する。
3. 水理的開口幅と平均開口幅の比の三乗は、亀裂の形状によらず  $\langle d \rangle / \sigma_d$  の関数として一つの曲線として表される。
4. 3次元格子ボルツマン法によって、フラクチャ内の鉛直速度成分を正しく求めることができた。これによって、フラクチャ面の凹凸や流路のトーチュオシティ等を定量的に評価する方法としての可能性を示せた。



## 第5章 LBMとDEMのカップリング手法

固液混相流は、流体流動と固体運動の連成問題である。特に移動する境界条件を含む流体流動を計算しなくてはならない。そこで、本研究では、境界形状が変動する問題に対しても、比較的容易に適用可能な格子ボルツマン法を流体流動計算手法として採用した。固体要素の運動に関しては、従来からよく用いられている個別要素法を採用することで、流体中の粒子個々の運動を捉えることが可能であると考えた。本章では、これら二つの計算手法を連成させる手順について述べる(三善ほか, 2005)。

### 5.1 LBMとDEMのカップリング手法の概要

本研究でも用いたカップリング手法は、流体中に存在する粒子運動と、その周囲の流体流動を同時に時間発展的に求める手法である。具体的には、以下の5ステップを繰り返すことで、流体流動と固体粒子の運動を求めることができる。

1. 解析領域を格子で離散化し、粒子配置に応じて各格子点が固体点であるのか流体点であるのかを判別する。
2. 1. で作成した格子モデルに対して、LBM を用いて流体の流速、密度、圧力を全ての格子点上で求める(第2章)。このとき境界条件としては、滑りなし境界条件を用い、粒子表面上の流体速度は粒子移動速度と一致する(第5.2節)。
3. 2. で求めた粒子周囲の流体速度、密度、圧力を用いて流体から粒子への作用力を求める(第5.3.1節)。
4. DEM を用いて粒子の接触による粒子間作用力(第5.3.2節)を求め、先の流体からの作用力(第5.3.1節)と合算し、粒子にかかる合力を得る。この作用力を用いて、運動方程式(式(5.2)および(5.3))より粒子速度、変位を求める(第5.3節)。
5. 粒子位置および速度を更新し、1. に戻る。

### 5.2 粒子から流体への作用

粒子から流体への作用は、以下の二点を考慮することで求められる。すなわち、粒子の移動速度を境界面の移動速度として加えることと、領域情報として、各格子点が粒子であるのか流体であるのかを更新することである。

ある時間ステップにおいて、固体粒子が  $x_s = (x_s, y_s)$  にあるものとする。まず、解析領域をLBMの計算用に等間隔の格子に分割する。このとき、全ての格子点において、流体領域であるか固体領域であるかについて決定される。ついで、この領域情報を基にしてLBMによって流体領域の速度、密度、圧力が計算される。ここで、固体粒子上にあたる格子点  $x_w = (x_w, y_w)$  における、固体粒子の移動速度  $u_w$  は、

$$\begin{pmatrix} u_{wx} \\ u_{wy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{sx} - \Omega(y_w - y_s) \\ u_{sy} + \Omega(x_w - x_s) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

となる。ただし、 $\mathbf{u}_s = (u_{sx}, u_{sy})$  は、固体粒子の並進速度、 $\Omega$  は固体粒子の角速度である。この格子点上の移動速度と、格子点上の流体速度が一致するように第 2.3.4 節節で述べた境界条件が適用される。これによって、粒子運動を流体流動へ加味することができる。

### 5.3 固体粒子の運動

固体粒子は、そこにかかる力およびトルクに応じて移動する。その力およびトルクは、流体-粒子間相互作用力および粒子-粒子間相互作用力の二つに分けられる。これらの合力  $\mathbf{F}$  を用いて運動方程式 (5.3) を解くことにより、粒子の運動が求められる。

$$M \frac{d\mathbf{u}_s}{dt} = \mathbf{F} \quad (5.2)$$

$$I \frac{d\Omega}{dt} = T \quad (5.3)$$

ここで、 $\mathbf{F}$  と  $T$  はそれぞれ、力とトルクである。また、 $\mathbf{u}_s$  は並進速度、 $\Omega$  は角速度である。また、ここでは 2 次元解析であるため、粒子は単位長さの厚さを有する円盤であると考えられるため、質量  $M$  はおよび慣性モーメント  $I$  はそれぞれ、

$$M = \frac{\rho_s \pi D_s^2}{4} \quad (5.4)$$

$$I = \frac{M D_s^2}{8} \quad (5.5)$$

となる。ただし、 $D_s$  は、粒子直径、 $\rho_s$  は粒子密度である。

#### 5.3.1 流体から粒子への作用

これまでの LBM においては、しばしば改良型 bounce-back 境界条件を用いることで、力およびトルクを直接求めており、粒子にかかる応力を求めていなかった (Aidun et al., 1998; Ladd, 1994; Qi, 1997)。Inamuro et al. (2000) では、応力を求めることで力、トルクを求めるという、流体力学的観点での直接的な手法を採用している。本手法では、この方法を用いた。

最初に、図 5.1 で示すように、固体粒子から少し離れた所に閉曲面  $S$  を定義し、その閉曲面を有限個に分割する。その各点における分布関数  $f_i$ 、流体圧力  $p$ 、流体速度  $\mathbf{u}$  から、式 (5.6) により応力を求める。

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2\tau} p \delta_{\alpha\beta} - \frac{\tau - 1/2}{\tau} \sum_{i=1}^9 f_i (c_{i\alpha} - u_\alpha)(c_{i\beta} - u_\beta) \quad (5.6)$$

ただし、添え字の  $\alpha$  および  $\beta$  は、 $x$ 、 $y$  に対応する。また、閉曲面  $S$  上の各点における分布関数  $f_i$ 、流体圧力  $p$ 、流体速度  $\mathbf{u}$  は、その周囲の点における数値より内挿することで求められる。

次に、粒子にかかる力およびトルクは、式 (5.7) および (5.8) のように、閉曲面  $S$  上の各点にかかる応力とモーメントを積分することにより求められる。

$$\mathbf{F} = \int_S \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \rho \mathbf{u} [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n}] \} dS \quad (5.7)$$

$$T = \int_S \mathbf{r} \times \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \rho \mathbf{u} [ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \cdot \mathbf{n} ] \} dS \quad (5.8)$$

ただし、 $\mathbf{n}$  は、閉曲面  $S$  上の各点における法線ベクトルであり、 $\mathbf{r}$  は、固体粒子の中心点  $(x_s, y_s)$  から、閉曲面  $S$  上の各点  $(x_{sl}, y_{sl})$  へ向かう方向ベクトルを表している。

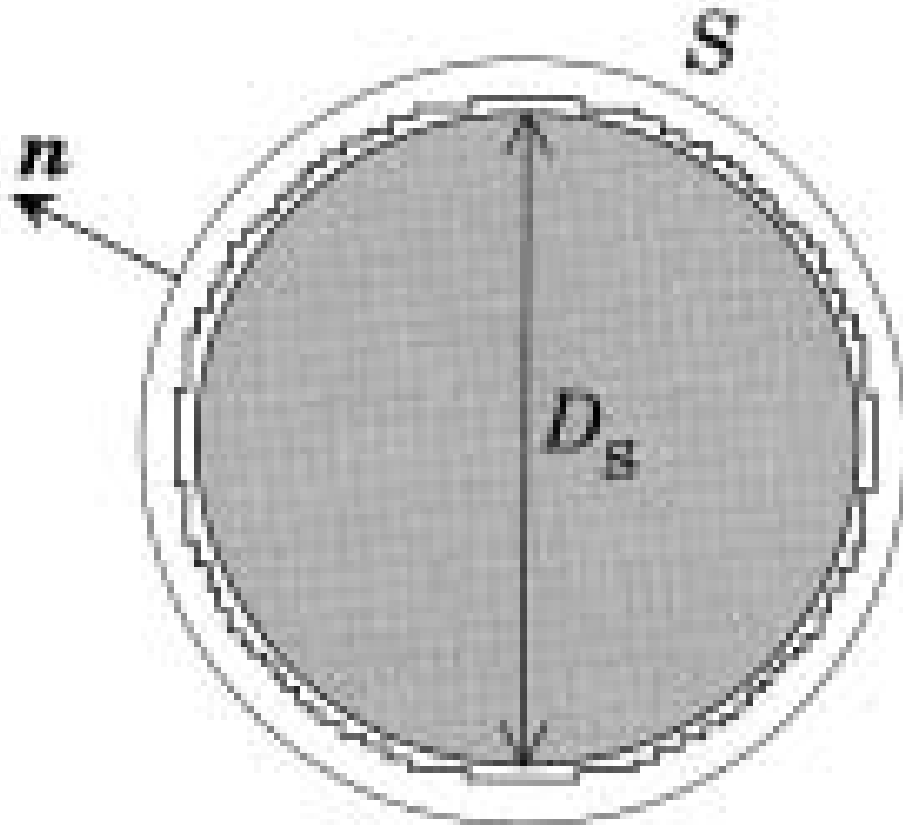
また、固体粒子を移動させる他の要因として、重力および浮力が挙げられる。本手法では、重力加速度を  $g$  として、重力  $F_y = -Mg$  および浮力  $F_y = \pi \rho g D_s^2 / 4$  が定義される。

### 5.3.2 粒子 – 粒子間相互作用

粒子同士は互いに衝突するが、その取り扱いは、流体-粒子の相互作用とは別に扱わなければならない。粒子同士の衝突を表す最も単純なアイデアは、剛体球衝突理論である。これは、固体球が衝突する際に、その総運動量が保持されるように速度が決定される。この手法は、取り扱いが非常に簡単でかつ正確であるが、2球の衝突においてのみしか正しく表現できず、多数の球体衝突モデルでは正しく計算できない問題がある。

複数衝突モデルを達成するために、個別要素法 (DEM) を用いた (Cundall and Strack, 1979)。この手法は、岩盤力学等の分野でよく用いられる数値計算法の一つである。ある体積のかたまりを一つの要素として捉え、個々の要素間に仮想的なバネやダッシュポットなどの力学モデルを配し、運動方程式を立てる。この運動方程式を差分近似して、時間軸に対して前進的に解いていく手法である。

本手法では、固体粒子同士は、衝突している間は、垂直方向とせん断方向にそれぞれバネとダッシュポットによって連結され、粒子同士の中心間距離に応じて力が働く。ダッシュポットは、減衰力に対応し、相対速度に比例して働く。



⊠ 5.1 The closed surface  $S$  around a particle with a diameter  $D_s$  and the unit outward normal vector  $\mathbf{n}$  on the surface  $S$  (Inamuro et al., 2000).

## 第6章 水中の粒子沈降

球状粒子および非球状粒子の流体中への沈降問題は、石油工学、土木工学を始め様々な分野において重要な問題である。この問題に関して、理論的、実験的な研究が多くなされてきたが、近年では多くの数値シミュレーションが行われるようになってきた。Brady and Bossis (1988) や Chang and Powell (1993) は、ストークス流の中での粒子運動シミュレーションを開発し様々な流動形態を示した。しかしながら、実際には慣性項が粒子一流体間に与える影響を無視することはできないため、ナビエ・ストークス方程式を用いたシミュレーションが必要である。Johnson and Tezduyar (1997) は、有限要素法を用いてレイノルズ数 100 における 100 粒子沈降問題のシミュレーションを行っている。また、Joseph らのグループでも有限要素法を用いた円形および楕円形粒子の沈降シミュレーションを行い、水中の粒子沈降に関してよく整理した (Feng et al., 1994; Huang et al., 1998; Joseph et al., 1987; Fortes et al., 1987)。また、流体流動計算に格子ボルツマン法を用いた粒子沈降シミュレーションも多くなされてきている (Aidun and Lu, 1995; Ladd, 1994; Qi, 1997, 1999)。

ここでは、特に単一粒子沈降と二粒子沈降に絞り、既往の研究と比較することで本研究で用いた手法の妥当性を検証する。

### 6.1 単一粒子沈降

#### 6.1.1 はじめに

有限サイズの水槽内を単一粒子が沈降するとき、その沈降挙動は沈降速度に応じて大きく変化する。Feng et al. (1994) は有限要素法を用いた数値シミュレーションを行い、その流動形態、壁面効果、抗力係数、などに関して検討した。

まず、流動様式として、レイノルズ数に応じて以下に示す 5 種類に分類した。

- A ( $0.1 < Re < 2$ ) 粒子は単調に平衡点 (ここでは領域の中心線上) に向かって変位し、平衡点に達した後は直線的に沈降する。
- B ( $3 < Re < Re_{crit}$ ) 領域の中心線がなお平衡点ではあるが、そこに至るまでの変位は単調ではない。平衡点を中心とした減衰振動をしながら沈降する。
- C ( $Re_{crit} < Re < 60$ ) 臨界レイノルズ数 (ここでは 20 程度) を超えると、平衡点は中心点からわずかにはずれ、平衡点を中心とした弱い振動運動をするようになる。
- D ( $60 < Re < 300$ ) 流動様式 C と比べて、かなり大振幅で振動運動する。
- E ( $Re > 300$ ) 規則的な振動ではなく、無秩序運動となる。

さらに、壁面効果として、沈降開始時の壁面からの距離は、最終的な沈降平衡位置に影響を及ぼさないことを示した。また、抗力係数についても考察し、水槽サイズによって異なる抗力係数が求まることを示した。

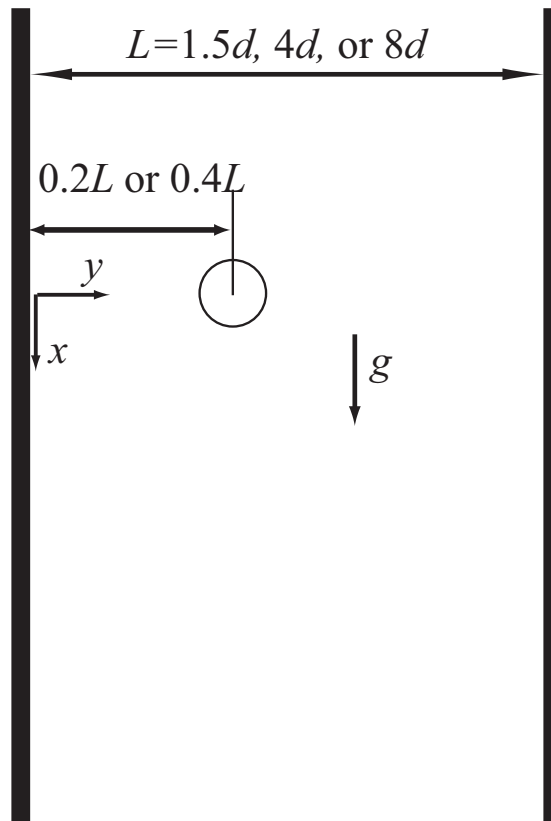


図 6.1 The initial model for single particle settling.

#### モデル設定とシミュレーション概要

本研究では、幅  $L$  で鉛直方向には十分長い矩形領域内に、直径  $d$  の粒子を一つ重力  $g$  が鉛直方向下向きにかかる場において沈降させる。モデルの概略図を図 6.1 に示す。粒子の沈降する鉛直方向を  $x$  軸とし、それと垂直な水平方向を  $y$  軸とした。箱形領域は、四方固定壁に囲まれているが、本解析において、領域の上端および下端の壁面は影響を及ぼさない程度離れている。また、容器幅としては、3 種類 ( $L = 1.5d, 4d, 8d$ ) 設定した。さらに、粒子の初期座標としては、容器上端の影響を受けない程度下方に設定し、その位置を  $x = 0$  とした。また各モデル毎に粒子初期位置の  $y$  座標を変えて設定し、粒子初期位置による影響も検討した。ただし、 $y = 0$  は領域の左端壁である。

粒子は、初期速度ゼロで沈降を開始し、平衡状態になるまで沈降させる。そのときの沈降速度を終端速度  $U$  と定義する。

#### 6.1.2 シミュレーション結果

以下にシミュレーション結果について記す。ここでは、レイノルズ数として粒子沈降の終端速度  $U$  から求まる粒子レイノルズ数 ( $Re = Ud/\nu$ ) を用いた。3 種類の幅の異なるモデルごとに、様々な密度の粒子を沈降させた。  $L = 4d, 8d$  モデルに対しては  $y/L = 0.2$ 、  $L = 1.5d$  に対しては  $y/L = 0.4$  を初期粒子配置とするモデルの沈降粒子の軌跡を図 6.2 ~ 6.4 に示す。  $Re < 2$  となる低

レイノルズ数グループを各図 (a) に、それ以上のものを図 (b) にプロットした

#### 流動様式

今回の研究では、 $Re < 20$  程度の範囲のみを対象としたために上記のうち、A および B のみ再現することができた。図 6.2 ~ 6.4 で示されるように、 $Re < 2.0$  では振動することなく単調に平衡点に向かって変位し、 $y$  方向の中心付近で安定的平衡状態となっている。この傾向は領域幅  $L$  によらず同一であった。それに対し  $Re > 2.0$  では、一度領域の中心 (平衡点) を通り越して後、平衡点を中心とした振動を繰り返しながら沈降している。これらは、Feng et al. (1994) における流動様式 A および B とよく一致している。本研究においても流動様式 A および B の境界は、 $Re = 2.0$  前後であった。

#### 粒子初期座標の影響

粒子の初期座標を、 $y/L = 0.2, 0.3, 0.4$  と変えてシミュレーションを行った。図 6.5 に、 $L = 4d$  における粒子運動の軌跡を示す。図 6.5(a) では、3 モデルとも単調に平衡点に向かって変位し、平衡点に達した後は、直線的に沈降している。また、図 6.5(b) でも、三モデルとも同様に、平衡点を中心とした振動をしながら沈降している。さらに、沈降速度を見てみると、初期段階においては違いがあるものの、平衡点に達して後ではほぼ等しかった。つまり、今回用いた  $Re < 20$  の範囲においては、平衡状態に達した後を議論する場合、粒子の初期位置はほとんど影響を及ぼさないと考えられる。

#### 抗力係数

直径  $d$ 、質量  $m$ 、密度  $\rho_p$  の粒子が、密度  $\rho_f$  の流体中を速度  $U$  で沈降するとき、粒子の運動方程式は、

$$m \frac{dU}{dt} = mg - mg\rho_f V - \frac{1}{2} C_d U^2 \rho_f A \quad (6.1)$$

となる。ただし、 $g$  は重力加速度、 $V$  は粒子の体積、 $A$  は沈降方向への投影面積、 $C_d$  は抗力係数である。

粒子が終端速度  $U$  で沈降するとき、式 (6.1) の左辺は 0 となる。また 2 次元の場合、粒子の体積は  $V = \pi d^2/4$ 、質量は  $m = \rho_p \pi d^2/4$ 、投影面積は  $A = d$  であることから、これらを式 (6.1) に代入すると、抗力係数  $C_d$  として、

$$C_d = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\rho_p}{\rho_f} - 1 \right) \frac{gd}{U^2} \quad (6.2)$$

が得られる。

各シミュレーションから得られた終端速度  $U$  を、式 (6.2) に代入することで、抗力係数  $C_d$  が求まる。得られた抗力係数をレイノルズ数に対してプロットしたものが図 6.6 である。横軸にレイノルズ数、縦軸に抗力係数を取り、ともにログスケールで表記している。太実線は、本シミュレーション結果をモデルの容器幅ごとにプロットしたものである。点線のグラフは、Feng et al. 1994

の各モデルに対応している。また細実線は実験から得られた経験的關係式 (Sucker and Brauer, 1975) である。

本シミュレーションで得られた結果は、容器幅の異なる三モデルとも値は少し小さくなっているが、その傾きと、容器幅が広くなるに従って、StandardDrag(実験データに基づく経験的關係式) に漸近する様子は、Feng らの結果とよく一致していると言える。

### 6.1.3 まとめ

単一粒子沈降では、レイノルズ数によって異なる沈降の流動様式を再現することができた。また、沈降速度から算出した抗力係数とレイノルズ数との関係において、その傾きと、容器幅が広がるにつれて実験に基づく経験式に近づく傾向は、Feng らの結果と類似していると言える。しかしながら、絶対値として見ると抗力係数は、既存の結果と比して過小に求められている。この誤差は、流体の粘性係数が異なっていたことが原因であると考えている。

## 6.2 二粒子沈降

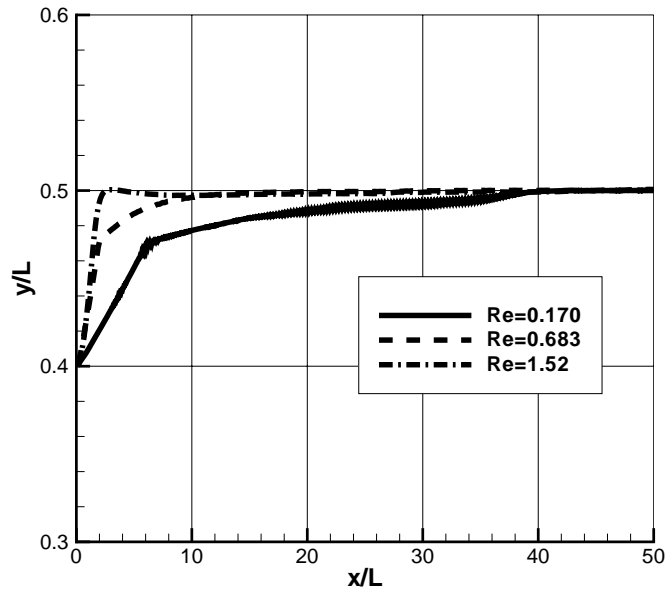
### 6.2.1 はじめに

有限領域内の水中で二粒子が沈降する場合、粒子同士の距離が近いときには相互に影響を及ぼし合い、単一で沈降するときとは異なる沈降形態を示す。レイノルズ数が比較的小さい範囲では、二粒子は沈降方向と水平な方向に並んで安定した状態となりその相対距離をほとんど変えることなく沈降する。またレイノルズ数が大きくなってくると、二粒子はDKT(Drafting, Kissing, Tumbling) 現象をみせるようになる。これは、先行粒子の作り出す流体流動に引き込まれるようにして後方粒子が追いついていく過程 (Drafting) と、二粒子が衝突する過程 (Kissing)、そして先行粒子よりも速い速度で後方粒子が接近し衝突することで、先行粒子を水平方向に押し出し、これまでの後方粒子が先行粒子となる過程 (Tumbling) の3つの過程からなる。この現象は、特定の条件下では繰り返し発生し、沈降中の粒子の相対位置が繰り返し入れ替わる。これらの現象は、Joseph et al. (1987) や Fortes et al. (1987) によって実験で明らかにされ、Feng et al. (1994) や Qi (1999) らは、数値計算によってこれらの現象を再現した。

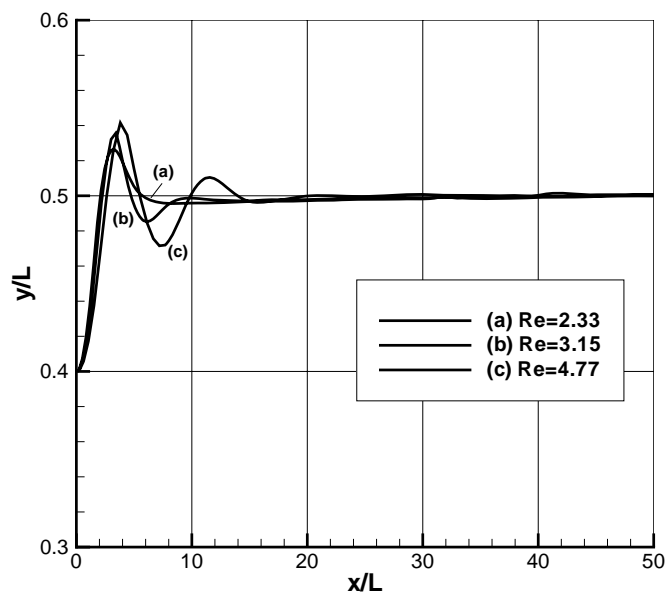
### 6.2.2 モデル設定とシミュレーションの概要

本研究では、図 6.7 に示すような幅  $L(= 4d, 8d)$  の矩形領域内に、直径  $d$ 、密度  $\rho_p$  である二粒子を、鉛直方向下向きに重力  $g$  がかかる場において沈降させた。単一粒子沈降のときと同様に、粒子の沈降する鉛直方向を  $x$  軸とし、それと垂直な水平方向を  $y$  軸とした。箱形領域は、四方固定壁に囲まれているが、本解析において、領域の上端および下端の壁面は影響を及ぼさない程度離れている。さらに、粒子の初期座標としては、容器上端の影響を受けない程度下方に設定し、上方に設置した粒子を粒子1(白色)とし、その初期位置を  $x = 0$  とした。粒子2(黒色)は粒子1から  $2d$  下方に設置した。また、領域の左端壁を  $y = 0$  とした。また粒子初期位置の  $y$  座標は、 $y = 0.25L$  とした。



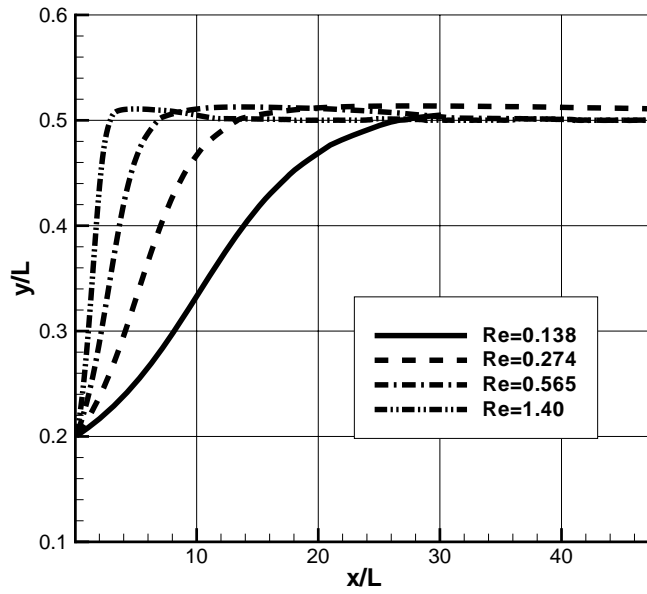


(a) lower Reynolds numbers.

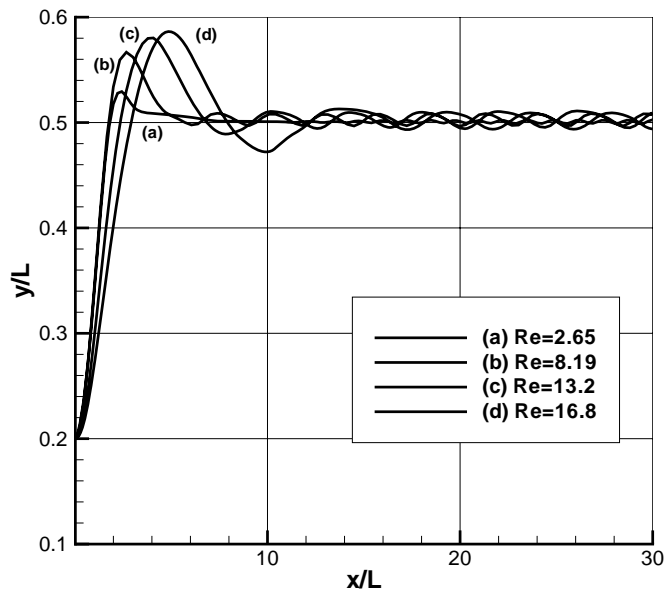


(b) Higher Reynolds number.

☒ 6.2 Trajectories of particles settling in the narrower channel ( $L = 1.5d$ ).

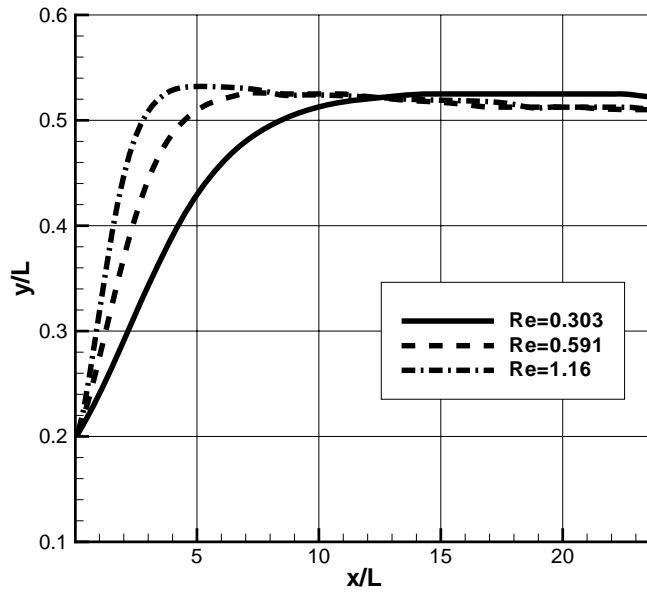


(a) lower Reynolds numbers.

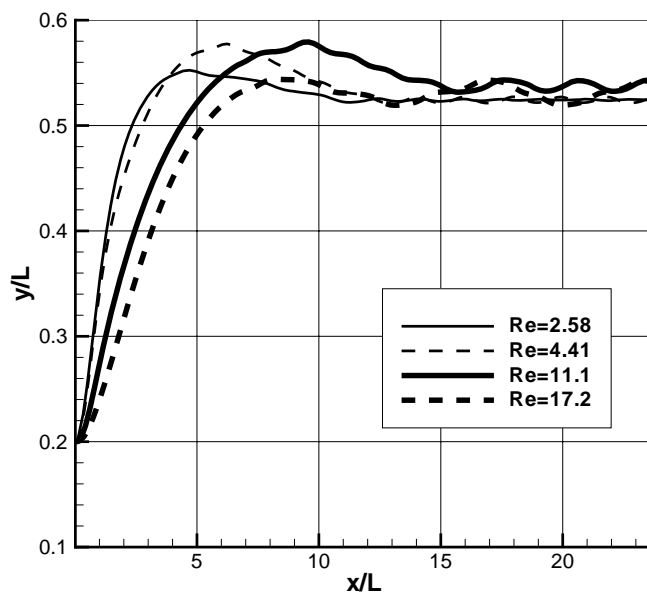


(b) Higher Reynolds number.

☒ 6.3 Trajectories of particles settling in the middle channel ( $L = 4d$ ).

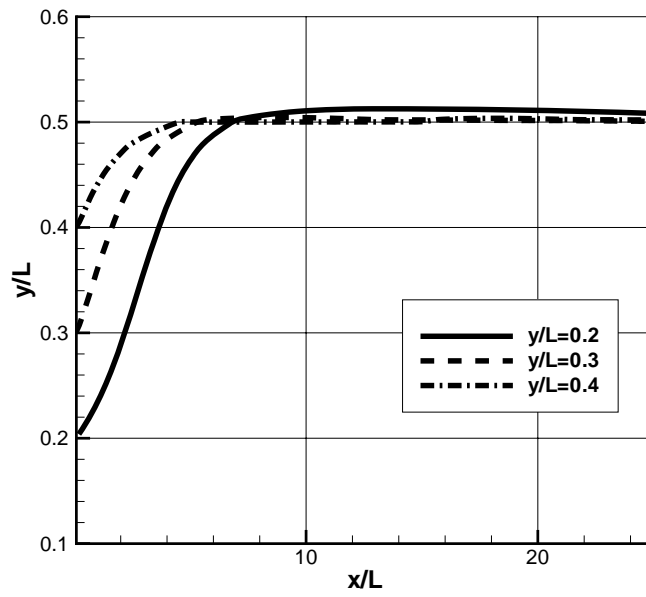


(a) lower Reynolds numbers.

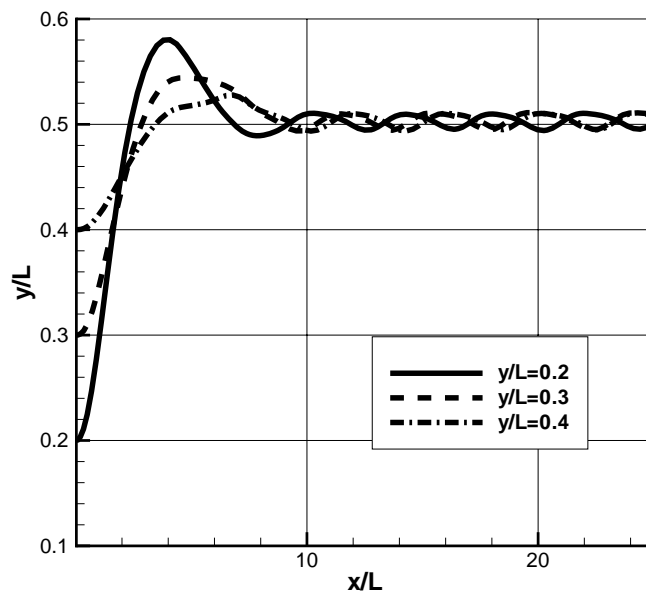


(b) Higher Reynolds number.

⊗ 6.4 Trajectories of particles settling in the wider channel ( $L = 8d$ ).



(a)  $Re=0.565$



(b)  $Re=13.2$

图 6.5 Trajectories of particles settling from different initial positions in the middle wide channel ( $L = 4d$ ). (a)  $Re=0.565$ . (b)  $Re=13.2$

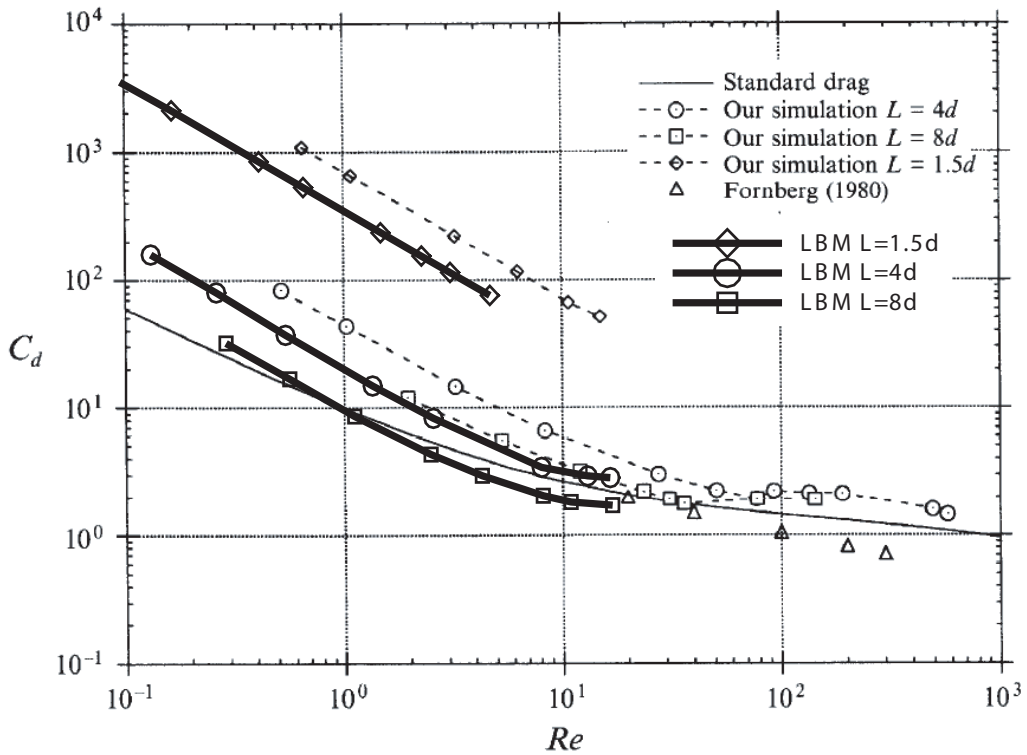


図 6.6 Drag coefficient.

### 6.2.3 水平安定

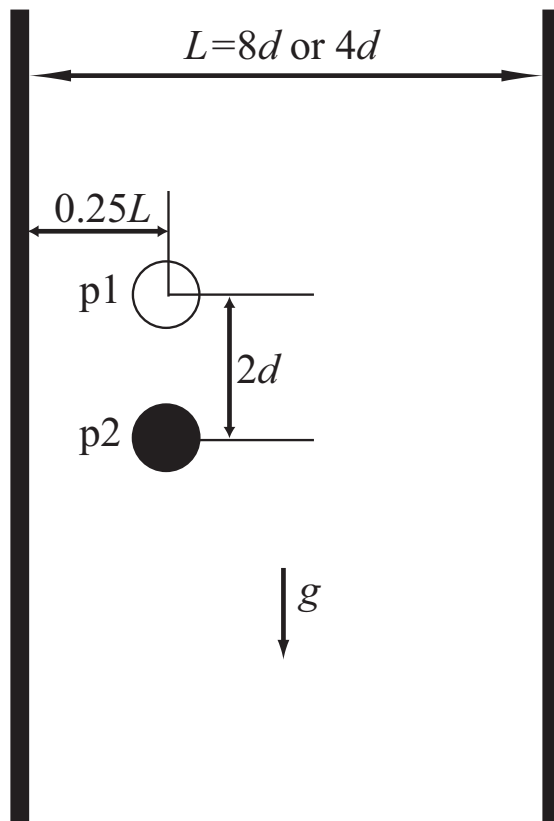
図 6.8 は、レイノルズ数が比較的小さいときの二粒子沈降挙動を表す代表的なスナップショットである。粒子 1 が粒子 2 に向かって進行し ((a) および (b))、次に粒子 1 は粒子 2 を右壁面側に押しつけるような挙動を示す ((c) および (d))。さらにその後粒子 1 は左壁面側へ少し近づき、最終的には二粒子は水平方向に並んだ状態を保ちながら沈降する ((e) ~ (h))。

図 6.9 に、(a) 各粒子の軌跡、(b) 粒子速度、(c) 粒子の角速度、(d) 粒子間距離を示す。ただし、全ての長さは、粒子径  $d$  で正規化されている。また、(a) ~ (c) に関して、実線は粒子 1 の記録、破線は粒子 2 の記録に対応する。以下の図 6.10、図 6.12、図 6.13 および図 6.17 においても同様である。

図 6.9(a) 軌跡からわかるように、2 粒子は水平方向に並んだ後は、振動しながら沈降しており、さらにその振幅は沈降に伴って小さくなっていることがわかる。また沈降開始後両粒子とも半時計回りに回転を始め、水平方向に並んで安定した後は時計回りに回転しつつ沈降した。

### 6.2.4 Drafting, Kissing & Tumbling

比較的高レイノルズ数においては、沈降粒子は DKT(Drafting, Kissing & Tumbling) 現象を見せるようになる。先行粒子が作り出す後流の低圧力領域に引っ張られるように、追跡粒子が先行粒子に向かって加速・接近する。これが Drafting ステージである。次に、加速した追跡粒子が先行粒子に追いつき衝突する。これが Kissing ステージである。この時、2 粒子は縦方向に並ぶことになり、この状態は非常に不安定であるため、追跡粒子が先行粒子を壁面側に追い出すように



☒ 6.7 The initial model of two particles settling.

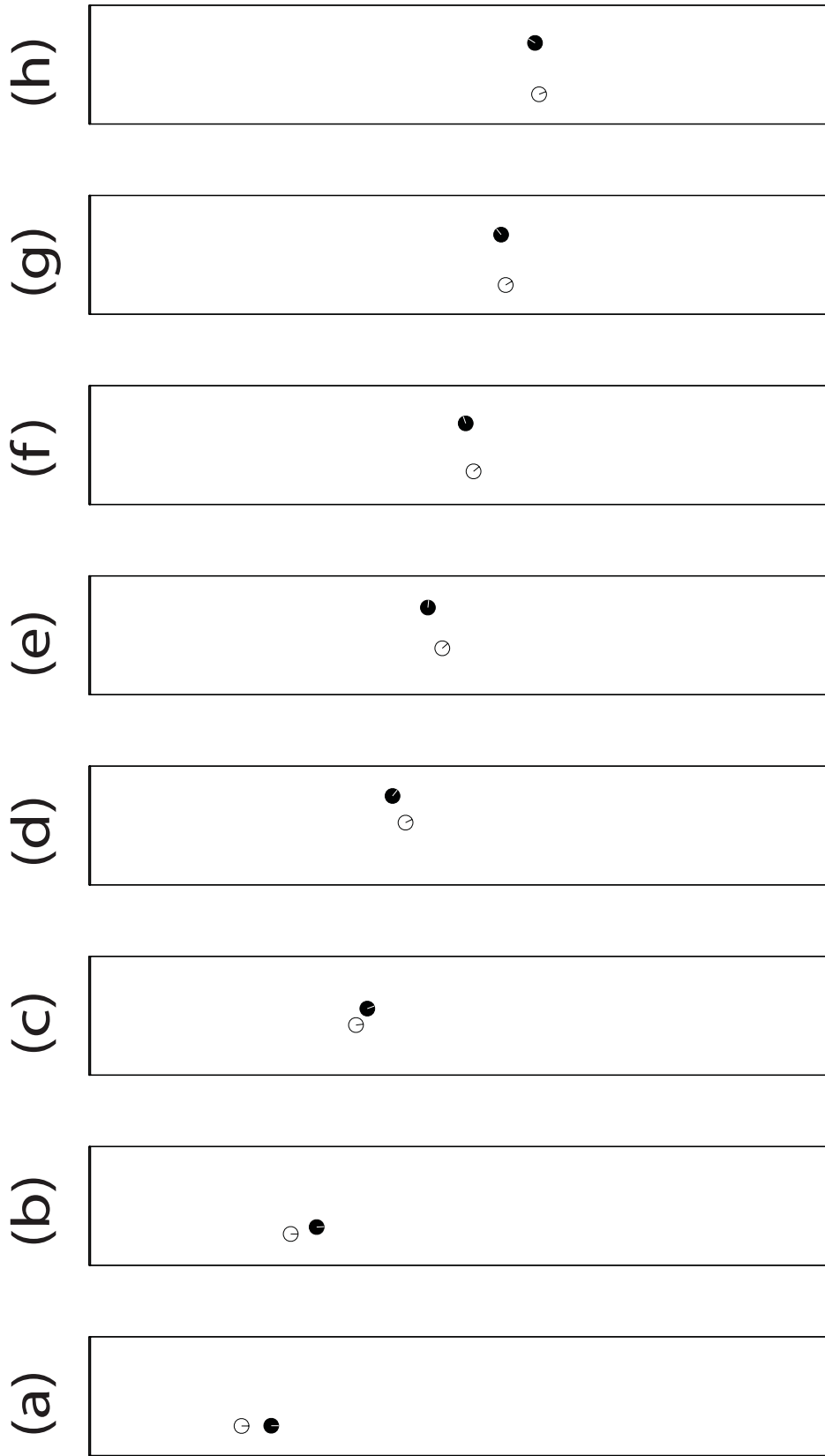
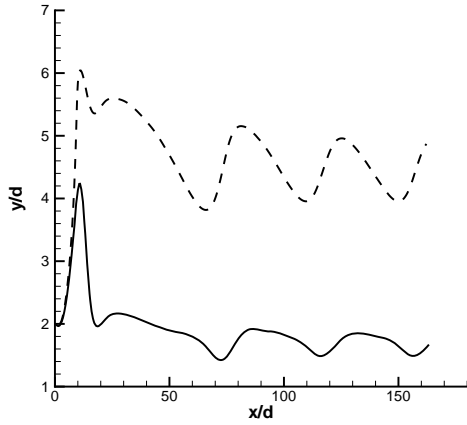
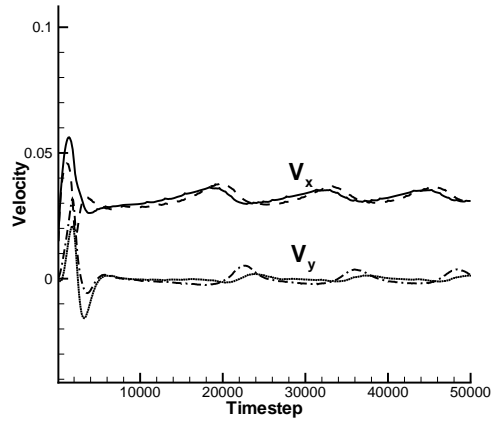


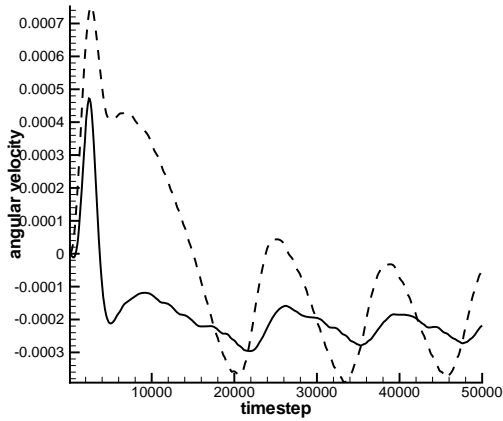
Figure 6.8 Snapshots of two particles setting.  $L = 8d$ .  $Re = 1.95$ .



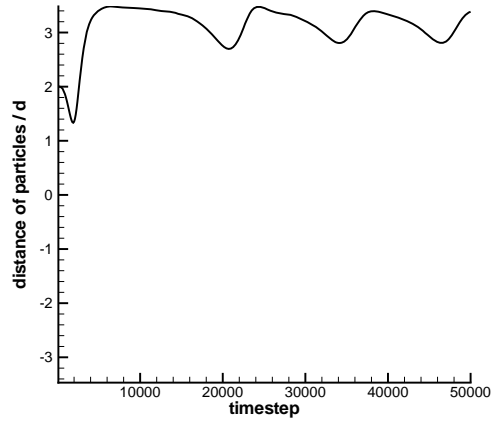
(a) trajectories



(b) velocity



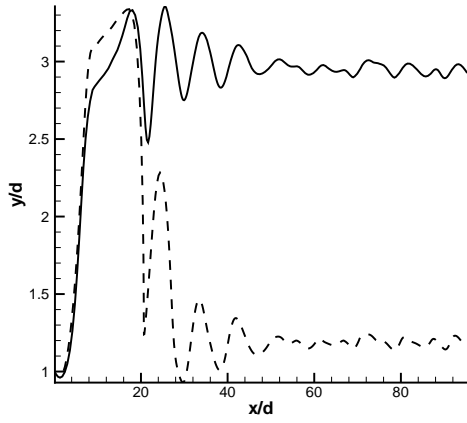
(c) angular velocity



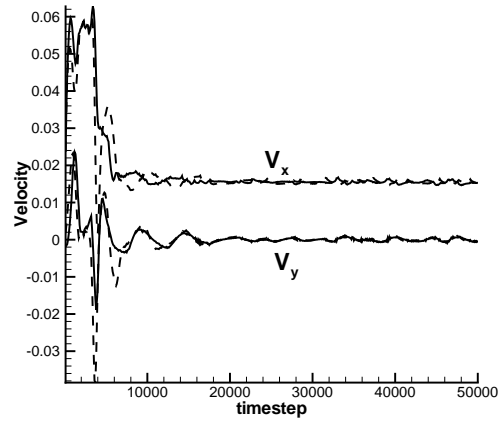
(d) distance between particles

⊠ 6.9  $L = 8d, Re = 1.95$ . Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter.

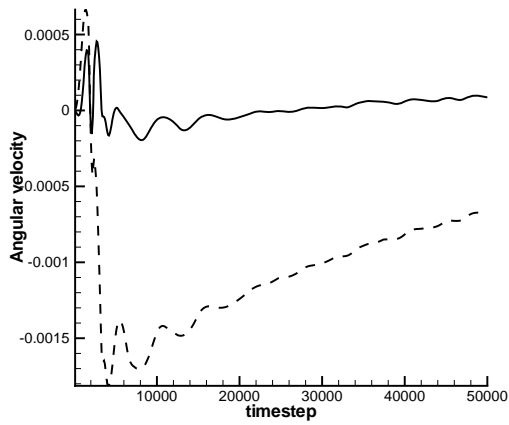




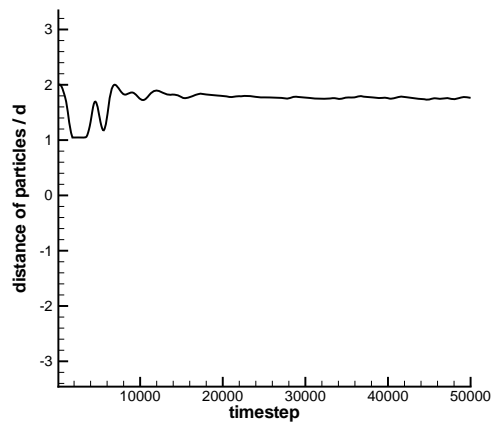
(a) trajectories



(b) velocity



(c) angular velocity



(d) distance between two particles

⊠ 6.10  $L = 4d.Re = 0.922$ . Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter.

変位し、2粒子は分離する。このステージを Tumbling と呼ぶ。これらの3つの現象を合わせて DKT 現象と呼ぶ。

この DKT 現象は、Navier-Stokes 流における特徴の一つであり、Stokes 流ではこの現象を再現することができない。そのため、DKT 現象の再現は、有限のレイノルズ数における粒子沈降問題に関するテストシミュレーションとしてよく用いられている。本研究においては、 $Re > 3$  において繰り返しの DKT 現象が発生することが確認された。

図 6.11 は、 $L = 8d$  に対して 2 粒子沈降させたときのスナップショットである。粒子 1 が粒子 2 に向かって接近していき ((a) ~ (b))、二粒子が衝突している (c)。次いで、粒子 1 が粒子 2 を右壁面に押し出すようにして、粒子 2 を追い越し ((d) ~ (f))、また後方になった粒子 2 が粒子 1 を追いかけて加速している ((g) ~ (h))。

このとき平均速度から求めた平均粒子レイノルズ数は  $Re = 7.92$  であった。また図 6.12 に、(a) 軌跡、(b) 速度、(c) 角速度、(d) 粒子間距離を示す。図 6.12(d) は、粒子間距離を表しているが、そのグラフから、(粒子間距離)/ $d = 1$  となるところで粒子同士が接触していることがわかる。つまり、本モデルにおいては、粒子は 5 回の衝突 (Kissing) をしている。また、図 6.12(b) における速度プロファイルを見てみると、 $1,500 < t < 5,000$  において粒子 2 の x 方向速度 (破線) が直線的に大きくなっており、粒子 1 の沈降速度 (実線) より加速していることが読み取れる。この区間において、粒子 2 が粒子 1 に吸い込まれるように接近しており、Drafting 区間となっている。 $t = 5200$  における衝突後、粒子 1 の沈降速度は急激に減少しており、この間に粒子 2 が粒子 1 を追い越している (Tumbling)。その後、図 6.12(d) で明らかなように、粒子間距離が広がっている。

## 6.2.5 まとめ

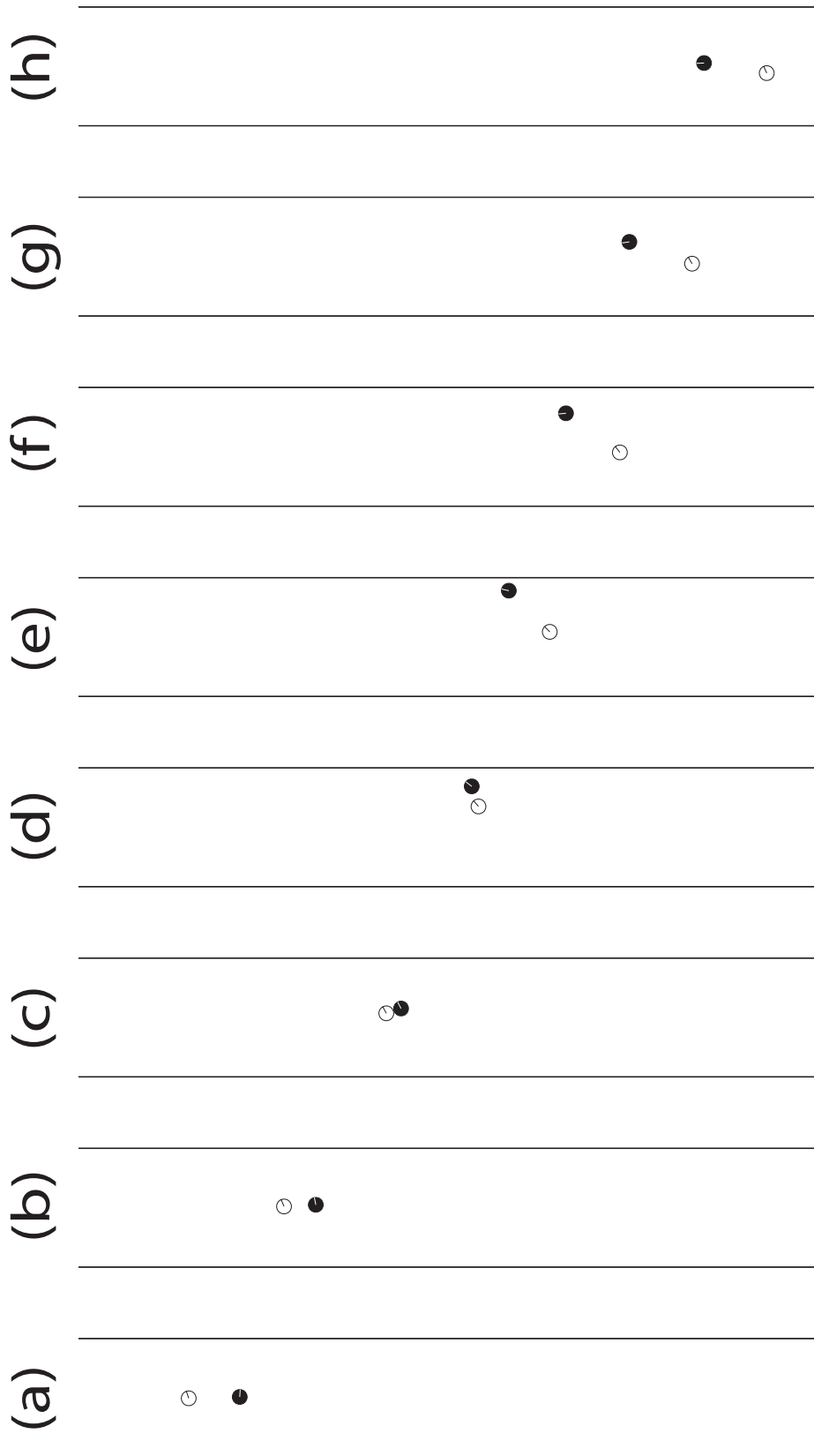
低レイノルズ数条件下では、沈降する二粒子は沈降方向と垂直な方向に整列して安定状態になった。また、比較的高レイノルズ数条件下においては、DKT 現象という、先行粒子に後方粒子が追いつき、衝突し、そして上下の位置関係が入れ替わる運動を繰り返すことが示された。また、これら二つの流動形態を分けるレイノルズ数は  $Re = 3.0$  程度であることがわかった。これは、Joseph et al. (1987) や Fortes et al. (1987) の実験結果および Feng et al. (1994) や Qi (1999) のシミュレーション結果とよく一致するものであった。

## 6.3 パラメータスタディのためのアナログ実験

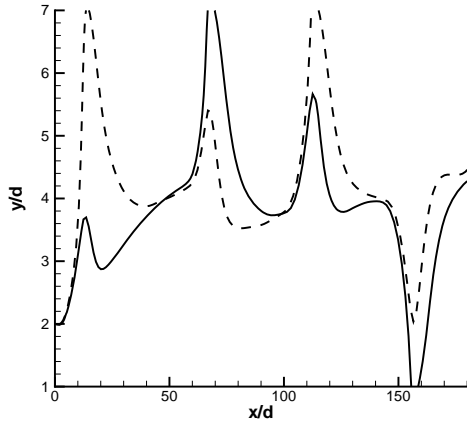
### 6.3.1 実験装置と実験の概要

シミュレーションにおける各パラメータは、実スケールを有したのではなく、無次元化された値である。定量的な解析を行っていく上では、スケーリングは非常に重要な問題である。そのためには、実問題との比較によって、シミュレーションにおけるパラメータの調整を行う必要がある。ここでは、上述の二粒子沈降問題に対して、水槽実験を行った。この実験は大阪大学理学研究科内の実験装置を借り、遠藤徳孝助手 (現金沢大) および岡本佳子氏 (2005 年修卒) に協力頂いた。

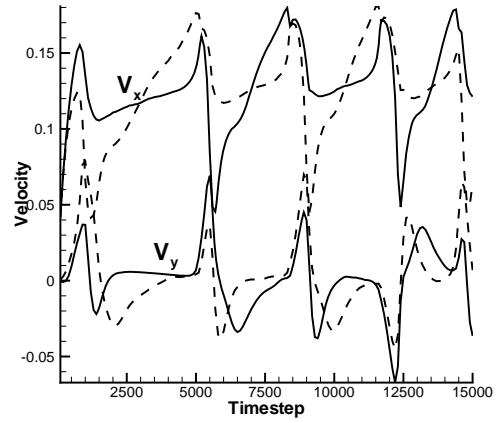
実験で用いた水槽は、深さ 80cm、幅 80cm、奥行き 10cm の鋼鉄製で、正面は透明なアクリル板でできているため、粒子群の沈降挙動を二次元的に観察することができる。今回の実験においては、水槽内に 2 枚の板を立てることで 10cm 四方の矩形ダクトを作り、その中に粒子を沈降



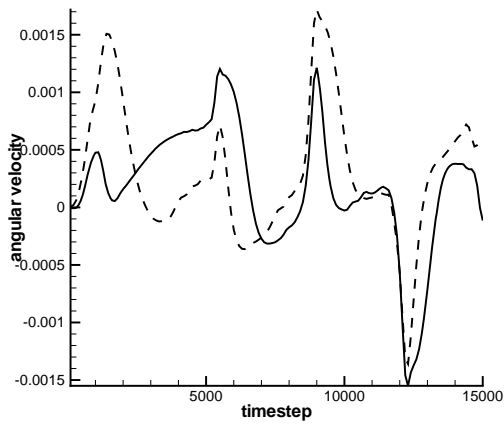
☒ 6.11 Snapshot of two particles settling.  $Re = 7.92$ .  $L = 8d$



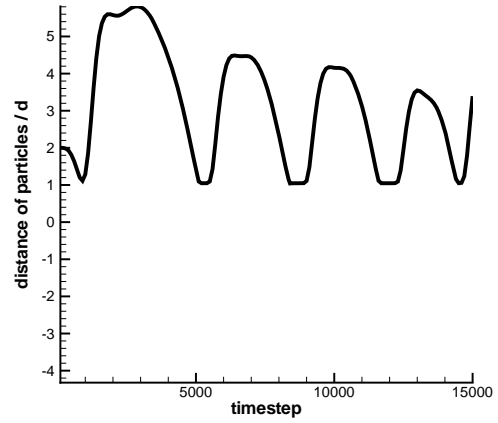
(a) trajectories



(b) velocity

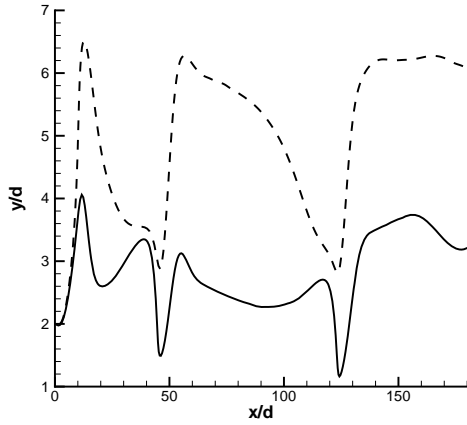


(c) angular velocity

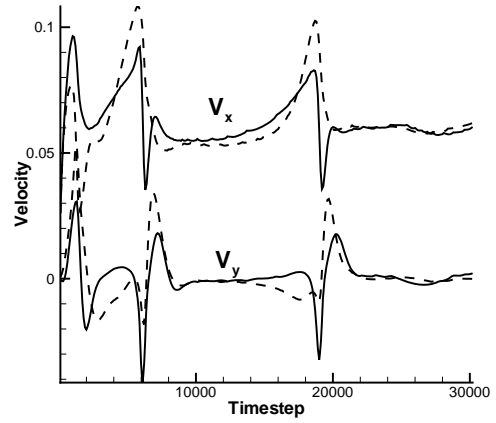


(d) distance between particles

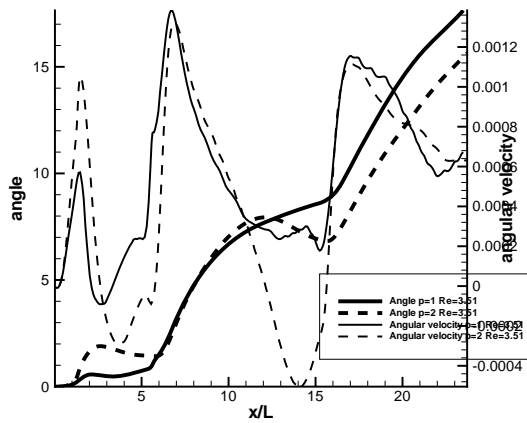
☒ 6.12  $L=8d$ .  $Re=7.92$ . Solid lines and dashed lines correspond to  $p1$  and  $p2$  in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter.



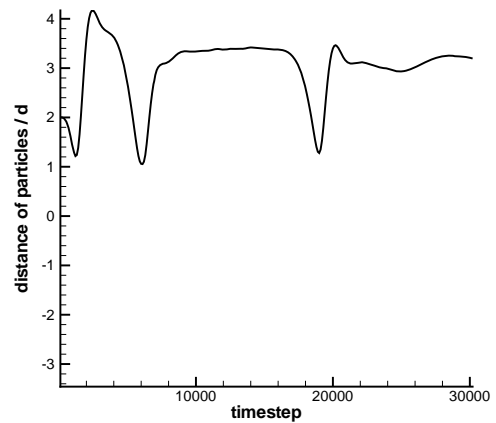
(a) trajectories



(b) velocity



(c) angular velocity



(d) distance between particles

⊠ 6.13  $L=8d$ .  $Re=3.51$ . Solid lines and dashed lines correspond to  $p_1$  and  $p_2$  in (a)trajectories, (b) velocity, and (c) angular velocity, respectively. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter.



図 6.14 Apparatus in this experiment.

させた (図 6.14)。水温 8 °C であったことから水の粘性係数および密度として、 $1.377 \times 10^{-3}$  PaS、 $0.9998 \text{g/cm}^3$  を用いた。沈降粒子は、密度  $1.0298 \text{g/cm}^3$ 、粒径は 6mm のプラスチック粒子である。粒子の沈降挙動は、水槽正面よりデジタルビデオカメラ (ソニー製、DCR-VX1000) を用いて、毎秒 30 コマで撮影した。

沈降開始時での粒子間距離はおよそ 3cm で、上方粒子を粒子 1、下方粒子を粒子 2 と定める。

### 6.3.2 実験結果

撮影された各画像ごとに、コンピュータ上で粒子位置をピックアップした。ピックアップした粒子位置を全てプロットしたものを図 6.15 に示す。図から明らかなように、粒子位置が小さく振動しており、ピックアップ精度はあまり高いとは言えない。そのため、移動平均をとることで平滑化を行った (図 6.15 実線)。さらに平滑化された座標に対して差分することで、粒子沈降速度とした。

図 6.16 に、撮影された粒子沈降のスナップショットを示す。先行して沈降する粒子 2 に、後方から追跡粒子 1 が追いついてきている ((a) ~ (e))。ついで、粒子 2 の周囲をよけるように下側に粒子 1 が回り込んだ (f) ~ (h)。その後二粒子は上下に離れた状態で沈降を続けた。

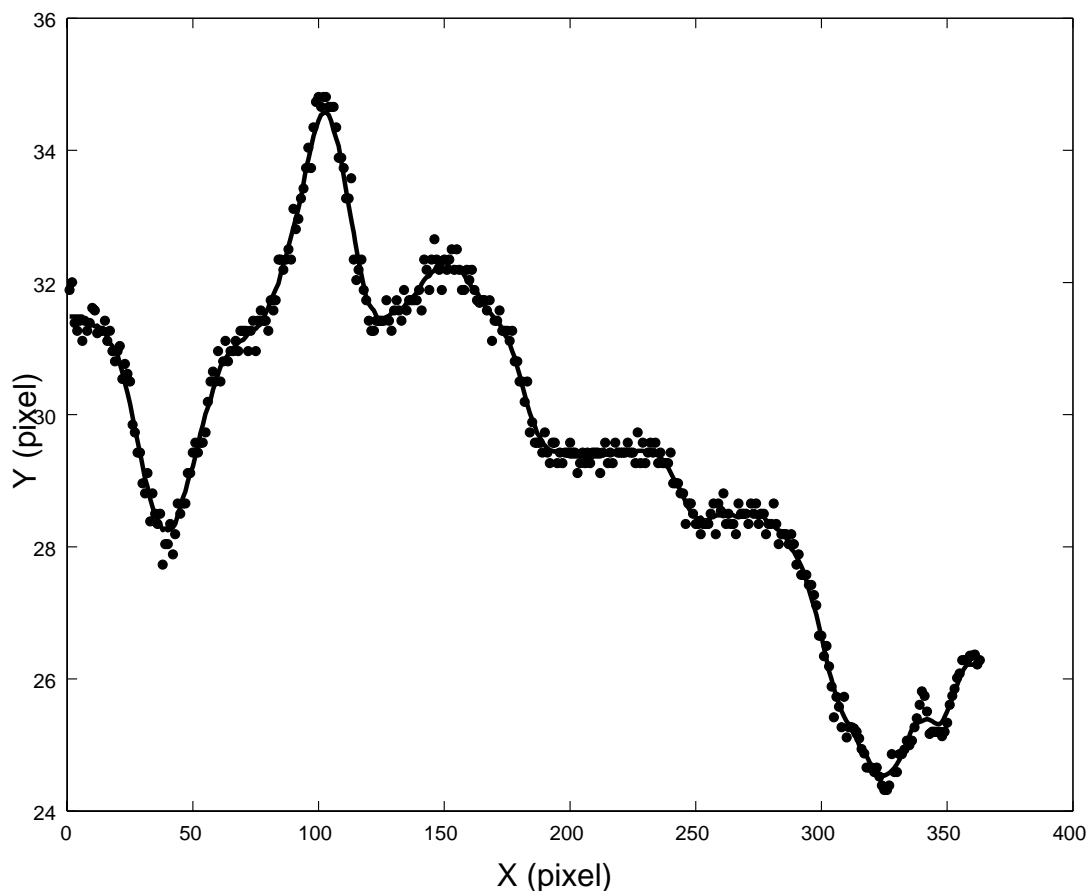


図 6.15 The location of a particle. The dots corresponds to picked up values and the solid line is estimated by the moving average of picked values. Both axes are pixels.

また図 6.17 に、ピックによって得られた (a) 沈降粒子の軌跡、(b) 粒子速度、および (d) 粒子間距離を示す。今回の実験においては、解像度の問題から、粒子の回転の成分を抽出することはできなかったため、(c) 角速度の記録はない。

今回の実験においては、DKT のサイクルは  $t=90$  付近における一度だけしか発生しなかった。しかしながら、二粒子は水平方向に並んで安定しているのではなく、上下に並んだ位置関係にあることから、この後先行粒子の後流の影響を受けて、DKT のサイクルを繰り返すことが予想される。今回の実験においては、水槽の大きさの問題から、一度だけの DKT 現象となったと言える。

また、沈降粒子の平均速度から求めた粒子レイノルズ数は、 $Re = 800$  であった。このため、今回の実験の結果はシミュレーションと比較する上では適切ではなかった。しかしながら、本実験において、沈降する粒子の軌道を抽出し、沈降速度および沈降挙動を取得することができた。このことから、シミュレーションにおけるパラメータスタディのために、本実験を用いることが可能であることがわかった。

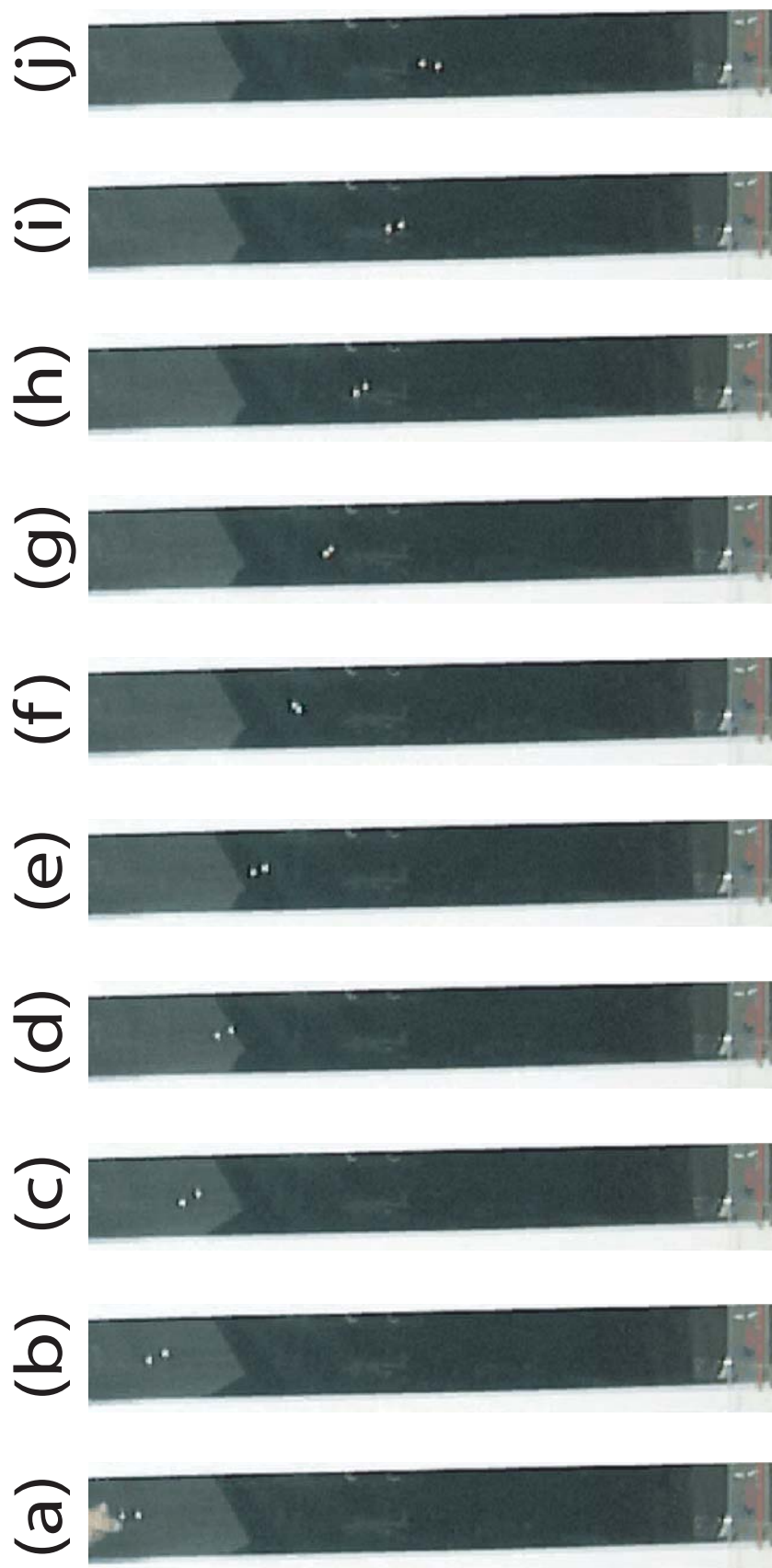
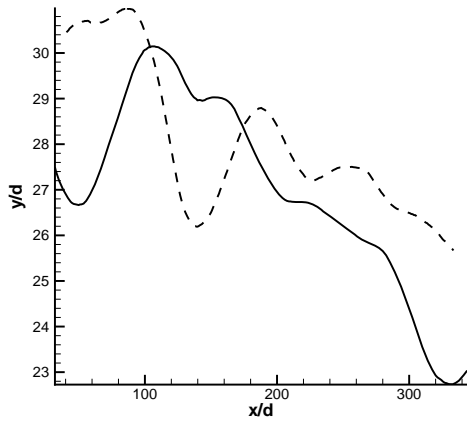
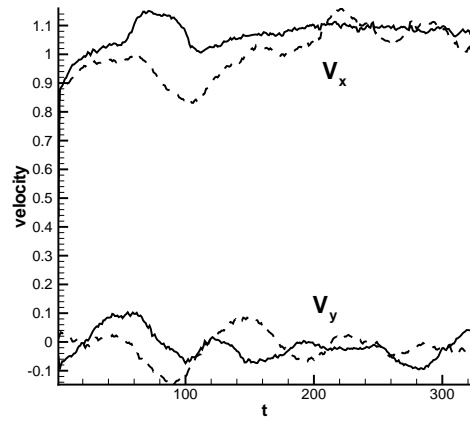


图 6.16 Snapshot of two particles settling in an experiment.

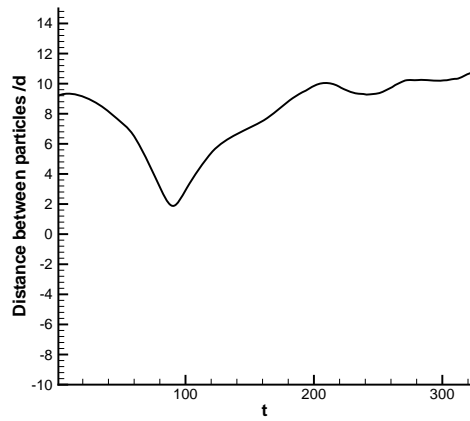




(a) trajectories



(b) velocity



(d) distance between particles

⊠ 6.17 Experimental results of particles settling. Solid lines and dashed lines correspond to p1 and p2 in (a)trajectories, (b) velocity, respectively. (c) angular velocity is not available. (d) Distance between particles normalized by a particle diameter.

### 6.3.3 実験のまとめ

水槽中に粒子を沈降させ、ハイスピードカメラで撮影した動画から、粒子運動を抽出し沈降速度、沈降軌跡などを求めることができた。この方法によって、粒子運動を捉えることができるので、コンピュータシミュレーションにおけるパラメータスタディに対するリファレンスデータと成り得ることを示した。

## 6.4 まとめ

第5章で提案した固液混相流シミュレータを用いて、水中の粒子沈降シミュレーションを行った。単一粒子沈降および二粒子沈降ともに、既存の研究結果と定性的によい一致を示し、固液混相流シミュレータの妥当性を示すことができた。しかしながら、絶対値としてはまだ誤差が発生していることから、さらなるパラメータスタディを行うことが必要である。その際に、本章で行ったような水槽実験はリファレンスデータとして有効であることが示された。

## 第7章 堆積物重力流シミュレーション

海底地すべりは、海底の堆積物が重力の作用により流下する現象である。その規模は数メートル程度のものから数百キロに渡るものまでである。この海底地すべりによって引き起こされる問題として、海底インフラストラクチャの破壊や海底地すべりによって誘発される津波災害、さらには、海底下のメタンハイドレートの分解による地球温暖化などが挙げられる。これらに対する対策を講じるため、海底地すべりの発生メカニズムや流動機構を明らかにすることが期待されている。しかしながら、海底地すべりは、深海底など原位置で観察することが困難である場所において発生することが多い。そこで、本章では、固液混相流シミュレータによる海底地すべりの再現シミュレーションを行い、特に堆積物重力流の流動形態について検討することを目的としている。

### 7.1 はじめに

海底地すべりは、近年ジオハザードの一つとして様々な観点から注目を浴びている。直接的な破壊対象としては海底インフラストラクチャが挙げられる。1929年に北米北大西洋岸のグランドバンクスで発生した地震によって、海底地すべりが誘発された。その地すべりは水中土石流として80km以上に渡って流下し、さらにその水中土石流から混濁流が生じ、1,000km以上流下した。海底ケーブルの切断も多数発生し、その記録から震央から約500km離れた地点においてもなお5 m/sの速さで流下し、海底ケーブルを切断するのに十分なエネルギーを有していたことがわかっている。また、誘発された津波は、ニューファンドランド島の海岸に達し、27人の死者が出ている (Piper et al., 1985, 1988)。

他の例としては、1969年の超大型ハリケーン「カミル」によってもたらされた降雨が引き金となって、ミシシッピデルタで発生した海底地すべりは、沖合にある石油掘削プラットフォームを多数破壊している (Bea et al., 1983)。また、甚大な被害をもたらすことのある津波の発生原因としても、海底地すべりが注目されている (Locat et al., 2001; Tappin et al., 2001; Lee et al., 2003)。さらに、海水準の変動など温度圧力条件が変化することで、ハイドレートの安定条件が崩れることにより、ガスハイドレートが分解し斜面が不安定となることも、海底地すべりの発生原因として挙げられる (Kennett et al., 2000)。この際に、大量のメタンガスが海中および大気へ放出されることから、地球温暖化を促進する要素としても注目されている。

#### 7.1.1 海底地すべりの発生から堆積まで

海底地すべりを引き起こす要因となるものとして、弱面の存在 (未固結堆積岩層、断層など)、地形的要因 (急傾斜など)、震動 (地震、火山活動など)、間隙水圧の変動、ハイドレート層分解に伴う斜面の不安定化、降雨および大洪水 (台風やハリケーンなど) など多くが挙げられる (Locat and Lee, 2002)。例えば、浅海デルタが海底盆へと続く斜面上部に発達している場合は、デルタ前縁において上方粗粒化の堆積相があるとき上下の密度の逆転から重力不安定現象がおきる。また場

所によっては、巨大地震などもトリガーとなり堆積物が液状化を起こし地すべりを発生させる。

すべり出した堆積物の底部に海水が取り込まれ高圧水となってトラップされる。この高圧水が、拡散する過程において地すべり体のさらなる液状化が進む。この流れ出した堆積物重力流の特徴は最初、堆積物同士が支保しあい水中土石流の形態をとるが、周囲の水を取り込んで液状化・流動化が進み、混濁流となることが多い。混濁流となった流れは、より遠方まで流下することが知られている。さらに水中土石流や混濁流が複合的に混ざり合った堆積物重力流によって、堆積物が運搬され深海底などに再堆積して、海底扇状地や海底チャネルを形成する。これらの堆積相はタービダイトとして多様な形態を示すが、これは堆積物重力流の流動形態の多様性によるものと考えている(平, 1985; Naruse et al., 2007)。

### 7.1.2 本シミュレーションの位置づけ

これまでの海底地すべり研究として、堆積物に残された記録から流れの情報を推定することが盛んに行われているが、堆積物を混濁流堆積物と土石流堆積物に区別することですら困難である。また、現世で起こっている海底地すべりのプロセスを直接観測することも困難である(Xu et al., 2004)。堆積物重力流の特性を捉えるためには、水路実験も多く実施されているが装置の大型化は避けがたく、再現性さらに流れの内部情報の定量的評価は容易ではない。これらのことから、コンピュータシミュレーションは非常に有効な手段であると言える。そこで本研究では、海底地すべりから発生する堆積物重力流を第5章で開発した混相流シミュレータにより再現し、実験や原位置計測では得ることが困難な流動中の特性について整理することを目的としている。

今回の研究では、斜面および平面上を流下する堆積物重力流の流動形態や、その内部構造を観察することに主眼が置かれているため、海底地すべりの発生過程については考慮していない。ここでは、粒子群を斜面上方より重力による自然落下させることで、堆積物重力流を作り出すことにした。斜面上に落下した粒子群は、ヘッド部とボディ部を形成しながら斜面上を流下し、そして平面部に到達して減速し、その流動を停止する。その一連の過程をシミュレーションし、堆積物重力流の流動特性について考察を加える。

## 7.2 モデルの設定

四方が固定壁に囲まれた静水中で、斜面上を流下する粒子群の流動シミュレーションを行った。図7.1に、本計算モデルの概略図を示す。正規分布である粒径分布をもつ粒子群(913個)を生成した。このとき、平均粒径 $d$ に対し、最小粒径は $0.6d$ 、最大粒径は $1.4d$ とした。また固定壁に囲まれた静水領域の大きさは、長さは $L = 375d$ で、深さ $50d$ とした。また領域内の斜面の長さは $L/3$ で、傾きは約 $7.6^\circ$ である。鉛直方向下向きに重力 $g$ がかかっている。図7.1にあるように、斜面上方より粒子群を落下させた。なお、比較検討のために、傾斜角 $8.5^\circ$ および $6.2^\circ$ のモデル、粒径分布の異なるモデルとして全粒子が等粒径のモデルについてもシミュレーションを行った。

## 7.3 シミュレーション結果

以下に本シミュレーション結果について考察する。ここでは、以下の4項目についてそれぞれタイムステップを追って検討する。1) 流体流動形態の変動と粒子群の巨視的構造変化、2) ヘッド部の構造変化、3) 巨視的速度、4) 粒子群の内部速度である。

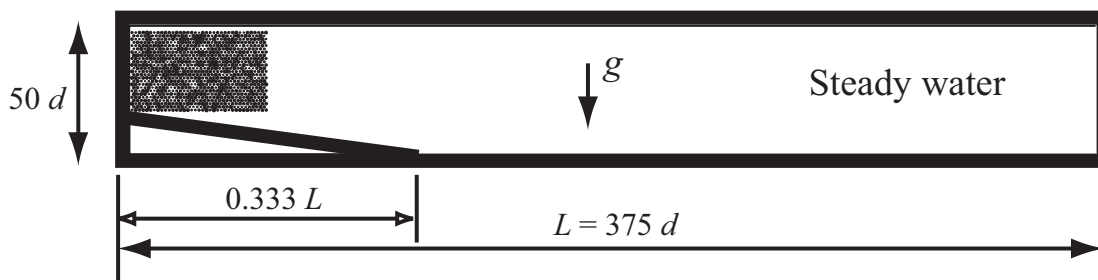


図 7.1 Model settings for particles sedimentation simulation. All four boundaries are rigid walls, and the inside steady water contains.

### 7.3.1 流体流動形態の変動と粒子群の巨視的構造変化

図 7.2～7.4 に、各 500 ステップ毎のスナップショットを示す。色付けされた円が粒子であり、粒子の色は粒子の移動速度を 5 段階に分けて表したものである。速い方から、赤、ピンク、黄色、緑、青の順である。ここでは、粒子群形態の変化から時間ごとに 4 つに分類し、それぞれ検討した。

#### 沈降開始直後 (~ 2,000 ステップ)

図 7.5 に、500～2,000 ステップにおけるスナップショットの拡大図を示す。図中の矢印は、各点における流体速度をベクトル表示したものである。

このステップにおいて粒子群は、その自重によって沈降し斜面と衝突しながら、斜面を流下する構造を形成している。まず、沈降開始直後、右下部が斜面に沿うように伸長し、同時に右上部が左方への圧縮を受け、全体として台形状の形状を形成しつつ沈降している。これは、粒子群直下にある流体が、粒子群の沈降によって右側へ押し出されることによって、粒子群の右側において上昇流が発生しているからである。この上昇流が粒子群右上部に流入し、粒子群を押し込むような動作をしている。また同時に、粒子群の中心付近より左側においても、上昇流が複数見られる。これは、粒子群の下方にあった流体が、粒子群の沈降によって行き場のなくなったために、粒子群の内部を通して外側へ逃げ出そうとすることによる。上昇流の発生する位置は、比較的周囲よりも空隙が大きかった箇所に集中しており、元の粒子配置などによる影響が強く表れていると考えられる。またこの上昇流が存在する位置では、粒子の沈降速度が低下するために、粒子間距離が比較的広がっていることが観察される。これによって、2,000 ステップなどにおける流下する沈降粒子群内に、粒子の粗密が発生していることが説明できる。

#### 斜面上流下 (2,000～5,000 ステップ)

2,000 ステップ以降、粒子群は斜面上を流下するようになる。このとき粒子群の先端が徐々に盛り上がっていく様子が観察される。ここではこの盛り上がった部分をヘッド、その後方をボディと呼ぶ。このステップにおいては、ヘッドとボディが明瞭に分けられるようになり、また、流下が進むにつれてヘッド部が次第に大きくなっていることがわかる。ヘッド部の上部および前面

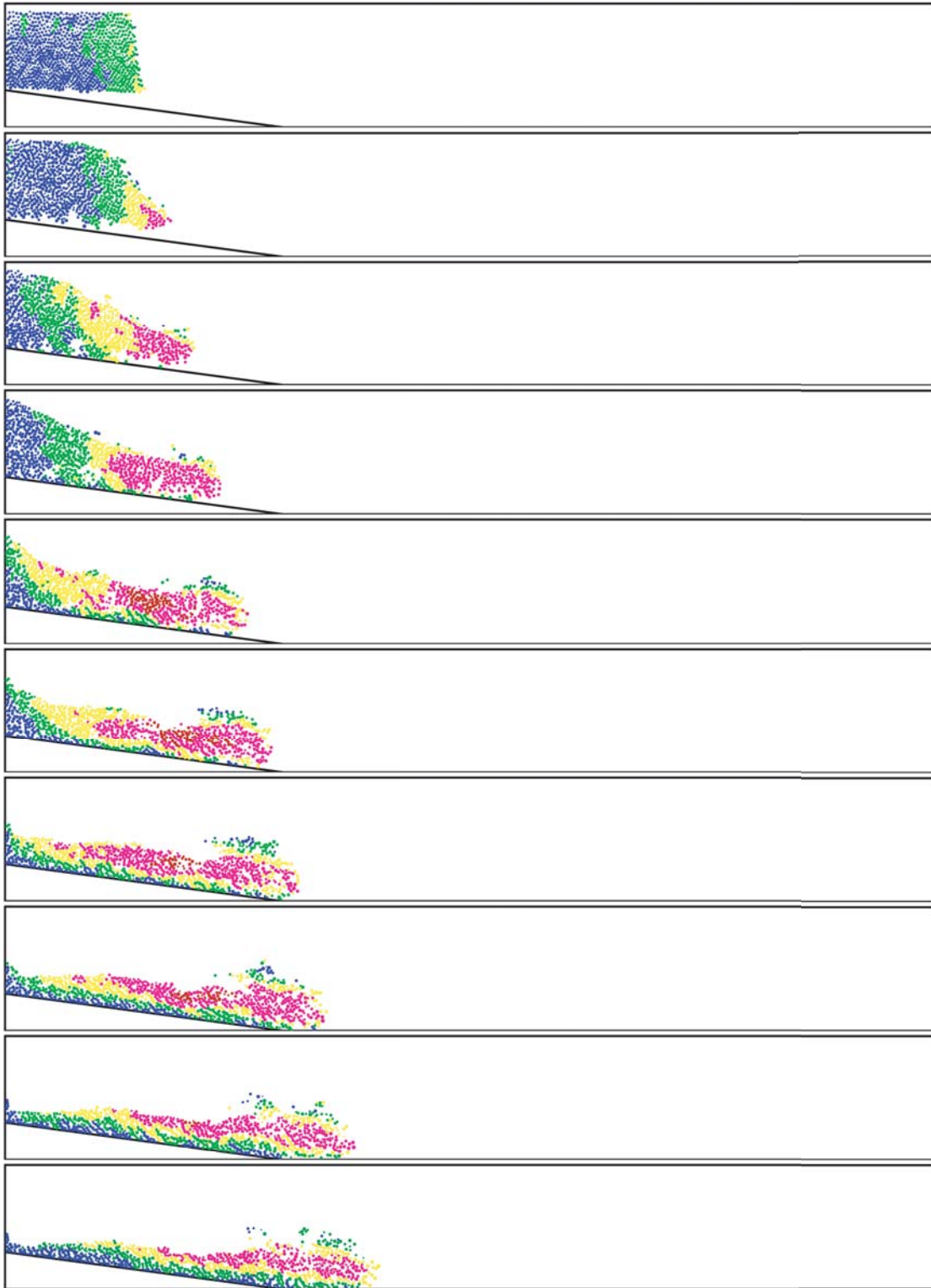


图 7.2 Snapshots during the acceleration period from 500 to 5,000 timesteps with 500 steps intervals. The particles color corresponds to particle velocities.

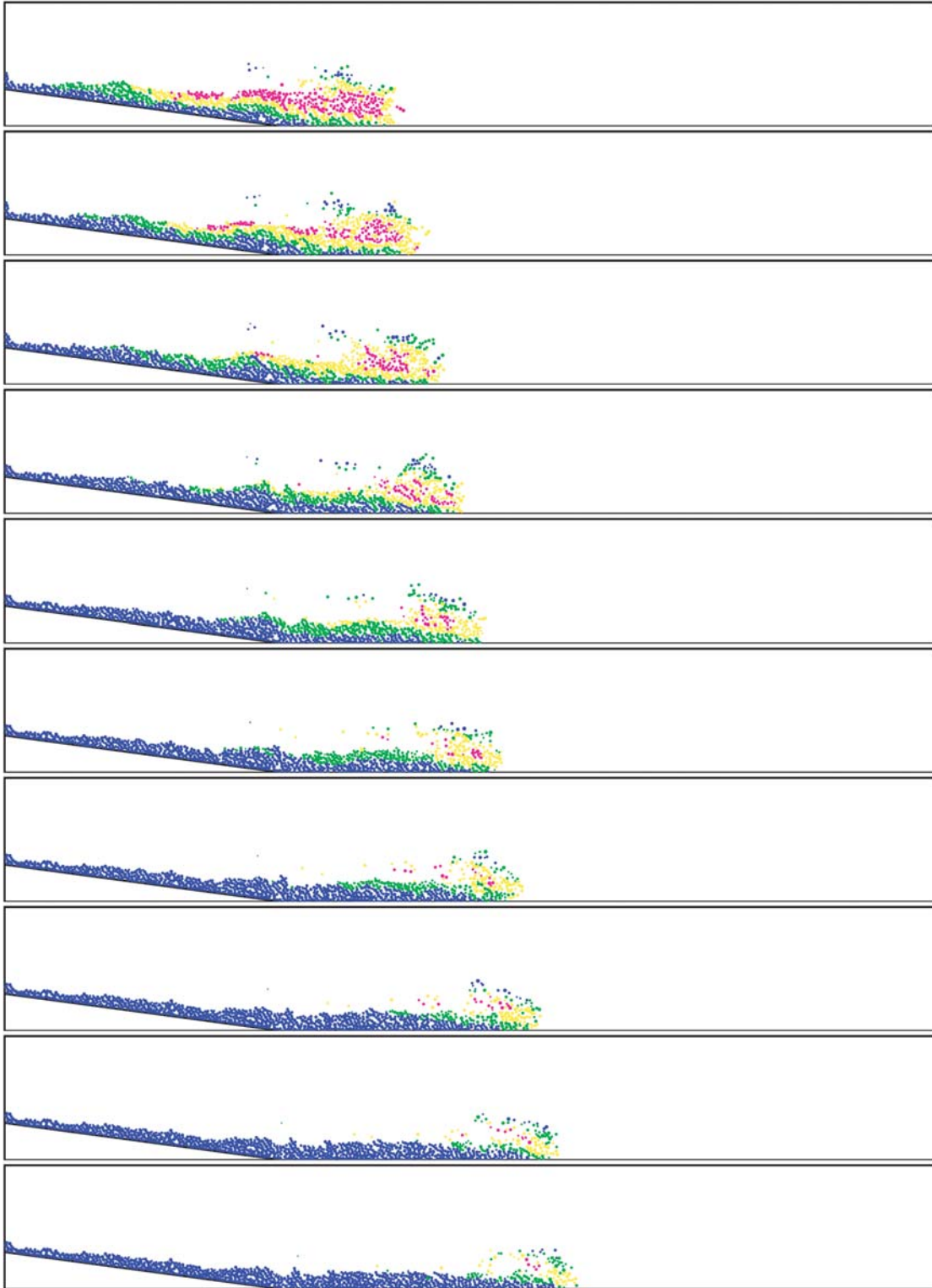


图 7.3 Snapshots during the deceleration period from 5,500 to 10,000 timesteps with 500 steps intervals. The particles color corresponds to particle velocities.

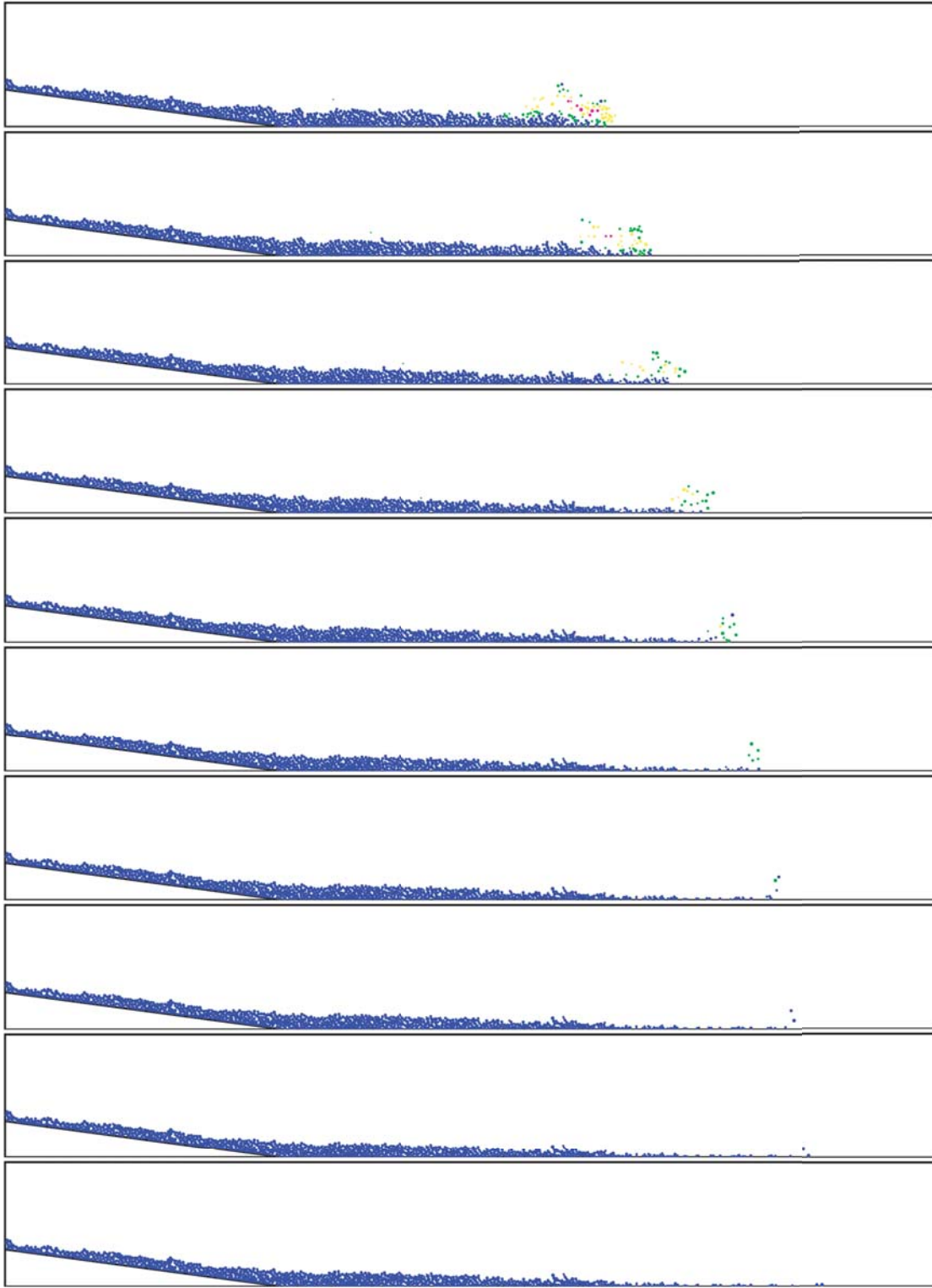
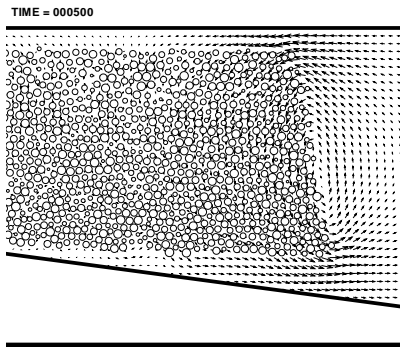
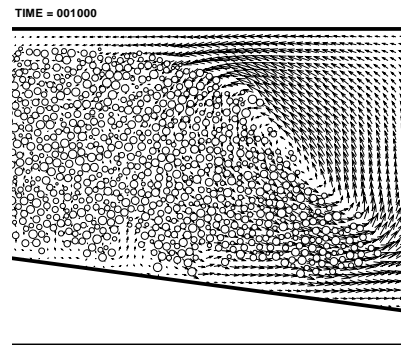


图 7.4 Snapshots during the stationary period from 11,000 to 20,000 timesteps with 1000 steps intervals. The particles color corresponds to particle velocities.

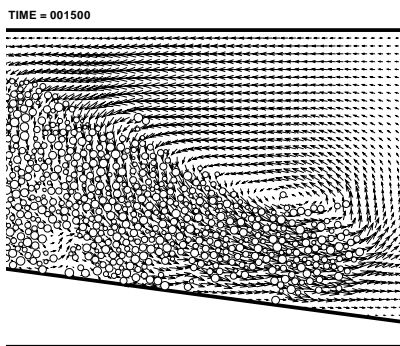




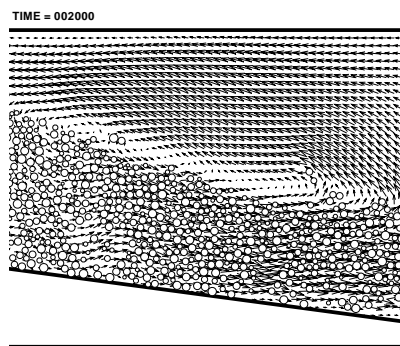
(a)  $t=500$



(b)  $t=1,000$



(c)  $t=1,500$



(d)  $t=2,000$

☒ 7.5 Snapshots from 500 to 2,000 steps with fluid flow vectors.

にある粒子は流体の抵抗を受けて、ヘッドを回り込むようにして反時計回りに回転しながら運動している。巨視的にみると、ヘッド部全体が半時計回りに回転しているように見える。

またボディ部では、速度差の生じている面(すべり面)が形成されているのが観察される。このすべり面の傾斜は、ステップが進むにつれてなだらかになり、4,000～では斜面より1～2°傾いた面となっている。ボディ部ではこの面に沿うようにして粒子が流動している様子がわかる。このすべり面は、ヘッド部の下部にまで連続している。このステップにおけるヘッド部下部のすべり面角度は約7～9°で、ボディ部のすべり面傾斜角とほぼ変わらない。

さらに、3,000～4,500ステップにおいては、ヘッド後方のボディとの境目において、ボディにくびれのような構造が見られる。これは、まさにその上部にある流体渦による影響である。このヘッド後方および上部にある渦は、半時計方向に回転しているために、渦の左端側では下降流となる。このため、該当位置において粒子群が下方に押される力が働き、このような構造ができているものと考えられる。また、同様に、斜面の左端付近にもわずかながら凹凸が見られる。これも流体中に見られる渦の影響であると考えられる。このように、渦の左端にへこみができることから、逆に見れば、堆積物中みられる鞍状構造の後部に流体渦の存在が考えられる。

#### 平面上流動 (5,000～12,000 ステップ)

ヘッド部が平面上に到達した後も、ヘッドとボディを維持しつつ流動している。上記の斜面上流下時と同様に、ヘッド部は半時計回りに回転しながら流動している。しかしながら、時間が進むにつれてヘッド部が徐々に小さくなっていることが観察される(図7.3)。ヘッド部の下部付近にできるすべり面は10°以上となり、比較的急傾斜となっている。これは、斜面上を流下するときに比べヘッドの速度が低下したことによると考えられる。ボディ部のすべり面角度は平面上においては、0～3°程度であり、ほぼ水平面と平行のすべり面となっている。ステップが進むにつれて、ボディ部のすべり面はなくなり、ヘッド部のみすべり面が見られるようになる。

さらに堆積したボディ部には、わずかながら凹凸が存在している。これは、上記斜面上流下時と同様に流体が作り出す渦の影響でできたものである。しかしながら、堆積した粒子群に沿う流れが強いために、その凹凸は小さくなっている。

#### 平面上流動 (12,000～ステップ)

このステップ(図7.4)では、ヘッド部と呼ばれるほどの塊は存在せず、またボディ部はほとんど変位していない。これまでの流動によって作られた流体流動に乗って、浮遊する粒子がさらに遠方へ運ばれているステップである。ボディ部は、上述の流体流動にならされて、ほぼなだらかな形状になっている。このステップでは、すべり面も存在しない。

### 7.3.2 ヘッドの構造変化

図7.6に、ヘッド部のみの拡大図を示す。粒子から伸びる矢印は、各粒子の速度をベクトル表示したものである。長さはその速さに対応している。図中の実線や点線は、特定の粒子の位置をステップを追って見やすくするためのものである。

2,000ステップ以降、流動粒子群の先端において盛り上がりが発生し、「ヘッド」を形成するようになる。ヘッド右上部の粒子は、流体の抵抗力を受けて、反時計回りに回転するようにして、ヘッド上部から後方へと剥ぎ取られる。例えば、図7.6中において、実線で囲まれた粒子群がそれ

にあたる。最先端部にある粒子群は、徐々に上方へ移動していき、ヘッド上部を回り込むようにしてヘッドの後方へと到達する。その後また、ヘッド内部へ侵入している。

次にヘッド先端の底部では、斜面や平面と接触した粒子が急激に速度低下するため、その後方の粒子がそれらを乗り越えるようにして前方に押し出される動きをする。乗り越えた粒子もまた斜面などに接触し減速する。これらを繰り返して、流動粒子群の下部付近では粒子が堆積している。図 7.6 において、点線で囲まれた箇所が、この動きをする粒子群である。この乗り越えて堆積するという動きをするために、ヘッド先端部においては、比較的高傾斜のすべり面が見られる。

### 7.3.3 粒子群の巨視的速度

粒子群の巨視的運動を検討するために、二種の方法を定義した。つまり、粒子群全体の重心位置の移動速度として「重心速度」と、流動粒子群の先端部の移動速度として「先端速度」である。これらを横軸時間、縦軸速度としてプロットしたものが、図 7.7 である。図中実線が先端速度、破線が重心速度である。

先端速度を見てみると、沈降開始後すぐに約 0.16 になった後、6,000 ステップ頃までほぼ一定の値を保っている。この間粒子群は、斜面上を流下しており、かつヘッドが徐々に大きくなっていることから、ボディ部からの粒子群の供給が十分にあることが、先端速度が減速することなく一定の値を保つ主因であると考えられる。

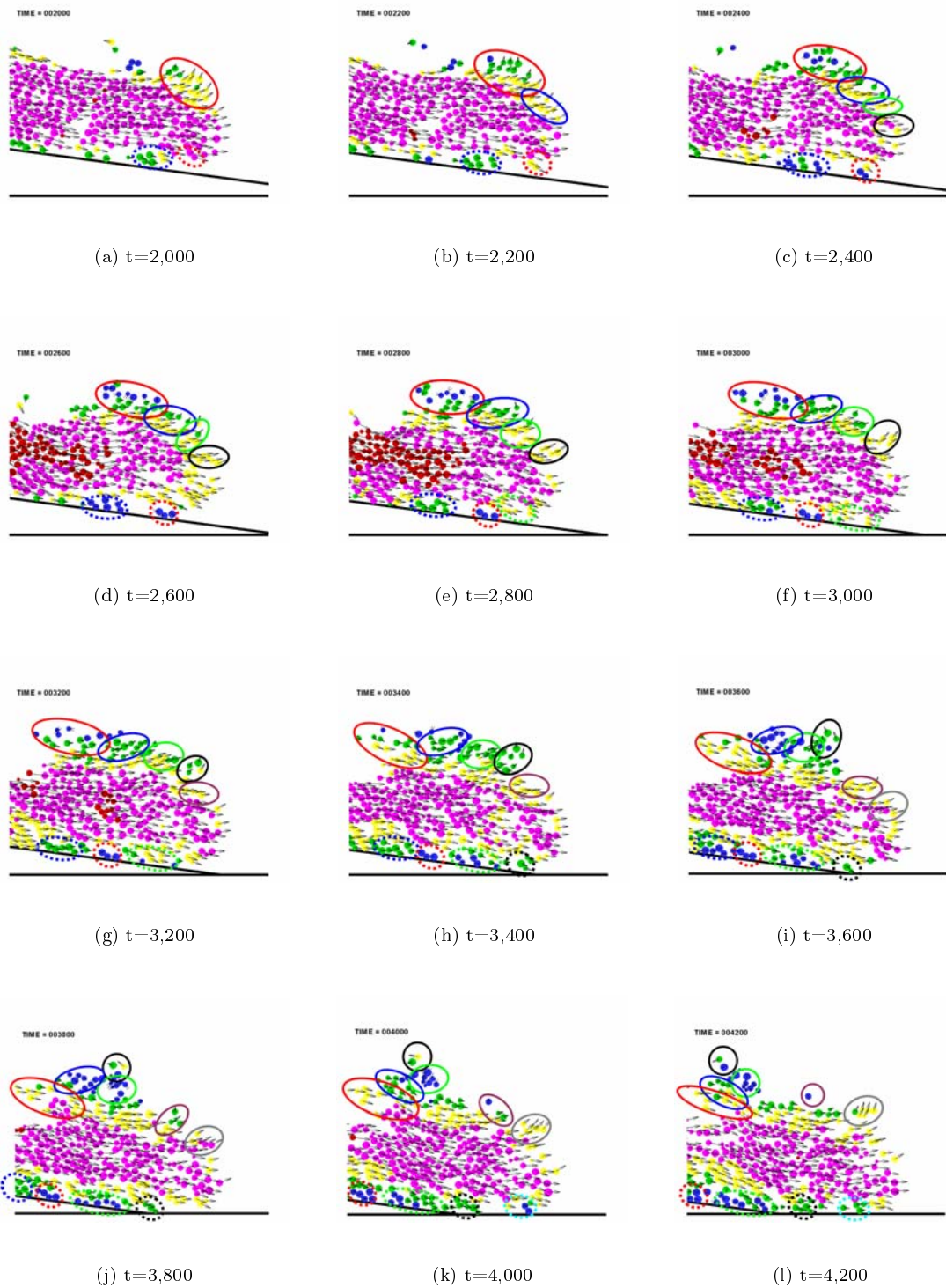
次に、6,000 ステップにおいて速度低下した後は、12,000 ステップ頃まで約 0.125 付近で再び一定となる。この区間では、粒子群は平面上を流動し、ヘッド部は徐々に小さくなりながらも十分な大きさを保持している。このため、先端速度は斜面上を流下するときと比べると低下するが、ある一定の値を保つことができると考えられる。しかし、この区間において、重心速度は急激に減少していることから、ヘッドへのボディからの粒子供給が為されていないことを示している。これによって、流動が進むにつれてヘッドは小さくなっていき、最終的にはヘッドとしての形状を保つことができなくなる。

12,000 ステップ以降では、重心位置の移動量はほとんどなく、小さくなったヘッド部の移動のみ起きている。この区間において、粒子は流体からの抵抗を強く受け急速に速度低下を発生させている。

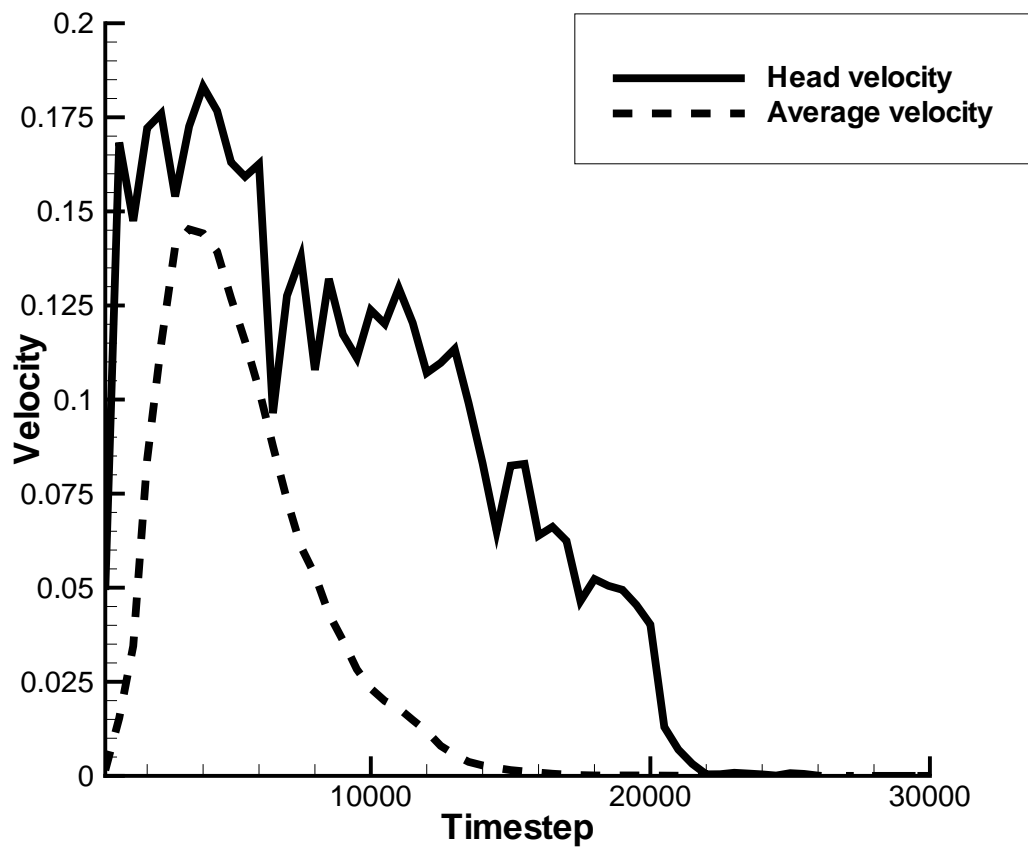
これらをまとめると、斜面を流下するときには、粒子群の先端はある速度  $V_1$  で流下し、平面部に到達後は  $V_2 (< V_1)$  で流動するようになる。その後、ヘッド部が十分小さくなるまでは  $V_2$  で流動した後、直線的に速度を減少させ流動が終了する。このような傾向は、斜面の傾斜角や粒子の粒径分布が変わっても同様であった (図 7.8 ~ 7.10 参照)。図 7.8 および 7.9 は、本モデルと粒径分布などは同一で、斜面傾斜角のみ異なる ( $8.5^\circ$  および  $6.2^\circ$ ) モデル、図 7.10 は、斜面傾斜は同一で粒子径が等粒径となるモデルの、それぞれの速度プロファイルである。

### 7.3.4 粒子群内部速度

流動する粒子群内部における個々の粒子速度を抽出することで、粒子流動の構造変化について検討を加えた。任意のタイムステップにおいて、例えば図 7.11 にあるように、7本の直線上の粒子速度を抽出した。抽出位置として、先端から等間隔に5箇所 [(a)~(e)]、そこから先では2倍の間隔をとって2箇所 [(f),(g)] 設定した。図 7.12 ~ 7.19 に、各タイムステップにおける抽出した粒子の速度プロファイルを示す。横軸に粒子速度、縦軸に該当粒子の  $y$  座標をとっている。各図



☒ 7.6 Snapshots at the flow head.



☒ 7.7 Velocity profiles through the whole period. The slope angle is  $7.6^\circ$ . The solid line corresponds to the average velocity of all particles. The dashed line corresponds to the head velocity.

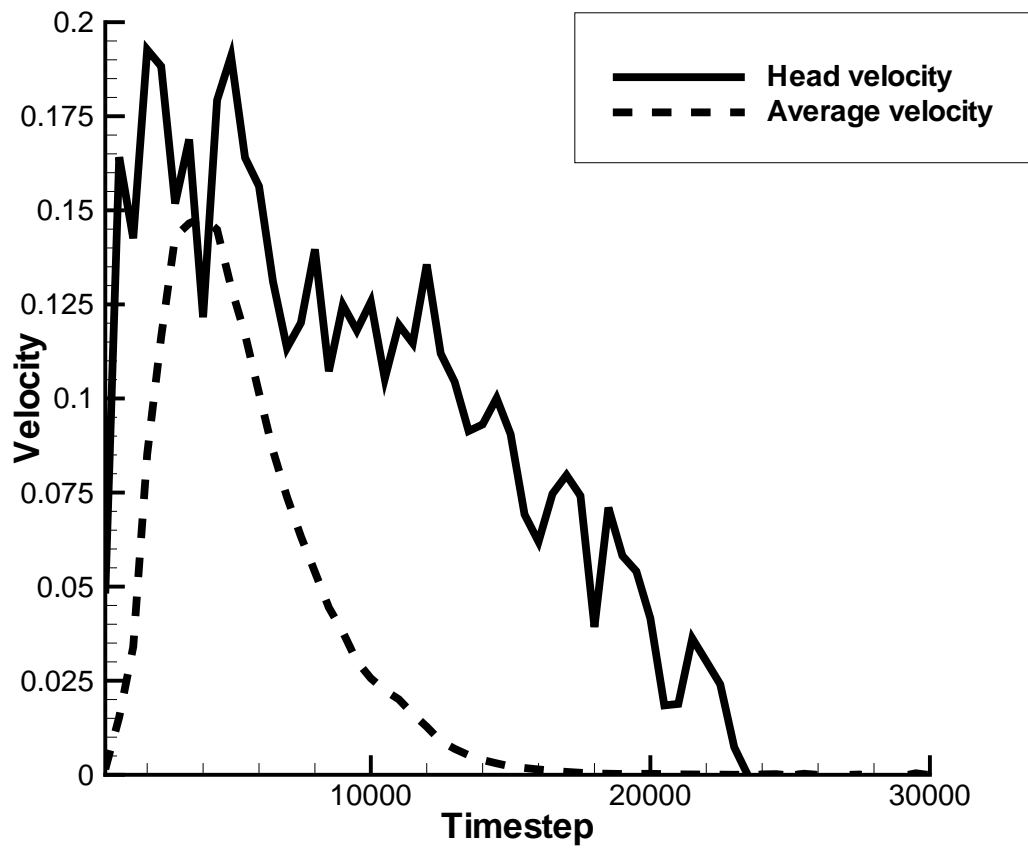
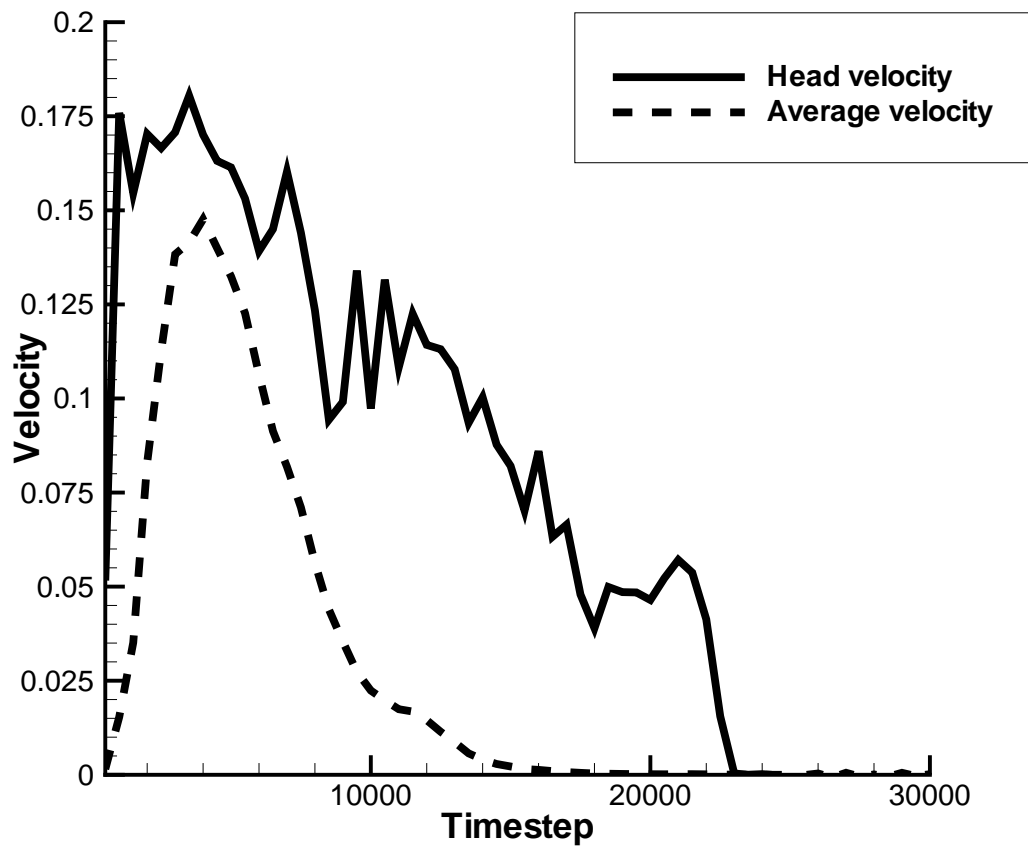


Figure 7.8 Velocity profiles through the whole period. The slope angle is  $8.5^\circ$ . The grain size distribution is the same as that in the model with the  $7.6^\circ$  slope angle.



⊗ 7.9 Velocity profiles through the whole period. The slope angle is  $6.2^\circ$ . The grain size distribution is the same as that in the model with the  $7.6^\circ$  slope angle.

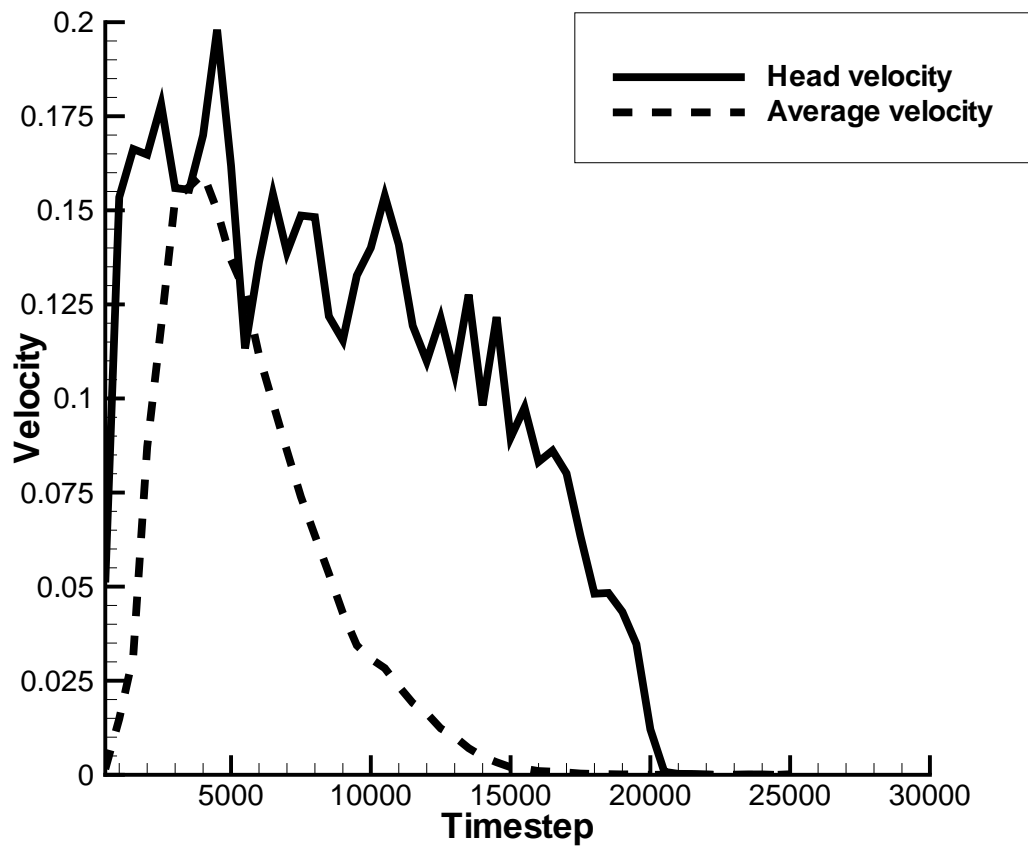


Figure 7.10 Velocity profiles through the whole period. The slope angle is  $7.6^\circ$ , and the grain is equigranular.



の左図はボディ部に該当する位置の速度プロファイル、右図はヘッド部にあたる位置の速度プロファイルを示す。

各図左図のボディ部において、各グラフは概ね右肩上がりの傾向を示している。つまり、各位置において底部に近いほど移動速度が遅く、上面に近いほど速いことを表している。これは、粘性流体流動における固定壁境界からの速度乖離層に相当していると考えることができる。つまり、ここでの固体粒子の流動は、周囲の流体も取り込み、巨視的には粘性の高い粘性流体であると言える。それに対し、ヘッド部 (各図右図) では、各グラフは弧状になっている。弧状となる下側の速度勾配は、ボディ部と同様に固体壁面によるものである。上側の速度勾配は、流体抵抗によってヘッド上部がはぎ取られるような運動をすることによる。

今回各ステップにおける速度抽出位置は、先端からの距離を固定しているため、ヘッド部およびボディ部における抽出本数に差が出ている。3,000~5,000 ステップにおいては、粒子群は斜面上を流下しこの間ヘッドは長くなっている。そのため、グラフの本数も増加している。その後、タイムステップが進むにつれてヘッドは小さくなるため、グラフの本数も減少していき、9,000 ステップでは一本のみがヘッドの形である弧状のグラフとなっている。その後、12,000 ステップを過ぎた辺りからは、ヘッドにあたる弧状の速度プロファイルになる箇所がなくなる。このように、粒子群の速度プロファイルからも、ヘッド部とボディ部を見分けることができる。

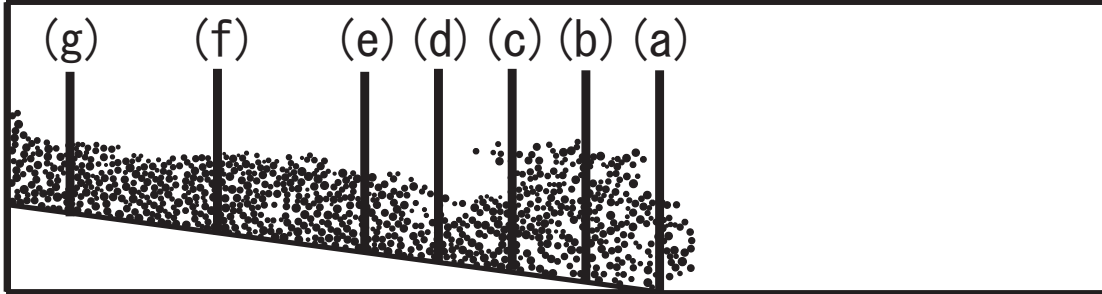
次に、具体的な速度の値を見てみると、例えば 4,000 ステップ (斜面上) においては、粒子の最大速度は、図 7.13 から読み取れるように、約 0.28 ほどであり、図 7.13(b) における速度プロファイル (d) および (e) 中に見られる。つまり、ヘッド部ではなくそのすぐ後方のボディ部上部に最大速度点があることがわかる。

また、ヘッド部 (図 7.13(a)) を見てみると、最先端部プロファイル (a) よりもそれよりも後方に当たるプロファイル (b) および (c) の方が概ね高速であることがわかる。これは、ヘッドの最先端部ではその前方にある流体による抵抗力が強く、逆にヘッドの内部や、ヘッドの後方に当たるボディ部では粒子の流動とともにその周囲の流体も一緒に流動することから、流体からの抵抗力をほとんど受けていないからである。これにより、ボディ部からヘッド部への粒子の供給が続くため、ヘッド部の大きさが大きくなる。また、ヘッドの先端部を見てみると、最先端部にある粒子のうち底部付近にある粒子は、斜面と接触することで急激に減速し、それより上部にある粒子は流体に抵抗力によって減速、上方へ巻き上げられる運動をする。そして、その後方にあるヘッド内部の粒子がそれら最先端部の粒子を追い越すことで、最先端部粒子となる。このように、最先端部の粒子は常に入れ替わりを続けており、巨視的に見るとほぼ一定の速度 (約 0.16) を保つことになる。

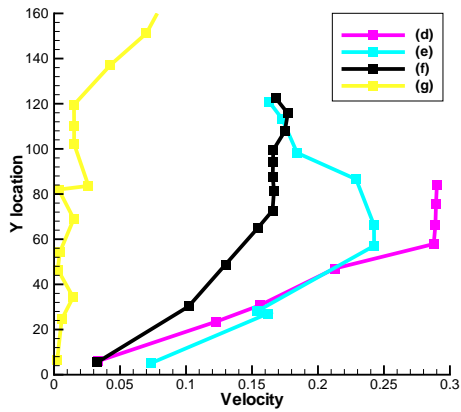
次に、8,000 ステップにおける速度プロファイル (図 7.17) を見てみると、ヘッド部に該当する粒子速度がボディ部に該当する粒子速度よりも速くなっているのがわかる。つまり、ヘッドに対してボディ部からの粒子の供給は行われないため、ヘッドが次第に小さくなっていくことを示している。しかし、ヘッドが形態を保つ間では、最先端部への粒子供給が行われるため、巨視的にはほぼ一定の速度 (約 0.125) を保つことができる。

### 7.3.5 シミュレーション結果のまとめ

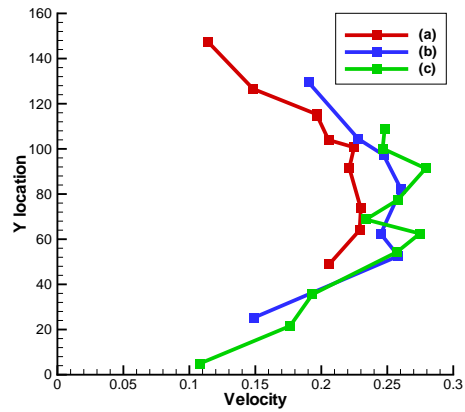
格子ボルツマン法と個別要素法の連成解析手法を用いて、堆積物重力流再現シミュレーションを行った。斜面上を流下する粒子群は、その先端部が盛り上がりヘッドを形成しながら流下した。ヘッド内部の流速は、ヘッド先端部よりも高速であることが確認された。また、流動する際に



⊠ 7.11 7 locations where the flow velocities are examined. First five lines, (a) to (e), have the same intervals and the other two lines, (f) and (g), have twice intervals.

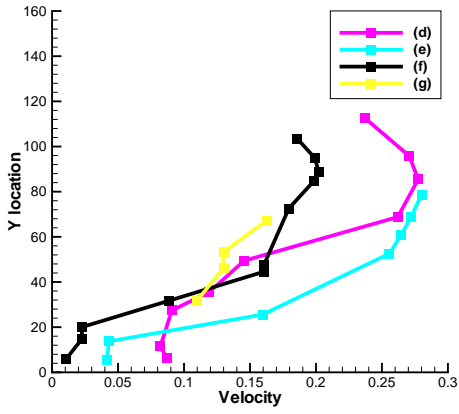


(a) body part

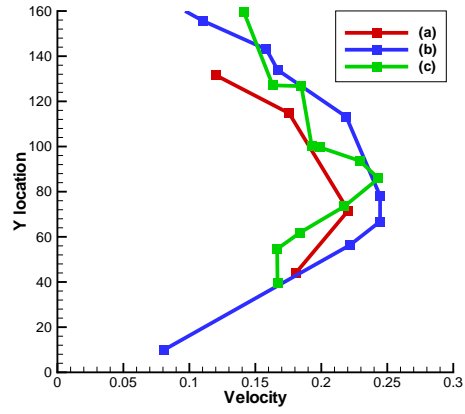


(b) head part

⊠ 7.12 Particle velocities along 7 lines at 3,000 timesteps.

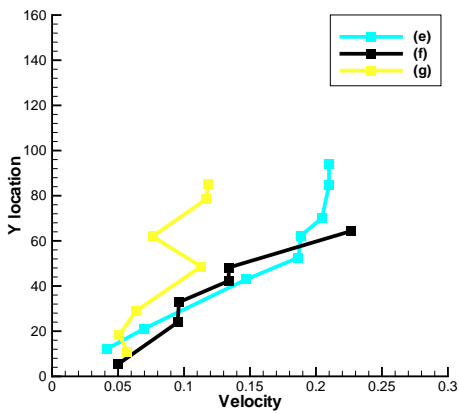


(a) body part

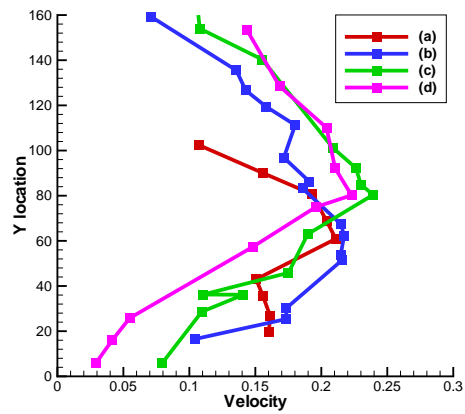


(b) head part

☒ 7.13 Particle velocities along 7 lines at 4,000 timesteps.

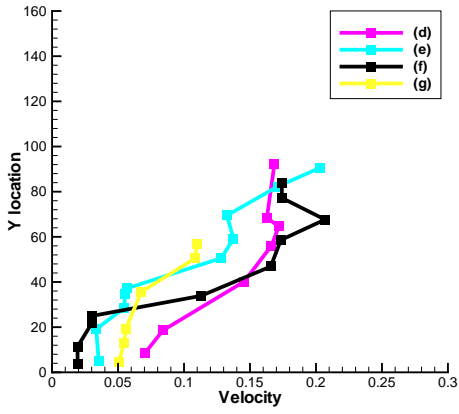


(a) body part

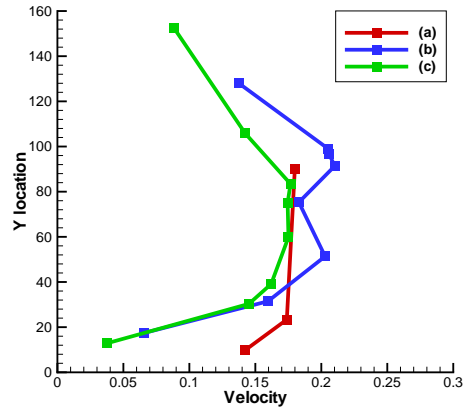


(b) head part

☒ 7.14 Particle velocities along 7 lines at 5,000 timesteps.

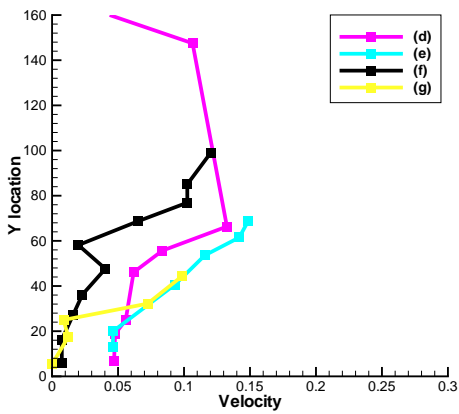


(a) body part

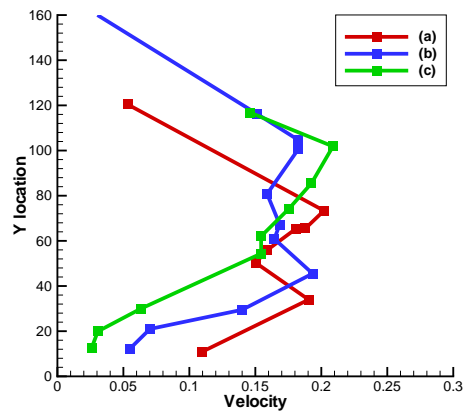


(b) head part

☒ 7.15 Particle velocities along 7 lines at 6,000 timesteps.

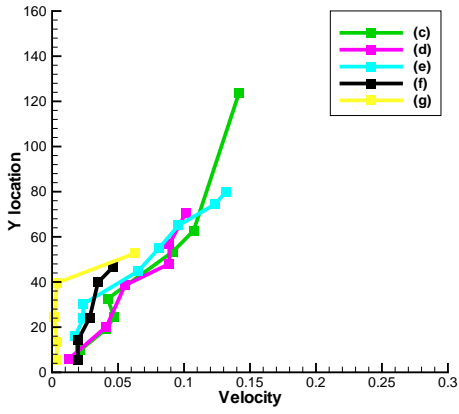


(a) body part

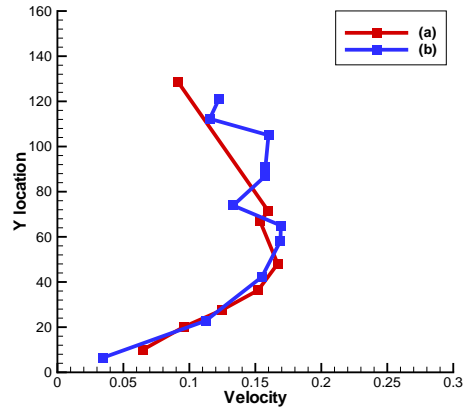


(b) head part

☒ 7.16 Particle velocities along 7 lines at 7,000 timesteps.

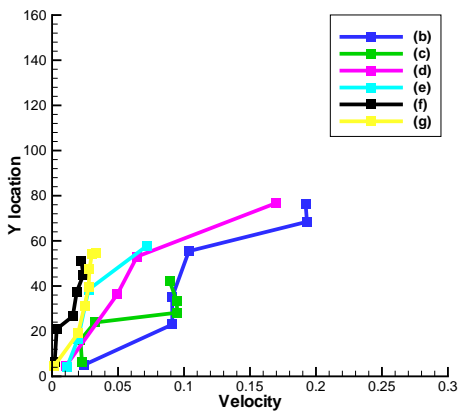


(a) body part

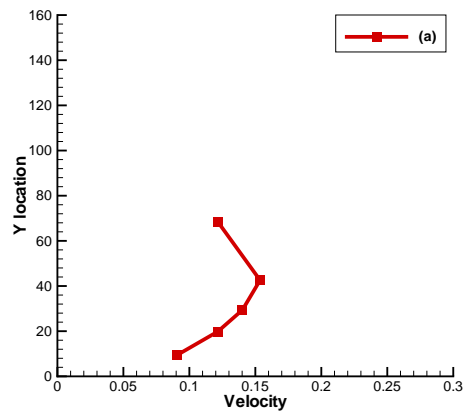


(b) head part

☒ 7.17 Particle velocities along 7 lines at 8,000 timesteps.



(a) body part



(b) head part

☒ 7.18 Particle velocities along 7 lines at 9,000 timesteps.

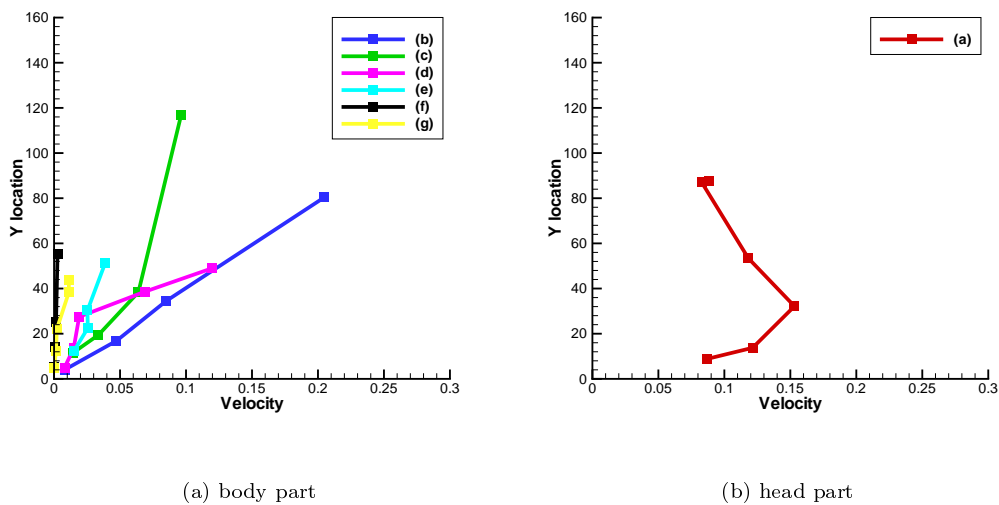


図 7.19 Particle velocities along 7 lines at 10,000 timesteps.

ヘッド部およびボディ部内ではすべり面が形成されていることも確認した。ボディ部におけるすべり面の角度は、斜面上を流下する際には斜面の傾斜角  $+1 \sim 3^\circ$  程度、水平面上でも  $1 \sim 3^\circ$  程度であり、流動する斜面の傾斜プラス数度であることがわかった。また、ヘッド部近くにおける傾斜角はそれよりも高角で、概ね  $10^\circ$  以上であることがわかった。さらに流動する粒子群の先端速度は、斜面を流下するときには、粒子群の先端はある速度  $V_1$  で流下し、平面部に到達後は  $V_2 (< V_1)$  で流動するようになる。その後、ヘッド部がある程度小さくなるまでは  $V_2$  で流動した後、その後は直線的に速度を減少させ流動が終了する。これらの傾向は斜面角度、粒径分布によらず概ね同一の傾向であることがわかった。

## 7.4 考察

### 7.4.1 堆積物重力流の概観

海底地すべりで見られる堆積物重力流は、多様な流動形態を示す (例えば平 1985; Naruse et al. 2007)。とくに斜面崩壊などで堆積物が再流動を開始するとき、その流れは粒子によって支保される土石流として運動を開始する。流動が進むにつれ周囲の海水を取り込んで流動化が進むことで、長大距離を流動することが可能となる。また中でも混濁流となった流れは数百キロから数千キロ遠方まで流動することが知られている (Locat and Lee, 2002)。本研究で行ったシミュレーションでは、堆積物重力流は水中土石流のような振る舞いを示していると言える。本シミュレーションによって再現された堆積物重力流を見てみると、ヘッド部において周囲の流体を取り込む様子が観察することができる。しかしながら、本シミュレーションの範囲では混濁流化するまでの現象は確認できなかった。これは、粒子密度が比較的大きいこと、また粒子の径が重力流の大きさと比して大きいこと、さらに四方の領域境界が固定端であるために流体流動が阻害されていることなどが原因であると考えられる。これに対しては、計算の大規模化を図り、粒子数の増加を行い、より現実の物理量と近いパラメータでシミュレーションを行っていくことが必要であると考えて

いる。

#### 7.4.2 堆積物重力流の内部速度

流下する堆積物重力流の速度プロファイルを抽出することができた。ヘッド部では放物線状の速度プロファイルが現れるのに対し、ボディ部では右肩上がりの特徴を示す速度プロファイルが現れた。これは、ヘッド部とボディ部では異なる流動形態を示すことを表している。また、Xu et al. (2004) では、実際に流動する堆積物重力流の流動速度を計測した。その速度プロファイルにおいても放物線状を示すものと右肩上がり形状を示すものがあり、本シミュレーション結果と定性的によく一致するものである。実際の海底地すべりは深海底など、視認することの困難な場所できている。今回のシミュレーションによって、実測される速度プロファイルから、ヘッド部とボディ部の推定の可能性を示唆することができた。

#### 7.4.3 堆積構造

堆積物重力流によって形成された堆積層は、海底三角州や海底チャネルなど貯留層としてのポテンシャルが高いと言われている。そのため、堆積層の層厚の局所的な増減を予測することは、坑井の掘削位置決定や貯留層形状を同定する際に非常に有効である。さて、斜面を流下する堆積物重力流によって形成される堆積物の厚さは、斜面の形状変化によって様々に変化する。特に斜面から平面へと傾斜が大きく変わる場合には、その傾斜変換点近傍において、堆積層の薄い箇所が生じ、その前方に堆積層の厚い領域が生じる。この現象は、特に堆積物重力流が比較的高密度で高速な流れの場合に生じる。これは、高エネルギーの流れが、傾斜変換点に衝突することで跳水のような現象が生じるからであると考えられる (Mulder and Alexander, 2001)。

本シミュレーションにおいて、流動後の堆積厚さを見てみると、粒子数が少ないためにその変動は明瞭でないものの、斜面直後に堆積層にわずかながらへこみのようなものが生じている。この傾向は斜面の傾斜角が増すにつれて若干ながら大きくなり、Mulder and Alexander (2001) による装置実験結果とよく一致している。

#### 7.4.4 まとめと今後の課題

本手法による堆積物重力流の再現シミュレーションでは、定性的ながら流動中の内部速度や堆積後の堆積構造に関して、既存の研究結果ともよい一致を見ることができた。本手法の最大のメリットは、海底地すべりの発生から堆積までの全ての過程を一つのシミュレーターで求めることができることである。そのため、シミュレーションの条件を変えることで、海底地すべりの発生原因を検討することや、また流動形態の違いから生じる堆積構造の違い等を検討することも可能であると考えられる。

また、最近では津波の誘因として海底地すべりに注目が集まっている (例えば Tappin et al. 2001; Lee et al. 2003)。地すべりの規模や水深などと、発生する津波の波高との関係を推定する研究が進められているが、まだ未解明な点は非常に多い (例えば 檀 et al. 2005)。これらの解明のためには地すべり体の運動挙動を解析とともに、地すべり体の運動にともなう二次的な海水の流動に着目する必要がある。ここで、本研究で用いた格子ボルツマン法と個別要素法の連成解析システムでは、こうした二次的な流体流動も全て計算している。そのため、地すべり体の流下に伴う

流体運動のみならず海水面変動のシミュレーションも比較的容易に行うことができると考えられる。ただし、今回のシミュレーションにおいては全方位の境界面を固定壁面としているため、海水面においては自由境界条件を適用することなどが必要である。また、解析領域の大規模化、適切な境界条件の設定により、海底地すべりの発生および斜面の崩壊、さらに堆積物重力流の流下という一連の過程の中で、同時に津波が発生することを示すことができると考えている。それによって、これまでの波高推定モデルの検証や、さらには新たな地すべり津波モデルの構築も行うことができると考える。



## 第8章 結言

本研究では、Navier-Stokes 方程式の解法として格子ボルツマン法を用い、並列計算による空隙を有する岩石浸透流解析 (第 3 章)、岩石不連続面内单相流解析 (第 4 章)、を行った。さらに、固体粒子運動をカップリングする手法を開発し (第 5 章)、水中の粒子沈降問題 (第 6 章)、堆積物重力流シミュレーション (第 7 章) へ適用した。

並列計算による空隙を有する岩石浸透流解析 (第 3 章) では以下の結論を得た。多孔質岩石のモデル化において、真の孔隙率を精度よく満足するモデルを構築するには、平均粒子直径に対して 20 格子以上取ることが必要であることがわかった。これは、モデルの作成方法によらずほぼ一定であることがわかった。また格子ボルツマン法の並列計算によって、矩形ダクトモデルでは 8 並列程度までは比較的高い計算効率を保つことがわかった。分割の方向が単一方向であるために、矩形ダクトモデルにおいてのみ、並列化による速度向上が発揮された。ある CPU 数を用いて計算する場合、スレッド並列を行わずに全て MPI による並列化 (プロセス並列) を行う方が、効率的に時間短縮できることがわかった。これは、LBM が領域分割によるプロセス並列に適したアルゴリズムであることを示している。しかしながら、同一プロセス数においてはスレッド数の増加によって計算効率は上昇するため、分割面が単一の場合など、領域分割に制約がある場合などではスレッド並列を併用したハイブリッド並列が効果的であることがわかった。

岩石不連続面内单相解析 (第 4 章) では、以下の結論を得た。フラクチャ内を流れる流量は、平行平板を仮定すると開口幅の 3 乗に比例する。しかしながら実際のフラクチャでは、その形状の凹凸の影響により、開口幅の狭小化に伴い 3 乗則から乖離する。この 3 乗則からの乖離に寄与するパラメータはフラクチャ面の粗さが要因とされるが、その内でも開口幅分布の標準偏差  $\sigma_d$  に大きく依存していることがわかった。つまり、 $\sigma_d$  が大きくなるにつれて、3 乗則からの乖離は増大することがわかった。また、3 次元フラクチャの流体流動計算においては、Reynolds の式を用いた 2 次元解析が一般的であったが、本手法により鉛直方向成分まで含めた解析が可能となった。

水中の粒子沈降問題 (第 6 章) では、以下の結論を得た。単一粒子沈降では、レイノルズ数の違いによって生じる流動形態の違いを表現することができた。また、二粒子沈降においても、同様にレイノルズ数の違いによって、水平安定状態になる場合と、DKT 現象を引き起こす場合に分かれることを示した。

堆積物重力流シミュレーション (第 7 章) では以下の結論を得た。開発した固液混相流シミュレータによって、水中土石流の再現を行うことができた。この土石流は、ヘッド部とボディ部に明確に分かれて流動していた。ヘッド部においては粒子流が周囲の流体を取り込む流動形態が見られ、これは、海底地すべりにおける堆積物重力流の流動形態が、水中土石流から混濁流へと変化することに対応している。また、シミュレーションで得られた堆積物重力流の内部速度プロファイルは、実際の海底地すべりにおける速度プロファイルと、定性的によく一致していた。ヘッド部とボディ部の速度プロファイルは、明瞭な違いが見られ、これは、実測される速度プロファイルに対する解釈への有益な情報を与えることができるものである。さらに、流動後の堆積厚さを見てみると、斜面を下りきった直後に少しへこみが生じていることが観察された。これは、既存

の堆積物重力流の水路実験結果とよく一致するものであった。これらのことから、本シミュレータが、海底地すべりの発生から堆積物の流動化そして堆積に至るまでの一連の流れを全て表現することが可能であることを示せた。

本論文で提案した、格子ボルツマン法と個別要素法の連成解法は、地盤・岩盤分野や堆積学分野における固液混相流解析に非常に有効なツールであることが示された。今後は、海底地すべりから誘起される津波の再現や、石油生産時の油層障害評価などさらなる応用を考えている。

## 参考文献

- Abe, T. (1997). Derivation of the Lattice Boltzmann Method by Means of the Discrete Ordinate Method for the Boltzmann Equation. *Journal of Computational Physics*, 131(1):241–246.
- Aidun, C. and Lu, Y. (1995). Lattice Boltzmann simulation of solid particles suspended in fluid. *Journal of Statistical Physics*, 81(1):49–61.
- Aidun, C., Lu, Y., and Ding, E. (1998). Direct analysis of particulate suspensions with inertia using the discrete Boltzmann equation. *Journal of Fluid Mechanics*, 373:287–311.
- Bea, R., Wright, S., Sircar, P., and Niedoroda, A. (1983). Wave-Induced Slides in South Pass Block 70, Mississippi Delta. *Journal of Geotechnical Engineering*, 109(4):619–644.
- Bhatnagar, P., Gross, E., and Krook, M. (1954). A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Physical Review*, 94(3):511–525.
- Brady, J. and Bossis, G. (1988). Stokesian Dynamics. *Annual Reviews in Fluid Mechanics*, 20(1):111–157.
- Brown, S. (1987). Fluid flow through rock joints: the effect of surface roughness. *J. Geophys. Res*, 92(B2):1337–1347.
- Brown, S. (1989). Transport of fluid and electric current through a single fracture. *J. Geophys. Res*, 94(B7):9429–9438.
- Brown, S. (1995). Simple mathematical model of a rough fracture. *J. Geophys. Res*, 100(B4):5941–5952.
- Bruno, M. (1994). Micromechanics of stress-induced permeability anisotropy and damage in sedimentary rock. *Mechanics of materials*, 18(1):31–48.
- Cao, N., Chen, S., Jin, S., and Martinez, D. (1997). Physical symmetry and lattice symmetry in the lattice Boltzmann method. *Physical Review E*, 55(1):21–24.
- Chang, C. and Powell, R. (1993). Dynamic simulation of bimodal suspensions of hydrodynamically interacting spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, 253:1–25.
- Chen, S., Wang, Z., Shan, X., and Doolen, G. D. (1992). Lattice Boltzmann computational fluid dynamics in three dimensions. *Journal of Statistical Physics*, 68(3):379–400.
- Clifton, R. and Wang, J. (1988). Multiple Fluids, Proppant Transport, and Thermal Effects in Three-Dimensional Simulation of Hydraulic Fracturing. *Soc. Petrol Engrs SPE*, 18198.
- Cundall, P. and Strack, O. (1979). A discrete element model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1):47–65.
- 檀和秀, 小林秀禎, and 萩原淳子 (2005). 三角形断面地すべり模型による地すべり津波波高に関する実験的研究. 明石工業高等専門学校研究紀要, 48:45–49.
- Feng, J., Hu, H., and Joseph, D. (1994). Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid Part 1. Sedimentation. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 261:95–134.

- Finney, J. L. (1970). Random packings and the structure of simple liquids i. the geometry of random close packingb. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 319:479–319 479–493.
- Fortes, A., Joseph, D., and Lundgren, T. (1987). Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 177:467–483.
- Glover, P., Matsuki, K., Hikima, R., and Hayashi, K. (1997). Fluid flow in fractally rough synthetic fractures. *Geophysical research letters*, 24(14):1803–1806.
- Harbitz, C. (1992). Model simulations of tsunamis generated by the Storegga slides. *Marine geology*, 105(1-4):1–21.
- He, X. (1997). Lattice boltzmann method on a curvilinear coordinate system: Vortex shedding behind a circular cylinder. *Phys. Rev. E*, pages –56 1 434–440.
- He, X. and Doolen, G. (1997). Lattice Boltzmann Method on Curvilinear Coordinates System: Flow around a Circular Cylinder. *Journal of Computational Physics*, 134(2):306–315.
- Huang, P., Hu, H., and Joseph, D. (1998). Direct simulation of the sedimentation of elliptic particles in Oldroyd-B fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 362:297–326.
- Inamuro, T., Maeba, K., and Ogino, F. (2000). Flow between parallel walls containing the lines of neutrally buoyant circular cylinders. *International Journal of Multiphase Flow*, 26(12):1981–2004.
- Inamuro, T., Yoshino, M., and Ogino, F. (1995). A non-slip boundary condition for lattice boltzmann simulations. *Physics of Fluids*, 7:2928.
- Johnson, A. and Tezduyar, T. (1997). 3D Simulation of fluid-particle interactions with the number of particles reaching 100. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 145(3-4):301–321.
- Joseph, D., Fortes, A., Lundgren, T., and Singh, P. (1987). Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spheres, cylinders and disks in water. *Advances in Multiphase Flow and Related Problems*, pages 101–122.
- 金子将之, 杉山広巳, 古座野洋志, and 荻野浩市 (2005). ベネズエラにおけるスキンバイパスフラクチャリング. *石油技術協会誌*, 70(6):526–532.
- Keehm, Y. (2003). *Computational Rock Physics: Transport Properties in Porous Media and Applications*. PhD thesis, Stanford University.
- Kennett, J. P., Cannariato, K. G., Hendy, I. L., and Behl, R. J. (2000). Carbon Isotopic Evidence for Methane Hydrate Instability During Quaternary Interstadials. *Science*, 288(5463):128–133.
- Klosek, J. (1997). The integration of fluid dynamics with a discrete-element modeling system: Algorithms, implementation, and applications. Master’s thesis, MIT.
- Kneller, B. and Buckee, C. (2000). The structure and fluid mechanics of turbidity currents: a review of some recent studies and their geological implications. *Sedimentology*, 47(s1):62–94.
- Ladd, A. J. C. (1994). Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. *J. Fluid Mech*, pages –271 285–309.
- Lee, H., Kayen, R., Gardner, J., and Locat, J. (2003). Characteristics of several tsunamigenic submarine landslides. In *Submarine Mass Movements and Their Consequences: 1st International Symposium*. Kluwer Academic Publishers.
- Lee, T. and Lin, C. (2001). A Characteristic Galerkin Method for Discrete Boltzmann Equation. *Journal of Computational Physics*, 171(1):336–356.

- Locat, J. and Lee, H. (2002). Submarine landslides: advances and challenges. *Canadian Geotechnical Journal*, 39(1):193–212.
- Locat, J., Lee, H., Locat, P., and Imran, J. (2001). Analysis of the Palos Verdes Slide, California, and its implication for the generation of tsunamis. In *Proceedings of the Workshop on the Prediction of Underwater Landslides and Slump Occurrence and Tsunami Hazards off of Southern California*. Edited by P. Watts. AA Balkema, Rotterdam.
- Maier, R., Bernard, R., and Grunau, D. (1996). Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. *Physics of Fluids*, 8:1788.
- Mammoli, A. and Ingber, M. (1999). Stokes flow around cylinders in a bounded two-dimensional domain using multipole-accelerated boundary element methods. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 44:897–917.
- 松岡俊文, 三善孝之, 村田澄彦, 芦田譲 (2002) 格子ボルツマン法による単一フラクチャ内の流体解析. 第 11 回岩の力学国内シンポジウム講演論文集 :G03.
- McNamara, G. and Zanetti, G. (1988). Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata. *Physical Review Letters*, 61(20):2332–2335.
- Mei, R., Shyy, W., Yu, D., and Luo, L. (2000). Lattice Boltzmann Method for 3-D Flows with Curved Boundary. *Journal of Computational Physics*, 161(2):680–699.
- Middleton, G. V. (1993). Sediment deposition from turbidity currents. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, 21(1):89–114.
- 三善孝之, 松岡俊文, 村田澄彦 (2003) 格子ボルツマン法を用いたフラクチャ内流体流動の 3 次元解析. 材料, 第 52 巻, 5 号:466–471.
- Miyoshi, T., Matsuoka, T., Murata, S. and Ashida, Y. (2003) 3D lattice Boltzmann simulation of fluid flow in fractured rock. In: *Kono, Nishigaki and Komatsu (Eds.). Groundwater Engineering - Recent Advances* :619–624. Swets and Zeitlinger, Lisse
- 三善孝之, 松岡俊文 (2004). 3 次元格子ボルツマン法の並列計算による多孔質岩石内の流体流動解析. 物理探査, 57:697–708.
- Miyoshi, T., Matsuoka, T., and Yamada, Y. (2004) Microscopic behavior of the solid particles in fluid flow through porous rock using LBM and DEM coupling. In: *Ohnishi, Y., and Aoki, K. (Eds.). Contribution of Rock Mechanics to the New Century* :159–164. Millpress, Rotterdam.
- 三善孝之, 松岡俊文, 山田泰広 (2005). LBM と DEM の連成的解法による多孔質岩中の流体流動に伴う微小粒子挙動解析. 第 34 回岩盤力学に関するシンポジウム講演論文集, 土木学会, 81–88.
- Mulder, T. and Alexander, J. (2001). Abrupt change in slope causes variation in the deposit thickness of concentrated particle-driven density currents. *Marine Geology*, 175(1-4):221–235.
- Nannelli, F. and Succi, S. (1992). The lattice Boltzmann equation on irregular lattices. *Journal of Statistical Physics*, 68(3):401–407.
- Naruse, H. and Masuda, F. (2006). Visualization of the Internal Structure of the Massive Division in Experimental Sediment-Gravity-Flow Deposits by Mapping of Grain Fabric. *Journal of Sedimentary Research*, 76(5):854–865.
- Naruse, H., Saito, Y., and Masuda, F. (2007). Velocity Structure of Subaerial Debris Flows Transforming into Turbidity Currents. *2007 AAPG Annual Convention and Exhibition*.
- 沼澤正明 and 満田信一 (2005). サンドコントロール. 石油技術協会誌, 70(6):533–536.
- Pan, C., M., H., and T., M. C. (2004). Lattice-boltzmann simulation of two-phase flow in porous media. *Water Resources Reserch*, 40:W01501.

- Piper, D., Farre, J., and Shor, A. (1985). Late Quaternary slumps and debris flows on the Scotian Slope. *Bulletin of the Geological Society of America*, 96(12):1508–1517.
- Piper, D., Shor, A., and Hughes Clarke, J. (1988). The 1929 Grand Banks earthquake, slump and turbidity current. *Geological Society of America Special Paper*, 229:77–92.
- Qi, D. (1997). Non-Spheric Colloidal Suspensions in Three-Dimensional Space. *International Journal of Modern Physics C*, 8:985–998.
- Qi, D. (1999). Lattice-boltzmann simulation of particles in non-zero-reynolds-number flows. *J. Fluid Mech*, 385:41–62.
- Qian, Y., D’Humières, D., and Lallemand, P. (1992). Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhysics Letters*, 17:479.
- Rivet, J., Rivet, J., and Boon, J. (2001). *Lattice Gas Hydrodynamics*. Cambridge University Press.
- Rothman, D. and Zaleski, S. (1997). *Lattice-gas cellular automata*. Cambridge University Press New York.
- Sparlin, D. and Hagen, R. (1995). Proppant selection for fracturing and sand control. *WORLD OIL*, 216:37–37.
- Succi, S. (2001). *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford University Press.
- Sucker, D. and Brauer, H. (1975). Investigation of the flow around transverse cylinders. *Waerme- und Stoffuebertragung*, 8(3):149–158.
- 平朝彦 (1985). 堆積物重力流のレオロジーと流動過程. 月刊地球, 7:391–397.
- Tappin, D., Watts, P., McMurtry, G., Lafoy, Y., and Matsumoto, T. (2001). The Sissano, Papua New Guinea tsunami of July 1998-offshore evidence on the source mechanism. *Marine Geology*, 175(1):1–23.
- 蔦原道久, 高田尚樹, and 片岡武 (1999). 格子気体法・格子ボルツマン法. コロナ社.
- Wolf-Gladrow, D. (2000). *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models: an introduction*. Springer.
- Xu, J., Noble, M., and Rosenfeld, L. (2004). In-situ measurements of velocity structure within turbidity currents. *Geophysical Research Letters*, 31(9).
- Zou, Q. and He, X. (1995). On pressure and velocity boundary conditions for the lattice boltzmann bgk model. *Phys. Fluids.*, 9:1591–1598.

# 付録A Navier-Stokes 方程式の導出

## A.1 平衡分布関数の導出

以下に、式 (2.71) の導出を以下に示す。

$F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha)$  に対する相対エントロピーは、

$$S(\rho, j_\alpha) = -\frac{k}{m} \sum_i F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) \ln \frac{F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha)}{W_i} \quad (\text{A.1})$$

と定義される。ここで、制約条件、

$$\rho = \sum_i F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) \quad (\text{A.2})$$

$$j_\alpha = \sum_i c_{i\alpha} F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) \quad (\text{A.3})$$

の下において、相対エントロピー  $S(\rho, j_\alpha)$  を最大にする  $F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha)$  を推定する。関数

$$\begin{aligned} \hat{S} &= S + \tilde{A}\rho + \tilde{B}_\alpha j_\alpha \\ &= -\frac{k}{m} \sum_i F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) \ln \frac{F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha)}{W_i} + \tilde{A} \sum_i F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) + \tilde{B}_\alpha \sum_i c_{i\alpha} F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

は、ラグランジュ未定剰数  $\tilde{A}, \tilde{B}_\alpha$  を係数として制約条件式 (A.2) および式 (A.3) を内包する。ここで、 $\hat{S}$  が極値を有するための必要条件は、

$$\forall i : \frac{\partial \hat{S}}{\partial F_i^{(0)}} = -\frac{k}{m} \left( \ln \frac{F_i^{(0)}}{W_i} + 1 \right) + \tilde{A} + \tilde{B}_\alpha c_{i\alpha} = 0 \quad (\text{A.5})$$

である。式 (A.5) の解として、平衡分布関数、

$$F_i^{(0)} = W_i \exp \{ A + B_\alpha c_{i\alpha} \} \quad (\text{A.6})$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} A(\rho, j_\alpha) &= \frac{m}{k} \tilde{A} - 1 \\ B_\alpha(\rho, j_\alpha) &= \frac{m}{k} \tilde{B}_\alpha \end{aligned}$$

である。式 (A.6) における係数  $A, B_\alpha$  は、 $F_i^{(0)}$  を  $j_\alpha = 0$  まわりでテイラー展開することで得られる。まず、 $A, B_\alpha$  を  $j_\alpha$  の 2 次精度において展開すると、

$$\begin{aligned} A(\rho, j_\alpha) &= A_0 + A_2(\rho) j_\alpha^2 + \mathcal{O}(j_\alpha^4) \\ B_\alpha(\rho, j_\alpha) &= B_{1\alpha} j_\alpha + \mathcal{O}(j_\alpha^3) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

となる。ただし、式 (A.7) に現れない低次の項は、D2Q9 モデルにおける格子の等方性よりゼロとなる。式 (A.7) を式 (A.6) に代入し、

$$F_i^{(0)} = W_i \exp \{ A_0 + A_2(\rho)j_\alpha^2 + B_1j_\alpha c_{i\alpha} \} \quad (\text{A.8})$$

を得る。ここで、式 (A.8) を  $j_\alpha = 0$  まわりでテイラー展開すると、

$$F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) = F_i^{(0)}(\rho, 0) + \left( j_\alpha \frac{\partial}{\partial j_\alpha} \right) F_i^{(0)} + \frac{1}{2} \left( j_\alpha \frac{\partial}{\partial j_\alpha} \right)^2 F_i^{(0)} + \mathcal{O}(j_\alpha^3)$$

となる。各項を見てみると、

$$\begin{aligned} F_i^{(0)}(\rho, 0) &= W_i e^{A_0} \\ \frac{\partial F_i^{(0)}}{\partial j_\alpha} &= F_i^{(0)} (2A_2 j_\alpha + B_1 c_{i\alpha}) \\ &\rightarrow W_i e^{A_0} B_1 c_{i\alpha} \\ \frac{\partial^2 F_i^{(0)}}{\partial j_\alpha^2} &= F_i^{(0)} \{ 2A_2 + (2A_2 j_\alpha + B_1 c_{i\alpha})^2 \} \\ &\rightarrow W_i e^{A_0} (B_1^2 c_{i\alpha}^2 + 2A_2) \\ \frac{\partial^2 F_i^{(0)}}{\partial j_\alpha \partial j_\beta} &= F_i^{(0)} (2A_2 j_\alpha + B_1 c_{i\alpha}) (2A_2 j_\beta + B_1 c_{i\beta}) \\ &\rightarrow W_i e^{A_0} B_1^2 c_{i\alpha} c_{i\beta} \end{aligned}$$

となる。これらをまとめると、

$$F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) = W_i e^{A_0} \left\{ 1 + B_1 c_{i\alpha} j_\alpha + \frac{1}{2} B_1^2 (c_{i\alpha} j_\alpha)^2 + A_2 j_\alpha^2 \right\} \quad (\text{A.9})$$

が得られる。ここで、制約条件式 (A.3) に、式 (A.9) を代入し、式 (2.86)、式 (2.84)、式 (2.87) および式 (2.85) から、

$$\begin{aligned} \sum_i F_i^{(0)} = \rho &= e^{A_0} \left\{ \sum_i W_i + B_1 j_\alpha \sum_i c_{i\alpha} W_i + \frac{B_1^2}{2} j_\alpha^2 \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} W_i + A_2 j_\alpha^2 \sum_i W_i \right\} \\ &= e^{A_0} \left\{ \rho_0 + \frac{B_1^2}{2} \frac{\rho_0 k_B T}{m} j_\alpha^2 + A_2 \rho_0 j_\alpha^2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \sum_i c_{i\alpha} F_i^{(0)} = j_\alpha &= e^{A_0} \left\{ \sum_i c_{i\alpha} W_i + B_1 j_\alpha \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} W_i + \frac{B_1^2}{2} j_\alpha^2 \sum_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} W_i + A_2 j_\alpha^2 \sum_i c_{i\alpha} W_i \right\} \\ &= e^{A_0} \frac{B_1 \rho_0 k_B T}{m} j_\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

を得る。式 (A.11) から、係数  $B_1$  は、

$$B_1 = \frac{m}{e^{A_0} \rho_0 k_B T} \quad (\text{A.12})$$

となる。次に、式 (A.10) を  $A_2$  について解くと、

$$A_2 = -\frac{B_1^2 k_B T}{2m} + \frac{1}{j_\alpha^2} \left( \frac{\rho}{\rho_0 e^{A_0}} - 1 \right) \quad (\text{A.13})$$



が得られる。ここで、 $A_2$  は、 $j_\alpha$  によらず一定であるため、

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho_0 e^{A_0}} - 1 &= 0 \\ e^{A_0} &= \frac{\rho}{\rho_0}\end{aligned}$$

となる。よって、全ての係数、

$$\begin{aligned}e^{A_0} &= \frac{\rho}{\rho_0} \\ B_1 &= \frac{m}{\rho k_B T} \\ A_2 &= -\frac{m}{2\rho^2 k_B T}\end{aligned}\tag{A.14}$$

が定まる。式 (A.14) を式 (A.9) に代入することで、平衡分布関数

$$F_i^{(0)}(\rho, j_\alpha) = \frac{W_i}{\rho_0} \left\{ \rho + \frac{m}{k_B T} c_{i\alpha} j_\alpha + \frac{m}{2\rho k_B T} \left( \frac{m}{k_B T} c_{i\alpha} c_{i\beta} j_\alpha j_\beta - j_\alpha j_\alpha \right) \right\}\tag{A.15}$$

が得られる。

## A.2 平衡分布関数の速度モーメントの導出

平衡分布関数の速度モーメント式 (2.84) ~ 式 (2.88) の導出を以下に示す。

### A.2.1 積分公式

本節で用いる積分を先に示す。 $\exp[-x^2]$  の 0 次モーメントは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2] dx = \sqrt{\pi}\tag{A.16}$$

となる。次に、1 次モーメントは積分計算によって、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp[-x^2] dx &= \left[ -\frac{\exp[-x^2]}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0\end{aligned}\tag{A.17}$$

と求まる。2 次以上のモーメントは、部分積分によってそれより低次のモーメントで表現することができ、式 (A.18) および式 (A.16) から、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp[-x^2] dx &= 2 \int_0^{\infty} x^2 \exp[-x^2] dx \\ &= 2 \left( \left[ -\frac{x \exp[-x^2]}{2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{\exp[-x^2]}{2} \right) dx \right) \\ &= 2 \left( 0 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\end{aligned}\tag{A.18}$$

となる。同様に 3 次モーメントは、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \exp[-x^2] dx &= \left[ -\frac{x^2 \exp[-x^2]}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left( -2x \frac{\exp[-x^2]}{2} \right) dx \\ &= 0\end{aligned}\tag{A.19}$$

となる。さらに 4 次モーメントは、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp[-x^2] dx &= 2 \int_0^{\infty} x^4 \exp[-x^2] dx \\ &= 2 \left( \left[ -\frac{x^3 \exp[-x^2]}{2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -3x^2 \frac{\exp[-x^2]}{2} \right) dx \right) \\ &= 2 \left( 0 + \frac{3}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}\tag{A.20}$$

となる。

### A.2.2 平衡分布関数に対する速度モーメント

ここでは 2 次元空間を考え、 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  とする。平衡分布関数式 (2.83) は Maxwell 分布に従うため、各方向速度  $v_1$  および  $v_2$  は独立変数として扱える。また  $\sigma^2 = 2k_B T/m$  とおく。

$w_B(v)$  の 0 次モーメント

$w_B(v)$  の 0 次モーメントは、

$$\begin{aligned}\int w_B(v) dv &= \int \int \rho_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{2/2} \exp[-m(v_1^2 + v_2^2)/2k_B T] dv_1 dv_2 \\ &= \int \int \left( \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \right) \exp[-(v_1^2 + v_2^2)/\sigma^2] dv_1 dv_2 \\ &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \int \exp\left[-\frac{v_1^2}{\sigma^2}\right] dv_1 \int \exp\left[-\frac{v_2^2}{\sigma^2}\right] dv_2\end{aligned}\tag{A.21}$$

である。ここで、 $v_1/\sigma = x, v_2/\sigma = y$  とおくと、 $w_B(v)$  の 0 次モーメントは、 $\exp[-x^2]$  の 0 次モーメントの積と表現することができる。よって、式 (A.16) から、 $w_B(v)$  の 0 次モーメントは、

$$\begin{aligned}\int w_B(v) dv &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \int \exp[-x^2] \sigma dx \int \exp[-y^2] \sigma dy \\ &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \sigma \sqrt{\pi} \sigma \sqrt{\pi} \\ &= \rho_0\end{aligned}\tag{A.22}$$

となる。

$w_B(v)$  の 1 次モーメント

0 次と同様に、 $v_1/\sigma = x, v_2/\sigma = y$  とおき、各要素の積分計算をすると、式 (A.17) から、各要素は全て 0 となる。

$$\begin{aligned} \int w_B(v) v_\alpha d\mathbf{v} &= \int \int \rho_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{2/2} v_\alpha \exp[-m(v_1^2 + v_2^2)/2k_B T] dv_1 dv_2 \\ &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \left( \int \sigma x \exp[-x^2] \sigma dx \int \exp[-y^2] \sigma dy \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$w_B(v)$  の 2 次モーメント

$w_B(v)$  の 2 次モーメントは、

$$\begin{aligned} \int w_B(v) v_\alpha v_\beta d\mathbf{v} &= \int \int \rho_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right) v_\alpha v_\beta \exp[-m(v_1^2 + v_2^2)/2k_B T] dv_1 dv_2 \\ &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \int \int v_\alpha v_\beta \exp\left[-\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2}\right] dv_1 dv_2 \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

である。0 次と同様に、 $v_1/\sigma = x, v_2/\sigma = y$  とおき、各要素における積分計算をする。 $\alpha = \beta = 1$  のとき、各要素は、 $\exp[-x^2]$  の 2 次モーメントと 0 次モーメントの積となる。よって、式 (A.18) および式 (A.16) から、

$$\begin{aligned} \int \int v_1 v_1 \exp\left[-\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2}\right] dv_1 dv_2 &= \int \sigma^2 x^2 \exp[-x^2] \sigma dx \int \exp[-y^2] \sigma dy \\ &= \sigma^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sigma \sqrt{\pi} \\ &= \frac{\pi \sigma^4}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

となる。これは、 $\alpha = \beta = 2$  においても同様である。次に、 $\alpha \neq \beta$  のとき、 $w_B(v)$  の 2 次モーメントの各要素は、 $\exp[-x^2]$  の 1 次モーメント同士の積となる。よって、式 (A.17) より

$$\begin{aligned} \int \int v_1 v_2 \exp\left[-\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2}\right] dv_1 dv_2 &= \int \sigma x \exp[-x^2] \sigma dx \int \sigma y \exp[-y^2] \sigma dy \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

; となる。よって、 $w_B(v)$  の 2 次モーメントは、

$$\begin{aligned} \int w_B(v) v_\alpha v_\beta d\mathbf{v} &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{\pi \sigma^4}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\pi \sigma^4}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\rho_0 \sigma^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \\ &= \frac{\rho_0 k_B T}{m} \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

となる。

$w_B(v)$  の 3 次モーメント

$w_B(v)$  の 3 次モーメントは、

$$\begin{aligned}\int w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma d\mathbf{v} &= \int \int \rho_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right) v_\alpha v_\beta v_\gamma \exp \left[ -m(v_1^2 + v_2^2)/2k_B T \right] dv_1 dv_2 \\ &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \int \int v_\alpha v_\beta v_\gamma \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2\end{aligned}\quad (\text{A.28})$$

である。 $\alpha = \beta = \gamma$  のとき、 $w_B(v)$  の 3 次モーメントの各要素は、 $\exp[-x^2]$  の 3 次モーメントおよび 0 次モーメントの積と表現できる。よって、式 (A.19) および式 (A.16) より、

$$\begin{aligned}\int \int v_1 v_1 v_1 \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2 &= \int \int v_2 v_2 v_2 \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2 \\ &= \int \sigma^3 x^3 \exp[-x^2] \sigma dx \int \exp[-y^2] \sigma dy \\ &= 0\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$

となる。その他の要素については、 $\exp[-x^2]$  の 1 次モーメントと 2 次モーメントの積になることから、式 (A.17) より、

$$\begin{aligned}\int \int v_1 v_1 v_2 \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2 &= \int \int v_1 v_2 v_2 \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2 \\ &= \int \sigma^2 x^2 \exp[-x^2] \sigma dx \int \sigma y \exp[-y^2] \sigma dy \\ &= 0\end{aligned}\quad (\text{A.30})$$

である。よって、 $w_B(v)$  の 3 次モーメントは、

$$\int w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma d\mathbf{v} = 0 \quad (\text{A.31})$$

となる。

$w_B(v)$  の 4 次モーメント

$$\begin{aligned}\int w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta d\mathbf{v} &= \int \int \rho_0 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right) v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \exp \left[ -m(v_1^2 + v_2^2)/2k_B T \right] dv_1 dv_2 \\ &= \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \int \int v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

ここで、 $w_B(v)$  の 4 次モーメントの各要素を、

$$T_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\rho_0}{\pi \sigma^2} \int \int v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta \exp \left[ -\frac{v_1^2 + v_2^2}{\sigma^2} \right] dv_1 dv_2 \quad (\text{A.33})$$

とおく。  $\alpha = \beta = \gamma = \delta$  のとき、  $w_B(v)$  の 4 次モーメントの各要素  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  は、  $\exp[-x^2]$  の 4 次モーメントおよび 0 次モーメントの積と表現できる。よって、式 (A.20) および式 (A.16) より、

$$\begin{aligned}
T_{1111} &= \frac{\rho_0}{\pi\sigma^2} \int \sigma^4 x^4 \exp[-x^2] \sigma dx \int \exp[-y^2] \sigma dy \\
&= \frac{\rho_0}{\pi\sigma^2} \sigma^5 \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \sigma\sqrt{\pi} \\
&= \frac{3\rho_0\sigma^4}{4} \\
&= 3\rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \\
&= T_{2222}
\end{aligned} \tag{A.34}$$

となる。つぎに、  $\alpha = \beta \neq \gamma = \delta$  などのとき、各要素  $T_{\alpha\beta\gamma\delta}$  は、  $\exp[-x^2]$  の 2 次モーメント同士の積となる。よって、式 (A.18) から、

$$\begin{aligned}
T_{1122} &= \frac{\rho_0}{\pi\sigma^2} \int \sigma^2 x^2 \exp[-x^2] \sigma dx \int \sigma^2 y^2 \exp[-y^2] \sigma dy \\
&= \frac{\rho_0}{\pi\sigma^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\sigma^3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\sigma^3}{2} \\
&= \frac{\rho_0\sigma^4}{4} \\
&= \rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \\
&= T_{1212} = T_{1221} = T_{2112} = T_{2121} = T_{2211}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

となる。その他の要素は、  $\exp[-x^2]$  の 1 次モーメントと 3 次モーメントの積となるため、式 (A.17) および式 (A.19) から、全てゼロとなる。よって、  $w_B(v)$  の 4 次モーメントは、

$$\int w_B(v) v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta dv = \rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) \tag{A.36}$$

となる。

### A.3 $W_i$ の導出

以下に平衡分布関数式 (A.15) の係数  $W_i$  の導出を示す。

#### A.3.1 D2Q9 モデル

D2Q9 モデルにおいて、各粒子は 3 種類の速度を有する。各速度毎に平衡分布関数の係数  $W_i$  を、

$$W_i = \begin{cases} W_0 & (i = 0) \\ W_1 & (i = 1, 2, 3, 4) \\ W_2 & (i = 5, 6, 7, 8) \end{cases} \tag{A.37}$$

と定義する。平衡分布関数の0次モーメント式 (2.86) から、

$$\sum_i W_i = W_0 + 4W_1 + 4W_2 = \rho_0 \quad (\text{A.38})$$

が得られる。同様に、2次モーメント式 (2.87) から、

$$\sum_i c_{i1}^2 W_i = 2c^2 W_1 + 4c^2 W_2 = \rho_0 \frac{k_B T}{m} \quad (\text{A.39})$$

$$\sum_i c_{i2}^2 W_i = 2c^2 W_1 + 4c^2 W_2 = \rho_0 \frac{k_B T}{m} \quad (\text{A.40})$$

が得られる。さらに、4次モーメント式 (2.88) から、

$$\sum_i c_{i1}^4 W_i = 2c^4 W_1 + 4c^4 W_2 = 3\rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \quad (\text{A.41})$$

$$\sum_i c_{i1}^2 c_{i2}^2 W_i = 4c^4 W_2 = \rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \quad (\text{A.42})$$

が得られる。これらの解として、

$$\begin{aligned} W_0/\rho_0 &= \frac{4}{9} \\ W_1/\rho_0 &= \frac{1}{9} \\ W_2/\rho_0 &= \frac{1}{36} \\ \frac{k_B T}{m} &= \frac{c^2}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

が得られる。

### A.3.2 D3Q15 モデル

D3Q15 モデルにおいても、D2Q9 モデルと同様に、各粒子は3種類の速度を有する。各速度毎に平衡分布関数の係数  $W_i$  を、

$$W_i = \begin{cases} W_0 & (i = 0) \\ W_1 & (i = 1, 2, \dots, 6) \\ W_2 & (i = 7, 8, \dots, 14) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

と定義する。平衡分布関数の0次モーメント式 (2.86) から、

$$\sum_i W_i = W_0 + 6W_1 + 8W_2 = \rho_0 \quad (\text{A.45})$$

が得られる。同様に、2次モーメント式 (2.87) から、

$$\sum_i c_{i1}^2 W_i = 2c^2 W_1 + 8c^2 W_2 = \rho_0 \frac{k_B T}{m} \quad (\text{A.46})$$

が得られる。さらに、4次モーメント式 (2.88) から、

$$\sum_i c_{i1}^4 W_i = 2c^4 W_1 + 8c^4 W_2 = 3\rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \quad (\text{A.47})$$

$$\sum_i c_{i1}^2 c_{i2}^2 W_i = 8c^4 W_2 = \rho_0 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2 \quad (\text{A.48})$$

が得られる。これらの解として、

$$\begin{aligned} W_0/\rho_0 &= \frac{2}{9} \\ W_1/\rho_0 &= \frac{1}{9} \\ W_2/\rho_0 &= \frac{1}{72} \\ \frac{k_B T}{m} &= \frac{c^2}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

が得られる。

## 謝辞

本学位論文をまとめるにあたり、査読をして頂いた京都大学工学研究科社会基盤工学専攻教授の松岡俊文先生、同教授の三ヶ田均先生、同研究科都市環境工学専攻教授の後藤仁志先生に心から感謝の意を表す。

京都大学工学研究科社会基盤工学専攻地質工学分野教授の松岡俊文先生には、本論文の研究を始めるきっかけを与えて頂いたこと、研究の進め方から全てに渡って時に厳しくかつ温かさをもってご指導下さったことを心から感謝致します。

京都大学工学研究科社会基盤工学専攻地質工学分野准教授の山田泰広先生には、堆積学、構造地質学をはじめ地質学全般に渡って多くの助言を頂きました。また、研究者としてなすべきことを示して頂きました。心より感謝致します。

水槽実験のために快く大阪大学理学研究科内実験装置を貸して下さった現金沢大学の遠藤徳孝助教、および実験を手伝って下さった岡本佳子氏(2005年大阪大学理学研究科修了)に心より感謝致します。

京都大学名誉教授の芦田譲先生からは、厳しい叱咤激励を幾度となく賜りました。京都大学工学研究科社会基盤工学専攻ジオフィジクス分野助教の尾西恭介先生、(独)海洋研究開発機構の真田佳典博士には、研究室内において多くの議論を交わし、研究進展に多大にご助力下さりました。また、研究生活の多くの時間を共有した、地質工学分野の先輩・後輩の皆様からは、多くの助言や励ましを頂きました。ここに深く感謝と敬意を表します。

最後に、長い年月を要することになっても、常に温かく見守ってくれた両親と、論文を仕上げるため常に叱咤激励してくれた妻、一緒に遊ぶのを我慢してくれた子供たちに心から感謝致します。