数理解析研究所講究録
第 1560 巻 2007 年 121-136

The Fisher information metric and Poisson kernels over negatively curved Riemannian manifolds

筑波大学数理物質科学研究科　伊藤光弘 (Mitsuhiro Itoh)
筑波大学数理物質科学研究科　宍戸雄一 (Yuichi Shishido)

1. Fisher 情報計量

1.1 (M,h) をコンパクトな向き付けられた n-次元 C^∞Riemann 多様体とする. $h=\sum h_{ij}\ dx^i dx^j$ は Riemann 計量で，単位体積をもつ体積要素を dv であらわすとする。すなわち dv は Riemann 体積要素の M の体積分の 1 とする : $dv=(Vol(M))^{(-1)}\sqrt{\det(h_{ij})}\ dx^1\cdots dx^n$.

Fisher 情報行列 (g_{ij}) の一般化である Fisher 情報計量 g を確率測度の空間 $\mathcal{P}(M)$ の上に定義する. M 上の C^∞ 正値確率測度 $\mu=p(x)dv(x)$ の全体を $\mathcal{P}(M)$ であらわす :

$$\mathcal{P}(M)=\{\,\mu=p(x)dv(x)\,|\,p\in C^\infty(M),\ \ p(x)>0,\ \int_M p(x)dv(x)=1\,\}\quad(1)$$

Fisher 情報計量を定義するまえに，$\mathcal{P}(M)$ の位相等について簡単に述べる.

測度 μ_o を一つ固定する. 任意の確率測度 μ は $\mu=\mu_o+\tau$, $\tau=q(x)dv(x)$, $\int_M\tau=0$ と書ける. すなわち $\mathcal{P}(M)\subset\mu_o+\mathcal{Q}(M)$, ここに

$$\mathcal{Q}(M)=\{\,\tau=q(x)dv(x)\,|\,q\in C^\infty(M),\ \int_M q(x)dv(x)=0\,\}\qquad(2)$$

さらに関数 $q(x)$ と n-形式 $q(x)dv(x)$ を同一視し，$C^\infty(M)$ を k-階以下の導関数が L^2-可積分な関数からなる関数空間として完備化した空間を $W_k^2(M)$ とする. $\mathcal{Q}_k^2(M)=\{\tau=q(x)dv(x)|\,q(x)\in W_k^2(M),\ \int_M\tau=0\}$ とおくと，$\mathcal{Q}_k^2(M)$ は $W_k^2(M)$ の閉部分ベクトル空間となる. $\mathcal{P}_k^2(M)$ をアフィン空間 $\mu_o+\mathcal{Q}_k^2(M)$ の部分集合で密度関数がいたるところ正値となる n-形式 $p(x)dv(x)$ 全体とする. $k>n/2$ とする. Sobolev 不等式から $\mathcal{P}_k^2(M)$ は開集合になり，$\mathcal{Q}_k^2(M)$ をモデルとする無限次元多様体となる.

今後断りなく添数 k などは省略し $\mathcal{P}(M)$, $\mathcal{Q}(M)$ と略記する.

各確率測度 $\mu = p(x)dv(x)$ は多様体 $\mathcal{P}(M)$ の点とみなされる．曲面上の点に接線ベクトル，接平面が考えられるように，点 $\mu = p(x)dv(x)$ での接ベクトル，接ベクトル空間が定まる．実際に，点 $\mu = p(x)dv(x)$ での接ベクトルは $\tau = q(x)dv(x)$ であって $\int_M \tau = \int_M q(x)dv(x) = 0$ をみたすものとしてあらわされる．無限次元ベクトル空間 $\mathcal{Q}(M)$ が点 μ での接ベクトル空間 $T_\mu\mathcal{P}(M)$ を与える．τ が接ベクトルである理由：t をパラメータとする M での測度の曲線　：　$\mu + t\tau$, $|t| < \varepsilon$, を考えると，$\mathcal{P}(M)$ 内の曲線であり，$t = 0$ での速度ベクトルが τ であるから．

定義 1.1(Fisher 情報計量) $T_\mu\mathcal{P}(M)$ 上の正定値内積 g_μ を次で定義する：

$$g_\mu(\tau_1, \tau_2) = \int_M \frac{d\tau_1}{d\mu}\frac{d\tau_2}{d\mu}\,\mu = \int_M \frac{q_1(x)}{p(x)}\frac{q_2(x)}{p(x)}\,p(x)dv(x), \tag{3}$$

ここで $\tau_i = q_i(x)dv(x)$, $i = 1, 2$ であり，

$$\frac{d\tau_i}{d\mu} = \frac{q_i(x)}{p(x)}, \quad i = 1, 2. \tag{4}$$

$g = \{g_\mu \mid \mu \in \mathcal{P}(M)\}$ を Fisher 情報計量という．

1.2 注. a.　多様体 M は必ずしもコンパクトでなくてもよい．$W_k^2(\mathbf{R}^n)$ を n-次元実数空間 $\mathbf{R}^n$, 上の急減少関数のなす空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を Sobolev ノルムで完備化した空間とする．$W_k^2(\mathbf{R}^n)$ をモデルとする確率測度のなす空間 $\mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ が考察可能である．[G] 参照．

b. Fisher 情報行列 (g_{ij}) の解釈：パラメター空間 $\Xi \subset \mathbf{R}^m$ から $\mathcal{P}(M)$ への埋め込み写像が与えられたとき，Fisher 情報行列は Fisher 情報計量の引き戻し，すなわちパラメータによる微分が与える接ベクトルの, Fisher 情報計量による内積とみなすことができる: $\mu = p(x;\xi)dv$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ のとき $\tau_i = \partial p/\partial \xi_i$ より $d\tau_i/d\mu = p^{-1} \times \partial p/\partial \xi_i = d\log p(x;\xi)/d\xi$ より $g_{ij} = g_\mu(\tau_i, \tau_j)$. [A-N] を参照のこと．

1.3 例. $N(\mu, \sigma^2)$ を期待値 μ, 分散 σ^2 の正規分布とする．$(\xi_1, \xi_2) = (\mu, \sigma)$ をパラメターにもつ $\mathcal{P}(\mathbf{R})$ に属する確率測度の族である．Fisher 情報行列 (g_{ij}) ; $g_{11} = 1/\sigma^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = 2/\sigma^2$.　計量としては $\sum g_{ij}\xi_i\xi_j = (1/\sigma^2)(d\mu^2 + 2d\sigma^2)$ とあらわされ，パラメータ空間 $\{(\mu, \sigma) \mid -\infty < \mu < \infty, 0 < \sigma\}$ はガウス曲率 -2 の双曲平面となる．この事実は　甘利俊一先生から直接伺った。

1.4 Fisher 情報計量の幾何的性質については次の定理が基本的である．

定理 (T.Friedrich [F]).

(i) Fisher 情報計量の Levi-Civita(Riemann) 接続 ∇ は次で与えられる：点 $\mu \in \mathcal{P}(M)$ で

$$\nabla_{\tau_1}\tau = \left(\frac{d\tau}{d\mu}\cdot\frac{d\tau_1}{d\mu} - \int_M \frac{d\tau}{d\mu}\cdot\frac{d\tau_1}{d\mu}\mu\right)\mu \tag{5}$$

$\tau, \tau_1 \in T_\mu\mathcal{P}(M)$.

(ii) g の断面曲率は一定でその値は 1/4.

(iii) 向きを保つ M の微分同相写像からなる群 $\mathcal{D}^+(M)$ が $\mathcal{P}(M)$ に推移的に作用する ($\psi \in \mathcal{D}^+(M)$ の作用は $\psi : \mu \mapsto \psi^*\mu$, すなわち n-形式 μ の ψ による引き戻し):

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{D}^+(M)/\mathcal{K},$$

$\mathcal{K}$ はある $\mu \in \mathcal{P}(M)$ を固定する自己同相写像 $\psi \in \mathcal{D}^+(M)$ の全体のなす部分群.

(iv) 測地線に関して完備ではない.

この定理については [Sh-1] をも参照のこと.

1.5 注. 離散ケース:

$$\mathcal{P} = \{\mu = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, p_i > 0, \sum_i p_i = 1\} \tag{6}$$

とし、その上の Fisher 情報計量を求める. $\mathcal{P}$ は $\mathbf{R}^3$ 内の平面 $x+y+z=1$ の第一象限部分をさす. $\mathcal{P}$ は開 2-単体である. 点 $\mu = (p_1, p_2, p_3) \in \mathcal{P}$ での接ベクトル空間は

$$T_\mu\mathcal{P} = \{\,\tau = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{R}^3 \,|\, \sum_i v_i = 0\,\}. \tag{7}$$

$\dfrac{d\tau}{d\mu} = (\dfrac{v_1}{p_1}, \dfrac{v_2}{p_2}, \dfrac{v_3}{p_3})$ に注意して

$$g_\mu(\tau, \tau') = \int_M \frac{d\tau}{d\mu}\frac{d\tau'}{d\mu}\mu = \frac{1}{p_1}v_1v_1' + \frac{1}{p_2}v_2v_2' + \frac{1}{p_3}v_3v_3'$$

ここで接ベクトル $\tau = (1, 0, -1)$, $\tau' = (0, 1, -1)$ を Fisher 情報計量に代入. $g_{11} = g_\mu(\tau, \tau)$, $g_{12} = g_\mu(\tau, \tau')$, $g_{22} = g_\mu(\tau', \tau')$ を求めると

$$g_{11} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3},\ g_{12} = g_{21} = \frac{1}{p_3},\ g_{22} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$$

より，点 μ において

$$\begin{aligned} g &= g_{11}dp_1^2 + 2g_{12}dp_1dp_2 + g_{22}dp_2^2 \\ &= (\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_3})dp_1^2 + \frac{2}{p_3}dp_1dp_2 + (\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3})dp_2^2 \end{aligned}$$

変数変換して $p_1 = s^2$，$p_2 = t^2$ とおき，さらに $s = r\cos\theta$，$t = r\sin\theta$，$0 < r < 1$，$0 < \theta \leq 2\pi$ とおくと

$$g = \frac{4}{1-r^2}dr^2 + 4r^2d\theta^2$$

これはガウス曲率 $K = \frac{1}{4}$ の 2 次元球面（半径 2）の一部分をあらわす．平坦な 2-単体が Fisher 情報計量的には一様に曲がって見えることになる．ガウス曲率は Riemann 多様体の断面曲率なので，このことは $\mathcal{P}(M)$ 上の Fisher 情報計量の断面曲率の値が一定値 $\frac{1}{4}$ であることと符合する．

1.6 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(M)$ 上の Fisher 情報計量に関して双対接続が定義できる．3 階共変対称テンソル T を

$$T : T_\mu\mathcal{P} \times T_\mu\mathcal{P} \times T_\mu\mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{R};\ T(\tau^1, \tau^2, \tau^3) = \int_M (\frac{d\tau^1}{d\mu}\frac{d\tau^2}{d\mu}\frac{d\tau^3}{d\mu})\mu \quad (8)$$

と定めると，任意実数 t について接続

$$\nabla^t = \nabla - tT,\ \nabla^{-t} = \nabla + tT \quad (9)$$

は捩れなしの互いに双対な接続である．[Shi] 参照．

2. 負曲率多様体と Poisson 核

2.1 (X, h) を単連結，完備 n-次元 Riemann 多様体で，次の負曲率条件をみたすものとする：

$$-b^2 \leq K_Y \leq -a^2 < 0 \quad (10)$$

ここに a, b は正定数．K_Y は任意の断面 Y についての断面曲率である．Cartan-Hadamard の定理より，負曲率条件から (X, h) は n-次元ユークリッド空間と微分同相である．

2.2 例. n-**実双曲空間** (D^n, h_o): 単位円板 Poincaré モデル

$$D^n = \{\, x \in \mathbf{R}^n \,|\, |x| < 1\},\ \ h_o = \frac{4}{(1-|x|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \tag{11}$$

上半空間モデルもある．n-実双曲空間は定曲率空間なので $K_Y = -1$.

曲率条件 **2.1** は Poisson 核が定義されるための必要条件である．

X 上の測地線は，以下すべて単位スピードかつ向きを持った測地線とする．このような測地線を正規な測地線とよぶ．測地線の負曲率多様体上での基本的性質等については，[E], [S] 参照のこと．

2.3 定義 (測地線の漸近同値). 向きをもった単位速度，半開測地線 $c_1 = c_1(t)$, $c_2 = c_2(t)$, $0 \le t < \infty$ が漸近同値とは，距離 $d(c_1(t), c_2(t))$ が t について上に有界であるときをいう．このとき $c_1 \sim c_2$ とかく．

$\mathcal{G}(X)$ で向きをもった単位スピード，半開測地線全体の集合とし，同値関係 $\sim$ で類別した商空間 $\mathcal{G}(X)/\sim$ を理想境界，または無限遠境界といい，∂X とあらわす．

基点 $x_o \in X$ を固定する．∂X は x_o での接ベクトル空間の単位接球面 $U_{x_o}X = \{v \in T_{x_o}X \,|\, |v| = 1\}$ と同一視できる．理由は任意の元 $\theta = [c] \in \partial X$ に対し一意的に基点を出発する半開測地線 γ で $\theta = [\gamma]$ となるものが存在する．よって ∂X はつねに基点に関する単位接球面と同一視される．結果として，∂X は $n-1$ 次元球面 S^{n-1} とみなされる．さらに $X \cup \partial X$ に錐位相をいれることにより X のコンパクト化を与える．位相の入れ方については [E],[S] を参照．

2.4 n-**次元実双曲空間** (D^n, h_o) **の理想境界**: この場合理想境界（原点 o を基点とする）はまさに o 中心，半径 1 の球面 $\partial D^n = S^{n-1}$ である．

2.5 古典的 Dirichlét 問題との類推として無限遠 Dirichlét 問題が考えられる ([P] を参照)．(X, h) の Laplacian $\Delta = -\sum_i h^{ij}\nabla_i\nabla_j$ について $\Delta u = 0$ をみたす関数 $u : X \longrightarrow \mathbf{R}$ を調和関数という．理想境界 ∂X 上で与えられた関数と一致し X において調和な関数を求める問題を（無限遠）Dirichlét 問題という．

定理 (Anderson, Sullivan). (X, h) は **2.1** の条件をみたすものとする．任意の $\psi \in C^0(\partial X)$ にたいし，

$$\Delta u = 0 \ \text{ in } X, \qquad u|_{\partial X} = \psi \tag{12}$$

をみたす関数$u \in C^{\infty}(X) \cap C^{0}(X \cup \partial X)$がただ一つ存在する．[Sch-Y]を参照のこと．

同一視$\partial X = U_{x_o}X = S^{n-1}$のもとに$\partial X$上の単位体積標準測度を$d\theta$であらわす：

$$d\theta = \frac{1}{Vol(S^{n-1})} d\theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^{n-1} \tag{13}$$

ここに$\{d\theta^i\}$は$U_{x_o}X = S^{n-1}$の，向きに同調した局所正規直交基$\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$の双対基．

Dirichlét問題の解uは，**2.1**の条件をみたす(X, h)にたいして，Poisson核による積分表示をもつことが知られている([Sch-Y])．

2.6 定義 (Poisson 核). 各$\theta \in \partial X$について定まった関数$\Phi(x, \theta) \in C^0(X \cup \partial X \setminus \{\theta\})$は，$x \in X$について調和関数であり，さらに次をみたすとき基点において正規化されたPoisson核という：

$$\begin{array}{rrcl}
1. & \Phi(x,\theta) & > & 0 \text{ for any } x \in X, \\
2. & \Phi(x_o,\theta) & = & 1, \\
3. & \lim_{x \longrightarrow \theta} \Phi(x,\theta) & = & \infty, \\
4. & \theta' \in \partial X,\ \theta' & \neq & \theta \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow \theta'} \Phi(x,\theta) = 0.
\end{array}$$

解$u = u(x)$はPoisson積分表示をもつ:

$$u(x) = \int_{\partial X} \Phi(x, \theta)\psi(\theta) d\theta \tag{14}$$

2.7 例. 実双曲空間(D^n, h_o)の中心oを基点とする正規化されたPoisson核は

$$\Phi(x, \theta) = \left(\frac{1 - |x|^2}{|x - \theta|^2} \right)^{n-1}, \quad x \in D^n, \theta \in \partial D^n \tag{15}$$

ここに$|\cdot|$は$D^n \subset \mathbf{R}^n$の標準ノルム．

定理 (Schoen-Yau [Sch-Y]). 曲率条件**2.1**をみたす(X, h)に対してPoisson核の存在と一意性がいえる．

命題 2.1 ([I-Sh],[Sh-2]). Poisson核$\Phi(x, \theta)$は，固定点$x \in X$にたいして理想境界∂X上の確率密度関数を与える：すなわち$\mu = \Phi(x, \theta) d\theta$は$\mathcal{P}(\partial X)$の元である．

証明. ∂X 上恒等的に 1 に等しい関数 ψ についての Dirichlét 問題の解 u は明らかに恒等的に 1 に等しい関数である．よって Poisson 積分表示から

$$1 = \int_{\partial X} \Phi(x,\theta) d\theta(\theta), \tag{16}$$

すなわち $\Phi(x,\theta)d\theta(\theta)$ は $\mathcal{P}(\partial X)$ の元である．

2.8 定義. Poisson 核写像 $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ を $\varphi : x \mapsto \Phi(x,\theta)d\theta$ で定義する．

2.9 注. 重心写像 $b : \mathcal{P}(S^1) \longrightarrow D^2$ について議論するため Douady & Earle は写像 φ を実双曲平面に対して定義した ([D-Ea]). Besson, Courtois & Gallot は X から $L^2(\partial X, d\theta)$ への，Poisson 核写像 φ と類似の写像を定義し，(X,h) の対称空間としての特徴づけを行っている ([B-C-G]).

3. Fisher 情報計量と Poisson 核写像

3.1 $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ は X の点 x をパラメータとする ∂X 上の確率測度の族を与える．Fisher 情報計量 g のこの写像 φ による引き戻し $\varphi^* g$ を考察する．そのために写像の微分写像 : $d\varphi : T_x X \longrightarrow T_\mu \mathcal{P}(\partial X)$，$\mu = \varphi(x)$ と，以下に述べる幾何学的に定義された Busemann 関数を調べる必要がある．

3.2 定義 (Busemann 関数). (X,h) は曲率条件 **2.1** をみたす非コンパクト完備 Riemann 多様体とする．$\theta \in \partial X$ に対し X 上の関数 $x \mapsto B(x,\theta)$ を

$$B(x,\theta) = \lim_{t \longrightarrow \infty} (\mathrm{d}(c(t),x) - t), \tag{17}$$

で定義する．$B(x,\theta)$ を，基点 x_o についての Busemann 関数という．ここに $c(t)$ は基点 x_o を出発し，θ に到達する正規測地線; $c(0) = x_o$，$\lim_{t\longrightarrow\infty} c(t) = \theta$

Busemann 関数 $B(x,\theta)$ のみたす性質:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & B(x_o,\theta) & = & 0, \\ 2. & \lim_{x\longrightarrow\theta} B(x,\theta) & = & -\infty, \\ 3. & \lim_{x\longrightarrow\theta'} B(x,\theta) & = & +\infty, \quad \theta' \neq \theta \end{array}$$

Busemann 関数 $B(x,\theta)$ は変数 $x \in X$ について C^2-級である ([S]). 負曲率完備多様体上の Busemann 関数の基本的性質については [E], [S] を参照のこと．

3.3 さて単連結，負曲率完備 Riemann 多様体 (X,h) が階数 1 の非コンパクト型対称空間であると仮定する．すると次の定理が成り立つ．

定理 3.1 ([I-Sh],[Sh-2]). 階数 1，n-次元非コンパクト型対称空間 (X,h) に対して，Poisson 核写像 φ は埋め込みであり，φ による Fisher 情報計量 g の引き戻し φ^*g は次をみたす:

$$\varphi^* g = \frac{\rho^2}{n}\, h \tag{18}$$

いいかえると

$$g_{\varphi(x)}(d\varphi(u), d\varphi(v)) = \frac{\rho^2}{n}\, h_x(u,v),\ \ u,v \in T_xX,\ x \in X \tag{19}$$

ここに $\rho = \rho_{(X,h)}$ は (X,h) の体積エントロピーと呼ばれる量で、(X,h) 内の測地球 $B(x;r)$ の体積の指数増大度を表す:

$$\rho(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log\ Vol(B(x;r)),\quad x \in X, \tag{20}$$

対称空間の場合，空間が等質的なので ρ は x に依存しない量となる．

3.4 この定理の主張は，(X,h) の接ベクトルの内積を Poisson 核写像を通して Fisher 情報計量 g で測っても本来の計量 h で測っても定数倍の違いしかないということである．しかも定数は体積エントロピーなる幾何学量で与えられる．

証明は以下に示すように対称空間の等長変換群に関する推移性，Poisson 核と Busemann 関数の関係式，および等長変換が理想境界 ∂X 上ひきおこす変換の Jacobian の Poisson 核表示式を用いる．

3.5 対称空間の定義は [p.170, H] を参照のこと．幾何学的典型的空間である n-次元球面，n-次元ユークリッド空間，n-次元実双曲空間を包摂する完備 Riemann 多様体 (X,h) で，各点 x にたいして等長変換 $s_x \in I(X,h)$ で次を満たすようなものが存在するとき (X,h) を対称空間という：

$s_x \circ s_x = \mathrm{id}_X$ （X の恒等変換）　かつ x は s_x の孤立した固定点である．

ここに $I(X,h)$ は等長変換（計量を保つ微分同相変換）の全体，等長変換群を表す．実際には s_x は点 x を通る測地線を逆向きにする変換，すなわち測地対称で与えられる ([p.170, H])．実数が正，零，負数に分かれるように，対称空間もコンパクト型，ユークリッド型，非コンパクト型に分類される．このうち負曲率で曲率条件 **2.1** をみたすのは非コンパクト型のもので階数 1 のものに限られることが知られている．階数 1 の非コ

ンパクト型対称空間は4種類ある：実双曲空間 $H^n_{\mathbf{R}}$，複素双曲空間 $H^n_{\mathbf{C}}$，4元数双曲空間 $H^n_{\mathbf{H}}$，8元数双曲空間 $H^n_{\mathbf{Q}}$.

次元は $\dim H^n_{\mathbf{F}} = n \cdot \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F}$, $\mathbf{F}$ は各双曲空間に対応する体.

体積エントロピーは $\rho = n + \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{F} - 2$. [B-C-G] を参照のこと.

3.6 階数1の非コンパクト型対称空間の Poisson 核 $\Phi(x,\theta)$ は次であらわされる ([B-C-G])：

$$\Phi(x,\theta) = \exp(-\rho\ B(x,\theta)) \tag{21}$$

この事実より，まず Poisson 核写像 φ は単射．なぜならば，$\varphi(x) = \varphi(y)$, $x \neq y$ と仮定する．2点 x, y を結ぶ正規測地線 $c = c(t), t \geq 0$, $c(0) = x$, の定める理想境界 ∂X 上の点を θ とし，正規化した Busemann 関数 $B(\cdot,\theta)$ を考えると，$B(z,\theta) = B_c(z,\theta) + d(x,x_o)$, $z \in X$, とあらわされる ([E],[S] を参照)．ここに $B_c(z,\theta)$ は測地線 c に関する Busemann 関数である．したがって2点 x, y での $B(\cdot,\theta)$ の値は異なり，上の Poisson 核表示から Poisson 核の値も異なる．これは矛盾．よって φ は単射.

3.7 対称空間 (X,h) のもつ著しい性質として，等長変換群 $I(X,h)$ が (X,h) に推移的に作用する: x_o を基点（原点）としたとき，任意の点 x に対して x_o を x に写す等長変換 $\gamma \in I(X,h)$ があること.

3.8 一般的設定に戻って，(X,h) を曲率条件 **2.1** をみたす単連結完備 Riemann 多様体とする．このとき次がいえる.

等長変換 $\gamma \in I(X,h)$ は測地線 $c = c(t)$ を測地線 $\gamma \circ c = \gamma(c(t))$ に移し，なおかつ距離をたもつ；$d(\gamma(x),\gamma(y)) = d(x,y)$, ので漸近的同値な2測地線 c, c' は漸近的同値2測地線 $\gamma \circ c, \gamma \circ c'$ に移される．すなわち ∂X の変換（同じ記号 γ であらわす）が定まる:

$$\gamma : \partial X \longrightarrow \partial X;\ \ \theta = [c] \mapsto \gamma(\theta) = [\gamma \circ c]. \tag{22}$$

3.9 重要な事実と記号の約束: 変換 $\gamma : \partial X \longrightarrow \partial X$ は ∂X 上の $(n-1)$-形式を $(n-1)$-形式に引き戻す操作 γ^* により $\mathcal{P}(\partial X) \subset \Omega^{n-1}(\partial X)$ の変換を引き起こす．$\Omega^{n-1}(\partial X)$ は $\partial X = S^{n-1}$ 上の $(n-1)$-形式のなすベクトル空間である．ここで写像 $\gamma : \Omega^{n-1}(\partial X) \longrightarrow \Omega^{n-1}(\partial X)$ を

$$\gamma(\mu) := (\gamma^{-1})^*(\mu) \tag{23}$$

で定義する．すると次に示すように左作用がえられる：

$$(\gamma \circ \gamma_1)(\mu) := \gamma(\gamma_1(\mu)),\ \ \gamma, \gamma_1 \in I(X,h) \tag{24}$$

定理 (M.Bourdon([B]). 等長変換 $\gamma \in I(X,h)$ が引き起こす理想境界 ∂X の変換 γ は次の Jacobian 表示式をもつ：

$$\gamma^*(d\theta(\theta')) = \Phi(\gamma^{-1}(x_o),\theta)d\theta(\theta);\quad \theta' = \gamma(\theta)$$

ここに x_o は正規化された Poisson 核の基点．すなわち右辺の Poisson 核関数は左辺の正規化標準体積要素 $d\theta$ の γ による引き戻し（Jacobian に相当）の密度をあたえる．たとえば γ が基点を固定する変換 ($\gamma(x_o) = x_o$) とすると $\gamma^*(d\theta(\theta')) = \Phi(x_o,\theta)d\theta(\theta) = d\theta(\theta)$ となる．このことは，γ が x_o での接ベクトル空間の等長的線形変換であるという事実，同一視 $\partial X = U_{x_o}X$ および $d\theta$ が単位接球面 $U_{x_o}X$ 上の標準体積要素であるという事実より，$d\theta$ が γ で不変となることと符合する．

Bourdon の公式から正規化された Poisson 核について変換公式がえられる ([B-C-G]):

$$\Phi(\gamma(x),\theta) = \Phi(x,\gamma^{-1}(\theta))\Phi(\gamma(x_o),\theta) \tag{25}$$

命題 3.2 ([I-Sh],[Sh-2]). Poisson 核写像 $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(\partial X)$ は X の等長変換 γ と可換である：

$$\varphi(\gamma(x) = \gamma(\varphi(x)),\ \ x \in X \tag{26}$$

すなわち

$$\Phi(\gamma(x),\theta)d\theta = \gamma(\Phi(x,\theta)d\theta),\ \ x \in X. \tag{27}$$

命題 3.3 ([I-Sh],[Sh-2]). 等長変換 $\gamma \in I(X,h)$ が引き起こす理想境界上の確率測度の空間 $\mathcal{P}(\partial X)$ の変換は情報計量 g に関して等長変換となる：

$$g_{\gamma(\mu)}(d\gamma(\tau_1), d\gamma(\tau_2)) = g_\mu(\tau_1,\tau_2),\ \ \tau_i \in T_\mu\mathcal{P}(\partial X),\ i = 1,2,\ \mu \in \mathcal{P}(\partial X)$$

3.9 命題の証明. $\mu = m(\theta)d\theta$ とおく．さらに $\tau_i = f_i(\theta)\mu \in T_\mu\mathcal{P}(\partial X)$, $i = 1,2$ とおく．∂X の変換としてみた $\gamma \in I(X,h)$ の微分写像 $d\gamma$: $T_\mu\mathcal{P}(\partial X) \longrightarrow T_\mu\mathcal{P}(\partial X)$ は写像 $\gamma^{-1} : \partial X \longrightarrow \partial X$ による ∂X 上の $(n-1)$-形式の引き戻しに他ならない：$d\gamma(\tau_i) = (\gamma^{-1})^*(\tau_i)$. 計算すると，$\gamma(\mu) = m(\gamma^{-1}(\theta))\gamma(d\theta) = m(\gamma^{-1}(\theta))\Phi(\gamma(x_o),\theta)d\theta$, $\tau_i = f_i(\theta)\mu$ より

$$d\gamma(\tau_i) = \gamma(\tau_i) = f_i(\gamma^{-1}(\theta))\gamma(\mu)$$

よって

$$\frac{d\gamma(\tau_i)}{d\gamma(\mu)} = f_i(\gamma^{-1}(\theta)) \cdot$$

したがって

$$\begin{aligned} g_{\gamma(\mu)}(d\gamma(\tau_1), d\gamma(\tau_2)) &= \int_{\partial X} \frac{d\gamma(\tau_1)}{d\gamma(\mu)} \cdot \frac{d\gamma(\tau_2)}{d\gamma(\mu)} \gamma(\mu) \\ &= \int f_1(\gamma^{-1}(\theta)) f_2(\gamma^{-1}(\theta)) m(\gamma^{-1}(\theta)) \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$(\gamma^{-1})^*(d\theta) = \Phi(\gamma(x_o), \theta) d\theta$$

より $\theta' = (\gamma^{-1})^*(\theta)$ と変数変換すると，積分は

$$\int_{\theta' \in \partial X} f_1(\theta') f_2(\theta') m(\theta') d\theta'$$

これはFisher情報計量の定義より $g_\mu(\tau_1, \tau_2)$ に等しい．よって命題は示された．

3.10 定理の証明. 等長変換群の推移性により原点 x_o でPoisson核写像 φ の微分写像 $d\varphi : T_{x_o}X \longrightarrow T_\mu\mathcal{P}(\partial X)$，$\mu = \varphi(x_o)$ が所与の等式をみたすことを示せばよい．$\varphi(x) = \Phi(x, \theta) d\theta = \exp(-\rho B(x, \theta)) d\theta$ および $B(x_o, \theta) = 0$ より $u \in T_{x_o}X$ を任意単位接ベクトルとすれば

$$\begin{aligned} d\varphi(u) &= -\rho\, dB(\cdot, \theta)(u) exp(-\rho B(x_o, \theta)) d\theta \\ &= -\rho\, dB(\cdot, \theta)(u) d\theta, \ u \in T_{x_o}X \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \varphi^* g(u, u) &= \rho^2 \int_{\partial X} (dB(\cdot, \theta)(u))^2 d\theta \\ &= \rho^2 \int (h(u, c'(0))(dB(\cdot, \theta)(c'(0)))^2 d\theta \end{aligned} \tag{29}$$

である．第2の等号は x_o で正規化されたBusemann関数の性質 $dB(\cdot, \theta)(c'(0)) = -1$ を用いた．ここで $c(t)$ は始点 x_o，$\lim_{t \longrightarrow \infty} c(t) = \theta$ なる正規測地線である．

$$\varphi^* g(u, u) = \rho^2 \int (h(u, c'(0)))^2 d\theta \tag{30}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho^2 \int_w h(u,w)^2 dw \\
&= \rho^2 \int_{w\in\partial X = S^{n-1}} h(u,w)^2 dw \\
&= \rho^2 \int_{w\in\partial X = S^{n-1}} \xi_1^2 \, dw
\end{aligned}
$$

ここでξ_1はwの，$T_{x_o}X$の正規直交基底$\{e_1 = u, e_2, \cdots, e_n\}$に関する成分である．球面積分公式$\int_{S^{n-1}} \xi_1^2 dw = \dfrac{1}{n}$より右辺は

$$\frac{\rho^2}{n} = \frac{\rho^2}{n}\, h(u,u).$$

証明おわり．

3.11 注. 定理より Poisson 核写像ははめ込みとなり，**3.6** で示した単射性からさらに埋め込みでもある．

定理 3.12 (I-Sh],[Sh-2]). (X,h)を階数1の非コンパクト型対称空間とする．すると Poisson 核写像は極小埋め込み写像である．

3.11 定理の証明. Poisson 核写像の同変性により， 基点x_oにて極小性を示せばよい．$T_{x_o}X$の正規直交基底を$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$とする．$d\varphi(u) = -\rho dB(\cdot,\theta)(u)d\theta$なので，基点$x_o$では$d\varphi(e_i) = -\rho\theta_i d\theta$. ここに$\theta_i$は同一視$\partial X = U_{x_o}X$のもとでの$\theta$の$e_i$-成分．Fisher 情報計量の Levi-Civita 接続の公式より

$$\nabla_{d\varphi(e_i)}\, d\varphi(e_j) = \frac{1}{2}\left(\rho^2\theta_i\theta_j - \rho^2 \int_{S^{n-1}} \theta_i\theta_j d\theta\right) d\theta. \tag{31}$$

$\sum \theta_i^2 = 1$より

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla_{d\varphi(e_i)}\, d\varphi(e_i) = 0. \tag{32}$$

よって Poisson 核写像は極小である．

4. Poisson 核の幾何学

4.1 解析的に定義される Poisson 核と測地線的幾何学的に定義される Busemann 関数の関係は相性がよい．特に階数1の非コンパクト型対称空間群では顕著である．実際

$$\Phi(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta)) \tag{33}$$

なる関係式（cは定数）をもつ．そこで，この関係式をみたす単連結完備負曲率多様体は階数1の対称空間かという逆問題を考えよう．この特徴付け問題について次の定理がえられる．

定理 4.2 ([I-Sh],[Sh-2]). (X,h) を単連結完備 n-次元負曲率 Riemann 多様体で曲率条件 **2.1** をみたすものとする．$n \geq 3$ かつ (X,h) はコンパクト商をもつ（すなわち $I(X,h)$ の部分群 Γ が存在して商空間 X/Γ はコンパクト C^∞-多様体となる）と仮定する．もし Poisson 核が

$$\Phi(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta)), \tag{34}$$

（cは定数）で与えられるならば，(X,h) は階数1の非コンパクト型対称空間である．さらにcは体積エントロピーρに一致する．

証明には次の定理を用いる．

定理 ([B-C-G]). (X,h) を，連結コンパクト n-次元負曲率 Riemann 多様体とする．X の普遍被覆空間 $\tilde{X}$ が漸近的調和（すなわち任意のホロ球面の平均曲率が一定である）ならば，$\tilde{X}$ は階数1の対称空間である．

定理 4.2 の証明. 点 x での接ベクトル空間 T_xX の正規直交基底を $\{e_i \mid i = 1,\cdots,n\}$ とする．一般性を失うことなく，x で $\nabla_{e_i}e_j = 0$ としてよい．関数 $x \mapsto \Phi(x,\theta)$ に Laplacian Δ を作用させると，$\Phi(x,\theta)$ の形から

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(x,\theta) &= -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\Phi(x,\theta) \\ &= -c\left\{\Delta B(x,\theta) + c\|\nabla B(x,\theta)\|^2\right\}\Phi(x,\theta) \end{aligned} \tag{35}$$

一般的に，Busemann 関数は各点において $\|\nabla B(x,\theta)\| = 1$([E],[S] 参照) より，

$$\Delta\Phi(x,\theta) = -c\left\{\Delta B(x,\theta) + c\right\}\Phi(x,\theta). \tag{36}$$

Poisson 核は調和関数なので，左辺は0．よって右辺，$\Delta B(x,\theta) = -c$ である．

さてベクトル $\nabla B(x,\theta)$ は θ 中心のホロ球面 $H_x(\theta) = \{y \in X \mid B(y,\theta) = B(x,\theta)\}$ の x における内向き法線ベクトルである．さらに法線ベクトル $\nabla B(x,\theta)$ についての第二基本形式 II は点 $y \in H_x(\theta)$ において

$$\begin{aligned} \mathrm{II}(v,w) &= -\mathrm{Hess}B(\cdot,\theta)(v,w), \quad v,w \in T_yH_x(\theta) \\ &= -\langle \nabla_v(\nabla B(\cdot,\theta)), w\rangle. \end{aligned} \tag{37}$$

単位ベクトルe_1をベクトル$\nabla B(\cdot,\theta)$ととれることおよび$\nabla B(\cdot,\theta)$が測地線に接することに注意して

$$\begin{aligned}\Delta B(\cdot,\theta) &= -\langle \nabla_{e_1}(\nabla B(\cdot,\theta)), e_1\rangle - \sum_{i=2}^{n}\langle \nabla_{e_i}(\nabla B(\cdot,\theta)), e_i\rangle \qquad (38)\\ &= -\sum_{i=2}^{n}\langle \nabla_{e_i}(\nabla B(\cdot,\theta)), e_i\rangle\end{aligned}$$

この右辺は$-\mathrm{Hess}B(\cdot,\theta)$の$T_yH_x(\theta)$でのトレースに等しい．すなわちこれは平均曲率をあらわすので，平均曲率はホロ球面上一定である．Besson, Courtois, Gallotの定理を適用できて定理の証明が終わる．

4.3 実は定理の逆命題がえられる．

命題 4.3 ([I-Sh],[Sh-2]). (X,h)を単連結，完備負曲率Riemann多様体で，曲率条件**2.1**をみたすものとする．どのホロ球面の平均曲率も一定でしかも共通の値$c>0$をとるものとする．するとPoisson核関数はBusemann関数を指数関数の肩にもつ:

$$\Phi(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta)) \qquad (39)$$

証明は次のようにする．仮定よりホロ球面の平均曲率が一定でしかも共通の値をとるので，さきほどの定理の証明中の議論の逆をたどれば$\Delta B(x,\theta) = -c$である．ここで新たな関数を$\Psi(x,\theta) = \exp(-cB(x,\theta))$とおく．定理の証明の中の議論から$\Psi(x,\theta)$は$x$について調和関数である．またBusemann関数の性質より$\Psi(x,\theta)$はPoisson核の性質をみたす．正規化されたPoisson核の一意性より([Sch-Y])，$\Psi(x,\theta)$は正規化されたPoisson核に他ならない．

系 4.4 (X,h)を単連結，完備負曲率Riemann多様体で，曲率条件**2.1**をみたすものとする．Poisson核がBusemann関数を指数関数の肩にもつこととどのホロ球面の平均曲率も一定でしかも共通の値cをとるということとは同値である．

5. 残された問題と今後の課題

5.1 問題: 定理**3.1** または定理**3.1**プラス定理**3.12**の結論から逆に(X,h)は階数1の対称空間となるか?

5.2 問題: 定理**4.2**においてコンパクト商の仮定がとれるか? 関連してDamek-Ricci空間なる負曲率をもつ単連結完備Riemann等質空間が存

在する．等質性から曲率条件 **2.1** がみたされ，調和的であるので漸近調和でもある．ホロ球面の平均曲率が共通一定値をとるかどうかそして，Poisson 核と Busemann 関数の関係性を調べることは興味ある問題である．なぜならば Damek-Ricci 空間はコンパクト商をもたないことが [B-C-G] において示されているので，定理 **4.2** でのコンパクト商の仮定が本質的かどうか検証できることになる．

5.3 熱核 $k(x,y;t)$ は熱方程式の基本解である:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\, u. \tag{40}$$

Poisson 核と同様に，熱核写像 $\varphi_t\ :\ X \longrightarrow \mathcal{P}(X);\quad \varphi_t(x) = k(x,y;t)dv$ の幾何学が考えられる．Poisson 核写像との違いは値域を X 自身上の確率測度空間 $\mathcal{P}(X)$ にとれるということである．熱核は確率論的にはまさに Brown 運動そのものである．

5.4 熱核の例. ユークリッド空間 $(X,h) = (\mathbf{R}^n, h_o)$ 上，熱核 $k(x,y;t)$ は

$$k(x,y;t) = (4\pi t)^{-n/2}\exp\{-\frac{|x-y|^2}{4t}\}. \tag{41}$$

[K-K], 6 章参照.

命題 5.1. ユークリッド空間 $(X,h) = (\mathbf{R}^n, h_o)$ に対して Fisher 情報計量の熱核写像による引き戻しは次をみたす：

$$(\varphi_t)^* g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{1}{t^2}\{x_i x_j + 2t\,\delta_{ij}\} \tag{42}$$

参考文献

[A-N] S. Amari, H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, Translations of Math. Monographs, 191, AMS, 2000.

[A-Sch] M.T.Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, Ann. Math., 121(1985).

[B] M. Bourdon, Structure Conforme au Bord et Flot Géodesique d'un CAT(−1)-espace, L'Enseigement Mathématique, t.41 (1995).

[B-C-G] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, Entropes et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative, GAFA, 5(1995).

[D-Ea] E. Douady, C. Earle, Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle, Acta Math., 157(1986).

[E] P. Eberlein, *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, The University of Chicago Press, 1944.

[F] T. Friedrich, Die Fisher Information und symplektische Structuren, Math. Nachrichten, 153(1991).

[G] P.B.Gilkey, *The Index Theorem and the Heat Equation*, Publish or Perish, 1974.

[H] S. Helgason, *Differential Geoemtry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.

[I-Sh] M. Itoh, Y.Shishido, Fisher Information Metrics and Poisson Kernels, submitted .

[K-K] 北原晴夫，河上肇，調和積分論，近代科学社，1991.

[P] イ・ゲ・ペトロフスキー，偏微分方程式論，東京図書，　1976.

[S] 酒井　隆，リーマン幾何学，裳華房，1993.

[Sch-Y] R. Schoen, S.T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, Conference Proc. and Lecture Note in Geoemtry and Topology, Intern. Press, 1994.

[Sh-1] Y. Shishido, Geometry of infinite dimensional statistical manifolds, Master thesis, 2004.

[Sh-2] Y. Shishido, Differential Geometry of the Fisher Information Metrics and the Space of Probability Measures, Doctor Thesis, 2007.

[Shi]　志摩裕彦 ヘッセ幾何学，裳華房，2001.