数理解析研究所講究録
第 1589 巻 2008 年 182-186

コイン投げによる k 人勝ち抜きゲームの平均回数の漸近解析 -公平なコインの場合-

南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻　須崎政文
南山大学数理情報学部情報システム数理学科　尾崎俊治

1 はじめに

コイン投げは確率論で論じられる代表的モデルである．本論文では各自が公平なコインを投げて勝負し，N 人から k 人が勝ち抜くゲームを考える．公平なコインで N 人から 1 人が勝ち抜くゲームは [1] によって研究されている．[1] ではゲームが終わるまでの平均回数の近似解を求めることを試みたが，解が少なくとも $\log_2 N$ よりは複雑であることまでしか分からなかった．この研究とは独立に [2] も同じく公平なコインで N 人から 1 人が勝ち抜くゲームの平均回数とそのオーダについて議論した．その結果，平均回数が $O(\log_2 N)$ であること示した．

公平なコインにより N 人から k 人が勝ち抜くゲームの定義は以下の通りとする：

1. N 人から k 人が勝ち抜く．ここで $2 \leq N, 1 \leq k \leq N-1$ である．
2. 公平なコインの表裏を出す確率はそれぞれ 1/2 とする．
3. 全参加者が一斉に同種のコインを投げ，表が出たものが勝ちである．
4. 参加者が全員表あるいは裏を出したら引き分けとして，まったく同じ参加者で再びコインを投げる．
5. 1 回のコイン投げでの勝者の人数を変数 m とする．ここで $1 \leq m \leq N-1$ である．
6. $m = k$ ならば，そこでゲームは終了する．
7. $m < k$ ならば，m 人の勝ち抜きが決定し，残りの参加人数 $N-m$ 人から $k-m$ 人が勝ち抜くゲームとして続ける．
8. $m > k$ ならば，参加人数 m 人から k 人が勝ち抜くゲームとして続ける．
9. 公平なコインにより N 人から k 人が勝ち抜くゲームの回数を確率変数 $FC_{N;k}$ とする．
10. 各コイン投げは独立である．

本論文の新しいアイディアは定義 7. の「$m < k$ ならば，m 人の勝ち抜きが決定し，残りの参加人数 $N-m$ 人から $k-m$ 人が勝ち抜くゲームとして続ける」である．[1] や [2] では勝ち抜く人数が 1 人であるため，目標の人数より表を出した人数が小さくなることを考慮する必要が無く，単に裏が出た者を除外すればよかった．しかし，勝ち抜く人数を一般化したことにより目標の人数より表を出した人数が小さくなることを考慮することが必要になり定義 7. を新しく考えた．また，定義 7. は敗者復活戦と考える事もできる．

本論文では，[3] で求められた公平なコインにより N 人から k 人が勝ち抜くゲームの平均回数が $O(\log_2 N)$ となることを踏まえて，より精密な平均回数の近似式を求めた．その際にブートストラッピング [4, 5] と呼ばれるアルゴリズム解析の分野で用いられる特殊な手法を用いる．

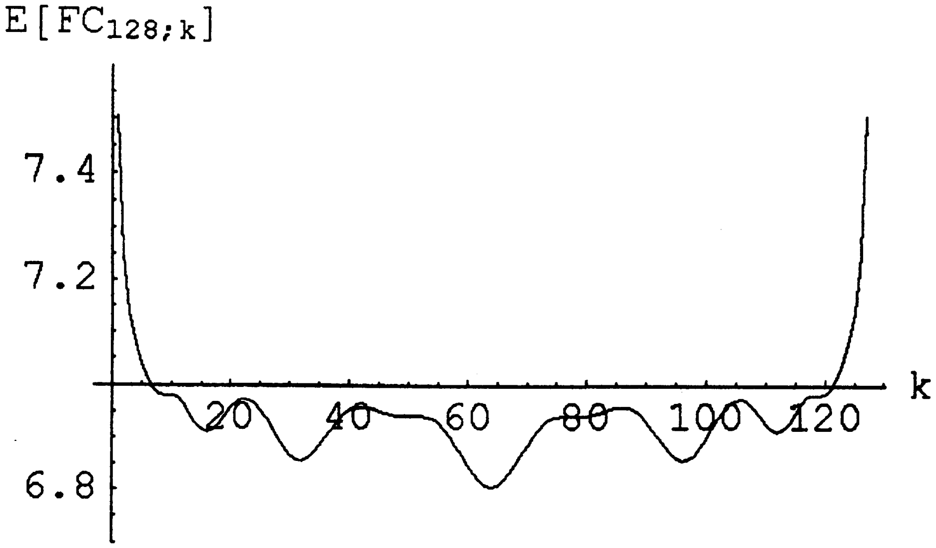

図 1　$N = 128$ の公平なコインによる 1 人勝ち抜きゲームの平均回数

2　平均回数

公平なコインによる k 人勝ち抜きゲームの平均回数は漸化式として

$$E[FC_{N;k}] = 1 + \frac{2}{2^N - 2} + \frac{1}{2^N - 2}\sum_{m=1}^{k-1}\binom{N}{m}E[FC_{N-m;k-m}] + \frac{1}{2^N - 2}\sum_{m=k+1}^{N-1}\binom{N}{m}E[FC_{m;k}] \quad (1)$$

となる．図 1 は $N = 128$ としてコンピュータ上で計算したものである．$k = 64$ を中心に左右対称となるのは問題の定義から明らかである．

式 (1) は N が十分に大きいと

$$E[FC_{N;k}] \approx 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^N \sum_{m=1}^{k-1}\binom{N}{m}E[FC_{N-m;k-m}] + \left(\frac{1}{2}\right)^N \sum_{m=k+1}^{N-1}\binom{N}{m}E[FC_{m;k}] \quad (2)$$

と近似できる（N が十分に大きいと $\frac{2}{2^N-2}$ と $\frac{1}{2^N-2}$ がそれぞれ 0 と $\left(\frac{1}{2}\right)^N$ に近似するため）．

3　ブートストラッピング

ブートストラッピングとは複雑な漸化式の解法の一つであり，一般的には厳密解ではなく近似解を求める解法である．

ブートストラッピングの手順は以下の通りである：

1. 近似解を推測する．
2. 推測した近似解を漸化式に代入する．
3. より密接な近似解が求まる．

4. 2. と 3. を十分に精密な近似解を得るまで繰り返す.

ブートストラッピングを式 (2) に適用する．最初に上界として $E[FC_{N;k}] < N$ と推測しブートストラッピングを l 回適用すると

$$
\begin{aligned}
E[FC_{N;k}] &< l + \frac{N}{2^l} \\
&- \binom{N}{k} \sum_{i=1}^{l-1} (l-i) \left(\frac{1}{2^i}\right)^N \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} \left[(2j+1)^k - (2j)^k\right] \left[(2^i-2j-1)^{N-k} - (2^i-2j-2)^{N-k}\right]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

となる．ただし $l = 0, 1, 2, \cdots$ である．

次に下界として $E[FC_{N;k}] > 0$ と推測しブートストラッピングを h 回適用すると

$$
\begin{aligned}
E[FC_{N;k}] &> h \\
&- \binom{N}{k} \sum_{i=1}^{h-1} (h-i) \left(\frac{1}{2^i}\right)^N \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} \left[(2j+1)^k - (2j)^k\right] \left[(2^i-2j-1)^{N-k} - (2^i-2j-2)^{N-k}\right]
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となる．ただし $h = 0, 1, 2, \cdots$ である．ここで $h = l$ とすると

$$
\begin{aligned}
E[FC_{N;k}] &> l \\
&\binom{N}{k} \sum_{i=1}^{l-1} (l-i) \left(\frac{1}{2^i}\right)^N \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} \left[(2j+1)^k - (2j)^k\right] \left[(2^i-2j-1)^{N-k} - (2^i-2j-2)^{N-k}\right]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる．よって式 (3) と式 (4) の上界と下界を合わせると

$$
\begin{aligned}
& l - \binom{N}{k} \sum_{i=1}^{l-1} (l-i) \left(\frac{1}{2^i}\right)^N \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} \left[(2j+1)^k - (2j)^k\right] \left[(2^i-2j-1)^{N-k} - (2^i-2j-2)^{N-k}\right] \\
& < E[FC_{N;k}] \\
& < l + \frac{N}{2^l} \\
& - \binom{N}{k} \sum_{i=1}^{l-1} (l-i) \left(\frac{1}{2^i}\right)^N \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} \left[(2j+1)^k - (2j)^k\right] \left[(2^i-2j-1)^{N-k} - (2^i-2j-2)^{N-k}\right]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

となる．ただし，十分に精密な近似式を得るには 2^l が N に対して十分に大きくなる必要がある．

図 2 から図 17 は図 1，すなわち $N = 128$ のときの $k = 1, \cdots, 127$ の平均回数にブートストラッピングを 0 回から 15 まで適用したものである．2^l が N に対して十分に大きくなる必要があるので，ここでは $l = 15$ 回までブートストラッピングをおこなっている．

4 おわりに

本論文はブートストラッピングを用いて公平なコインにより N 人から k 人が勝ち抜くゲームの平均回数の近似式を求めた．今後の計画として，今回求めた近似式をより簡単な形で求める予定である．また，ブートストラッピングを用いて分散の近似式を求めることやコインの表と裏の確率を p と $q = 1 - p$ としたときの平均と分散の近似式も求める予定である．

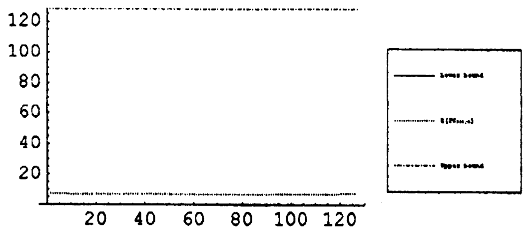

図 2　$l=0$ 回のブートストラッピング

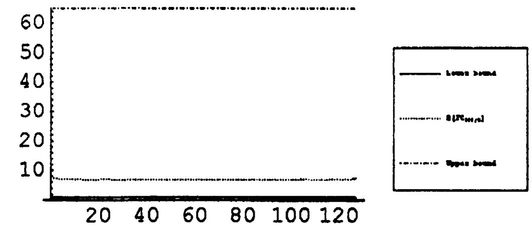

図 3　$l=1$ 回のブートストラッピング

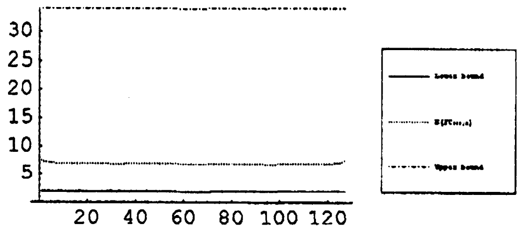

図 4　$l=2$ 回のブートストラッピング

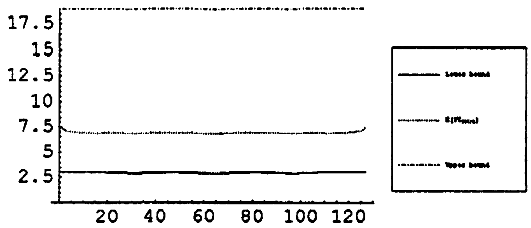

図 5　$l=3$ 回のブートストラッピング

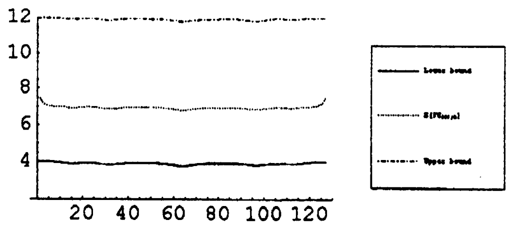

図 6　$l=4$ 回のブートストラッピング

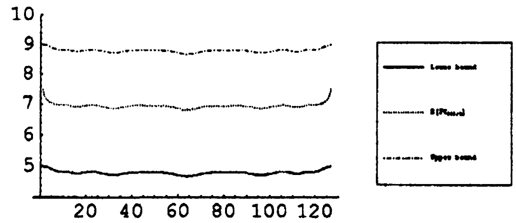

図 7　$l=5$ 回のブートストラッピング

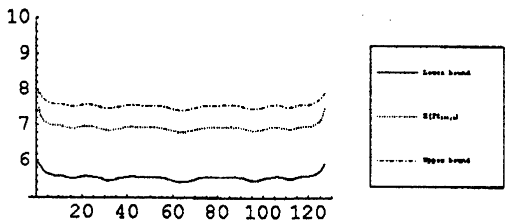

図 8　$l=6$ 回のブートストラッピング

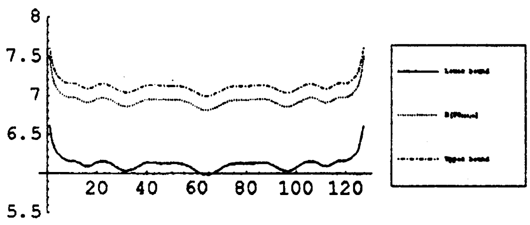

図 9　$l=7$ 回のブートストラッピング

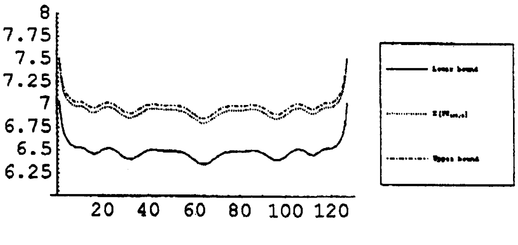

図 10　$l=8$ 回のブートストラッピング

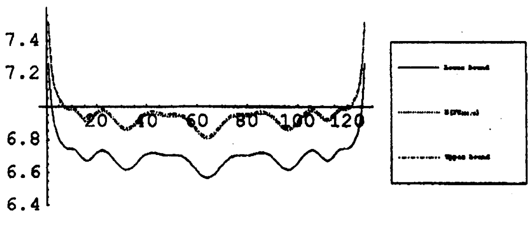

図 11　$l=9$ 回のブートストラッピング

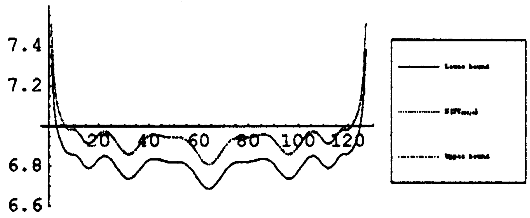

図 12　$l = 10$ 回のブートストラッピング

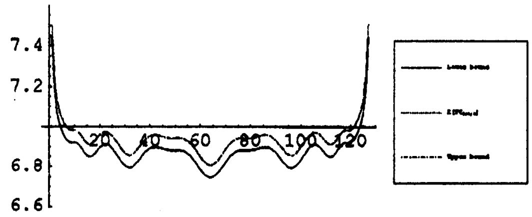

図 13　$l = 11$ 回のブートストラッピング

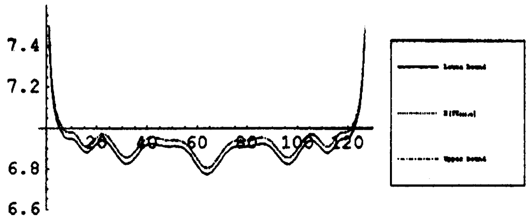

図 14　$l = 12$ 回のブートストラッピング

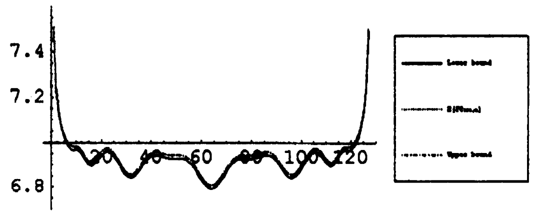

図 15　$l = 13$ 回のブートストラッピング

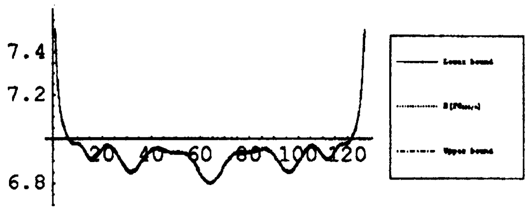

図 16　$l = 14$ 回のブートストラッピング

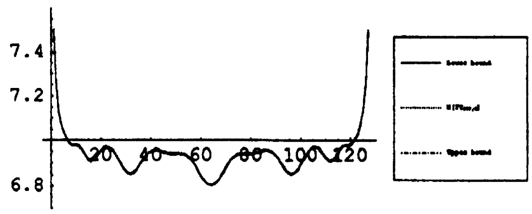

図 17　$l = 15$ 回のブートストラッピング

謝辞　本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (A)16201035，(C)18510138 および 2008 年度南山大学パッヘ研究奨励金 I-A-2 による助成のもとで行われたものである．

参考文献

[1] F.T. Bruss and C.A. O'Cinneide, *On the Maximum and Its Uniqueness for Geometric Random Samples*, Journal of Applied Probability, Vol. 27, No. 3, pp.598-610, 1990.

[2] 伊藤暁，井上克司，王躍，岡崎世雄，ジャンケンの計算量，電子情報通信学会論文誌 (D)，Vol.J86，No.7，pp.452-457，2003.

[3] 須崎政文，尾崎俊治，勝ち抜きコイン投げの平均とそのオーダ，京都大学数理解析研究所講究録 1559「最適化における確率モデルの展開と応用」，2007，pp.15-21.

[4] R. Sedgewick and P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1996.

[5] R. Graham, D.E. Knuth and O. Patashink, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1994.