数理解析研究所講究録
750巻 1991年 43-51

特異摂動の代数解析

京大数理研　佐藤幹夫
近畿大理工　青木貴史
京大数理研　河合隆裕
京大　　理　竹井義次

§0.序

Schrödinger方程式

$$\left(-h^2\frac{d^2}{dq^2}+Q(q)\right)\psi = 0$$

の Planck定数 h を微小パラメータと見た特異摂動としての研究は，局所的性質については良く解明されている．例えば

$Q(q)$ no singularity　⇒　解は正則

regular singular　⇒　局所解は explicit に書ける．

しかし大域的にはどうなっているかは良くわかっていない（$q\in C$）．ある場合は WKB解を使って大域的な接続の状況が簡単に記述できる．Cf．

Voros: Ann. Inst. H.Poincaré 39(1983)211-338

ではそのような接続公式を与えている．今日はこの接続公式をうまく修正して確定特異点型のときに解の大域的なつながり方の記述を与える．以下

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2}+x^2Q(q)\right)\psi(q)=0$$

を考え，$x=h^{-1}$ を large parameter と見做す．

$$Q(a)=\frac{F(q)}{G(q)^2},\quad F,\ G\in C[q],$$

$$\deg F=2g+2,\quad \deg G=g+2,\quad g\geqq 0 \text{ は整数}$$

とする．（f は $\sqrt{Q}$ の Riemann面の genus であり，$g=0 \Longleftrightarrow$ 超幾何．

$$F(q)=\text{const.}(q-a_0)\cdots(q-a_{2g+1}),$$

$$G(q)=\text{const.}(q-b_0)\cdots(q-b_{g+1})$$

と分解できる．

$a_0,\ldots,a_{2g+1}$ は turning points,

$b_0,\ldots,b_{g+1},b_{g+2}=\infty$ は regular singular points

となる．

仮定 1　a_j, b_k はすべて互いに異なる.

さて

$$\pi_1(P^1(C)\setminus\{b_0,\ldots,b_{g+2}\}) \to GL_2$$

をモノドロミー表現とする. 目標はこのモノドロミー表現を WKB 解を用いて explicit に与えることである.

§1. WKB 解

q_0 を固定点とし

$$\psi = \exp\left(\int_{q_0}^{q} S(q')dq'\right)$$

を方程式に代入すると

$$S^2 + \frac{dS}{dq} = x^2 Q(q)$$

という Riccati 型方程式を得る. large parameter x に着目して, $\frac{1}{x}$ で展開できる解を探す:

$$\exists S = xS_{-1}(q) + S_0(q) + x^{-1}S_1(q) + x^{-2}S_2(q) + \cdots$$

これよりまず

$$S_{-1}^2 = Q(q) \qquad \therefore\ S_{-1} = \pm\sqrt{Q}.$$

一般に

$$S_{n+1} = -\frac{1}{2S_{-1}}\left(\sum_{k=0}^{n} S_k\cdot S_{n-k} + \frac{dS_n}{dq}\right) \qquad (n \geqq -1)$$

実際には $S = S_{\mathrm{odd}} + S_{\mathrm{even}}$ と分ける.

$$S_{\mathrm{odd}} = xS_{-1}(q) + x^{-1}S_1(q) + \cdots \qquad \text{(奇数次)}$$

$$S_{\mathrm{even}} = S_0(q) + x^{-2}S_2(q) + \cdots \qquad \text{(偶数次)}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dq}\log S_{\mathrm{odd}} = S_{\mathrm{even}}$$

となる. よって even の方は積分が実行できて

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(q)}}\exp\left(\pm\int_{q_0}^{q} S_{\mathrm{odd}}(q')dq'\right)$$

の形となる. これを以下 WKB 解と呼ぶ.

注意　$S_{\mathrm{odd}}(q)$ は各 b_j に一位の極を持ち, その留数は

$$\mathrm{Res}_{q=b_j} S_{\mathrm{odd}}(q) = \sqrt{x^2\alpha_j + \tfrac{1}{4}},$$

ここに　$Q(q) = \dfrac{\alpha_j}{(q-b_j)^2} + \cdots$

さて, 上の級数は一般には全然収束しない. Voros 達はこれに意味を与えるために Borel 総和を考えた. つまり, 大雑把に云って, Borel 変換し, Laplace 変換で戻して正則解として意味を付ける. まだ Borel 変換したものの性質を調べることが中途で, Borel 総和できるかどうかは未解決である. 今日はこのことを仮定して, その後がうまく行くという話をする.

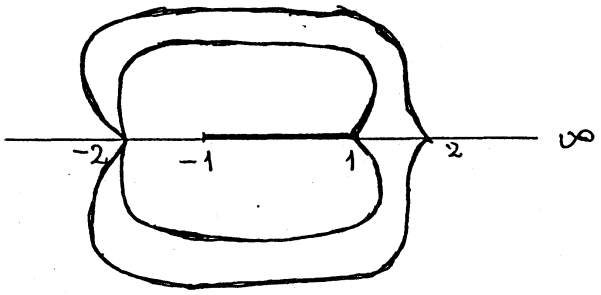
§2.接続公式

定義　Stokes line（lineと云っても曲線である）とは，方向場

$$\mathrm{Im}\sqrt{Q}dq = 0$$

の解曲線で，turning points $a_0, \ldots, a_{2g+1}$ より出るもののことを云う．

例　$Q(q) = \dfrac{(q-1)(q-2)}{((q+1)(q+2))^2}$ のときは次図の通り：



一般に各 turning point からは二本の Stokes line が出る．turning point から出た Stokes line は別の turning point に入るか，確定特異点のどれかに流れ込む．

Stokes lines にはさまれた領域を Stokes region と呼ぶ．

仮定 2　(i) turning points を結ぶような Stokes line は存在しないとする（何故こんな仮定が必要かは説明しない）．

(ii) $\alpha_j \notin R^-$（これは technical な条件）が $\forall j$ に対し成立（$Q(q) = \dfrac{\alpha_j}{(q-\alpha_j)^2} + \cdots$ としている）．

Basic facts(Conjecture)

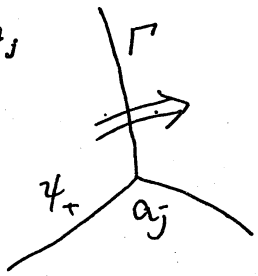
(I) 各 Stokes region では Borel 総和法を使って得られる WKB の解釈は実際に well defined．Stokes line 上では WKB 解は不連続となり，接続現象が起きる．それは完全に記述できる．

(II) "Fundamental connection formula"

a_j : a turning point

Γ : Stokes line issuing from a_j

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(q)}}\exp\left(\pm\int_{q_0}^{q} S_{\mathrm{odd}}(q')dq'\right)$$



に対し，Γを横切るとき次のいずれかが成り立つ：

(a) $\psi_+ \to \psi_+ \pm i\psi_-$, $\psi_- \to \psi_-$

(b) $\psi_+ \to \psi_+$, $\psi_- \to \psi_- \pm i\psi_+$

ここに ＋は反時計回りに，－は時計回りに，Γを横切った場合の変化に対応する．

解は Γの上に singularity は無いのだから接続はできる．しかし接続したもの

は別の漸近表示に変わる．(q)，(b)のいずれが起こるかを判別する方法も有る．

注 $\sqrt{Q(q)}=\dfrac{\sqrt{\alpha_k}}{q-b_k}+\cdots$ とすると，$\mathrm{Re}\sqrt{\alpha_k}<0$ なら(a)が，$\mathrm{Re}\sqrt{\alpha_k}>0$ なら(b)が起きる．よって Γ がどこの確定特異点に流れ込むかでどちらが起こるか決まる．

実際にこの接続公式を用いて WKB 解のモノドロミーが計算できる．

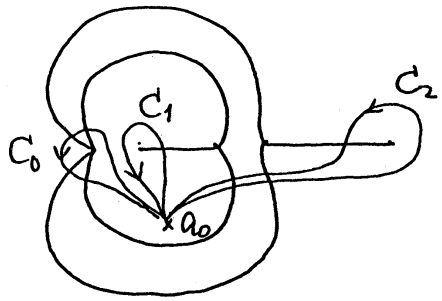
§3. モノドロミーの計算

どんな例でもできるが，先に掲げた例について計算をやってみる．

$$Q(q)=\frac{(q-1)(q-2)}{((q+1)(q+2))^2},$$

$$a_0=1,\quad a_1=2,$$

$$b_0=2,\quad b_1=-1,\quad b_2=\infty$$



左図の　　のカットは $\sqrt{Q}$ を一価に定義するためのものである．($\sqrt{Q}\sim\frac{1}{q}$ at $q\sim\infty$ という分枝を取る．)

$$\psi_\pm=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(q)}}\exp\left(\pm\int_{q_0}^{q}S_{\mathrm{odd}}(q')dq'\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(q)}}\exp\left(\pm\int_{a_0}^{q}S_{\mathrm{odd}}(q')dq'\right)\cdot\exp\left(\pm\int_{q_0}^{a_0}S_{\mathrm{odd}}(q')dq'\right)$$

と変形する（最後の因子は q に依らぬ．上図について

A_j : C_j に沿うモノドロミー行列，$j=0,1,2$

を求めれば良い．

まず A_1 については，C_1 に沿って b_1 を回ると

$$\psi_+^0\to\psi_+^0-i\psi_-^0,$$

$$\psi_-^0\to\psi_-^0$$

よって

$$\psi_+\to\psi_+-iu_0\psi_-,\quad ここに\quad u_0=\exp\left(2\int_{q_0}^{a_0}S_{\mathrm{odd}}(q')dq'\right)$$

$$\psi_-\to\psi_-.$$

定義　$u_j=u_{\gamma_j}:=\exp\left(\int_{\gamma_j}S_{\mathrm{odd}}dq'\right)$．ここに γ_j は a_j を回る道．

よって

$$\psi_+\to\psi_+'-iu_0\psi_-',$$

$$\psi_-\to\psi_-'$$

ここに $\sqrt{S_{\mathrm{odd}}(q)}$ の分枝も変わるので，

$$\psi_\pm'=-\exp\left(\pm\oint_{b_1}S_{\mathrm{odd}}dq'\right)\psi_\pm$$

となり，この右辺の因子 $\nu_1^\pm$ だけ狂う．そこで

定義　$\nu_k^\pm:=\exp\left(2\pi i\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{x^2\alpha_k+\frac{1}{4}}\right)\right)$

すると結局 C_1 に沿うモノドロミーは

$$\psi_+ \to \nu_1^+\psi_+ - iu_0\nu_1^-\psi_-$$
$$\psi_+ \to \nu_1^-\psi_-$$

行列表現で

$$b_+\psi_+ + b_-\psi_- \longrightarrow b_+'\psi_+ + b_-'\psi_-$$

とすると

$$\begin{bmatrix} b_+' \\ b_-' \end{bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ b_1\text{での} \\ \text{局所モノドロミー}}}{\begin{bmatrix} \nu_1^+ & 0 \\ 0 & \nu_1^- \end{bmatrix}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stokes 係数}}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -iu_0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} b_+ \\ b_- \end{bmatrix}$$

この右辺の第一因子が A_1 を与える.

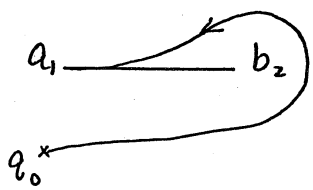
A_2 の計算

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -iu_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -iu_1^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2^+ & 0 \\ 0 & \nu_2^- \end{bmatrix}$$

$$\times \underset{\substack{\uparrow}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -iu_1\nu_2^+/\nu_2^- & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & iu_1^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & iu_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注　ここは a_1 から見て負の向きに回っているから $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -iu_1 & 1 \end{bmatrix}$ とはならない.

$$\psi_+ \to \psi_+ - i\exp\left(2\int_{q_0}^{a_1} S_{\mathrm{odd}}\,dq'\right)\psi_-,$$
$$\psi_- \to \psi_-$$



において，積分路は右図のようだから

$$\psi_+ \to \psi_+ - iu_1\frac{\nu_2^+}{\nu_2^-}\psi_-$$

のように b_2 における留数の分が加わる.

5つの Stokes lines を越え，一つの確定特異点を回るので，6つの積となる.

A_0 の計算

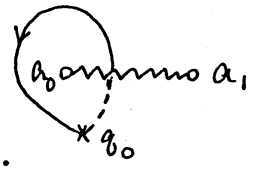
$$A_0 = \begin{bmatrix} \nu_0^+ & 0 \\ 0 & \nu_0^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -iu_0^{-1}\nu_0^-/\nu_0^+ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & -iu_1^{-1}\nu_0^-/\nu_0^+ \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -iu_1^{-1}\nu_0^-/\nu_0^+ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & -iu_0^{-1}\nu_0^+/\nu_0^- \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定義 $u_{jk} := u_j^{-1}u_k = \exp\int_{-\gamma_j+\gamma_k} S_{\mathrm{odd}}\,dq'$

注 $u_{01} = \exp\int_{a_0\sim a_1} S_{\mathrm{odd}}\,dq'$ となる.

$-\gamma_0 =$ 

何者, 右図. 今は sheet を変えるだけで符号が変わるから.

さて basic facts は conjecture と云ったが, Stokes 係数はこれ以外には有り得ないことは証明できる(そこまでは云えないかな?). $C_2C_1C_0 = 1$ だから $A_0A_1A_2 = id$ でなければならないが, 上の例については $u_{01} = -\nu_0^-\nu_1^-\nu_2^-$ を使うと確認できる.

今の例は古典的超幾何なので古典的な方法でもモノドロミーが計算できるが, これと我々の計算を比べると代数的に同型なことが確認できる. 勝手なポテンシャルについても我々の方法は使えるところが強い.

注意 1 位相的なパターンのみが問題なので,

Stokes lines の configuration

$\Longleftrightarrow$ planer graph on $S^2 = P^1(C)$

となり, グラフを与えると計算できる.

vertex : turning points ∘

regular singluar points ×

edge : Stokes lines

face : Stokes regions

以下これを Stokes graph と呼ぶ. いろんな性質を持っている:

* 確定特異点の個数 − turning points の個数 = 4
* 各 turning points からは 3 本の edge が出る.
* すべての面は四辺形になっている.
* 連結

(turning points の間に edge が無いことは仮定している.)

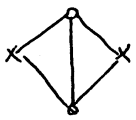
これから次のような一対一対応の存在がわかる:

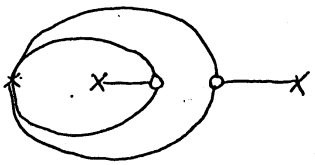
$\{\hat{G}$: Stokes graphs$\}$

$\Longleftrightarrow$ $\{G$: S^2 上の連結平面グラフで各頂点から 3 本の辺が出ているもの$\}$

$\Longleftrightarrow$ $\{G^*$: S^2 上の連結平面グラフで各面は 3 角形$\}$

実際, turning points のみを頂点とし ∘ と ∘ を結んで三角形に分けると第一の対応が得られる. 第二の対応は × を頂点とすれば良い. よって S^2 の三角形分割として分類ができてしまう.





$g=0$ のときの分類は次の通り：

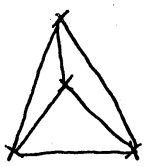
$\hat{G}$ ：　(2, 2, 2)　　(4, 1, 1)

G ：

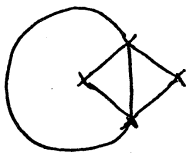
G^* ：

$g=1$ のとき，G^* のみ記すと

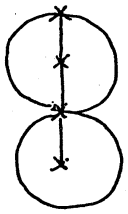
(3, 3, 3, 3)



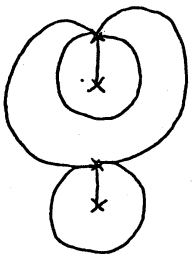
(4, 4, 2, 2)



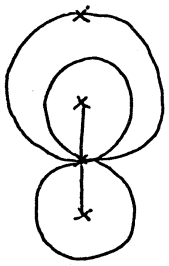
(6, 3, 2, 1)



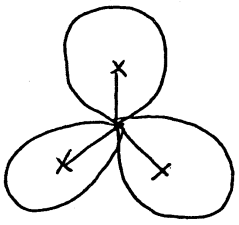
(5, 5, 1, 1)



(8, 2, 1, 1)



(9, 1, 1, 1)

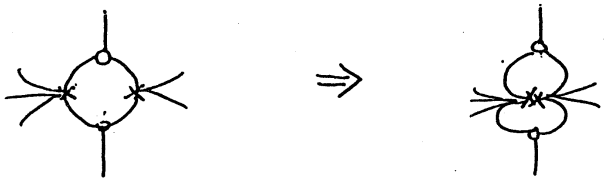


注意 2　合流型の取扱いも比較的見通し良く議論できる：

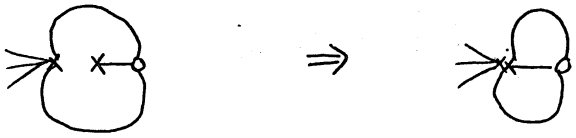
b_j o———o b_k ⟶ 一つの不確定特異点（rank 1 の）

グラフの合流というのを考えると，本質的に次の二つのタイプしか起こり得ない：

一つは



もう一つは



それぞれの場合に積分路をうまく選ぶと WKB 解の意味でのもとの接続行列が，WKB 解を用いた場合の合流した方の Stokes 係数に収束することがわかる．実際には不確定特異点のまわりで

$$\psi_{\pm} = {}^{\exists}C_{\pm}\varphi_{\pm} \quad (\varphi_{\pm}\text{は形式解})$$

となるので，こうして求めたものは普通の意味での Stokes multiplier となる．

できた特異点の rank が高いときは今進行中だが，同じようにできるだろう．

今後の問題

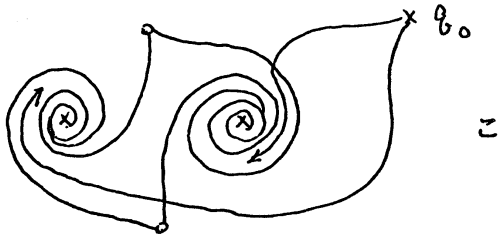
Borel summability

非線型化，高階化

多変数化

など

実は図をていねいに書くと，合流前は対数螺線で入り込む：



このように積分路をとる

$C_{\pm}$ の方も WKB で書ける：

$$\int_{a_j}^{b}(S_{\mathrm{odd}}-S_{-1})dq + \mathrm{finite}$$

いわゆる Voros 係数

コメント

最後の合流型のところは真島君に公用電話で教えてもらったのだが，大変有用であった．Pham との関係は？ 彼は singularity が無いときにやっている．我々の仕事に stimulating であった．我々の動機は 20 年前の物理の論文

Bender & Wu: Anharmonic oscillator, Phys. Rev. 184 (1969) 1231–1260

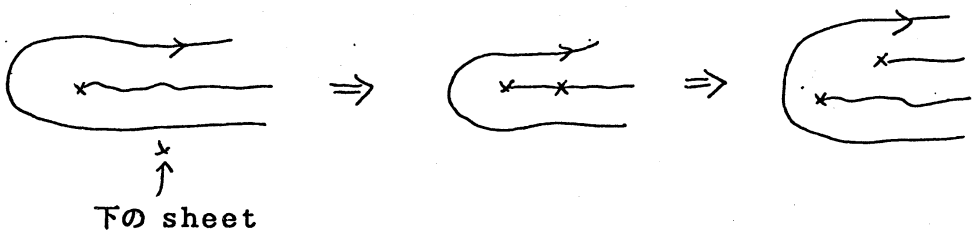
にある．彼等は quantization condition に注目しているが，我々は大域的モノドロミーの計算に主眼を置いている．

$\psi_{\pm}$ を WKB 解とし $(\psi_{\pm})_B(\xi)$ を $\psi_{\pm}$ の Borel 変換とすれば，Borel resummation は

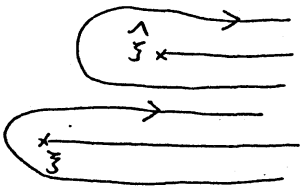
$$\int e^{-\xi x}(\psi_{\pm})_B(\xi, q)d\xi$$

他の特異点がスリットを横切るときに不連続が生じる：

$q \sim a_j$ のとき



最後のものは元来の WKB 解では無くて次のように二つに分れる：



特異点 gap を見る

$$\Delta_{\xi=\hat{\xi}}(\psi_+)_B = i(\psi_-)_B$$

この式は数学的に確認できる．しかし解析接続できて積分が well defined かどうかはまだ conjecture の部分

なお最近講演者達による次のプレプリントができた：

The Bender-Wu analysis and the Voros theory, RIMS-732 (December 1990)