

## Hyperelliptic surfaces 上の有理点の分布について

東北大学理学部 森田康夫 (Yasuo Morita)

東北大学理学部 佐藤 篤 (Atsushi Sato)

1.  $k$  を有限次代数体とし,  $V$  を  $k$  上定義された非特異な射影代数多様体とする. このとき,  $V$  上の  $k$ -有理点, すなわち体  $k$  に座標をもつような点全体のなす集合  $V(k)$  を求めることは, 現代的な不定方程式論として, 数論における重要な問題のひとつである.

集合  $V(k)$  の構造を調べる方法のひとつとして, height function を使って多様体  $V$  上の  $k$ -有理点の分布を調べるものがある. それは次のような方法である.

$\mathcal{L}$  を  $V$  上の ample な invertible sheaf とし,  $h_{\mathcal{L}}$  を  $\mathcal{L}$  に関する (logarithmic) height とする. 定数  $M$  に対し,  $V$  上の  $k$ -有理点で, height が  $M$  を超えないようなものの個数を  $N_{\mathcal{L}}(V(k); M)$  と書くことにする:

$$N_{\mathcal{L}}(V(k); M) = \#\{P \in V(k); h_{\mathcal{L}}(P) \leq M\}.$$

(各定数  $M$  に対して,  $N_{\mathcal{L}}(V(k); M)$  は有限な値になる.) このとき, 関数  $M \mapsto N_{\mathcal{L}}(V(k); M)$  の性質, 特に  $M \rightarrow \infty$  としたときの漸近的な挙動を調べることによって, 集合  $V(k)$  の構造に関する情報を得ることができる. 標題に掲げた「有理点の分布」とは, この関数の漸近的な挙動のことを指す.

$A$  を体  $k$  上定義されたアーベル多様体とする. このとき, 集合  $A(k)$  は群多様体  $A$  の群演算に関して有限生成アーベル群の構造をもつ (Mordell-Weil の定理).  $r$  をアーベル群  $A(k)$  の rank とする. このとき,  $r = 0$  ならば  $A(k)$  は有限アーベル群であるから, 当然ながら  $N_{\mathcal{L}}(A(k); M)$  は有界な関数である. Néron [7] は 1965 年に, アーベル多様体上の height function に関する研究の応用として,  $r > 0$  ならば,  $M \rightarrow \infty$  のとき,

$$N_{\mathcal{L}}(A(k); M) = cM^{r/2} + O(M^{(r-1)/2})$$

が成り立つことを示した ( $O$  は Landau の記号である). ここで,  $c$  は invertible sheaf  $\mathcal{L}$  の algebraically equivalent class のみによって定まる正の実数である.

ところで, 最も簡単な射影多様体である  $n$  次元射影空間  $P^n$  に対しては,  $\mathcal{L} =$

$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1)$  として,  $M \rightarrow \infty$  のとき,

$$N_{\mathcal{L}}(\mathbf{P}^n(k); M) = ce^{(n+1)M} + \begin{cases} O(Me^M), & \text{if } n = 1, d = 1, \\ O(e^{(n+1-1/d)M}), & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つことを Schanuel[9] が 1979 年に示している. ここで,  $d$  は代数体  $k$  の次数で,  $c$  は  $k$  の類数や Dedekind のゼータ函数の特殊値等を使って具体的に書ける正の実数である.

このことは射影空間上の有理点の個数はアーベル多様体上のそれに比べてはるかに多いということを示している. また, これら 2 つの例より, 一般の多様体  $V$  と  $V$  上の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対して, 函数  $N_{\mathcal{L}}(V(k); M)$  の漸近的な挙動を調べることは数論として意味があるということが推測される.

この報告では, 多様体  $V$  として超楕円曲面をとった場合における, 有理点の分布を調べることを目標とする.  $S$  を体  $k$  上定義された超楕円曲面とする. このとき, 2次元アーベル多様体  $A$  と,  $A$  の自己同型群の有限部分群  $G$  が存在して,  $S$  は商多様体  $A/G$  と同型になることが知られている. 従って, アーベル多様体上の有理点に関する理論を基にして,  $S$  上の有理点を調べることができるであろうということが期待される. しかし, アーベル多様体  $A$ , 部分群  $G$  および  $A$  から  $S$  への自然な写像は, 元々考えていた体  $k$  上定義されているとは限らない (上のようなことが自由にできるのは代数閉体上で考えた場合である). よって, アーベル多様体に関する理論を自由に使うためには,  $S$  や  $A$  に合わせて体  $k$  を改めて大きくとり直さなければならない (体  $k$  を大きくとり直しても,  $S$  が  $k$  上定義されているという状況はもちろん変わらない). このように環境を整備すると, アーベル多様体  $A$  に関する言葉を使って,  $S$  上の有理点を記述することができる (定理 3.8). そうして得られた結果に, アーベル多様体上の height function の理論を適用することにより, 有理点の分布に関する次の定理を得ることができる. これは, 超楕円曲面上の有理点の分布は, アーベル多様体上のそれと, 質的にはほぼ同じであるということをいっている.

**定理.**  $k$  を有限次代数体,  $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とする. このとき,  $k$  の有限次拡大体  $k'$  で, 次の性質をもつものが存在する:

$K$  を  $k' \subset K$  であるような有限次代数体とするとき,  $S$  の  $K$ -有理点の全体  $S(K)$  が有限集合でない限り,  $S$  上の任意の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対して,  $M \rightarrow \infty$  のとき,

$$N_{\mathcal{L}}(S(K); M) = cM^{r/2} + O(M^{(r-1)/2})$$

が成り立つ. ここで,  $r$  は  $\mathcal{L}$  にはよらずに  $K$  のみによって定まる正の整数で,  $c$  は  $K$  および  $\mathcal{L}$  の algebraically equivalent class によって定まる正の実数である.

上の定理において、超楕円曲面  $S$  は体  $k'$  上でも定義されていることに注意すると、 $k'$  として  $k$  自身がとれることもあるということがわかる。そのようなときに、 $k$  は「十分大きい」と呼ぶことにすると、この定理は次のように述べることができる。

**定理\***.  $k$  を有限次代数体、 $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とし、さらに、 $k$  は「十分大きい」とする。このとき、 $S$  の  $k$ -有理点の全体  $S(k)$  が有限集合でない限り、 $S$  上の任意の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対して、 $M \rightarrow \infty$  のとき、

$$N_{\mathcal{L}}(S(k); M) = cM^{r/2} + O(M^{(r-1)/2})$$

が成り立つ。ここで、 $r$  は  $\mathcal{L}$  にはよらない正の整数で、 $c$  は  $\mathcal{L}$  の algebraically equivalent class のみによって定まる正の実数である。

以下、上に述べた定理の証明の概略を与え、最後に定理の系を述べる。詳しくは [8] を参照されたい。

全体を通して、多様体といったときには全て体  $\bar{\mathbb{Q}}$  上定義された（絶対既約な）代数多様体を意味するものとし、morphism, sheaf 等は体  $\bar{\mathbb{Q}}$  上定義されているものだけを考える。また、以下の記号は断りなしに用いる。

- $A$  をアーベル多様体とするとき、 $\text{Aut}(A)$  で  $A$  の代数多様体としての自己同型群を表し、 $\text{Aut}(A, O)$  で  $A$  のアーベル多様体としての自己同型群を表す。また、 $A$  が体  $k$  上定義されているとき、 $\text{Aut}_k(A)$  で体  $k$  上定義されているような  $\text{Aut}(A)$  の元全体のなす部分群を表す。 $\text{Aut}_k(A, O)$  についても同様である。

- アーベル群  $A$  に対し、位数が有限であるような  $A$  の元全体のなす部分群を  $A_{\text{tor}}$  と書く。

- $G$  を群、 $g, g' \in G$  とするとき、 $g$  が生成する  $G$  の部分群を  $\langle g \rangle$  で表す。また、 $\{g, g'\}$  が生成する  $G$  の部分群を  $\langle g, g' \rangle$  で表す。

**2.**  $S$  を非特異かつ完備な代数曲面で、第1種例外曲線を含まないものとする。 $S$  の小平次元が0で、2次元ベッチ数が2であるとき、 $S$  は超楕円曲面(hyperelliptic surface)と呼ばれる。

超楕円曲面は2つの楕円曲線の直積と isogenous であるような2次元アーベル多様体  $A$  の、(代数多様体としての)自己同型群の有限部分群  $G$  による商多様体  $A/G$  として表される。この事実は既に [3] の中に述べられているが、次の形は [2] による。

**定理 2.1.** 任意の超楕円曲面  $S$  は楕円曲線  $E_1, E_2$  および  $\text{Aut}(E_1) \times \text{Aut}(E_2)$  の有限部分群  $G$  によって、

$$S \cong (E_1 \times E_2)/G$$

と表される。楕円曲線  $E_1, E_2$  および部分群  $G$  は以下で与えられる。

- (2a)  $E_1, E_2$  任意,  $G = \langle g \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, -P_2)$ ,  $T_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = 2$ .
- (2b)  $E_1, E_2$  任意,  $G = \langle g, g' \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, -P_2)$ ,  $g' : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T'_1, P_2 + T_2)$ ,  
 $T_1, T'_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = \text{order } T'_1 = 2$ ,  $\langle T_1 \rangle \cap \langle T'_1 \rangle = \{O\}$ ,  
 $T_2 \in E_2(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_2 = 2$ .
- (3a)  $E_1$  任意,  $j(E_2) = 0$ ,  $G = \langle g \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, [\rho]^2 P_2)$ ,  $T_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = 3$ .
- (3b)  $E_1$  任意,  $j(E_2) = 0$ ,  $G = \langle g, g' \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, [\rho]^2 P_2)$ ,  $g' : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T'_1, P_2 + T_2)$ ,  
 $T_1, T'_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = \text{order } T'_1 = 3$ ,  $\langle T_1 \rangle \cap \langle T'_1 \rangle = \{O\}$ ,  
 $T_2 \in E_2(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_2 = 3$ ,  $[\rho]^2 T_2 = T_2$ .
- (4a)  $E_1$  任意,  $j(E_2) = 1728$ ,  $G = \langle g \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, [i]P_2)$ ,  $T_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = 4$ .
- (4b)  $E_1$  任意,  $j(E_2) = 1728$ ,  $G = \langle g, g' \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, [i]P_2)$ ,  $g' : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T'_1, P_2 + T_2)$ ,  
 $T_1, T'_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = 4$ ,  $\text{order } T'_1 = 2$ ,  $\langle T_1 \rangle \cap \langle T'_1 \rangle = \{O\}$ ,  
 $T_2 \in E_2(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_2 = 2$ ,  $[i]T_2 = T_2$ .
- (6a)  $E_1$  任意,  $j(E_2) = 0$ ,  $G = \langle g \rangle$ ,  
 $g : (P_1, P_2) \mapsto (P_1 + T_1, [\rho]P_2)$ ,  $T_1 \in E_1(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $\text{order } T_1 = 6$ .

ここで,  $j(E_2)$  は楕円曲線  $E_2$  の  $j$ -invariant である。また,  $[\rho]$  は  $\text{Aut}(E_2, O)$  の位数6の元,  $[i]$  は  $\text{Aut}(E_2, O)$  の位数4の元である。

$A = E_1 \times E_2$  とし,  $\pi : A \rightarrow S$  を自然な写像とする。このとき,  $A$  は2次元アーベル多様体で,  $\pi$  は finite morphism になる。また,  $G$  は  $\text{Aut}(A)$  の部分群ともみなせる。

### 注意 2.2. 自然な projection

$$G \longrightarrow \text{Aut}(E_1), \quad G \longrightarrow \text{Aut}(E_2)$$

は共に群の単射準同型になることが容易に確かめられる。これら2つの写像の image をそれぞれ  $G_1, G_2$  と書くことにする。また,  $\text{pr}_1 : A \rightarrow E_1$  を projection とし,

アーベル多様体  $A$  の単位元  $O = (O_1, O_2)$  の  $G$ -軌道の  $E_1$  への projection  $\text{pr}_1(O^G)$  を  $\Gamma$  と書く. このとき,  $\Gamma$  は  $T_1$ , または  $T_1$  と  $T_1'$  で生成される  $E_1(\bar{\mathbb{Q}})$  の有限部分群になり, 群  $G_1$  は  $\Gamma$  の点による translation の全体より成る.

$P = (P_1, P_2) \in A(\bar{\mathbb{Q}})$ ,  $f = (f_1, f_2) \in G$  に対し,

$$\text{pr}_1(f(P)) = f_1(P_1) = P_1 + f_1(O_1) = P_1 + \text{pr}_1(f(O))$$

が成り立ち, 従って,

$$\text{pr}_1(P^G) = P_1^{G_1} = P_1 + \Gamma$$

が成り立つ. また, 写像

$$G \longrightarrow \Gamma, \quad f \longmapsto \text{pr}_1(f(O))$$

は群の同型である.

$\Gamma \subset E_1(\bar{\mathbb{Q}})$  はもちろん有限部分群であるから, 楕円曲線  $E$  および isogeny  $\phi: E_1 \rightarrow E$  で  $\text{Ker } \phi = \Gamma$  となるものが (同型の差を除いて一意的に) 存在する. この  $E$  は楕円曲線  $E_1$  の, 部分群  $G_1 \subset \text{Aut}(E_1)$  による商多様体  $E_1/G_1$  に他ならない. 従って, 次のような図式が得られたことになる.

$$\begin{array}{ccc} A = E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E_1 \\ \pi \downarrow & & \phi \downarrow \\ S \cong A/G & & E \cong E_1/G_1 \end{array}$$

**3.**  $k$  を有限次代数体,  $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とする. このとき, 定理 2.1 により,  $S$  は体  $\bar{\mathbb{Q}}$  上定義された楕円曲線  $E_1, E_2$  および 2次元アーベル多様体  $A = E_1 \times E_2$  の自己同型群の有限部分群  $G \subset \text{Aut}(A)$  によって,  $\bar{\mathbb{Q}}$  上  $S \cong A/G$  と表される. そこで, 以下本節を通し, このようなことが体  $k$  上でなされているものとする. すなわち, 次を仮定する.

- 1°  $E_1, E_2$  は共に  $k$  上定義されている;
- 2°  $E_1(k) \neq \emptyset, E_2(k) \neq \emptyset$ ;
- 3° 全ての  $f \in G$  は  $k$  上定義されている;
- 4° 自然な写像  $\pi$  は  $k$  上定義されている.

あとで示すように, 1節で述べた定理における,  $k$  の拡大体  $k'$  としては, 上の仮定 1°-4° をみたすようなものをとればよい (仮定 1°-4° をみたすような,  $k$  の有限次拡大体が存在することは明らかであろう). この仮定は次のことを含んでいる.

- 5°  $A = E_1 \times E_2$  は  $k$  上定義された 2 次元アーベル多様体;  
 6°  $T_1, T_1' \in E_1(k)$ ,  $T_2 \in E_2(k)$ ;  
 7° (3a), (3b), (6) においては  $\rho = \frac{1+\sqrt{-3}}{2} \in k$ ,  $[\rho] \in \text{Aut}_k(E_2, O)$ ;  
 8° (4a), (4b) においては  $i = \sqrt{-1} \in k$ ,  $[i] \in \text{Aut}_k(E_2, O)$ .  
 3°, 4° は, 任意の  $P \in A(\bar{Q})$  および  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{Q}/k)$  に対して,

$$(f(P))^\sigma = f(P^\sigma), \quad (\pi(P))^\sigma = \pi(P^\sigma)$$

が成り立つということをいっている。これらを使うと,  $P \in A(\bar{Q})$  に対し,  $\pi(P) \in S(k)$  となるためには  $P$  の  $G$ -軌道  $P^G$  が集合として体  $k$  上定義される (i.e.  $\text{Gal}(\bar{Q}/k)$  の作用の下に不変になる) ことが必要かつ十分であることが示される。これより特に  $\pi(A(k)) \subset S(k)$  となることがわかる。

$S$  上の  $k$ -有理点全体のなす集合  $S(k)$  を決定することは, その  $\pi$  による逆像  $\pi^{-1}(S(k))$  を決定することと同等である。そこで, 以下本節の残りの部分では, 集合  $\pi^{-1}(S(k))$  の具体的な表示を求めることを考える。

注意 2.2 で述べたように, 群  $G$  のアーベル多様体  $A = E_1 \times E_2$  への作用は, 楕円曲線  $E_1$  に関しては  $\Gamma$  による translation になっている (部分群  $\Gamma \subset E_1(\bar{Q})$  は自然に  $E_1(\bar{Q})$  に作用する)。このことを手がかりにして, まず楕円曲線  $E_1$  (および群  $\Gamma$  の  $E_1(\bar{Q})$  への作用) に注目することにする。

6°により,  $\Gamma \subset E_1(k)$  は体  $k$  上定義された有限部分群である。従って, 前節で述べた楕円曲線  $E$  および isogeny  $\phi: E_1 \rightarrow E$  として, 共に  $k$  上定義されているようなものがとれる (しかも, これらは  $k$ -同型の差を除いて一意的である)。このとき,  $k$  上  $E \cong E_1/G_1$  であって, 図式

$$\begin{array}{ccc} A = E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E_1 \\ \pi \downarrow & & \phi \downarrow \\ S \cong A/G & & E \cong E_1/G_1 \end{array}$$

において, 多様体および写像は全て  $k$  上定義されている。

写像  $\phi$  が体  $k$  上定義されていることより,

$$E_1(k) \subset \phi^{-1}(E(k)), \quad \phi(E_1(k)) \subset E(k)$$

となることがわかる。また,  $E_1$  と  $E$  は  $k$ -isogenous であるから,

$$\text{rank } E_1(k) = \text{rank } \phi(E_1(k)) = \text{rank } E(k) = \text{rank } \phi^{-1}(E(k))$$

となり, 剰余群

$$\phi^{-1}(E(k))/E_1(k), \quad E(k)/\phi(E_1(k))$$

は共に有限になる. また, これら2つの有限群は  $\phi$  から induce される写像により同型になる.

次の補題は, 集合  $\pi^{-1}(S(k))$  を調べるためには, まず群  $\phi^{-1}(E(k))$  に注目すべきであるということをいっている.

**補題 3.1.**  $P = (P_1, P_2) \in A(\bar{Q})$  に対し,

$$P \in \pi^{-1}(S(k)) \implies P_1 \in \phi^{-1}(E(k)).$$

$P = (P_1, P_2) \in \pi^{-1}(S(k))$  に対し, 点  $P$  の座標を  $k$  につけ加えて得られる体を  $k(P)$  と書く. このとき,  $k(P)$  は一般には,  $k$  とは一致しない. そこで, 体の拡大  $k(P)/k$  を調べるが必要になってくる. あとで示すように,  $k(P)$  は  $k$  に  $P_1$  の座標だけをつけ加えた体  $k(P_1)$  に一致する. よって, 上の補題に基づき,  $\phi^{-1}(E(k))$  に属する点の座標を  $k$  につけ加えて得られる体を調べることにする.

$Q \in \phi^{-1}(E(k))$  に対し, 点  $Q$  の座標を  $k$  につけ加えて得られる体を  $k(Q)$  と書く. このとき, 体の拡大  $k(Q)/k$  に関して次が成り立つ.

**補題 3.2.** (i)  $Q \in \phi^{-1}(E(k))$  に対し,  $k(Q)/k$  は (有限次) ガロア拡大で, 写像

$$\text{Gal}(k(Q)/k) \longrightarrow \Gamma, \quad \sigma \longmapsto Q^\sigma - Q$$

は群の単射準同型である. 従って  $k(Q)/k$  はアーベル拡大で,  $m$  を群  $\Gamma$  の巾指数とすると,

$$\sigma^m = \text{id}, \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(k(Q)/k)$$

が成り立つ.

(ii)  $Q, Q' \in \phi^{-1}(E(k))$  に対して,

$$Q \equiv Q' \pmod{E_1(k)} \implies k(Q) = k(Q').$$

**注意 3.3.**  $v$  を体  $k$  の有限素点で, 群  $\Gamma$  の巾指数  $m$  と素であるようなものとする. このとき, 楕円曲線  $E_1$  が  $v$  で good reduction をもつならば拡大  $k(Q)/k$  において  $v$  は不分岐であることが示される.

次に, 楕円曲線  $E_2$  の方に目を向けることにする.

$Q \in E_1(\bar{Q})$  とする。このとき、補題 3.1 で述べたように、 $E_2(\bar{Q})$  の点  $R$  が存在して  $\pi((Q, R)) \in S(k)$  となるためには、 $Q \in \phi^{-1}(E(k))$  となる必要がある。そこで、このような点  $R$  全体のなす集合を  $E_2\{Q\}$  とおく：

$$E_2\{Q\} = \{R \in E_2(\bar{Q}) ; (Q, R) \in \pi^{-1}(S(k))\}.$$

以下しばらく、集合  $E_2\{Q\}$  の構造を求めることを考える。

$Q \in \phi^{-1}(E(k))$  に対し、注意 2.2 や補題 3.2 で述べた写像

$$\text{Gal}(k(Q)/k) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow \text{Aut}_k(E_2)$$

を合成して、群の単射準同型

$$\xi : \text{Gal}(k(Q)/k) \longrightarrow \text{Aut}_k(E_2), \quad \sigma \longmapsto \xi_\sigma$$

が得られる。この写像  $\xi$  を使って、集合  $E_2\{Q\}$  は次のように表すことができる。

**補題 3.4.** (i)  $Q \in \phi^{-1}(E(k))$  とするとき、

$$E_2\{Q\} = \{R \in E_2(k(Q)) ; R^\sigma = \xi_\sigma(R), \forall \sigma \in \text{Gal}(k(Q)/k)\}.$$

(ii)  $Q, Q' \in \phi^{-1}(E(k))$  に対して、

$$Q \equiv Q' \pmod{E_1(k)} \implies E_2\{Q\} = E_2\{Q'\}.$$

**注意 3.5.** 準同型写像  $\xi$  は 1-cocycle を定める。これに対応して体  $k$  上定義された曲線  $C$  と体  $k(Q)$  上定義された同型写像  $\theta : C \rightarrow E_2$  で、

$$\xi_\sigma = \theta^\sigma \circ \theta^{-1}, \quad \forall \sigma \in \text{Gal}(k(Q)/k)$$

となるものが存在する。(すなわち  $C$  は 1-cocycle  $\xi$  による楕円曲線  $E_2$  の twist である。) このとき、 $\theta$  によって  $C(k)$  の点と  $E_2\{Q\}$  の点との間に 1 対 1 の対応がつけられる。すなわち、 $R \in E_2(\bar{Q})$  とするとき、

$$R \in E_2\{Q\} \iff \theta^{-1}(R) \in C(k)$$

が成り立つ。

上の注意からもわかるように、 $E_2\{Q\}$  は空集合になることもある。また、 $E_2\{Q\} \neq \emptyset$  の場合でも、 $E_2\{Q\}$  は群  $E_2(k(Q))$  の部分集合ではあるが、必ずしも部分群とはな



らない。しかしながら、 $E_2\{Q\}$  がひとつでも点をもつならば、 $E_2\{Q\}$  は  $E_2(k(Q))$  のある部分群に関するひとつの剰余類に一致する。すなわち、次が成り立つ。

**補題 3.6.**  $Q \in \phi^{-1}(E(k))$  に対し、 $E_2\{Q\} \neq \emptyset$  ならば、 $E_2(k(Q))$  の部分群  $E_2^*\{Q\}$  で、

$$E_2\{Q\} = R + E_2^*\{Q\}, \quad \forall R \in E_2\{Q\}$$

となるものが唯ひとつ存在する。特に、 $O \in E_2\{Q\}$  のとき、 $E_2\{Q\}$  は  $E_2(k(Q))$  の部分群になる。

補題 3.4.(i) より、 $P = (P_1, P_2) \in \pi^{-1}(S(k))$  に対して  $k(P) = k(P_1)$  が成り立つことがわかり、次の命題が得られる。これは、超楕円曲面  $S$  上の全ての  $k$ -有理点を得るためには、アーベル多様体  $A$  上の点のうち、 $k$  の有限個の有限次拡大体上定義されているようなものだけを考えれば十分であるということをいっている。

**命題 3.7.** 集合  $\pi^{-1}(S(k))$  の点の座標をつけ加えて得られるような、 $k$  の拡大体の全体

$$\{k(P); P \in \pi^{-1}(S(k))\}$$

は有限集合である。

以上の準備によって、集合  $\pi^{-1}(S(k))$  の次のような表示を得ることができる。

**定理 3.8.**  $k$  を有限次代数体、 $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とする。  $A$ ,  $\pi$  等の記号は上の通りとし、仮定 1°-4° が成り立っているものとする。このとき、集合  $\pi^{-1}(S(k))$  は

$$\pi^{-1}(S(k)) = \coprod_{\substack{Q \in \phi^{-1}(E(k))/E_1(k) \\ E_2\{Q\} \neq \emptyset}} ((Q, R) + E_1(k) \times E_2^*\{Q\})$$

と、 $A(k(Q))$  の部分群  $E_1(k) \times E_2^*\{Q\}$  に関する剰余類の finite disjoint union に表される。ここで、 $R$  は集合  $E_2\{Q\}$  の任意の点である。

**注意 3.9.**  $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(t)} \in \phi^{-1}(E(k))$  を集合

$$\{Q \in \phi^{-1}(E(k))/E_1(k); E_2\{Q\} \neq \emptyset\}$$

の代表系とする。このとき、注意 3.5 で述べたように、各  $Q^{(l)}$  に対応して体  $k$  上定義された楕円曲線  $C^{(l)}$  と体  $k(Q^{(l)})$  上定義された同型写像  $\theta^{(l)}: C^{(l)} \rightarrow E_2$  が存在して、

$$E_2\{Q^{(l)}\} = \theta^{(l)}(C^{(l)}(k))$$

が成り立つ。よって上の式は

$$\pi^{-1}(S(k)) = \prod_{l=1}^t (Q^{(l)} + E_1(k)) \times \theta^{(l)}(C^{(l)}(k))$$

とも書くことができる。

4. 1節で述べた定理の正確な形は次の通りである：

**定理 4.1.**  $k$  を有限次代数体,  $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とし, 3節の仮定 1°-4° が成り立っているものとする。このとき,  $S(k)$  が有限集合でない限り,  $S$  上の任意の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対して,  $M \rightarrow \infty$  のとき,

$$N_{\mathcal{L}}(S(k); M) = cM^{r/2} + O(M^{(r-1)/2})$$

が成り立つ。ここで,

$$r = \text{rank } E_1(k) + \max_{\substack{Q \in \phi^{-1}(E(k))/E_1(k) \\ E_2(Q) \neq \emptyset}} \text{rank } E_2^*\{Q\}$$

であって,  $c$  は  $\mathcal{L}$  の algebraically equivalent class のみによって定まる正の実数である。

**注意 4.2.** 注意 3.9 の記号を使うと, 上の定理における整数  $r$  は

$$r = \text{rank } E_1(k) + \max_{1 \leq l \leq t} \text{rank } C^{(l)}(k)$$

と表すことができる。つまり,  $r$  は体  $k$  上定義された  $t+1$  個の楕円曲線

$$E_1, C^{(1)}, C^{(2)}, \dots, C^{(t)}$$

の  $k$ -有理点のなす群の rank によって決まる定数である。従って, 楕円曲線に関する Birch-Swinnerton-Dyer の予想を仮定すると, 整数  $r$  は上の  $t+1$  個の楕円曲線の  $L$ -函数の  $s=1$  における挙動によって統制されることがわかる。

定理 3.8 から定理 4.1 を導くためには, height function の理論, 特にアーベル多様体上の Néron-Tate height の理論を用いればよい。その結果を簡単にまとめると次のようになる：

**定理 4.3.**  $K$  を有限次代数体,  $A$  を  $K$  上定義されたアーベル多様体とする。  $\mathcal{L}$  を  $A$  上の ample な invertible sheaf とし,  $h_{\mathcal{L}}$  を  $\mathcal{L}$  に関する height function とする。このとき,

(i) 2次形式  $q_{\mathcal{L}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$  と線型写像  $l_{\mathcal{L}} : A(\bar{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$  がそれぞれ唯一とつ存在し, 集合  $A(\bar{\mathbb{Q}})$  上

$$h_{\mathcal{L}} = q_{\mathcal{L}} + l_{\mathcal{L}} + O(1)$$

が成り立つ。(集合  $A(\bar{\mathbb{Q}})$  上の関数  $q_{\mathcal{L}} + l_{\mathcal{L}}$  は invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に関する Néron-Tate height と呼ばれる.)

(ii)  $q_{\mathcal{L}}$  から導かれる実ベクトル空間  $A(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  上の2次形式は非退化かつ正定値である. また,  $M$  を  $\mathcal{L}$  と algebraically equivalent な  $A$  上の invertible sheaf とするとき,  $q_M$  は  $q_{\mathcal{L}}$  と一致する.

(iii) 任意の  $Q \in A(K)$  および任意の部分群  $B \subset A(K)$  ( $\#B = \infty$ ) に対して,  $M \rightarrow \infty$  のとき,

$$\#\{P \in Q + B; h_{\mathcal{L}}(P) \leq M\} = cM^{r/2} + O(M^{(r-1)/2})$$

が成り立つ. ここで,

$$r = \text{rank } B, \quad c = \#B_{\text{tor}} \times \frac{\text{Vol}(\{x \in B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}; q_{\mathcal{L}}(x) \leq 1\})}{\text{Vol}((B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})/(B/B_{\text{tor}}))}$$

とする.

アーベル多様体上の有理点の分布に関する Néron の結果は, 上の定理から直ちに導かれる.

体  $k$  が必ずしも仮定 1°-4° をみたしていなくとも, その適当な有限次拡大  $k'$  は仮定 1°-4° をみたし, そのとき当然ながら,

$$\{P \in S(k); h_{\mathcal{L}}(P) \leq M\} \subset \{P \in S(k'); h_{\mathcal{L}}(P) \leq M\}$$

となっている. また, 定理 4.1 における整数  $r$  はもちろん  $\mathcal{L}$  のとり方にはよっていない. これより次が得られる.

系 4.4.  $k$  を有限次代数体,  $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とする. このとき, 定数  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在して,  $S$  上の任意の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対して,  $M \rightarrow \infty$  のとき,

$$N_{\mathcal{L}}(S(k); M) = O(M^r)$$

が成り立つ.

一般に, 有限次代数体  $k$  上定義された非特異な射影多様体  $V$  および  $V$  上の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対し,

$$Z_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{P \in V(k)} H_{\mathcal{L}}(P)^{-s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

なるディリクレ級数の性質が [1] や [4] の中で研究されている。ここで  $H_{\mathcal{L}} = \exp \circ h_{\mathcal{L}}$  は exponential height である。このとき、上の系より次が得られる。

系 4.5.  $k$  を有限次代数体,  $S$  を  $k$  上定義された超楕円曲面とする。このとき,  $S$  上の任意の ample な invertible sheaf  $\mathcal{L}$  に対して, ディリクレ級数

$$Z_{\mathcal{L}}(s) = \sum_{P \in S(k)} H_{\mathcal{L}}(P)^{-s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

は  $\operatorname{Re} s > 0$  であるような任意の  $s$  に対して (絶対かつ局所一様に) 収束する。

## 参考文献

- [1] V. V. Batyrev et Yu. I. Manin, Sur le nombre des points rationnels de hauteur borné des variétés algébriques, *Math. Ann.* **286** (1990), 27–43.
- [2] E. Bombieri and D. Mumford, Enriques' classification of surfaces in char.  $p$ , II, in *complex analysis and algebraic geometry* (W. L. Baily and T. Shioda eds.), 岩波書店/Cambridge Univ. Press, 1977.
- [3] F. Enriques et F. Severi, Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, *Acta Math.* **32** (1909), 283–392, **33** (1910), 321–403.
- [4] J. Franke, Yu. I. Manin and Yu. Tschinkel, Rational points of bounded height on Fano varieties, *Invent. Math.* **95** (1989), 421–435.
- [5] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [6] 森田康夫, 代数曲面上の有理点について, 代数学シンポジウム報告集, 1989.
- [7] A. Néron, Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, *Ann. of Math.* **82** No.2 (1965), 249–331.
- [8] 佐藤篤, 超楕円曲面上の有理点の分布について, 東北大学修士論文, 1991.
- [9] S. H. Schanuel, Heights in number fields, *Bull. Soc. Math. France* **107** (1979), 433–449.
- [10] J. H. Silverman, The theory of height functions, in *arithmetic geometry* (G. Cornell and J. H. Silverman eds.), Springer-Verlag, New York, 1985.