数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 20-26

可算本の直線で覆うことのできない平面上の点集合について

藤田 博司 (愛媛大学 理学部) (Hiroshi Fujita)

§.0 はじめに

平面上の点集合 A に対して,

$$\mathrm{L}(A) := \min\{\,|\mathcal{L}| : \mathcal{L} \text{ は直線の族で, } A \subseteq \bigcup \mathcal{L}\,\}$$
$$\mathrm{p}(A) := \sup\{\,|F| : F \subseteq A,\ F \text{ はどの直線とも高々2点のみで交わる}\,\}$$

という基数を対応させよう. A が無限集合ならば, 当然のことながら, $\mathrm{p}(A) \leqq \mathrm{L}(A) \leqq \mathfrak{c}$ が成立する (ここで $\mathfrak{c}$ は連続体の濃度). 一般に $\mathrm{p}(A) = \mathrm{L}(A)$ となるならば話は早いが, なかなかそうはいかないようである. 一般の A については次のようなことがわかる. しかしながら, 今回はわれわれはこれらの詳細には立ち入らない.

(1) 選択公理と連続体仮説のもとで, $\mathrm{L}(A) \geqq \omega \implies \mathrm{p}(A) = \mathrm{L}(A)$ がいえる.
(2) 選択公理と Proper Forcing Axiom のもとで, $\mathrm{L}(A) \geqq \omega_1 \implies \mathrm{p}(A) \geqq \omega_1$ がいえる.

一般の場合はあきらめて, もっと具体的な点集合に限定して考察することにする. ここで具体的というのは, "現実に定義可能な集合" とでもいうような意味で述べており, とりあえずはボレル集合, 解析集合などのことと考えておく. このように考えると, $\mathrm{p}(A)$ と $\mathrm{L}(A)$ の関係をもう少し詳しく調べることができる.

(3) A が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 (解析集合) であれば, $\mathrm{L}(A) \leqq \omega$ または $\mathrm{p}(A) = \mathfrak{c}$ が成立する.
(4) A が $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合であれば, $\mathrm{L}(A) \leqq \omega_1$ または $\mathrm{p}(A) = \mathfrak{c}$ が成立する.

ここではこれらの結果について解説し, また関連する結果について述べる. なお特に断らない限り集合論の公理としてはツェルメロ-フランケル集合論 (**ZF**) に従属選択の公理 (**DC**) を加えた公理系を考えることとし, その他の仮定はいちいち表示する.

§.1 ススリン集合の直線による被覆に関する定理

順序数 κ が与えられたものとする. 平面上の κ-ススリン集合とは, 直積空間 $\mathbb{R}^2 \times \kappa^\omega$ の閉集合の $\mathbb{R}^2$ への射影のことである. これはまた, κ^ω の閉集合の連続像と定義することもできる. そのほかにもいろいろな定義がある. この意味で解析集合とは ω-ススリン集合のことである. また$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合はある種の ω_1-ススリン集合として表現される. これらの事実については [Moschovakis, 1980] の第 2 章に詳しく述べられている. 第 0 節の (3) ならびに (4) は, κ-ススリン集合に関する次の定理から導かれる. この定理は [Fujita, 1991] の Theorem 1 に相当する.

定理 1 集合論の内部モデル M と, 平面上の, M 上定義可能な κ ススリン集合 A が与えられたとせよ. もしも A を被覆する M 上定義可能かつ濃度高々 $|\kappa|_M$ の直線族が存在しなければ, A に含まれる完全集合であって, どの直線とも高々2 点のみで交わるものが存在する.

証明は [Fujita, 1991] の第1節にある．また解析集合の場合の結果は [Engelen, Kunen, and Miller, 1987] にあり，それがこの種の結果では最初のものである．この定理において M としてすべての集合のクラス V を用いれば，次の系となる．

系 平面上の κ-ススリン集合 A については $\mathrm{L}(A) \leqq \kappa$ または $\mathrm{p}(A) = \mathfrak{c}$ が成立する．

第0節の (3) と (4) はこの系の特別な場合である．また (4) に関連して次のこともいえる．

定理 2 (a) すべての実数 a について $|\mathbb{R} \cap L[a]| \leqq \omega$ であると仮定する．ここで $L[a]$ は a に相対化された構成可能集合全体のクラスをあらわしている．平面上の $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合 A が高々可算本の直線で覆えなければ，A に含まれる完全集合であって，いかなる直線とも高々2点でしか交わらないようなものが存在する．

(b) ある実数 a について $|\mathbb{R} \cap L[a]| > \omega$ であると仮定する．平面上の$\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合であって，可算本の直線で覆うことはできないが，いかなる完全集合も含まない，というようなものが存在する．したがって (a) における $\mathbb{R} \cap L[a]$ の濃度に関する仮定は必要不可欠である．

この定理2の (a) の証明には定理1において $M := L[a]$, $\kappa := (\omega_1)_{L[a]}$ とおいて，$\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合に関する標準形定理を用いればよい．また (b) は，同じ仮定のもとで円周上に完全集合を含まない非可算 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在するということに注意すればすぐにわかる．ここで触れた $\mathbf{\Sigma}^1_2$ の標準形定理とか，完全集合を含まない非可算 $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合とかについては [Jech, 1978] あるいは [Mansfield and Weitkamp, 1985] をみられよ．

§.2 決定公理との関係

決定公理 (**AD**) は記述集合論において選択公理よりも好ましい諸結果をもたらす．特に近年になって，実数から構成可能な集合の全体のクラス $L(\mathbb{R})$ の fine structure との関連が注目され，新しい展開を見せている．決定公理をめぐる理論については [Moschovakis, 1980] にすぐれた概説がある．その後現在に至るまでに得られた膨大な結果については系統的に解説した書物はないが，“Cabal Seminar” と題されるレクチャーノート・シリーズに得られた結果の大部分が報告されている (Springer L. N. M. #689, 839, 1019, 1333, etc.) ここでは決定公理と第1節の定理1との関連から，次の定理を証明することにする．これは A. S. ケクリスらの結果である．

定理 3 [Dougherty, Jackson, and Kechris, unpublished] 決定公理 **AD** と，実数からの構成可能性の公理 $V = L(\mathbb{R})$ を仮定する．平面上の任意の集合 A について，A が可算本の直線で覆えるか，あるいは A に含まれる完全集合でいかなる直線とも高々2点でしか交わらないようなものが存在する．

この定理は $L(\mathbb{R})$ に属するススリン集合に関するより一般的な定理と，定理1を組み合わせることで証明される．このより一般的な定理とは，次の2つの定理である．

定理 [Kechris and Solovay, 1985] $V = L(\mathbb{R})$ と仮定する．実数の集合に関する $\mathbf{\Sigma}^2_1$-式が解をもてば，$\mathbf{\Delta}^2_1$ 集合を解にもつ．(これを自然数の集合に関する Σ^1_2-式についての近藤–アディソンの Basis Theorem と比較せよ．)

定理 [Martin, and Steel, 1983] **AD** と $V=L(\mathbb{R})$ を仮定する．実数の集合がある順序数 κ について κ-ススリン集合であるための必要十分条件は，それが $\mathbf{\Sigma}^2_1$ 集合であることである．

用語の解説をしておくと，3 階算術の論理式であって，3 階の量化子 (つまり Power($\mathbb{R}$) にわたる $\exists$ や $\forall$) として $\exists$ を含むかも知れないが，$\forall$ を一個も含まないものを Σ^2_1-式といい，逆に 3 階の量化子として $\forall$ を含み，$\exists$ を含まないものを Π^2_1-式という．これらに定数項として実数のパラメータを許したものをそれぞれ$\mathbf{\Sigma}^2_1$-式，$\mathbf{\Pi}^2_1$-式といい，実数の集合であって$\mathbf{\Sigma}^2_1$-式あるいは $\mathbf{\Pi}^2_1$-式を定義式として定義され得るような集合のことをそれぞれ $\mathbf{\Sigma}^2_1$ 集合，$\mathbf{\Pi}^2_1$ 集合という．そして$\mathbf{\Sigma}^2_1$ 集合であって同時に $\mathbf{\Pi}^2_1$ 集合でもあるような集合を$\mathbf{\Delta}^2_1$ 集合というのである．さて，両定理を組み合わせると次の事実が得られる．

補題 **AD** と $V=L(\mathbb{R})$ を仮定する．実数の集合に関する $\mathbf{\Pi}^2_1$-式が，すべてのススリン集合によってみたされれば，その式は実数のあらゆる集合によってみたされる．

さてわれわれの証明したい結果は，平面上の任意の集合 A について，“A は可算本の直線で覆えるか，あるいはいかなる直線とも高々2 点のみで交わるような完全集合を含む” ということが成立することであった．この “ ... ” の部分を，A を自由変数とする論理式で表現したものを $P(A)$ と書こう．$P(A)$ は 3 階算術の論理式とみて解析的 (3 階の $\forall$, $\exists$ を含まない) であるから，確かに$\mathbf{\Pi}^2_1$-式でもある．そこで，示すべきことは

$$(\mathbf{AD}+V=L(\mathbb{R}) \text{ のもとで) 平面上の任意のススリン集合 } A \text{ について } P(A) \text{ が成立する．}$$

ということになる．以下，このことの証明．

平面上の集合 A が順序数 κ について κ-ススリン集合であるものとする，κ は基数であると考えてよい．平面 $\mathbb{R}^2$ の，X-Y 両座標とも無理数であるような点の全体は ω^ω と同相で，その意味で $\omega^\omega\subset\mathbb{R}^2$ とみると $\mathbb{R}^2-\omega^\omega$ は可算本の直線の和集合であるから，以下の議論においては $A\subseteq\omega^\omega$ と仮定してもよい．さて A がκ-ススリンであることから，A は $\omega^\omega\times\kappa^\omega$ の閉集合 F の射影として表現される．すなわち，

$$A:=\{\,x\in\omega^\omega:\exists f\in\kappa^\omega\,(x,f)\in F\,\}$$

となっている．いま $T:=\{\,(x{\restriction}n,f{\restriction}n):(x,f)\in F\,\}$ とおき，また $T(x):=\{\,f{\restriction}n:(x,f)\in F\,\}$ とおくと，$T(x)$ は T と x から計算できて，

$$\begin{aligned} x\in A &\iff T(x) \text{ は wellfounded tree をなさない} \\ &\iff \exists f\in\kappa^\omega\,\forall n\in\omega\,[\,f{\restriction}n\in T(x)\,] \\ &\iff \neg\exists\phi:(T(x),\supset)\to(\mathrm{Ord},<):\text{順序保存} \end{aligned}$$

となる．この式により，A は T に相対化された構成可能集合のクラス $L[T]$ 上で定義可能である．

われわれの定理 1 が教えるところによると，もしも A がいかなる直線とも高々2 のみで交わる完全集合を含まないならば，$L[T]$ で定義可能な直線の，濃度高々 κ の族があって，A はその和集合に含まれる．そ

のような直線の族は整列可能な族である．もしも相異なる非可算本の直線の整列可能な族があれば，相異なる非可算個の実数の整列可能な族が存在することになって，“実数の整列集合は可算集合に限る”という決定公理の初等的な帰結と矛盾することになる．したがって，この A を覆う直線の族は可算族でなければならない．これで $P(A)$ の成立することが示され，定理 3 の証明ができたことになる．

§.3 ソロヴェイのモデルとの関係

ここでの目標は次の定理の証明を与えることである．

定理 4 [Fujita, 1991] ソロヴェイのモデル [Solovay, 1970] の中で次のことが成立している．すなわち平面上の任意の点集合 A は，可算本の直線によって覆われているか，あるいは A はいかなる直線とも高々2点のみを共有するような完全集合を含む．

まずはソロヴェイのモデルについて説明しなくてはならない．いま M を，選択公理を含む集合論の可算標準モデル，$\kappa \in M$ を M の意味での到達不能基数であるものとする．順序数 λ に対して，$\mathbb{P}^\lambda$ は

(1) p: $\mathrm{dom}(p) \to \lambda$ であって，$\mathrm{dom}(p)$ は $\omega \times \lambda$ の有限部分集合である．
(2) $(n, \xi) \in \mathrm{dom}(p)$ に対し必ず $p(n, \xi) < \xi$ が成立する．

を満たす p 全体の集合を表す．$\kappa \in M$ で，M は集合論のモデルであることから $\mathbb{P}^\kappa \in M$ であることはすぐにわかる．M の $\mathbb{P}^\kappa$ による generic 拡大 $M[G]$ (これを M のレヴィ拡大という) においては $\mathfrak{c} = \omega_1 = \kappa$ が成立する．問題のソロヴェイのモデルとは，$(\mathrm{HOD}(\mathrm{Ord}^\omega))^{M[G]}$ すなわち，$M[G]$ の中で (遺伝的に) 順序数の可算列をパラメータとする式によって定義可能であるような集合の全体のクラスである．このモデルを N と表記することにする．このソロヴェイのモデルはなによりもまず次の結果を示すために導入されたものである．

定理 [Solovay, 1970] N は **ZF** 集合論と従属選択の公理 **DC** のモデルであり，その中では次のようなことが成立する．

(i) 実数のあらゆる集合がルベーグ可測でベールの性質をもつ．
(ii) 実数のいかなる集合も，可算であるかまたは完全集合を含む．
(iii) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A が与えられていて，$\forall x\, \exists y\, (x, y) \in A$ を満たしているものとする．このとき，ほとんどすべての $x \in \mathbb{R}$ について $(x, f(x)) \in A$ が成立するようなボレル可測関数 f を見いだすことができる．

次の補題はソロヴェイのこの定理を証明するために考え出されたもので，われわれもこれを利用する．

補題 1 実数の集合 A に関する解析的な式 $P(A)$ については，

$$\forall A \in \mathrm{Power}(\mathbb{R}) \cap N\, [\, N \models P(A) \iff M[G] \models P(A)\,]$$

が成立する．

補題 2 集合 $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \in N$ に対して, 集合論の式$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ および順序数の可算列 $s \in N$ をうまく選べば,

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} : M[s, x] \models \varphi(x, s) \,\}$$

となる. いいかえればこのとき A は 式 φ によって $M[s]$ 上で定義可能である.

補題 3 順序数の可算列 $s \in M[G]$ について, κ は $M[s]$ においても到達不能基数でありしかも $M[s]$ 上の $\mathbb{P}^{\kappa}$-generic な集合 G' をうまく選べば,

$$M[G] = M[s][G']$$

が成立する. いいかえれば $M[G]/M[s]$ なる拡大も $M[G]/M$ と同様のレヴィ拡大である.

これらの補題ならびにソロヴェイの定理そのものの証明については [Jech, 1978] をみよ. われわれの定理 4 の証明にはソロヴェイの定理の (ii) の証明のアイディアを応用する.

補題 1 により, $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な平面上の点集合 A について, $M[G]$ の "中で" 定理の結論が成り立つことをいえばよいが, 補題 2 よりそのような集合 A はある $M[s]$ 上で定義可能な集合である. また補題 3 によりその $M[s]$ の代りに M について考えても一般性を失わない. そこで, いうべきことは次のことに帰着する.

証明すべき命題 A は $M[G]$ における平面上の点集合であって, なにか適当な集合論の式 $\varphi(\mathbf{x})$ によって

$$A = \{\, x \in \mathbb{R}^2 : M[x] \models \varphi(x) \,\}$$

と表されるようなものだとする. もしも A が $M[G]$ において可算本の直線によって覆われえないならば, ($M[G]$ において) A の完全部分集合であっていかなる直線とも高々2 点のみで交わるようなものがある.

いくらか用語を定めておく. $M[G]$ の中で考えることにして, 平面上の直線 ℓ が M-直線であるということを, それが M で定義可能であること, または同じことであるが M に属する少なくとも 2 点を通る直線であることと定める. また, $\mathbb{P}^{\xi}$ ($\xi < \kappa$) の部分集合 $F_1, \ldots, F_n$ が M 上互いに $\mathbb{P}^{\xi}$-genericであるとは, 各 F_i が $M[F_1, \ldots, F_{i-1}]$ 上の $\mathbb{P}^{\xi}$-generic 集合であること, あるいは同じことであるが, 積集合 $F_1 \times \cdots \times F_n$ が M 上 $(\mathbb{P}^{\xi})^n$-generic であることと定める.

以下の議論は $M[G]$ の中で, つまりあたかも $M[G]$ が全世界であると想って行なわれる. したがってとくに断らなくてもすべての集合は $M[G]$ の集合のことである. 容易にわかるように, $M[G]$ において M-直線は可算本しかないので, それらだけで A を覆うことはできない. そこで A に属する点 a でいかなる M-直線にも含まれないものが存在する. $\dot{a} \in M$ をこの点 a の $\mathbb{P}^{\kappa}$-名前だとする. つまり $a = \dot{a}[G]$ となっているものとする. このとき, 条件 $p_0 \in G$ を次の式を強制するように取ることができる.

(*) "$(M[\dot{a}] \models \varphi(\dot{a}))$ & ($\dot{a}$ は M-直線に含まれない)"

順序数 $\delta < \kappa$ を十分大きく取ることによって，$p_0 \in \mathbb{P}^\delta$，$\dot{a}$ は $\mathbb{P}^\delta$-名前でありかつ p_0 が $\mathbb{P}^\delta$ の意味で (*) を強制していると思ってよい．$M[G]$ の中では δ は可算順序数であって，M 上の $\mathbb{P}^\delta$-generic 集合はたくさん存在する．とくに上記の強制条件 p_0 を含むような $\mathbb{P}^\delta$-generic 集合も多く存在する．次の簡単な補題がこの証明のキーポイントである．

<u>補題 4</u> p_0, $\dot{a}$, δ を上記のとおりとする．F_1, F_2, ならびに F_3 は p_0 を含み M 上互いに $\mathbb{P}^\delta$-generic な集合であるものとすれば，$\dot{a}[F_1]$, $\dot{a}[F_2]$, ならびに$\dot{a}[F_3]$ は A に属する，同一直線上にない 3 点である．

$\dot{a}[F_i]$ $(i = 1, 2, 3)$ が A に属する互いに相異なる 3 点を表すということは，p_0 が (*) を強制することによってすぐに確かめられる．これらが一直線 ℓ 上にあった仮定しよう．ℓ は座標原点 O を通らないと仮定してよい，原点 O からこの ℓ に下ろした垂線の足を P とすると，P は $\dot{a}[F_1]$ と$\dot{a}[F_2]$ が与えられればそれで定まる．O は無論のこと M に属するので，P は $M[F_1, F_2]$ に属することがわかる．同様にして P は $M[F_2, F_3]$, また $M[F_3, F_1]$ に属することもわかる．ところが，F_i $(i = 1, 2, 3)$ が M 上互いに generic なので

$$M[F_1, F_2] \cap M[F_2, F_3] \cap M[F_3, F_1] = M$$

となり，P は M に属することがわかる．もとの直線 ℓ は O と P から計算すれば求められるので M-直線であることになる．しかしながら，p_0 は いかなる M-直線も $\dot{a}$ を通らないことを保証する．F_i は p_0 を含むので，これは不合理である．これで補題 4 は証明された．

$M[G]$ の中で，M 上の $\mathbb{P}^\delta$-generic 集合全体は完備で可分な距離空間をなし，その位相は各 $p \in \mathbb{P}^\delta$ に対する $\{ F : p \in F \}$ の形の集合全体によって生成される．いまこの空間を仮に X と表すことにすると，M 上互いに generic な集合の 3 つ組 (F_1, F_2, F_3) の全体は X^3 において補疎集合 (comeager set) をなす．それゆえ，ベールのカテゴリー定理の証明をしかるべく精密化することにより次の補題を証明することができる．

<u>補題 5</u> 空間 X の部分集合 C で次の条件を満たすようなものがある．

(1) C はカントル集合 2^ω と同相である．

(2) C から相異なる 3 点 F_1, F_2, F_3 をとれば，これらは M 上互いに $\mathbb{P}^\delta$-generic である．

(3) すべての $F \in C$ について，$p_0 \in F$ が成立する．

この部分集合 C の上で，写像 $h\colon C \to \mathbb{R}^2$ を $h(F) = \dot{a}[F]$ によって定める．$\dot{a}[F]$ の値は F に含まれる強制条件をみれば任意の精度で近似できるのでこの h は連続写像である．また補題 4 より C の相異なる 3 点は h によって A の同一直線上にない 3 点に写される．それゆえ h は単射であって，その像 $h``C$ もまたカントル集合と同相である．しかもそれは A の部分集合であって，その相異なる 3 点は同一直線上にはない．このようにして A からいかなる直線とも高々2 点でしか交わらないような完全集合を取り出すことができた．これがまさにわれわれの目標であった．これで定理 4 は証明された．

参考文献

F. v. Engelen, K. Kunen, and A. W. Miller, *Two remarks about analytic sets,* Springer L. N. M., #1401, pp.68–72, (1987)

H. P. Fujita, *Mansfield and Solovay type results on covering a plane set by lines,* to appear in Nagoya Math. Jour., vol.124, (1991)

T. Jech, "Set Theory," Academic Press, (1978)

A. S. Kechris and R. M. Solovay, *On the relative consistency strength of determinacy hypotheses,* Trans. A. M. S., vol.290, No.1, pp.179–211, (1985)

R. Mansfield and G. Weitkamp, "Recursive Aspects of Descriptive Set Theory," Oxford, (1985)

D. A. Martin, and J. R. Steel, *The extent of scales in $L(\mathbb{R})$,* Springer L. N. M., #1019, pp.86–96, (1983)

Y. N. Moschovakis, "Descriptive Set Theory," North–Holland, (1980)

R. M. Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,* Ann. of Math., vol.92, pp.1–56, (1970)